Übung Analysis

Lösungen der Hausübung für 18.3. (Gruppe 1) und für 19.3. (Gruppen 2, 3).

Solutions

1. Induktionsanfang $n = 1$ mit der Gleichung $1 = 1$ ist klar. Induktionsschritt: angenommen, für ein (fixes) $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \,. \tag{1}$$
Wir müssen dies nun für $n+1 \in \mathbb{N}$ zeigen:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+2-1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n+1\\ &\overset{(*)}{=} n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2\,,\end{aligned}$$
wobei wir in $(*)$ die Induktionsannahme (1) verwendeten. Wir folgern, dass (1) auch für $n+1$ anstelle n gilt, und somit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Induktionsanfang $n = 1$ mit der Gleichung $1 = 1$, die klar ist. Induktionsschritt: angenommen, die Aussage stimmt für fixes $n \in \mathbb{N}$; dann wollen wir sie auch für $n+1 \in \mathbb{N}$ zeigen.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 + (n+1)^2 &\overset{(*)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^2+2n+1\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6n^2+12n+6}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,,\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ die Induktionsannahme verwendeten. Also gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

3. Zuerst bemerken wir, dass die Aussage für $n_0 = 0$ wegen $2^{n_0} = 1 = 1 = 0!$ richtig ist, aber nicht für $n_0 = 1$. Nach ein paar Versuchen zeigt sich, dass sie wieder stimmt für $n_0 = 4$. Induktionsschritt: angenommen, die Ungleichung gilt für fixes $n \geq n_0$, also $n \geq 4$; dann

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{(*)}{\leq} n! \cdot 2 = 2 \cdot [n(n-1)\cdots] \leq [(n+1)n(n-1)\cdots] = (n+1)!,$$

wobei wir in $(*)$ die Induktionsannahme benützten und die letzte Ungleichung wegen $(n+1) \geq 2$ gilt (diese Relation vereitelt den Induktionssanfang bei $n_0 = 0$). Damit haben wir die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gezeigt.

4. Hier ist der geeignete Induktionsanfang bei $n_0 = 3$. Induktionsschritt: angenommen, die Ungleichung gilt für fixes $n \geq n_0$, mit $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)! \leq (n+2)n^n\,.$$

Also haben wir Erfolg, wenn wir $(n+2)n^n \leq (n+1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen können, was nach Division beider Seiten durch $(n+1)n^n$ führt zu

$$\frac{n+2}{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\,. \tag{2}$$

Nun verwenden wir *(a)* $1 \leq (1+\frac{1}{n})^{n-2}$ und *(b)* $\frac{n+2}{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$; Letzteres ist äquivalent (durch Multiplikation beider Seiten mit $(n+1)n^2$) zur kubischen Ungleichung $n^2(n+2) = n^3 + 2n^2 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$, die ihrerseits offensichtlich ist. Also folgt Ungleichung (2) durch Multiplikation beider Ungleichungen *(a)* and *(b)*, womit der Induktionsschritt vollzogen ist.

5. Für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, setze $a'_k = \frac{1}{a_k} > 0$. Dann kann die Ungleichung

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

geschrieben werden als

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a'_k} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{a'_1 \cdots a'_n}}$$

und durch Übergang zu den Kehrwerten beider (positiver!) Seiten erhalten wir

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a'_k \geq \sqrt[n]{a'_1 \cdots a'_n}\,.$$

Daher sind beide Ungleichungen (jeweils geltend für alle Daten $a_k > 0$ bzw. $a'_k > 0$) äquivalent zueinander, da wir genauso gut mit den a'_k beginnen und dann mit $a_k = \frac{1}{a'_k}$ fortfahren könnten.

6. Die Ungleichung $n! \leq n^n$ ist trivial für alle $n \in \mathbb{N}$, da wir für $n!$ alle Vorgänger (natürliche Zahlen) von n mit n multiplizieren, während auf der rechten Seite n mit sich selbst n mal multipliziert wird, also sind alle Faktoren links nicht größer als alle Faktoren rechts. Mit der (geometrisch-arithmet.Mittel-)Ungleichung $G \leq A$, angewandt auf

   $$a_n = n, a_{n-1} = n-1, \ldots, a_1 = 1\,,$$

   erhalten wir nach Erheben zur n-ten Potenz

   $$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

7. Die Ungleichung ist eine Anwendung von $G \leq A$, denn diese ergibt für alle $n \in \mathbb{N}$:

   $$\sqrt[n]{n} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \cdots + 1}{n} = \frac{2\sqrt{n} + (n-2)}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

