Analysis

Hausübung 25.03. (Gruppe 1)/26.03. (Gruppen 2, 3)

Lösungen

10. (a) $b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 \approx 2.986 < 3$.

    (b) $b_n \leq b_{n-1} \iff 1 + \frac{1}{n} \leq \sqrt[n+1]{b_{n-1}} = G$ für n Kopien von $1 + \frac{1}{n-1}$ und einmal 1. Für diese Größen ist das harmonische Mittel $H = \frac{n+1}{1+n(1+\frac{1}{n-1})^{-1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, was die Behauptung zeigt.

    (c) $a_n < (1 + \frac{1}{n})^n(1 + \frac{1}{n}) = b_n \leq 3$ für $n \geq 5$ wegen (a), und $a_n < 3$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ durch direktes Nachrechnen. Also existiert der Grenzwert der isotonen und beschränkten Folge a_n; er wird üblicherweise bezeichnet als Eulersche Zahl e.

    (d) $0 \leq b_n - a_n = \frac{1}{n}a_n \leq \frac{3}{n} \to 0$ mit $n \to \infty$, also $b_n = b_n - a_n + a_n \to 0 + e = e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

11. Wir wissen, dass $\frac{1}{n} \to 0$ konvergiert, und auch dass $(-1)^n$ divergiert. Also kann wegen des Summensatzes die Summe dieser beiden Folgen nicht konvergieren.

12. Fallunterscheidung: Fall $\ell = 0$, dann zeigt $|(-1)^n d_n| = |d_n| \to \ell = 0$ dass $(-1)^n d_n \to 0$. Fall $\ell \neq 0$: dann divergiert $(-1)^n \ell$ (Multiplikations/Divisionssatz), und $|(-1)^n d_n - (-1)^n \ell| = |d_n - \ell| \to 0$, sodass wegen des Summensatzes $(-1)^n d_n$ divergieren muss. Diese Folge hat tatsächlich zwei Häufungspunkte, nämlich $-\ell$ und $+\ell$.

13. Zuerst beachte $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \to 1$ wegen Aufgabe 7. Also folgt aus dem Vergleichskriterium $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Da nun $1 \leq \log n \leq n$ für alle $n \geq 3$ gilt, erhalten wir

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n \log n} \leq \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 .$$

Die ganz links und die ganz rechts stehende Folge konvergieren beide gegen 1 (die rechte gegen $1^2 = 1$ nach dem Multiplikationssatz) mit $n \to \infty$, weshalb das Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sqrt[n]{n \log n}$ gegen 1 garantiert.

14. Zwei Lösungswege: entweder die Theorie der Reihen mit dem Wissen, dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert und also das Reihenglied $\frac{a^n}{n!}$ notwendigerweise gegen Null geht mit $n \to \infty$. Oder direkt mittels der Beobachtung, dass für alle $n \geq N = \lceil 2a \rceil$

$$0 \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2}\frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}\frac{a^N}{N!} = \frac{(2a)^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty\,,$$

was übrigens seinerseits die Konvergenz der Exponentialreihe mittels des Quotientenkriteriums zeigt (benütze das Majorantenkriterium und die Konvergenz der geometrischen Reihe).

15. Wir zeigen $\frac{n!}{n^n} \to 0$ mit $n \to \infty$ mittels des Vergleichskriteriums:

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdots n \cdot n} = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty\,.$$

16. Benütze den Additionssatz für Reihen und die geometrische Reihenformel $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}\,.$$

17. Da $\log n \to \infty$ gilt, wissen wir $\frac{1}{\log n} \to 0$ mit $n \to \infty$, und daher mittels des Konvergenzkriteriums von Leibniz, dass die erste Reihe konvergiert. Hingegen konvergiert $\frac{1}{\sin n}$ nicht gegen Null, da ja $|\frac{1}{\sin n}| \geq \frac{1}{1} = 1$ für alle n. Nun besagt das Konvergenzkriterium von Leibniz, dass die zweite Reihe divergiert.

