Guía 9

Análisis Avanzado

"el viejo había dicho que él nunca, pero nunca, lo había visto perder a Central contra Ñul. Me acuerdo que nos había impresionado porque ese tipo era un privilegiado del destino. Aunque al principio vos te preguntas, "¿Cómo carajo hizo este tipo pata no verlo perder nunca a Central contra Ñul? ¿Qué mierda hizo? Este coso no va nunca a la cancha". Porque, oíme alguna vez lo tuviste que ver perder, a menos que no vayás a. los clásicos. Y ojo que yo conozco muchos así, que se borran bien borrados de los clásicos. O que van en Arroyito, pero que a la cancha del Parque no van en la puta vida. Y me acuerdo que le preguntarlos eso al viejo y el viejo nos dijo que no, y nos explicó. El iba siempre, un fana de Central que ni te cuento, pero se había dado, qué sé yo, una serie de casualidades que hicieron que en un montón de partidos con Ñul él no pudiera ir por un montón de causas que ni me acuerdo."

19 de Diciembre de 1971 - Roberto Fontanarrosa

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue. Además, E denotará a un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

1. **Sea f una función simple. Probar que $|f|$ es simple.**

   NOTA: funcion indicadora $\equiv$ funcion caracteristica

   Para demostrar que $|f|$ es una función simple, partimos de la definición de una función simple y mostramos que tomar el valor absoluto de una función simple resulta en otra función simple.

   Definición de función simple

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama simple si puede ser expresada como:

   $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x),$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ son constantes, A_i son conjuntos medibles, y χ_{A_i} es la función indicadora del conjunto A_i. Esto significa que f toma un número finito de valores distintos y es medible.

Demostración

Supongamos que f es una función simple:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x),$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y A_i son conjuntos medibles de $\mathbb{R}$.

Consideremos $|f(x)|$:

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \right|.$$

Dado que $\chi_{A_i}(x)$ toma valores de 0 o 1, podemos escribir $|f(x)|$ como:

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \chi_{A_i}(x).$$

- $\sum_{i=1}^{n} |a_i|\chi_{A_i}(x)$ es una combinación finita de funciones indicadoras χ_{A_i} ponderadas por las constantes $|a_i|$. - Cada $|a_i|$ es una constante real no negativa. - Cada χ_{A_i} es una función indicadora de un conjunto medible A_i.

Por lo tanto, $|f|$ se puede expresar como una combinación finita de funciones indicadoras de conjuntos medibles, lo que significa por definición que $|f|$ es una función simple.

2. **Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:**

   ***a*)** $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ **para todo** $a \in \mathbb{R}$**.**

   ***b*)** $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ **para todo** $a \in \mathbb{R}$**.**

   ***c*)** $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ **para todo** $a \in \mathbb{R}$**.**

   ***d*)** $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ **para todo** $a \in \mathbb{R}$**.**

Concluir que si $X \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los ítems de arriba.
Para demostrar que las condiciones dadas son equivalentes y concluir que si $X \in \mathcal{M}$ (donde $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue) y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si se cumple alguna (y por lo tanto todas) de las condiciones dadas, sigamos estos pasos:

Paso 1: Demostrar la equivalencia de las condiciones

Supongamos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X y $f : X \to \mathbb{R}$.

(a) implica (b)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos el complemento de $\{x \in X : f(x) > a\}$:

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} = \{x \in X : f(x) > a\}^c.$$

Dado que $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra (por lo tanto cerrada bajo complementos), se sigue que:

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

(b) implica (c)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos:

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > a - \frac{1}{n}\}.$$

La intersección numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$ sigue perteneciendo a $\mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Por lo tanto:

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

(c) implica (d)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos el complemento de $\{x \in X : f(x) \geq a\}$:

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\}^c.$$

Dado que $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos, se sigue que:

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}.$$

(d) implica (a)

Supongamos que $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, consideremos:

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\}.$$

La unión numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$ sigue perteneciendo a $\mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Por lo tanto:

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

3. **Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$. Probar que:**

   ***a*) Si f es medible entonces $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.**

   ***b*) Si f y g son medibles entonces $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.**

   ***c*) Si f es medible y $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in E$, entonces g es medible.**

4. **Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Probar que:**

   ***a*) $f + g$ es medible.**

   ***b*) αf es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.**

   ***c*) f^2 es medible.**

   ***d*) $f \cdot g$ es medible.**

   Sugerencia: $f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{2}$**.**

   item (b)

Demostración

Consideramos dos casos: cuando $\alpha \neq 0$ y cuando $\alpha = 0$.

Caso 1: $\alpha > 0$

Si $\alpha > 0$, entonces $\alpha f(x) > a$ es equivalente a $f(x) > \frac{a}{\alpha}$. Más precisamente:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \frac{a}{\alpha}\}.$$

Dado que f es medible, sabemos que para cualquier $b \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X : f(x) > b\} \in \mathcal{M}.$$

Aplicando esto a $b = \frac{a}{\alpha}$, obtenemos que:

$$\{x \in X : f(x) > \frac{a}{\alpha}\} \in \mathcal{M}.$$

Por lo tanto:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

Esto muestra que αf es medible cuando $\alpha > 0$.

