Übung Analysis

Hausübung 22.04. (Gruppe 1)/23.04. (Gruppen 2, 3)

Lösungen

32. (a) Für $n = 1$ ist die Ungleichung eine Gleichung und trivial.

Für $n = 2$ ist die Ungleichung die Definition der Konvexität einer Funktion.

Angenommen, die Ungleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Seien

$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$ so, dass $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$. Wir können $\lambda_{n+1} \neq 1$ annehmen.

$$\varphi\left(\underbrace{\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n}_{(1-\lambda_{n+1}) \cdot y} + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}\right) \overset{\substack{\text{Def. der} \\ \text{Konvexität}}}{\leq} (1-\lambda_{n+1}) \cdot \varphi(y) + \lambda_{n+1} \cdot \varphi(x_{n+1}), \quad (1)$$

wobei $y = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} \cdot x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot x_n$. Beachte $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$, wobei alle Terme der Summe nicht negativ sind. Also ist y eine Konvexkombination der $x_1, \ldots, x_n$. Mittels der Induktionsannahme folgt

$$\varphi(y) = \varphi\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} \cdot x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot x_n\right) \leq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \varphi(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \cdot \varphi(x_n). \quad (2)$$

Kombination von (1) und (2) liefert den Beweis im Induktionsschritt.

(b) Sei $x_1, \ldots, x_n > 0$. Wir formen die Ungleichung $G \leq A$ schrittweise durch Äquivalenzen um:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad (3)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \quad (4)$$

$$\Updownarrow$$

$$\log(x_1) + \ldots + \log(x_n) \leq n \cdot \log\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \tag{5}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\log(x_1) + \ldots + \log(x_n)}{n} \leq \log\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \tag{6}$$

Die Ungleichung (6) folgt aus der Konkavität der Funktion $\log(x)$. $\square$

33. Wir wenden die Konvexitätsdefinition auf die Variablen $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ mit den Gewichten $\lambda_1 = 1 - x,\ \lambda_2 = 1 - \lambda_1 = x$ an:

$$f(x) = f\left((1-x) \cdot 0 + x \cdot 1\right) \leq (1-x) \cdot \underbrace{f(0)}_{0} + x \cdot \underbrace{f(1)}_{1} = x\,,$$

was zu zeigen war.

34. Erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{2x^2} > 0 \iff 1 + x^2 > 4x^2 \iff 1 < 3x^2 \iff \frac{1}{\sqrt{3}} < |x|\,.$$

Weiters gilt

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{4x}{(1+x^2)^2} > 0 \quad \iff \quad x < -1 \text{ oder } x > 1$$

(benütze $u = x^2 \geq 0$ als Unbekannte in der Gleichung $3x^4 - 2x^2 - 1 = 3u^2 - 2u - 1 = 0$, um auf $u = 1$ und $|x| = 1$ zu kommen; die zweite u-Lösung $u = -\frac{1}{3} < 0$ entspricht keiner x-Lösung). Die Konsequenzen daraus wurden bereits im Angabeblatt beschrieben.

35. Sei $f(x) = x\ln^2(x)$. Die Funktion ist nur dann wohldefiniert, wenn der Input des Logarithmus größer als Null ist, also $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Weiters gilt $f(x) \to +\infty$ mit $x \to +\infty$. Setzen wir $t = 1/x > 0$ und verwenden $\ln t = -\ln x$ sowie mehrmals die Regel von de l'Hospital bezüglich t, so folgt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln^2(x)}{x^{-1}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln^2(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2\ln t}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{t} = 0\,.$$

Die erste Ableitung ergibt sich zu

$$f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x)\,,\ x > 0\,.$$

Daraus folgt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 1$ oder $x = e^{-2}$.

x	$(0, e^{-2})$	e^{-2}	$(e^{-2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2\,\frac{\ln(x) + 1}{x}\,,\ x > 0\,,$$

also genau dann Null, wenn $x = \frac{1}{e}$.

