# Übung Analysis

# Hausübung für 22.4. (Gruppe 1)/23.4. (Gruppe 2, 3)

## Konvexe / konkave Funktionen

32. (a) **Jensensche Ungleichung**. Man zeige durch vollständige Induktion die folgende Variante der Ungleichung: wenn $\varphi$ eine <u>konvexe Funktion</u> ist, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, dann

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n) \leq \lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi(x_n) .$$

*Anmerkung:* für eine <u>konkave Funktion</u> $\varphi$ gilt die analoge Ungleichung

$$\varphi(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n) \geq \lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi(x_n) .$$

(b) Verwende die Jensensche Ungleichung mit der konkaven Funktion $\varphi(x) = \log x$, um die geometrisch-arithmetische Ungleichung ($G \leq A$) zu beweisen.

33. Sei $f$ eine konvexe Funktion im Intervall $[0, 1]$, sodass $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

Zeige, dass $f(x) \leq x$ für alle $0 \leq x \leq 1$.

## Kurvendiskussionen

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion an den nachstehenden Funktionen durch: bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, untersuchen Sie die Monotonie und die lokalen *Extremstellen* und die lokalen *Extremwerte* (1. Tabelle), die Konvexität und die Wendepunkte (2. Tabelle), skizzieren Sie den Graphen der Funktion, berechnen Sie die nötigen Grenzwerte, und zeichnen Sie die Asymptote(n) (falls vorhanden). Arbeiten Sie ohne Taschenrechner. Sie können bei der jeweiligen Aufgabe die angegebenen numerischen Werte benutzen (Musterlösung auf dem nächsten Blatt; Erklärung notwendig!).

34. $f(x) = 2 \cdot \arctan x + \frac{1}{2x}$. Numerische Hilfe: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58.$

35. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$. Numerische Hilfe: $e^{-1} \approx 0.37$, $e^{-2} \approx 0.14$.

36. $f(x) = e^{-1/x^2}$. Numerische Hilfe: $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.82$, $e^{-3/2} \approx 0.22$. Optionaler Zusatz: wie muss man $f(0)$ definieren, um $f$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortzusetzen ? Lässt sich dann $f'(0)$ berechnen ? Hinweis: Regel von de l'Hôpital auf $\frac{1/x}{e^{x^{-2}}}$ anwenden. Wie sieht das für $f''(0)$ aus ? (Hinweis: $\frac{2x^{-4}}{e^{x^{-2}}}$ betrachten.) Was vermuten Sie über höhere Ableitungen an der Stelle $0$ ?

37. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$. Numerische Hilfe: $e^{-2} \approx 0.14$.

38. AN 7.10 e) Numerische Hilfe: $\frac{1}{e} \approx 0.37$, $\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0.52$, $\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1.93$.

39. AN 7.10 f) Numerische Hilfe: $\frac{1}{e} \approx 0.37$, $e^{1.5} \approx 4.48$.

40. AN 7.10 c)

41. AN 7.11. d)

42. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

43. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$. (Hier findet man eine vertikale und eine *schiefe* Asymptote. Geben Sie deren Geradengleichungen an; Hinweis: $x^2 - 3 = (x+2)(x-2) + 1$.)

*Lösung zu 34.:*

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

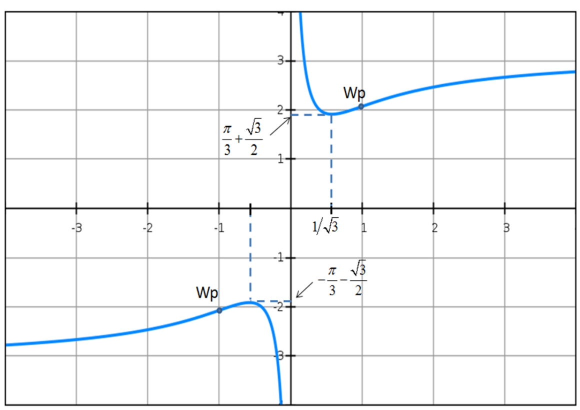
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{2x^2} = 0 \implies 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

| $x$ | $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ | $0$ | $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | lok max | $\searrow$ | | $\searrow$ | lok min | $\nearrow$ |

$$f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \implies 3x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1.$$

| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, 1)$ | $1$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | Wp | $\frown$ | | $\smile$ | Wp | $\frown$ |

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi, \quad \lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\infty\,.$$




Lokaler Minimalwert: $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

Lokaler Maximalwert: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bildmenge: $\left(-\infty, -\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$.