18. Betrachte den Quotient zweier aufeinander folgender Reihenglieder:

$$\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \Big/ \frac{(2n)!}{[n!]^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+5n+2}{n^2+2n+1} \to 4 > 1\,,$$

also divergiert die erste Reihe aufgrund des Quotientenkriteriums. Die Quotienten der Glieder der zweiten Reihe lauten

$$\frac{(n+1)!(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!(2n)}{n^n} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1\,,$$

also konvergiert die zweite Reihe, wieder wegen des Quotientenkriteriums. Zusatzfrage nach dem Hinweis: wir wissen $2 < (1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} < 3$ für alle $n \geq 5$ aus den Beispielen 8 und 10.

19. (a) Betrachte die Funktion $f(x) = ||x|-1|-|x|$. Da $f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, gilt $Dom_f = \mathbb{R}$. Wann immer der Absolutbetrag

$$|x|= \begin{cases} x \quad \text{for } x \geq 0\,, \\ -x \quad \text{for } x < 0\,. \end{cases}$$

involviert ist, kann man dessen Definition benützen, um mit Fallunterscheidungen zu arbeiten. In unserem Fall also

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|-x & \text{for } x \geq 0\,, \\ |-x-1|+x & \text{for } x < 0\,. \end{cases}$$

Speziell haben wir $f(0) = 1$. Weitere Anwendung der Fallunterscheidung mittels der Definition des Absolutbetrags liefert nun

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \geq 1\,, \\ -2x+1 & \text{for } 0 < x < 1\,, \\ 2x+1 & \text{for } -1 < x \leq 0\,, \\ -1 & \text{for } x \leq -1\,. \end{cases}$$

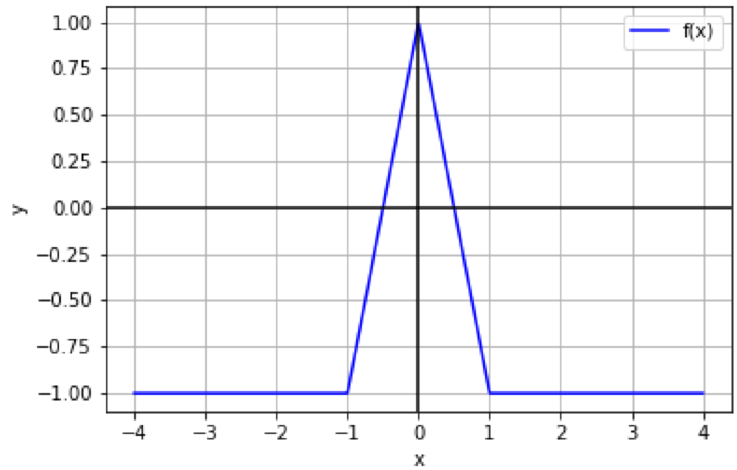

Figure 1: Graph der Funktion $f(x)$ in Bsp.19(a) mittels Python.

(b) Betrachte nun die Funktion $f(x) = |1 - |x||$. Man kann wie oben mit Fallunterscheidungen arbeiten. Hier geht es allerdings etwas einfacher: wieder ist $Dom_f = \mathbb{R}$ und auch $Img_f = \mathbb{R}^+$, da jede positive Zahl Wert des Absolutbetrags sein kann. Definiere die Funktion $g(x) = 1 - |x|$ und beachte $f(x) = |g(x)|$. Wenn wir die Funktion $g(x)$ zeichnen, wird $f(x)$ mit $g(x)$ übereinstimmen falls $g(x) \geq 0$ ist, und mit $-g(x)$ falls $g(x) < 0$:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } \; g(x) \geq 0\,, \\ -g(x) & \text{for } \; g(x) < 0\,. \end{cases}$$