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	wp	$\smile$

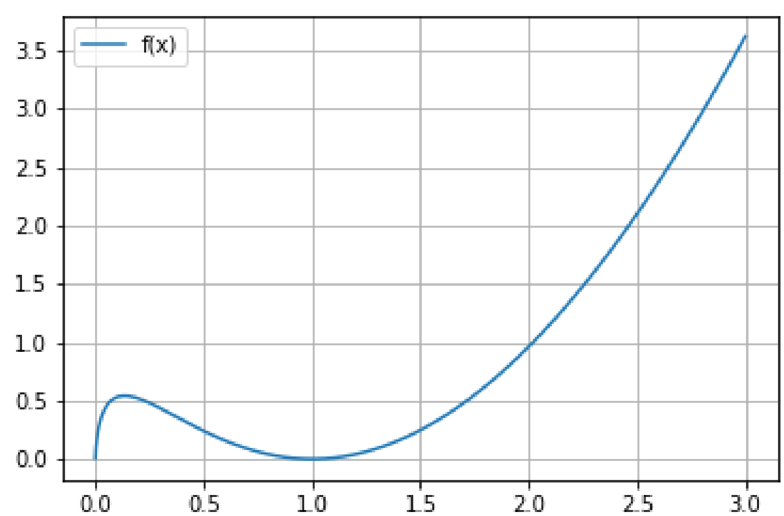

Figure 1: Ex.35, skizziert mittels Python

36. Für $f(x) = e^{-1/x^2}$ gilt $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f ist eine gerade Funktion ohne Nullstellen.

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}$.

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und f' hat ebenso keine Nullstellen, also ist der einzige Bruchpunkt in der ersten Tabelle $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

An der Stelle $x = 0$ hat f **kein** lokales Minimum, da $x = 0 \notin D_f$.

$f''(x) = \left(\dfrac{4}{x^6} - \dfrac{6}{x^4}\right) \cdot e^{-1/x^2}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f''(x) = 0 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Also sind die Bruchpunkte in der zweiten Tabelle $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$	Wp	$\smile$		$\smile$	Wp	$\frown$

Wir haben $\lim\limits_{|x| \to +\infty} e^{-1/x^2} = 1$, also ist die horizontale Asymptote gegeben durch $y = 1$.

Da $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$ gilt, können wir mit der Festsetzung $f(0) := 0$ die Funktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Die so fortgesetzte Funktion hat dann die Form

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und ist bei $x = 0$ differenzierbar:

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{2te^{t^2}} = 0$, wobei wir $t := \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ setzen. Für die fortgesetzte Funktion gilt auch $f''(0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2x^3e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{2t^2}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{2}{e^{t^2}} = 0$ und so weiter (das kann durch Induktion präzisiert werden mittels der Beobachtung $f^{(k)}(x) = P_k(t)e^{-t^2}$, wobei $P_k(t)$ ein Polynom in $t = \frac{1}{x}$ ist, mit der Rekursionsformel $P_{k+1}(t) = -t^2P_k'(t) - 2t^3P_k(t)$ für alle $t \neq 0$). Alle Ableitungen von f at $x = 0$ existieren und sind gleich Null, obwohl die Funktion **nicht** konstant gleich Null ist.

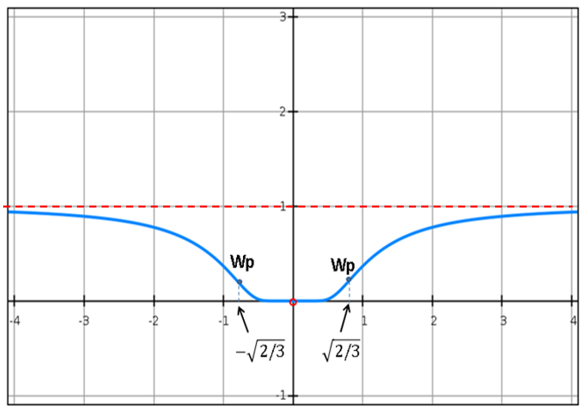

Figure 2: Ex. 36., skizziert mittels graphsketch.com

37. Für $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ ist $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus (\{0\} \cup \{1\})$.

$$f'(x) = \frac{-1}{\ln^2(x)}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x\ln^2(x)}.$$

Wir können das Vorzeichen von $f'(x)$ wie in Ex.35 für f bestimmen:

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

Also ist die Funktion strikt fallend und es gibt keine lokalen Minima oder Maxima.

$$f''(x) = \frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)},$$

wird Null genau dann, wenn $x = e^{-2}$.

x	$(0, e^{-2})$	e^{-2}	$(e^{-2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$\smile$	wp	$\frown$	$\smile$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

