Guía 9

Análisis Avanzado

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue. Además, E denotará a un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

1. **Sea f una función simple. Probar que $|f|$ es simple.**

   NOTA: funcion indicadora $\equiv$ funcion caracteristica

   Para demostrar que $|f|$ es una función simple, partimos de la definición de una función simple y mostramos que tomar el valor absoluto de una función simple resulta en otra función simple.

   Definición de función simple

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama simple si puede ser expresada como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x),$$

   donde $a_i \in \mathbb{R}$ son constantes, A_i son conjuntos medibles, y χ_{A_i} es la función indicadora del conjunto A_i. Esto significa que f toma un número finito de valores distintos y es medible.

   Demostración

   Supongamos que f es una función simple:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x),$$

   donde $a_i \in \mathbb{R}$ y A_i son conjuntos medibles de $\mathbb{R}$.

   Consideremos $|f(x)|$:

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \right|.$$

Dado que $\chi_{A_i}(x)$ toma valores de 0 o 1, podemos escribir $|f(x)|$ como:

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \chi_{A_i}(x).$$

- $\sum_{i=1}^{n} |a_i|\chi_{A_i}(x)$ es una combinación finita de funciones indicadoras χ_{A_i} ponderadas por las constantes $|a_i|$. - Cada $|a_i|$ es una constante real no negativa. - Cada χ_{A_i} es una función indicadora de un conjunto medible A_i.

Por lo tanto, $|f|$ se puede expresar como una combinación finita de funciones indicadoras de conjuntos medibles, lo que significa por definición que $|f|$ es una función simple.

2. **Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:**

   ***a*) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.**
   ***b*) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.**
   ***c*) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.**
   ***d*) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.**

   Concluir que si $X \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los ítems de arriba.
   Para demostrar que las condiciones dadas son equivalentes y concluir que si $X \in \mathcal{M}$ (donde $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue) y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si se cumple alguna (y por lo tanto todas) de las condiciones dadas, sigamos estos pasos:

   Paso 1: Demostrar la equivalencia de las condiciones

   Supongamos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y $f : X \to \mathbb{R}$.

   (a) implica (b)

   Supongamos que $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

   Para demostrar que $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos el complemento de $\{x \in X : f(x) > a\}$:

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} = \{x \in X : f(x) > a\}^c.$$

Dado que $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra (por lo tanto cerrada bajo complementos), se sigue que:

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

(b) implica (c)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos:

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > a - \frac{1}{n}\}.$$

La intersección numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$ sigue perteneciendo a $\mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Por lo tanto:

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

(c) implica (d)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos el complemento de $\{x \in X : f(x) \geq a\}$:

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\}^c.$$

Dado que $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos, se sigue que:

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}.$$

(d) implica (a)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos:

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\}.$$

La unión numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$ sigue perteneciendo a $\mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Por lo tanto:

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

3. **Sean** $f, g : E \to \mathbb{R}$**. Probar que:**

   ***a*) Si** f **es medible entonces** $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ **para todo** $a \in \mathbb{R}$**.**

   ***b*) Si** f **y** g **son medibles entonces** $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$**.**

   ***c*) Si** f **es medible y** $f(x) = g(x)$ **para casi todo** $x \in E$**, entonces** g **es medible.**

4. **Sean** $f, g : E \to \mathbb{R}$ **funciones medibles. Probar que:**

   ***a*)** $f + g$ **es medible.**

   ***b*)** αf **es medible para todo** $\alpha \in \mathbb{R}$**.**

   ***c*)** f^2 **es medible.**

   ***d*)** $f \cdot g$ **es medible.**

   Sugerencia: $f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{2}$**.**

   item (b)

   Demostración

   Consideramos dos casos: cuando $\alpha \neq 0$ y cuando $\alpha = 0$.

   Caso 1: $\alpha > 0$

   Si $\alpha > 0$, entonces $\alpha f(x) > a$ es equivalente a $f(x) > \frac{a}{\alpha}$. Más precisamente:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \frac{a}{\alpha}\}.$$

   Dado que f es medible, sabemos que para cualquier $b \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X : f(x) > b\} \in \mathcal{M}.$$

   Aplicando esto a $b = \frac{a}{\alpha}$, obtenemos que:

$$\{x \in X : f(x) > \frac{a}{\alpha}\} \in \mathcal{M}.$$

   Por lo tanto:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

Esto muestra que αf es medible cuando $\alpha > 0$.

Caso 2: $\alpha < 0$

Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha f(x) > a$ es equivalente a $f(x) < \frac{a}{\alpha}$. Más precisamente:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) < \frac{a}{\alpha}\}.$$

Aplicando esto a $b = \frac{a}{\alpha}$, obtenemos que:

$$\{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{M}.$$

Esto muestra que αf es medible cuando $\alpha < 0$.

Caso 3: $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha f(x) = 0$ para todo $x \in X$. En este caso, para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \{x \in X : 0 > a\}.$$

- Si $a < 0$, $\{x \in X : 0 > a\} = X$.
- Si $a \geq 0$, $\{x \in X : 0 > a\} = \emptyset$.