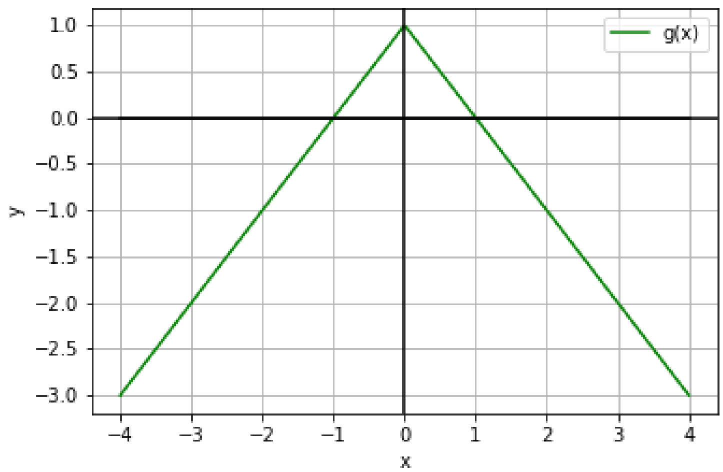

Figure 2: Graph der Funktion $g(x)$ in Bsp.19(b) mittels Python.

Also müssen wir den Graphen der Funktion $g(x)$ nur geeignet an der x-Achse spiegeln, das ist die Multiplikation mit (-1), um den Graphen von $f(x)$ zu erhalten:

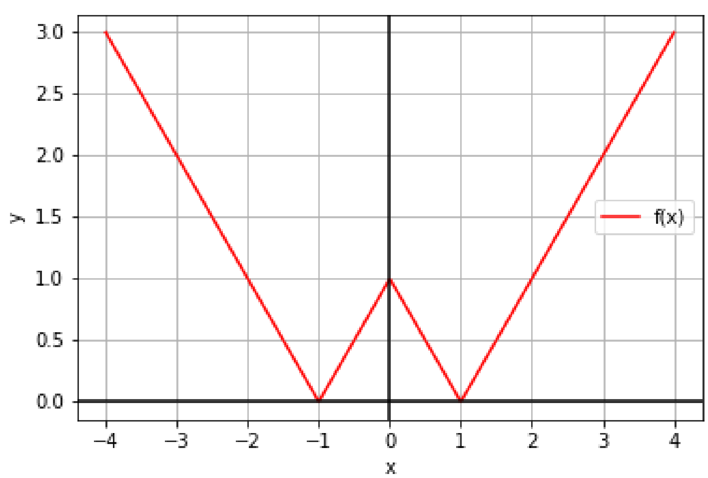

Figure 3: Graph der Funktion $f(x)$ in Bsp.19(b) mittels Python.

20. (a) Wenn f und g gerade Funktionen sind, gilt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \overset{(*)}{=} f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)\,,$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \overset{(*)}{=} f(-x) \cdot g(-x) = (f \cdot g)(-x)\,,$$

wobei wir in $(*)$ die Definition einer geraden Funktion verwendeten.

(b) Sei nun f eine gerade und g eine ungerade Funktion, also

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in Dom_f\,, \qquad g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in Dom_g\,.$$

Dann ist

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)\,.$$

21. (a) Sei $f(x) = \log(1 + x^2)$ die gegebene Funktion. Da der input des Logarithmus' nie kleiner als Eins sein kann, kann f nie negativ werden. Also ist eine untere Schranke für f durch $y = 0$ gegeben, sie wird erreicht genau dann, wenn $x = 0$. Also gilt

$$f(x) \geq f(0) = 0\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Andererseits wächst die Logarithmusfunktion über alle Grenzen wenn ihr input gegen Unendlich strebt, was mit $x \to \infty$ auch auf $1 + x^2 \to \infty$ zutrifft. Also kann es keine Konstante $M \in \mathbb{R}^+$ geben mit

$$f(x) \leq M, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Sei $f(x) = e^{-|x-\mu|}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Die Exponentialfunktion nimmt nur positive Werte an, also gilt $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Der input des Exponentialausdrucks ist immer negativ oder Null, also können wir die strikte Isotonie der Exponentialfunktion benützen, um zu zeigen, dass eine obere Schranke existiert, die genau dann erreicht wird, wenn $x = \mu$ ist, also

$$f(x) = e^{-|x-\mu|} \leq e^0 = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$