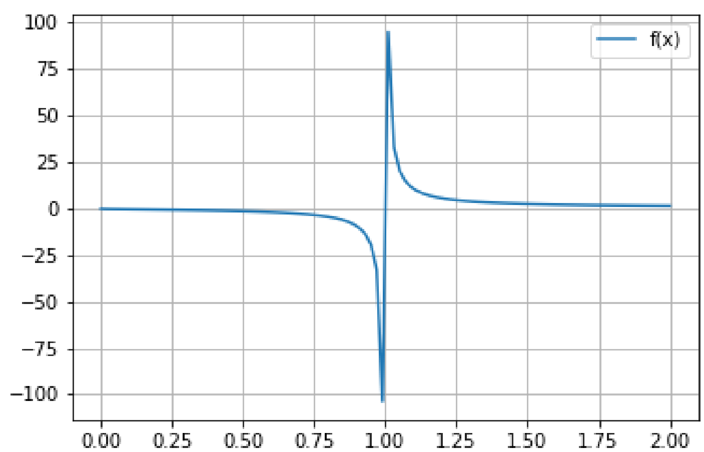

Figure 3: Ex.37, skizziert mittels Python; Wendepunkt nicht sichtbar, siehe Ausschnitt in Fig.4

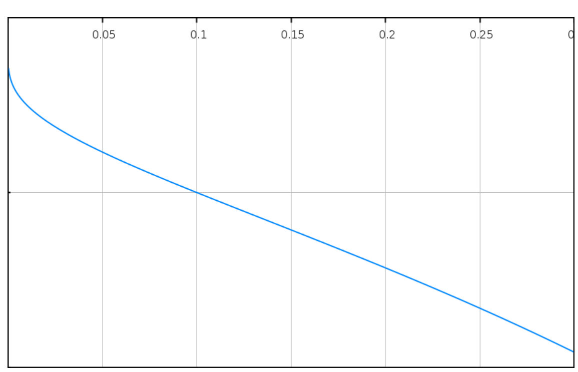

Figure 4: Ex.37, Ausschnitt von Fig.3, skizziert mittels graphsketch.com

38. Für $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ ist $D_f = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Weiters gilt $f(x) \searrow 0$ mit $|x| \to +\infty$. Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1\,,$$

und die zweite Ableitung

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(1-4x^2+x^4) = 0 \Longleftrightarrow x^4-4x^2+1 = 0 \Longleftrightarrow (x^2-2)^2 = 4-1 = 3 \Longleftrightarrow x^2 = 2\pm\sqrt{3}\,.$$

Also gilt $f''(x) = 0$ für

$$x = -\sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad x = -\sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad x = \sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad x = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

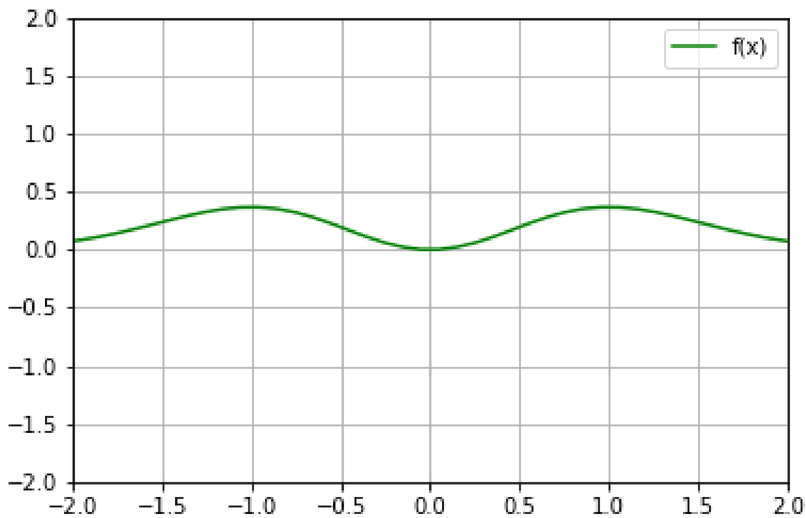

Figure 5: Ex.38, skizziert mittels Python

39. Für $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ ist $D_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 1$. Wir haben $f(x) \to -\infty$ mit $x \searrow 0$ und mit der Regel von de l'Hospital $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$.

