Analysis Übungen

Hausübung für 1.4. (Gruppe 1)/2.4. (Gruppe 2, 3)

Definitionsmenge einer Funktion

Bestimmen Sie die Definitionsmengen der folgenden Funktionen:

22. $f(x) = \log_3(2x - \sqrt{x^2 - 1})$

23. $g(x) = \sqrt{\sin(x) - 1}$

24. $h(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x}{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

25. $a(x) = \arcsin\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$

Umkehrfunktion

26. Begründen Sie, warum die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ nicht invertierbar ist. Finden Sie die Einschränkungen der Funktion so, dass sie invertierbar ist und finden Sie eine Formel für ihre Umkehrung. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Bildmenge der Umkehrung mit den gefundenen Einschränkungen.

27. Geben Sie ein Intervall an, in dem die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos(3x) + 2$ invertierbar ist, und suchen Sie den Ausdruck ihrer Umkehrung.

Stetigkeit, Differenzierbarkeit

28. Verwende die **Definitionen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit** um zu bestimmen, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ stetig bzw. differenzierbar sind. Falls eine Funktion differenzierbar ist, was ist deren Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$? (Skizziere diese Funktionen per Hand oder z.B. mit `graphsketch.com`. Empfohlene Achseneinstellungen zu g: X Range, Y Range : ± 0.1; zu h: X Range: ± 0.1, Y Range : ± 0.01 .)

    (a) $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,, \end{cases}$$

    (b) $$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,, \end{cases}$$

    (c) $$h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x) & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,. \end{cases}$$

    (d) Gibt es eine Funktion, die differenzierbar ist, deren Ableitungsfunktion aber unstetig ist? (Wenn nicht, warum nicht ? Wenn ja, zeige ein Beispiel.)

29. AN 6.1 a), b), AN 6.2 d). Löse diese Aufgaben laut den gegebenen Instruktionen und skizziere die Funktionsgraphen per Hand oder z.B mit `graphsketch.com`.

30. (a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch die folgende Formel definiert:

    $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases} \qquad \text{(Dirichlet-Funktion).}$$

    An welchen Stellen ist die Dirichlet-Funktion stetig, an welchen Stellen ist sie unstetig?

(b) Sei

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Stelle die Funktion graphisch dar, soweit es möglich ist.

Zeige, dass die Funktion g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, an jeder anderen Stelle unstetig ist.

Ist die Funktion g an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

(c) Sei

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Stelle die Funktion graphisch dar, soweit es möglich ist.

Zeige, dass die Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist.

31. Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-2x^2}}{3x} & \text{wenn } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \\ ax + b & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) stetig an der Stelle $x_0 = 0$?

(b) differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$?

Hinweis: Sie können

ENTWEDER mit Hilfe der **Regel von de l'Hospital**

ODER mit der üblichen Rechentechnik für die Form $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ arbeiten.