Resueltos: Práctica 8

Análisis Avanzado

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

1. **Sea X un conjunto y sea**

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \textbf{ es contable o } X \setminus A \textbf{ es contable}\}.$$

Probar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Para demostrar que $A = \{A \subseteq X : A \text{ es contable o } X \setminus A \text{ es contable}\}$ es una σ-álgebra, debemos verificar que cumple las tres propiedades fundamentales de una σ-álgebra:

1. $X \in A$.
2. Si $A \in A$, entonces $A^c \in A$ (cerradura bajo complementos).
3. Si $A_n \in A$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ (cerradura bajo uniones numerables).

1. $X \in A$

Por definición, $X \setminus X = \emptyset$, que es un conjunto contable. Por lo tanto, $X \in A$.

2. Cerradura bajo complementos

Supongamos que $A \in A$. Entonces, por definición, A es contable o $X \setminus A$ es contable.

- Si A es contable, entonces $X \setminus A$ (el complemento de A) es $X \setminus (X \setminus A) = A$, que es contable. - Si $X \setminus A$ es contable, entonces A es $X \setminus (X \setminus A)$, que también es contable.

En ambos casos, el complemento de A, es decir, $A^c = X \setminus A$, también está en A. Por lo tanto, A es cerrado bajo complementos.

3. Cerradura bajo uniones numerables

Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Queremos demostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$. Consideremos dos casos:

1. Caso 1: Alguno de los A_n es contable.

Supongamos que A_{n_0} es contable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_{n_0} \cup \bigcup_{n \neq n_0} A_n.$$

Como A_{n_0} es contable y una unión numerable de conjuntos contables es contable, tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es contable.

2. Caso 2: Ninguno de los A_n es contable.

Esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \setminus A_n$ es contable. Consideremos el complemento de la unión:

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n).$$

La intersección numerable de conjuntos contables es contable. Por lo tanto,

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ es contable.}$$

Esto significa que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$.

En ambos casos, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$, lo que demuestra que A es cerrado bajo uniones numerables.

Conclusión

Dado que A cumple con las tres propiedades fundamentales de una σ-álgebra, podemos concluir que A es una σ-álgebra.

2. **Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X. Probar que:**

   ***a*) $\emptyset \in \mathcal{A}$.**

   ***b*) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \triangle B \in \mathcal{A}$.**

   ***c*) $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables.**

Para demostrar estas propiedades de una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X, sigamos los siguientes pasos:

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

Por la definición de una σ-álgebra, sabemos que $X \in \mathcal{A}$ y que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos. Específicamente, dado que $X \in \mathcal{A}$, su complemento X^c también debe pertenecer a $\mathcal{A}$. Pero $X^c = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\emptyset \in \mathcal{A}.$$

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \Delta B \in \mathcal{A}$

Parte 1: $A \setminus B \in \mathcal{A}$

Recordemos que $A \setminus B = A \cap B^c$.

- Dado que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, $B \in \mathcal{A}$ implica que $B^c \in \mathcal{A}$. - Dado que $A \in \mathcal{A}$ y $B^c \in \mathcal{A}$, y que una σ-álgebra es cerrada bajo intersecciones finitas, tenemos que $A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto,

$$A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

Parte 2: $A \Delta B \in \mathcal{A}$

Recordemos que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- Ya demostramos que $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y por una razón análoga, $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$. - Dado que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, es cerrada bajo uniones numerables. En particular, es cerrada bajo uniones finitas.

Por lo tanto,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}.$$

(c) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones numerables

Dado que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, sabemos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables. Para demostrar que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones numerables, usaremos la propiedad de los complementos y la cerradura bajo uniones numerables.

Supongamos que $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Consideramos la intersección numerable $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

- Dado que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, $A_n \in \mathcal{A}$ implica que $A_n^c \in \mathcal{A}$ para cada n. - La unión de los complementos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ también pertenece a $\mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables.

Observamos que:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Dado que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A}$, y que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos, tenemos que:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Hemos demostrado que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \Delta B \in \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones numerables.

3. **Probar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo.**

Para probar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo con respecto a la medida de Lebesgue, primero recordemos algunas definiciones clave:

- Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es numerable si es finito o contable infinito. - Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es nulo con respecto a la medida de Lebesgue si $m(A) = 0$, donde m denota la medida de Lebesgue.

