Analysis Übungen

Hausaufgaben für 25. März (Gruppe 1), bzw.

für 26. März (Gruppe 2, 3)

Existenz des Grenzwerts der Folgen

10. Seien $a_n = (1 + 1/n)^n$ and $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$.

    (a) Zeige $b_5 \leq 3$.

    (b) Zeige, dass b_n in n monoton fällt. *Hinweis:* benütze die $H \leq G$ Ungleichung (die Notation wird einfacher, wenn man $b_n \leq b_{n-1}$ für $n \geq 2$ nachweist).

    (c) Zeige, dass $a_n \leq 3$ gilt und daher konvergiert (da a_n monoton wächst laut Aufgabe 8, wo wir $G \leq A$ benützten). *Hinweis:* vergleiche mit b_n.

    (d) Zeige, dass b_n den gleichen Grenzwert wie a_n hat. *Hinweis:* betrachte $b_n - a_n$.

11. Erklären Sie, ob der limes der Folge existiert oder nicht:

$$\lim_{n \to +\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) .$$

12. Sei $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergiert und sei $a_n := (-1)^n d_n$. Untersuchen Sie die Existenz des Grenzwerts $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ für verschiedene Werte von $\ell \in \mathbb{R}$.

Grenzwertbestimmung von Folgen

Bestimmen Sie den Limes der folgenden Folgen.

Hinweis: Wenden Sie das Vergleichskriterium an.

13. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\log(n)} = 1$

14.* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \text{mit } a > 1.$

15.* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$

Reihen

16. Verwenden Sie die geometrische Reihe, um die Konvergenz der folgenden Reihen zu diskutieren und ihre Summe zu berechnen:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}.$$

17. Verwenden Sie das Konvergenzkriterium von Leibniz, um die Konvergenz der folgenden Reihen zu diskutieren:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sin(n)}.$$

18. Verwenden Sie das Quotientenkriterium, um die Konvergenz der folgenden Reihen zu diskutieren:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n \cdot n!}{n^n}.$$

Hinweis: $(1 + \frac{1}{n})^n \to e > 2 > 1$. Warum gilt denn $2 < e < 3$?

Funktionsgraphen, gerade/ungerade Funktionen, Schranken

19. Man zeichne den Graphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = ||x|-1|-|x|$.

(b) $f(x) = |1 - |x||$.

20. Man zeige:

    (a) Summe und Produkt gerader Funktionen sind wieder gerade.

    (b) Sei f gerade, g ungerade, dann ist $f \circ g$ gerade.

21. Man untersuche, ob die folgenden Funktionen beschränkt sind und bestimme ggf. obere und untere Schranken:

    (a) $f(x) = \log(1 + x^2)$.

    (b) $f(x) = e^{-|x-\mu|}$, mit $\mu \in \mathbb{R}$.