Analysis

Hausübung 01.04. (Gruppe 1)/02.04. (Gruppen 2, 3)

Lösungen

22. Der Definitionsbereich von f besteht aus allen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$2x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 - 1 \geq 0\,.$$

Also müssen wir folgendes System von Ungleichungen lösen:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 4x^2 > x^2 - 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > -\frac{1}{3} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > -\frac{1}{3} \\ x \geq 1\,. \end{cases}$$

Da dieses System für alle $x \geq 1$ erfüllt ist, erhalten wir $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ or $Dom_f = [1, +\infty)$.

23. Um den Definitionsbereich von g zu finden, bemerken wir, dass die Ungleichung $\sin(x) \geq 1$ nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = 1$ gelten kann, also für $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Für solche x haben wir $g(x) = 0$.
Also ist $Dom_g = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

24. Die Definitionsmenge von h besteht aus allen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \frac{x^2+2x}{x-1} \geq 0 & (A) \quad \text{und} \\ x^2 - 1 > 0\,. & (B) \end{cases}$$

Sei $h_1(x) := \frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{N(x)}{D(x)}$; wir bestimmen jene $x \in \mathbb{R}$ mit $h_1(x) \geq 0$, um die erste Ungleichung des obigen Systems zu erfüllen. Da h_1 der Quotient aus N und D ist, gilt

$h_1(x) > 0$ falls $N(x)$ und $D(x)$ das gleiche Vorzeichen haben, also entweder beide positiv oder beide negativ sind. Ausserdem ist $h_1(x) = 0 \iff N(x) = 0$. Nun gilt

$$N(x) = x(x+2) \geq 0 \implies (x \geq 0 \wedge x \geq -2) \vee (x \leq 0 \wedge x \leq -2) \implies x \leq -2 \vee x \geq 0\,.$$

und ähnlich $N(x) < 0 \iff -2 < x < 0$. Weiters ist $D(x) < 0 \iff x < 1$ und

$$D(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1\,.$$

Kombination der Bedingungen an Zähler und Nenner zeigt, dass (*A*) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$-2 \leq x \leq 0 \vee x > 1\,. \qquad (C)$$

Beachte, dass die Ungleichung in (*B*) erfüllt ist für alle x mit $x < -1 \vee x > 1$. Im Verein mit Bedingung (*C*) erhalten wir

$$Dom_h = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < -1 \ \vee \ x > 1\} = [-2, -1) \cup (1, +\infty)\,.$$

25. Sei $a(x) = \arcsin\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$. Die Arcussinusfunktion ist definiert auf $[-1, 1]$, also kann der Nenner $x - 2$ nicht Null sein und

$$Dom_a = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : -1 \leq \frac{2x-2}{x-2} \leq 1\right\}\,. \tag{1}$$

Isolation von x in (1) zeigt, dass $x > 2$ unmöglich ist, sonst wäre nämlich $2x - 2 \leq x - 2$ wegen der rechten Ungleichung, also $x < 0$. Andererseits sind im Fall $x < 2$ die Ungleichungen in (1) äquivalent zu den zwei Bedingungen $2 - x \geq 2x - 2 \geq x - 2$ die wieder durch Isolation von x schließlich zu $x \in [0, \frac{4}{3}]$ führen.

26. Die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5$ ist nicht auf ihrem Definitionsbereich invertierbar, denn sie ist dort nicht injektiv, da $f(1) = f(3) = 6$; ihr Graph ist eine Parabel mit Symmetrieachse $x = 2$ und Scheitel im Punkt $V = (2, 5)$. Jeder Teil auf einer Seite der Symmetrieachse entspricht einer strikt monotonen Funktion. Also sind zwei invertierbare Einschränkungen von f gegeben durch

$$f_1 : (-\infty, 2] \to [5, +\infty)\,, \qquad f_2 : [2, +\infty) \to [5, +\infty)\,.$$

Hier haben wir die Bildmenge ebenfalls eingeschränkt, um f_1 and f_2 beide surjektiv zu machen, damit sind beide bijektiv, also invertierbar. Nun müssen wir die folgenden Gleichungen nach x auflösen, wobei $y \in [5, +\infty)$ ein beliebiger Bildwert ist:

$$x^2 - 4x + 9 - y = 0 \implies x = 2 \pm \sqrt{y - 5}\,.$$

Also gilt

$$f_1^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y-5}\,, \qquad f_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-5}\,, \qquad y \in [5, +\infty)\,.$$