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x = e.$$

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)-3}{x^3} = 0 \Longleftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}.$$

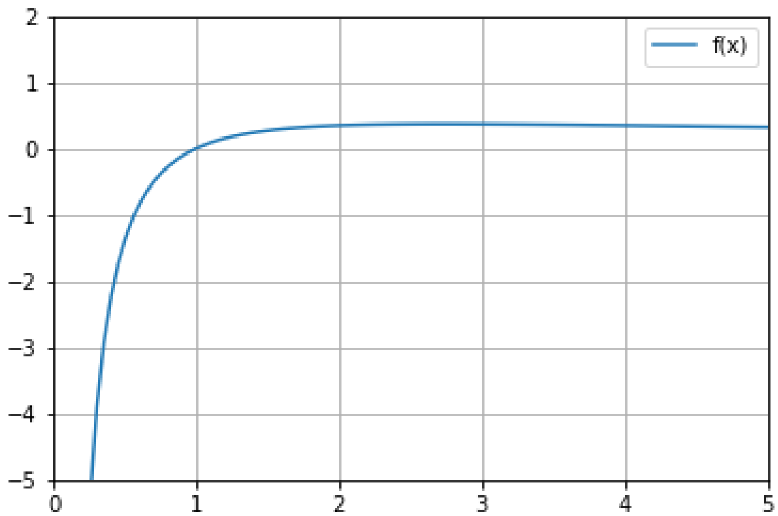

Figure 6: Ex.39, skizziert mittels Python

40. Für $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)}$ ist $D_f = \mathbb{R}$ und $f(x) \to +\infty$ mit $|x| \to +\infty$.

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\,, |x| \neq 1\,.$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

$$f''(x) = -2\frac{(x^2+3)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}\,, |x| \neq 1\,,$$

ist nie Null, und positiv genau dann, wenn $x \in (-1, 1)$; speziell gilt $f''(0) = \frac{2}{3} > 0$.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

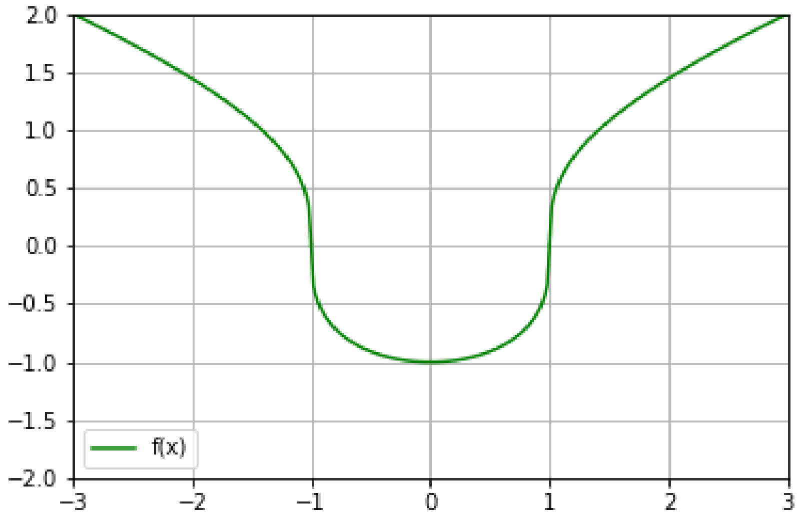

Figure 7: Ex.40, skizziert mittels Python

41. Für $f(x) = \frac{4x}{4-x^2}$ ist $D_f = \mathbb{R} \setminus (\{-2\} \cup \{2\})$ und $f(x) \to 0$ mit $|x| \to +\infty$.

$$f'(x) = \frac{4(x^2+4)}{(4-x^2)^2} > 0, \forall x \in D_f.$$

Also steigt f auf seinem ganzen Definitionsbereich.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3},$$

wird Null für $x = 0$ und ist positiv genau dann, wenn $x \in (-\infty, -2)$ oder $x \in (0, 2)$:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	wp	$\smile$	$\frown$