8. Wende $G \leq A$ auf n Kopien von $(1 + \frac{1}{n})$ und eine Eins an: $a_i = 1 + \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$ sowie $a_{n+1} = 1$. Das arithmetische Mittel ist dann

   $$\frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\,,$$

   während das geometrische Mittel der $(a_i)_{i=1}^{n+1}$ gegeben ist durch $\sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n}$. Also folgt mittels $G \leq A$

   $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

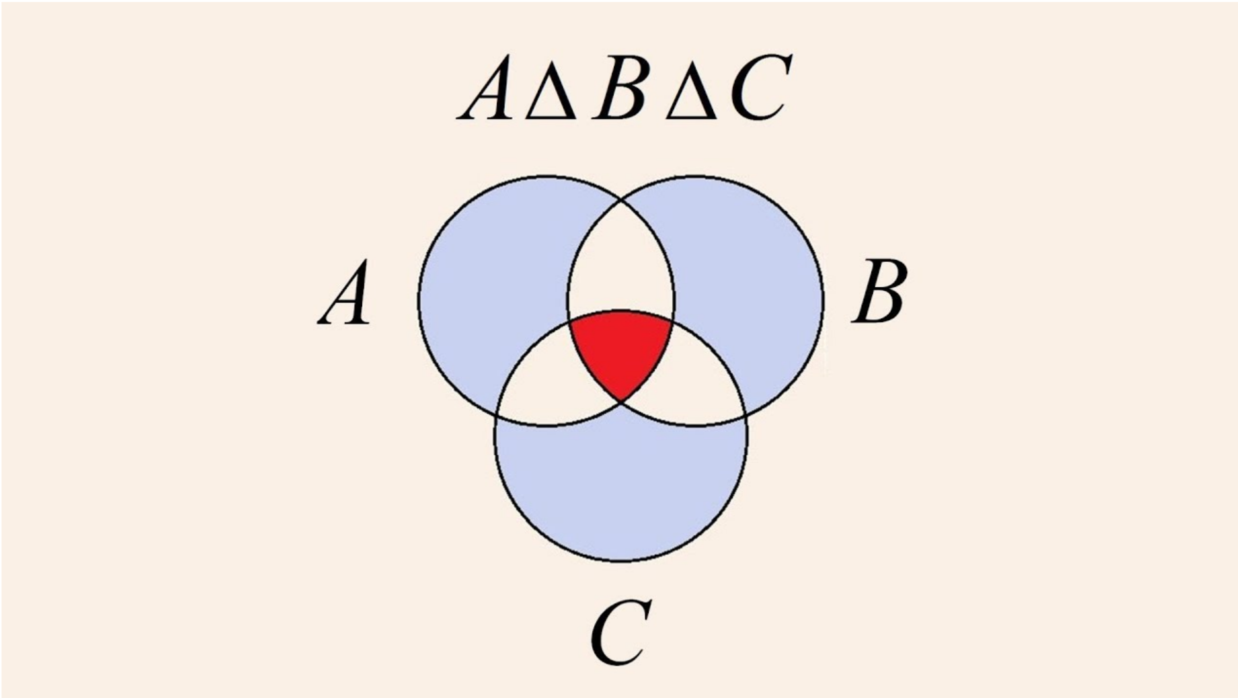

Figure 1: Symmetric difference of A, B, C; all elements in exactly one set form the blue part, and in red is $A \cap B \cap C$ with elements in three sets. Blue and red parts together form $A \triangle B \triangle C$.

9. **(a)** Siehe Figure 1.

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ besteht die Menge $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ aus allen Elementen, die zu einer ungeraden Anzahl der Mengen A_i as $i = 1, \ldots, n$ gehören. Dies stimmt für $n = 2$ (Induktionsanfang), wo die Anzahl eins ist; wenn dies nun für n Mengen A_i zutrifft, also auf $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$, dann auch für $n+1$ Mengen $(A_i)_{i=1}^{n+1}$, denn

$$A_1 \triangle \ldots \triangle A_{n+1} = [A_1 \triangle \ldots \triangle A_n] \triangle A_{n+1} = A \cup B \,,$$

   wobei $A = [A_1 \triangle \ldots \triangle A_n] \setminus A_{n+1}$ und $B = A_{n+1} \setminus [A_1 \triangle \ldots \triangle A_n]$ sind. Tatsächlich sind die Elemente von A in einer ungeraden Anzahl der A_i enthalten (Induktionsannahme), und B enthält alle Elemente von A_{n+1}, die in einer geraden Anzahl der verbleibenden Mengen $A_1, \ldots, A_n$ sind, also zusammen in einer ungeraden Anzahl aller Mengen $A_1, \ldots, A_{n+1}$.