Paso 1: Propiedades de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue tiene las siguientes propiedades relevantes:

1. Medida de un solo punto: La medida de Lebesgue de cualquier conjunto de un solo punto $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ es cero, es decir, $m(\{x\}) = 0$. 2. Aditividad numerable: Si $A_1, A_2, \ldots$ son conjuntos medibles y disjuntos, entonces:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

3. Subaditividad: Para cualquier colección numerable de conjuntos medibles $A_1, A_2, \ldots$:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Paso 2: Medida de un conjunto finito

Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto finito de n puntos. La medida de A es:

$$m(A) = m(\{x_1\}) + m(\{x_2\}) + \cdots + m(\{x_n\}) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Paso 3: Medida de un conjunto contable infinito

Sea $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto contable infinito de puntos. La medida de A es:

$$m(A) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}\right).$$

Dado que los puntos individuales son disjuntos y cada uno tiene medida cero:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Conclusión

Hemos demostrado que cualquier conjunto finito de puntos tiene medida de Lebesgue cero, y cualquier conjunto contable infinito de puntos también tiene medida de Lebesgue cero debido a la aditividad numerable de la medida de Lebesgue y la propiedad de que la medida de un solo punto es cero. Por lo tanto, todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es un conjunto nulo con respecto a la medida de Lebesgue.

4. **Probar que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ los intervalos $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$ son medibles Lebesgue, y calcular su medida.**

   Para demostrar que los intervalos $[a, b)$, $[a, b]$, y $[a, +\infty)$ son medibles con respecto a la medida de Lebesgue y calcular sus medidas, procedemos de la siguiente manera:

   Medibilidad

   La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ está diseñada para que todos los intervalos sean medibles. Específicamente, los intervalos de la forma $[a, b)$, $[a, b]$, y $[a, +\infty)$ son medibles.

   1. Intervalo $[a, b)$

   Medibilidad

   El intervalo $[a, b)$ es medible porque los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ (y sus complementos) son medibles en la construcción de la medida de Lebesgue, y $[a, b)$ se puede expresar como una combinación de tales intervalos:

$$[a, b) = (a, b) \cup \{a\}.$$

Medida

Para calcular la medida de $[a, b)$, consideramos la diferencia entre b y a:

$$m([a, b)) = m(b - a) + m(\{a\}) = m(b - a) = b - a$$

2. Intervalo $[a, b]$

Medibilidad

El intervalo $[a, b]$ es medible porque los intervalos cerrados son una de las clases básicas de conjuntos medibles en la construcción de la medida de Lebesgue.

Medida

Para calcular la medida de $[a, b]$, también consideramos la diferencia entre b y a:

$$m([a, b]) = m((-\infty, a)^c \cap (b, +\infty)^c) = b - a.$$

3. Intervalo $[a, +\infty)$

Medibilidad

El intervalo $[a, +\infty)$ es medible porque los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ y sus complementos son medibles en la construcción de la medida de Lebesgue, y $[a, +\infty)$ se puede expresar como:

$$[a, +\infty) = (-\infty, a)^c$$

Medida

Para calcular la medida de $[a, +\infty)$, observamos que el intervalo se extiende infinitamente hacia la derecha. Por lo tanto, su medida es infinita:

$$m([a, +\infty)) = +\infty.$$

Resumen

- El intervalo $[a, b)$ es medible y su medida es $b - a$. - El intervalo $[a, b]$ es medible y su medida es $b - a$. - El intervalo $[a, +\infty)$ es medible y su medida es $+\infty$.

Por lo tanto, hemos demostrado que estos intervalos son medibles con respecto a la medida de Lebesgue y hemos calculado sus medidas.

5. **Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.**

   ***a*) Probar que si A es abierto entonces $A \in \mathcal{M}$.**

   ***b*) Deducir que si A es cerrado entonces $A \in \mathcal{M}$.**

Para demostrar las afirmaciones sobre los conjuntos medibles de Lebesgue en $\mathbb{R}$, sigamos estos pasos:

(a) Si A es abierto, entonces $A \in \mathcal{M}$.