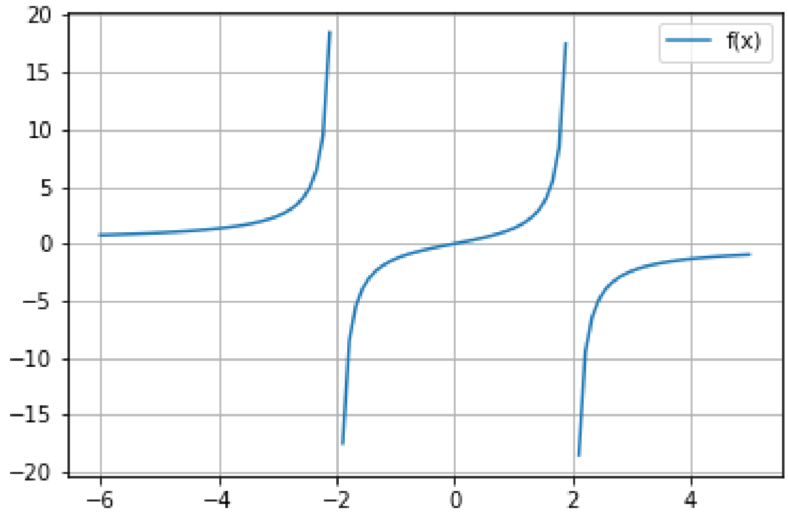

Figure 8: Ex.41, skizziert mittels Python

42. Für $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ist $D_f = \mathbb{R}$ und $f(x) \to \pm\infty$ mit $x \to \pm\infty$.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Also steigt f überall auf D_f. Für alle $x \neq -1$ gilt

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}},$$

ist also nirgends Null und positiv genau dann, wenn $x < -1$, also

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) = 0.$$

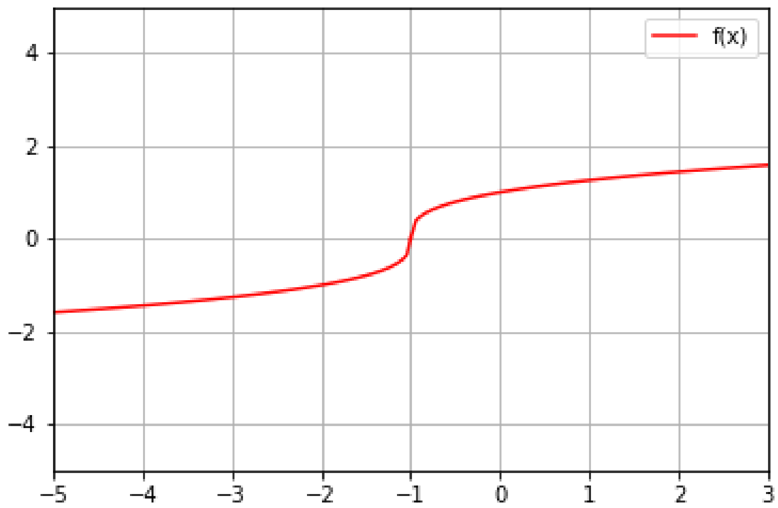

Figure 9: Ex.42, skizziert mittels Python

43. Für $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2} = (x-2) + \frac{1}{(x+2)}$ gilt $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\,,$$

wird Null falls $x = -3$ oder $x = -1$.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

ist positiv für $x > -2$ und hat keine Nullstelle.

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty.$$

Die vertikale Asymptote ist also durch $x = -2$ gegeben. Um die schräge zu finden, beachten wir $f(x) = (x-2) + \frac{1}{x+2}$, woraus

$$\lim_{|x|\to+\infty} |f(x) - (x-2)| = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{|x+2|} = 0$$

folgt, wodurch sich die Gleichung der schrägen Asymptote zu $y = x - 2$ ergibt.

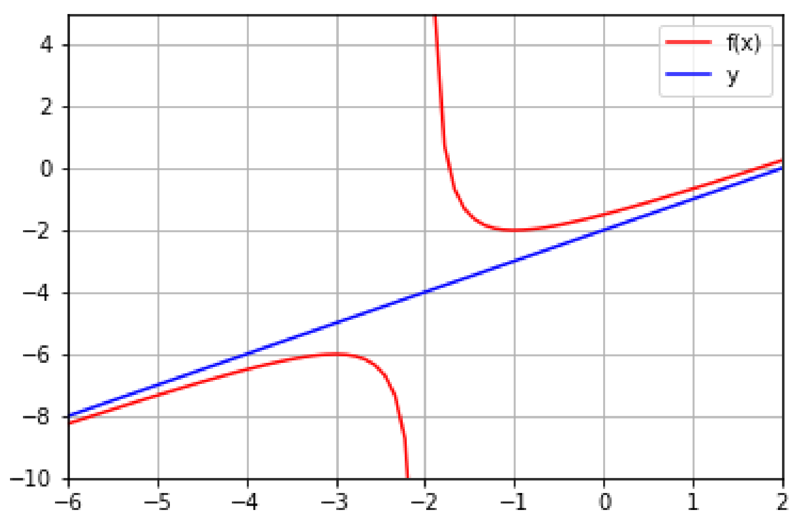

Figure 10: Ex.43, skizziert mittels Python