27. Wir haben $Dom_f = \mathbb{R}$, und damit eine Funktion invertierbar ist, muss sie sowohl injektiv als auch surjektiv sein. Aber die Kosinusfunktion ist nicht injektiv auf $\mathbb{R}$, denn für ein (sogar für jedes) $y \in [-1, 1]$ gibt es mehrere (sogar unendlich viele) $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$. Also müssen wir den Definitionsbereich einschränken, um Injektivität zu erhalten.
Anhand des Funktionsgraphen des Kosinus können wir ein solches Intervall der Injektivität als $I = [0, \pi]$ wählen, wo eine eineindeutige Relation zwischen x und $y = f(x)$ herrscht. Dies bedeutet in unserem Fall

$$3x \in [0, \pi] \implies x \in [0, \pi/3]\,.$$

Da f auch nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$ ist, betrachten wir stattdessen die Bildmenge: da $\cos(3x) \in [-1, 1]$ für alle $x \in [0, \pi/3]$ ist, haben wir

$$0 \le 2\cos(3x) + 2 \le 4, \forall x \in [0, \pi/3]\,.$$

Also ist $Im(f) = [0, 4]$ und die Funktion $f : [0, \pi/3] \to [0, 4]$ ist nun invertierbar mit Inverser $f^{-1} : [0, 4] \to [0, \pi/3]$. Die Formel für f^{-1} ergibt sich wieder als Lösung einer Gleichung mit fixem Bildwert $y \in [0, 4]$:

$$y = 2\cos(3x) + 2\,.$$

Auflösen nach x ergibt

$$y - 2 = 2\cos(3x) \implies \cos(3x) = \frac{y-2}{2} \implies x = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{y-2}{2}\right)\,.$$

Damit erhalten wir die Formel für f^{-1}:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{y-2}{2}\right), \qquad \text{für alle } y \in [0,4].$$

28. (a) $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig (und daher auch nicht differenzierbar).

Wir zeigen, dass die Funktion bei $x_0 = 0$ eine nicht hebbare Unstetigkeitsstelle besitzt.

(Siehe auch Fall Nr. 4 bei Klassifizierungen von Unstetigkeitsstellen im Artikel

https://de.wikipedia.org/wiki/Unstetigkeitsstelle)

Sei $x_k = \frac{1}{k \cdot \pi}$. Die Folge (x_k) ist eine Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Entlang der Folge (x_k)

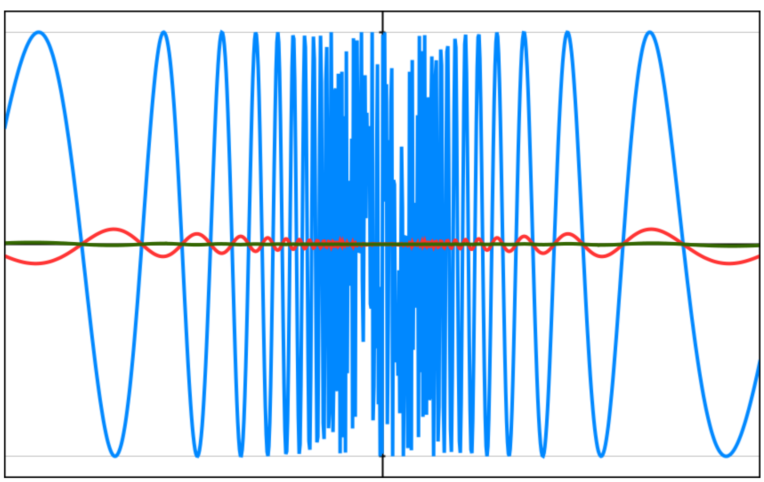
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \sin(k\pi) = 0.$$

Sei $x_m = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}$. Die Folge (x_m) ist eine Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = 0$.

Entlang der Folge (x_m)

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m) = \lim_{m\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_m}\right) = \lim_{m\to\infty} \sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Also $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \;\nexists$. (Siehe die blaue Kurve in der Figur.)