Dado que $X \in \mathcal{M}$ y $\emptyset \in \mathcal{M}$, esto demuestra que el conjunto $\{x \in X : \alpha f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ para cualquier a y $\alpha \in \mathbb{R}$.

item (c)

Demostración

Consideremos f como una función medible. Entonces, sabemos que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

Paso 1: Relación entre $f^2(x)$ y $f(x)$

Observamos que $f^2(x) > a$ si y solo si $f(x) > \sqrt{a}$ o $f(x) < -\sqrt{a}$, siempre que $a > 0$. Si $a \leq 0$, entonces $f^2(x) > a$ es trivialmente cierto para cualquier x, porque $f^2(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

Para formalizar esto:

$$\{x \in X : f^2(x) > a\} = \begin{cases} X, & \text{si } a \leq 0, \\ \{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\}, & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

Paso 2: Verificación de la medibilidad

1. Caso $a \leq 0$:

En este caso, el conjunto $\{x \in X : f^2(x) > a\} = X$. Dado que $X \in \mathcal{M}$, este conjunto es medible.

2. Caso $a > 0$:

Aquí necesitamos considerar los conjuntos $\{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\}$ y $\{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\}$.

- $\{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \in \mathcal{M}$ porque f es medible.
- $\{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{M}$ porque f es medible y el conjunto $\{x \in X : f(x) < b\}$ es medible para cualquier $b \in \mathbb{R}$.

La unión de dos conjuntos medibles es medible. Por lo tanto:

$$\{x \in X : f^2(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{M}.$$

item (d)
Sale basicamente juntando los items a, b y c.

5. **Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Probar que f es medible**.

Propiedades de funciones monótonas

Las funciones monótonas tienen propiedades importantes que podemos utilizar en la demostración:

1. Las funciones monótonas (crecientes o decrecientes) tienen la propiedad de que sus preimágenes de intervalos abiertos son intervalos (o uniones de intervalos) en $\mathbb{R}$.
2. Los intervalos y uniones numerables de intervalos son medibles en el sentido de Lebesgue.

Demostración

Caso 1: f es monótona creciente

Supongamos que f es monótona creciente. Entonces, si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = (f^{-1}((a, \infty))).$$

Consideremos la estructura de este conjunto:

1. Si f es estrictamente creciente, $f^{-1}((a,\infty))$ es un intervalo de la forma (x_0,∞), donde x_0 es el punto en el cual $f(x_0) = a$.
2. Si f es no estrictamente creciente (puede ser constante en algunos intervalos), $f^{-1}((a,\infty))$ es una unión de intervalos de la forma (x_0,∞) o $[x_0,\infty)$, donde x_0 es el supremo de los puntos x tales que $f(x) \leq a$.

En ambos casos, (x_0,∞) o $[x_0,\infty)$ son intervalos, y los intervalos son conjuntos medibles. Además, cualquier unión numerable de intervalos es medible.

Por lo tanto, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ es un conjunto medible.

Caso 2: f es monótona decreciente

Supongamos que f es monótona decreciente. Entonces, si $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = (f^{-1}((a,\infty))).$$

Consideremos la estructura de este conjunto:

1. Si f es estrictamente decreciente, $f^{-1}((a,\infty))$ es un intervalo de la forma $(-\infty, x_0)$, donde x_0 es el punto en el cual $f(x_0) = a$.
2. Si f es no estrictamente decreciente (puede ser constante en algunos intervalos), $f^{-1}((a,\infty))$ es una unión de intervalos de la forma $(-\infty, x_0)$ o $(-\infty, x_0]$, donde x_0 es el ínfimo de los puntos x tales que $f(x) \leq a$.

En ambos casos, $(-\infty, x_0)$ o $(-\infty, x_0]$ son intervalos, y los intervalos son conjuntos medibles. Además, cualquier unión numerable de intervalos es medible.

Por lo tanto, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ es un conjunto medible.

Conclusión

Hemos demostrado que si f es una función monótona (creciente o decreciente) de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, entonces f es medible. Esto se debe a que las preimágenes de intervalos abiertos bajo funciones monótonas son intervalos o uniones de intervalos, los cuales son medibles en el sentido de Lebesgue.

6. **Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que:**

   ***a)* Si f es continua en $[0,1]$, entonces es medible.**

b) **Si f es continua en casi todo punto de $[0,1]$ (esto es, si su conjunto de discontinuidades es nulo), entonces es medible.**

item (a)

Demostración

1. Definición de medibilidad: Una función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es medible si para todo $a\in\mathbb{R}$, el conjunto $\{x\in[0,1]:f(x)>a\}$ es medible.

2. Propiedad de los conjuntos abiertos: Si f es continua, entonces la preimagen de cualquier conjunto abierto bajo f es un conjunto abierto (en $[0,1]$). Esto se debe a la propiedad de la continuidad.

