Pasos para obtener la Regla del trapecio simple

$$I=\int_a^b f(x)dx \to f(x)\approx p_1(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$\forall x\ \in [a,b]$$

$$\begin{aligned}
I=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx &= \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)dx \\
&=\frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)dx+\frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx \\
&=\frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{x^2}{2}-bx\right)_a^b+\frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)_a^b \\
&=\left(\frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{b^2}{2}-b^2\right)-\left(\frac{a^2}{2}-ba\right)\right)+\frac{f(b)}{b-a}\left(\left(\frac{b^2}{2}-ab\right)-\left(\frac{a^2}{2}-a^2\right)\right) \\
&=\left(\frac{f(a)}{a-b}\left(-\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}+ba\right)+\frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}-ba\right)\right) \\
&=\frac{f(a)}{a-b}\left(-\frac{1}{2}\right)(a-b)^2)+\frac{f(b)}{b-a}(\left(\frac{1}{2}\right)(b-a)^2 \\
&=f(a)(a-b)\left(\frac{-1}{2}\right)+f(b)(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)=(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right) \\
&=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))
\end{aligned}$$