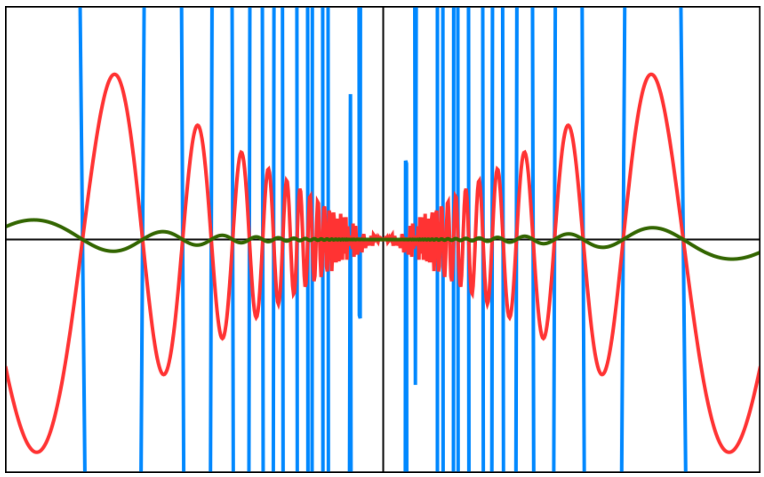


(b) $g(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig:

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, denn $x \to 0$ und $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist beschränkt. (Siehe die rote Kurve in der Figur.)

$g(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:

$g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$ (siehe Aufgabe (a)).



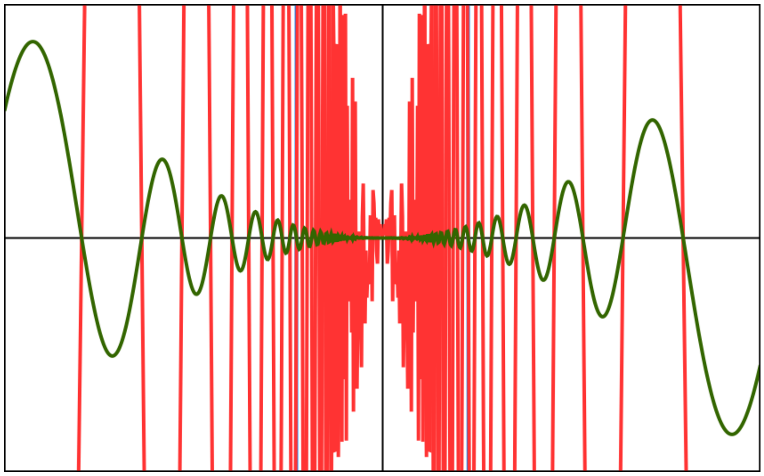
(c) $h(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig:

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, denn $x^2 \to 0$ und $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist beschränkt.

$h(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar:

$h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$

(Siehe die grüne Kurve in der Figur.)



(d) Ja, z.B Funktion h aus Aufgabe (c). Die Ableitungsfunktion ist

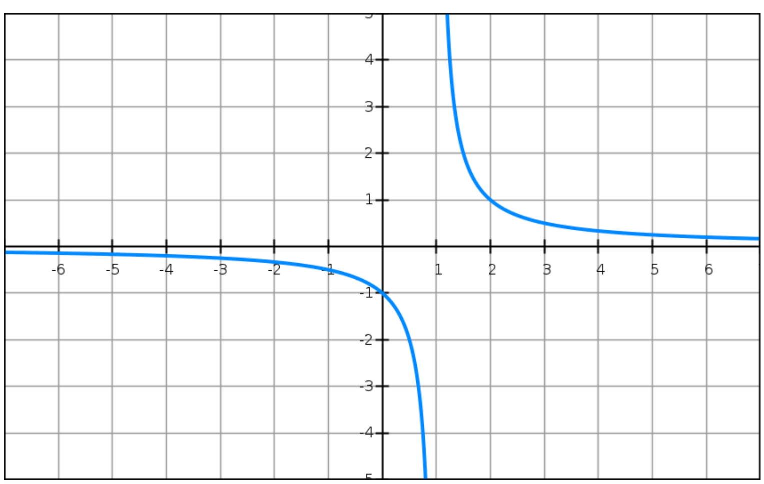
$$h'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{wenn } x = 0\,. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} h'(x) \nexists$. (Siehe ähnlicherweise wie in Aufgabe (a)).

29. AN 6.1. (a)

$x = 1$ ist eine Unstetigkeitsstelle, nämlich ein Pol (siehe Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen im Wikipedia-Artikel https://de.wikipedia.org/wiki/Unstetigkeitsstelle).