Demostración

Una construcción típica de la medida de Lebesgue comienza definiendo la medida de intervalos abiertos y luego extendiéndola a la σ-álgebra generada por estos intervalos. Dado que los intervalos abiertos son conjuntos abiertos, y la σ-álgebra generada por estos intervalos incluye todos los conjuntos abiertos (porque cualquier conjunto abierto puede ser expresado como una unión numerable de intervalos abiertos), concluimos que:

$$A \in \mathcal{M} \quad \text{si } A \text{ es abierto.}$$

(b) Deducir que si A es cerrado entonces $A \in \mathcal{M}$.

Demostración

Para mostrar que los conjuntos cerrados son medibles, usaremos la propiedad de los complementos en una σ-álgebra. Recordemos que una σ-álgebra es cerrada bajo complementos y uniones numerables. Específicamente, si un conjunto pertenece a una σ-álgebra, su complemento también pertenece a esa σ-álgebra.

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado. Necesitamos demostrar que $A \in \mathcal{M}$.

1. Sabemos que el complemento de A, $A^c = \mathbb{R} \setminus A$, es abierto porque A es cerrado. 2. Por la parte (a) de la demostración, cualquier conjunto abierto pertenece a $\mathcal{M}$. Por lo tanto,

$$A^c \in \mathcal{M}.$$

3. Dado que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y es cerrada bajo complementos, concluimos que:

$$A \in \mathcal{M}.$$

6. **Calcular la medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ y la de los irracionales del $[0,1]$. ¿Por qué son medibles estos conjuntos?**

Medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ y de los Irracionales en $[0,1]$

Medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$

El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es numerable.

Dado que $\mathbb{Q}$ es numerable, su medida de Lebesgue es:

$$m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Medida de Lebesgue de los Irracionales en $[0,1]$

Los irracionales en $[0,1]$ son los números en $[0,1]$ que no son racionales. Denotemos este conjunto por $\mathbb{I} \cap [0,1]$, donde $\mathbb{I}$ representa el conjunto de los números irracionales.

Para encontrar la medida de Lebesgue de los irracionales en $[0,1]$, podemos usar el hecho de que $[0,1]$ está compuesto por los racionales y los irracionales:

$$[0,1] = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup (\mathbb{I} \cap [0,1]).$$

La medida de $[0,1]$ es 1:

$$m([0,1]) = 1.$$

Dado que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es un subconjunto numerable de $[0,1]$, su medida de Lebesgue es 0:

$$m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0.$$

Dado que la medida de un conjunto es aditiva y $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\mathbb{I} \cap [0,1]$ son disjuntos, tenemos:

$$m([0,1]) = m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + m(\mathbb{I} \cap [0,1]).$$

Sustituyendo las medidas conocidas:

$$1 = 0 + m(\mathbb{I} \cap [0,1]).$$

Por lo tanto,

$$m(\mathbb{I} \cap [0,1]) = 1.$$

Medibilidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I} \cap [0,1]$

$\mathbb{Q}$ es medible

- Los conjuntos numerables son medibles porque cualquier conjunto de medida cero es medible. - Dado que $\mathbb{Q}$ es numerable, $\mathbb{Q}$ es medible.

$\mathbb{I} \cap [0,1]$ es medible

- $[0,1]$ es un intervalo cerrado, y por lo tanto, es medible. - $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es un subconjunto numerable de $[0,1]$ y es medible. - La medibilidad es cerrada bajo complementos. Dado que $\mathbb{I} \cap [0,1] = [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \cap [0,1])$, $\mathbb{I} \cap [0,1]$ es medible como complemento de un conjunto medible dentro de un conjunto medible.

7. **Probar que todo conjunto acotado de $\mathcal{M}$ tiene medida finita. Mostrar un conjunto de $\mathcal{M}$ que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.**
   #TO-DO

8. **Si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.** #TO-DO

9. **Sea $A \in \mathcal{M}$. Probar que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la vuelta?**

   Demostración

   Supongamos, por contradicción, que $A^\circ \neq \emptyset$. Esto significa que existe un punto $x \in A^\circ$ tal que A° contiene un intervalo abierto alrededor de x. Es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A^\circ \subseteq A$.