3. Medibilidad de conjuntos abiertos: Los conjuntos abiertos en $[0,1]$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

4. Aplicación de la continuidad: Consideremos un conjunto de la forma (a,∞). Dado que f es continua, la preimagen de (a,∞) bajo f es:

$$f^{-1}((a,\infty))=\{x\in[0,1]:f(x)>a\}.$$

Dado que (a,∞) es un conjunto abierto y la preimagen de un conjunto abierto bajo una función continua es abierta, se sigue que:

$$\{x\in[0,1]:f(x)>a\}$$

es un conjunto abierto en $[0,1]$ y, por lo tanto, medible.

item (b)

Demostración

1. Conjunto de discontinuidades: Supongamos que $D\subseteq[0,1]$ es el conjunto de discontinuidades de f. Por hipótesis, D es un conjunto nulo, es decir, $\mu(D)=0$, donde μ denota la medida de Lebesgue.

2. Descomposición de $[0,1]$: Dado que D es nulo, podemos escribir $[0,1]$ como la unión disjunta de D y C, donde $C=[0,1]\setminus D$ es el conjunto donde f es continua. Así:

$$[0,1]=C\cup D.$$

Dado que $\mu(D)=0$, tenemos $\mu(C)=1$.

3. Función medible en C: La función f es continua en C y $C\subseteq[0,1]$. Hemos demostrado en la parte (a) que si f es continua en un conjunto, entonces es medible en ese conjunto. Por lo tanto, f es medible en C.

4. Extensión a $[0,1]$: Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, consideremos el conjunto $\{x \in [0,1] : f(x) > a\}$. Podemos escribir este conjunto como:

$$\{x \in [0,1] : f(x) > a\} = \{x \in C : f(x) > a\} \cup \{x \in D : f(x) > a\}.$$

Dado que f es medible en C, $\{x \in C : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Además, dado que D es un conjunto nulo, cualquier subconjunto de D es también nulo y, por lo tanto, medible:

$$\{x \in D : f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

5. Unión de conjuntos medibles: La unión de dos conjuntos medibles es medible. Por lo tanto,

$$\{x \in [0,1] : f(x) > a\} = \{x \in C : f(x) > a\} \cup \{x \in D : f(x) > a\}$$

es un conjunto medible.

7. **Dada una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en E, consideremos las funciones**

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \textbf{y} \quad I(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Probar que si las funciones f_n son medibles, entonces S e I también lo son.

Demostración

1. Medibilidad de $S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

Consideremos el conjunto $\{x \in E : S(x) \leq a\}$. Por la definición de $S(x)$:

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

Por lo tanto,

$$\{x \in E : S(x) \leq a\} = \{x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq a\}$$

Formalmente:

$$\{x \in E : S(x) \leq a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \leq a\}$$

Dado que cada f_n es medible, sabemos que $\{x \in E : f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$ para todo n. La unión numerable de conjuntos medibles también es medible, por lo que:

$$\{x \in E : S(x) \leq a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$$

Esto demuestra que $S(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ es medible.

2. Medibilidad de $I(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$

Consideremos el conjunto $\{x \in E : I(x) \geq a\}$. Por la definición de $I(x)$:

$$I(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

Por lo tanto,

$$\{x \in E : I(x) \geq a\} = \{x \in E : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a\}$$

Esto significa que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq a$. Formalmente:

$$\{x \in E : I(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \geq a\}$$

Dado que cada f_n es medible, sabemos que $\{x \in E : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$ para todo n. La intersección numerable de conjuntos medibles también es medible, por lo que:

$$\{x \in E : I(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$$

Esto demuestra que $I(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ es medible.

8. **Dada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y no negativas en E, sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Probar que f es medible, y que**

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

9. **Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa e integrable. Probar que si $A \in \mathcal{M}$, entonces**

$$\int_A f(x+y)\,d\mu(x) = \int_{A+y} f(x)\,d\mu(x)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $A + y \subseteq E$.

10. **Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Supongamos que E tiene medida finita. Probar que f es integrable.**

11. **Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $A \subseteq E$ medible se tiene que**

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu.$$

Probar que $f = g$ en casi todo punto de E.

12. **Consideremos $E = [0, +\infty)$. Sea $f_n : E \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = \left(-\frac{1}{n}\right)\chi_{[0,n]}$. Probar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función nula en E. Probar que, sin embargo,**

$$\int_E f_n\,d\mu = -1, \quad \textbf{de manera que} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = -1 < 0 = \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Deducir que el lema de Fatou no vale si las funciones f_n no son no negativas, aun cuando converjan uniformemente.

13. **Sean $f : E \to \mathbb{R}$ una función integrable y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de E tales que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Probar que:**

    ***a*) Si los E_n son disjuntos dos a dos entonces**

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

b) **Si** $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **es creciente entonces**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu \quad \textbf{y} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus E_n} f\,d\mu = 0.$$

14. **Sea** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **integrable. Probar que para todo** $x>0$ **la función** $F_x:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **dada por** $F_x(t)=f(t)e^{-xt}$ **es integrable, y que la función** $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$**,** $g(x)=\int_{(0,+\infty)} f(t)e^{-xt}\,dt$**, es continua.**