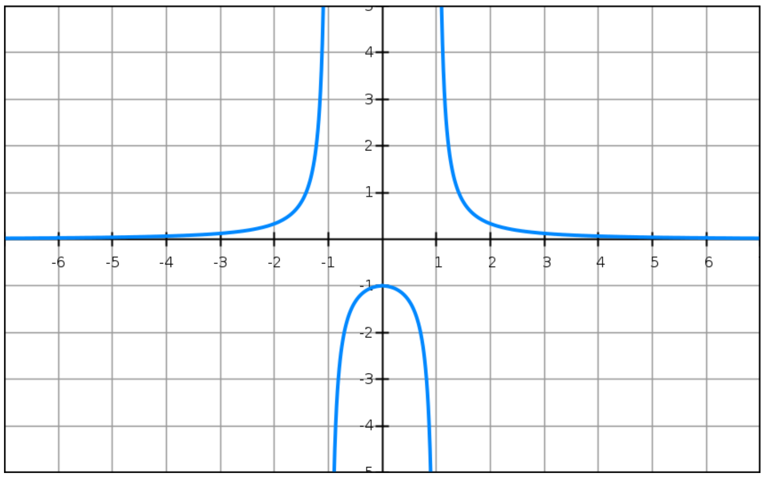
$$\lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$



AN 6.1. (b)

$x = \pm 1$ sind Unstetigkeitsstellen, nämlich Polstellen.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^2-1} = \infty.$$

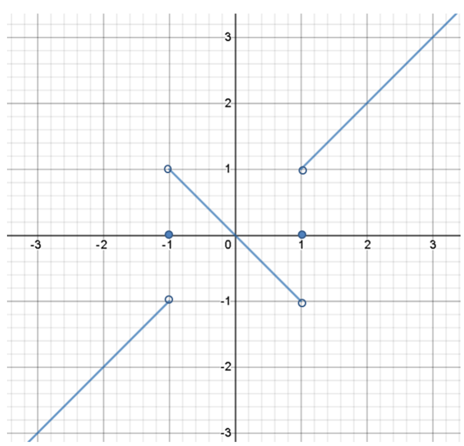


AN 6.2. (d)

$x = \pm 1$ sind Unstetigkeitsstellen, nämlich Sprungstellen.

$$\lim_{x\to 1+} x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) = 1, \quad \lim_{x\to 1-} x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) = -1,$$

$$\lim_{x\to -1+} x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) = 1, \quad \lim_{x\to 1-} x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) = -1.$$



30.(a) Die Dirichlet-Funktion ist an *keiner Stelle* stetig. Die Erklärung lässt sich auf topologische Eigenschaften der reellen Zahlen zurückführen.

Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann existiert eine Folge (y_k) von *irrationalen* Zahlen, sodass $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$. Für diese Eigenschaft sagt man, dass die irrationalen Zahlen eine dichte Teilmenge in der Menge der reellen Zahlen bilden.

Und dann

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k) = 0 \neq f\left(\lim_{k\to\infty} y_k\right) = f(x_0) = 1\,, \quad ,$$

(siehe das Übertragungsprinzip auf Seite 130 im Skriptum), daher ist die Funktion an der Stelle x_0 (d.h in den rationalen Punkten) nicht stetig.

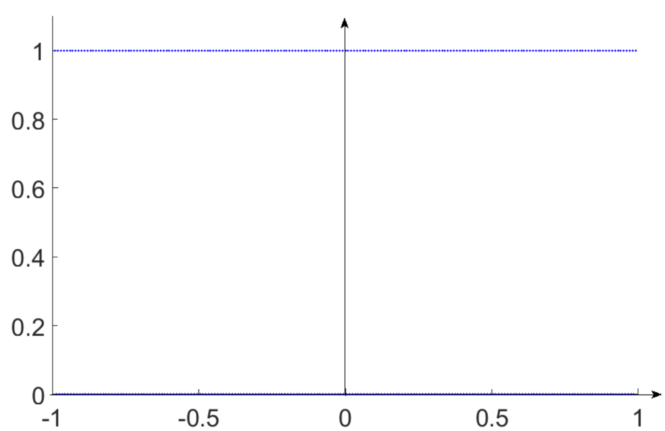
Sei $y_0 \in \mathbb{Q}^*$. Dann existiert eine Folge (x_k) von *rationalen* Zahlen, sodass $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = y_0$. Für diese Eigenschaft sagt man, dass die rationalen Zahlen eine dichte Teilmenge in der Menge der reellen Zahlen bilden.

Und dann

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1 \neq f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(y_0) = 0\,, \quad ,$$

(siehe das Übertragungsprinzip auf Seite 130 im Skriptum), daher ist die Funktion an der Stelle y_0 (d.h in den irrationalen Punkten) nicht stetig.

Also: die Dirichlet-Funktion ist in **keinem Punkt** stetig.