La medida de Lebesgue de un intervalo abierto $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ es 2ϵ. Dado que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq A$ y la medida de un subconjunto es menor o igual a la medida del conjunto que lo contiene, tendríamos:

$$\mu(A) \geq \mu((x-\epsilon, x+\epsilon)) = 2\epsilon.$$

Sin embargo, esto contradice la hipótesis de que $\mu(A) = 0$. Por lo tanto, nuestra suposición de que $A^\circ \neq \emptyset$ es falsa. Concluimos que:

$$A^\circ = \emptyset.$$

10. **Sea $A \subseteq [0,1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Probar que A es denso en $[0,1]$.**

Para probar que un conjunto medible de Lebesgue $A \subseteq [0,1]$ tal que $\mu(A) = 1$ es denso en $[0,1]$, sigamos los siguientes pasos:

Definición de denso

Un conjunto $A \subseteq [0,1]$ es denso en $[0,1]$ si para todo intervalo abierto no vacío $(a,b) \subseteq [0,1]$, $A \cap (a,b) \neq \emptyset$.

Demostración

Para demostrar que A es denso en $[0,1]$, supondremos por contradicción que A no es denso en $[0,1]$.

Paso 1: Suposición de contradicción

Supongamos que existe un intervalo abierto $(a,b) \subseteq [0,1]$ tal que $A \cap (a,b) = \emptyset$. Esto implica que $A \subseteq [0,1] \setminus (a,b)$.

Paso 2: Medida del intervalo (a,b)

El intervalo (a,b) es un conjunto medible de Lebesgue con medida $\mu((a,b)) = b-a$. Dado que $A \cap (a,b) = \emptyset$, tenemos que A está contenido en $[0,1] \setminus (a,b)$.

Paso 3: Medida de $[0,1] \setminus (a,b)$

El conjunto $[0,1] \setminus (a,b)$ se puede descomponer como la unión de dos intervalos:

$$[0,1] \setminus (a,b) = [0,a] \cup [b,1].$$

La medida de $[0,a]\cup[b,1]$ es:

$$\mu([0,a]\cup[b,1]) = \mu([0,a]) + \mu([b,1]) = a + (1-b) = 1-(b-a).$$

Dado que $b-a>0$, tenemos:

$$\mu([0,a]\cup[b,1]) = 1-(b-a) < 1.$$

Paso 4: Contradicción

Hemos supuesto que $A\subseteq[0,a]\cup[b,1]$. Esto implica que la medida de A es como máximo la medida de $[0,a]\cup[b,1]$, que es menor que 1:

$$\mu(A) \le \mu([0,a]\cup[b,1]) < 1.$$

Sin embargo, esto contradice la hipótesis de que $\mu(A)=1$.

Conclusión

La suposición de que existe un intervalo abierto $(a,b)\subseteq[0,1]$ tal que $A\cap(a,b)=\emptyset$ lleva a una contradicción. Por lo tanto, no puede existir tal intervalo, lo que implica que para cualquier intervalo abierto $(a,b)\subseteq[0,1]$, $A\cap(a,b)\neq\emptyset$.

Así, hemos demostrado que A es denso en $[0,1]$.

NOTA: Otra manera de hacerlo es pensar que A es denso en [0,1] si y solo si $\overline{A}$ = [0,1]

11. **Sea $A\subseteq\mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:**

    ***a*) $A\in\mathcal{M}$.**

    ***b*) Existen una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados contenidos en A y un conjunto Z de medida nula tales que**

    $$A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)\cup Z.$$

    ***c*) Existen una sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contienen a A y un conjunto H de medida nula tales que**

    $$A = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right)\setminus H.$$

#TO-DO

12. **Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Probar que $A \in \mathcal{M}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.** #TO-DO

13. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$. #TO-DO

14. Recordemos que para $c \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

   a) Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $cA \in \mathcal{M}$.
   b) Probar que si $c > 0$ entonces $\mu(cA) = c\mu(A)$.
   c) ¿Qué se puede decir de $\mu(cA)$ en el caso $c < 0$?

   #TO-DO

15. Probar que existe una función sobreyectiva $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que vale 0 en casi todo punto de $[0,1]$. ¿Puede una tal función ser continua?

#TO-DO