30.(b) Die Funktion $g(x)$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ wegen der Definition von $g(x)$.

Die Unstetigkeit von $g(x)$ an der Stelle $x_0 \neq 0$ kann man ebenso zeigen wie in 30.(a).

Die Funktion $g(x)$ ist *nicht* differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$:

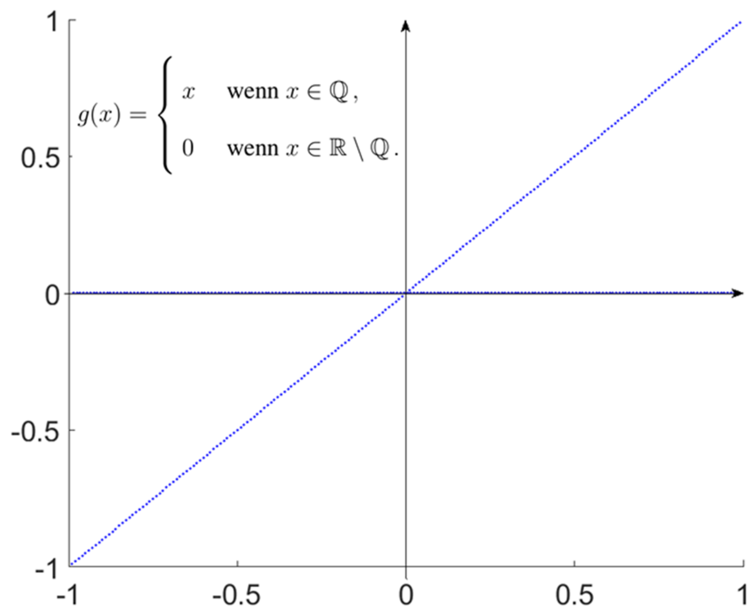
Sei (y_k) eine Folge von *irrationalen* Zahlen, sodass $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = 0$.

Dann $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{g(y_k) - g(0)}{y_k - 0} = 0$, weil $g(y_k) = 0$ für jedes k, $g(0) = 0$, und $y_k \neq 0$, denn $y_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sei (x_k) eine Folge von *rationalen* Zahlen, sodass $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$, und nehmen wir an, dass $x_k \neq 0$ für jedes k.

Dann $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{g(x_k) - g(0)}{x_k - 0} = 1$, weil $g(x_k) = x_k$ für jedes k und $g(0) = 0$.

Also $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \nexists$.



30.(c) Die Funktion $h(x)$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$:

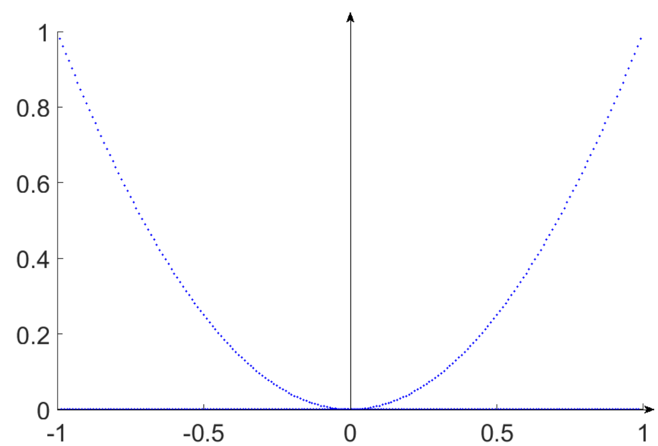
$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$ wegen der Definition von $h(x)$.

Die Unstetigkeit von $h(x)$ an der Stelle $x_0 \neq 0$ kann man ebenso zeigen wie in 30.(a) und 30.(b).

Die Funktion $h(x)$ ist differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$:

$h'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$, wegen der Definition von $h(x)$:

der Zähler ist entweder 0 oder x^2, daher nimmt der Differenzenquotient $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ den Wert 0 oder x an, also für den Differentialquotienten (d.h für die Ableitung) $\lim_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ ergibt sich 0.



31. (a)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-2x^2}}{3x} = \lim_{x\to 0+} \frac{4x}{3\cdot\left(\sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1-2x^2}\right)} = 0 \quad \& \quad f(0) = b$$

$\Longrightarrow$ für $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$ ist f stetig.

(b)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-2x^2}}{3x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4}{3\left(\sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1-2x^2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

$f'_-(0) = a.$

$\Longrightarrow$ für $b = 0,\ a = \dfrac{2}{3}$ ist f differenzierbar.