Caso 2: $\alpha < 0$

Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha f(x) > a$ es equivalente a $f(x) < \frac{a}{\alpha}$. Más precisamente:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) < \frac{a}{\alpha}\}.$$

Aplicando esto a $b = \frac{a}{\alpha}$, obtenemos que:

$$\{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{M}.$$

Esto muestra que αf es medible cuando $\alpha < 0$.

Caso 3: $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha f(x) = 0$ para todo $x \in X$. En este caso, para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \{x \in X : 0 > a\}.$$

- Si $a < 0$, $\{x \in X : 0 > a\} = X$.
- Si $a \geq 0$, $\{x \in X : 0 > a\} = \emptyset$.

Dado que $X \in \mathcal{M}$ y $\emptyset \in \mathcal{M}$, esto demuestra que el conjunto $\{x \in X : \alpha f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ para cualquier a y $\alpha \in \mathbb{R}$.

item (c)

Demostración

Consideremos f como una función medible. Entonces, sabemos que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

Paso 1: Relación entre $f^2(x)$ y $f(x)$

Observamos que $f^2(x) > a$ si y solo si $f(x) > \sqrt{a}$ o $f(x) < -\sqrt{a}$, siempre que $a > 0$. Si $a \leq 0$, entonces $f^2(x) > a$ es trivialmente cierto para cualquier x, porque $f^2(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

Para formalizar esto:

$$\{x \in X : f^2(x) > a\} = \begin{cases} X, & \text{si } a \leq 0, \\ \{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\}, & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

Paso 2: Verificación de la medibilidad

1. Caso $a \leq 0$:

En este caso, el conjunto $\{x \in X : f^2(x) > a\} = X$. Dado que $X \in \mathcal{M}$, este conjunto es medible.

2. Caso $a > 0$:

Aquí necesitamos considerar los conjuntos $\{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\}$ y $\{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\}$.

- $\{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \in \mathcal{M}$ porque f es medible.
- $\{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{M}$ porque f es medible y el conjunto $\{x \in X : f(x) < b\}$ es medible para cualquier $b \in \mathbb{R}$.

La unión de dos conjuntos medibles es medible. Por lo tanto:

$$\{x \in X : f^2(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{M}.$$

item (d)

Sale basicamente juntando los items a, b y c.

5. **Sea** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **monótona. Probar que** f **es medible**.

Propiedades de funciones monótonas

Las funciones monótonas tienen propiedades importantes que podemos utilizar en la demostración:

1. Las funciones monótonas (crecientes o decrecientes) tienen la propiedad de que sus preimágenes de intervalos abiertos son intervalos (o uniones de intervalos) en $\mathbb{R}$.
2. Los intervalos y uniones numerables de intervalos son medibles en el sentido de Lebesgue.

Demostración

Caso 1: f es monótona creciente

Supongamos que f es monótona creciente. Entonces, si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = (f^{-1}((a, \infty))).$$

Consideremos la estructura de este conjunto:

1. Si f es estrictamente creciente, $f^{-1}((a, \infty))$ es un intervalo de la forma (x_0, ∞), donde x_0 es el punto en el cual $f(x_0) = a$.
2. Si f es no estrictamente creciente (puede ser constante en algunos intervalos), $f^{-1}((a, \infty))$ es una unión de intervalos de la forma (x_0, ∞) o $[x_0, \infty)$, donde x_0 es el supremo de los puntos x tales que $f(x) \leq a$.

En ambos casos, (x_0, ∞) o $[x_0, \infty)$ son intervalos, y los intervalos son conjuntos medibles. Además, cualquier unión numerable de intervalos es medible.

Por lo tanto, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ es un conjunto medible.

Caso 2: f es monótona decreciente

Supongamos que f es monótona decreciente. Entonces, si $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = (f^{-1}((a, \infty))).$$

Consideremos la estructura de este conjunto:

1. Si f es estrictamente decreciente, $f^{-1}((a, \infty))$ es un intervalo de la forma $(-\infty, x_0)$, donde x_0 es el punto en el cual $f(x_0) = a$.

2. Si f es no estrictamente decreciente (puede ser constante en algunos intervalos), $f^{-1}((a,\infty))$ es una unión de intervalos de la forma $(-\infty, x_0)$ o $(-\infty, x_0]$, donde x_0 es el ínfimo de los puntos x tales que $f(x) \leq a$.

En ambos casos, $(-\infty, x_0)$ o $(-\infty, x_0]$ son intervalos, y los intervalos son conjuntos medibles. Además, cualquier unión numerable de intervalos es medible.

Por lo tanto, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ es un conjunto medible.

Conclusión

Hemos demostrado que si f es una función monótona (creciente o decreciente) de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, entonces f es medible. Esto se debe a que las preimágenes de intervalos abiertos bajo funciones monótonas son intervalos o uniones de intervalos, los cuales son medibles en el sentido de Lebesgue.

6. **Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que:**

   ***a*) Si f es continua en $[0,1]$, entonces es medible.**

   ***b*) Si f es continua en casi todo punto de $[0,1]$ (esto es, si su conjunto de discontinuidades es nulo), entonces es medible.**

item (a)

Demostración

1. Definición de medibilidad: Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es medible si para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in [0,1] : f(x) > a\}$ es medible.

2. Propiedad de los conjuntos abiertos: Si f es continua, entonces la preimagen de cualquier conjunto abierto bajo f es un conjunto abierto (en $[0,1]$). Esto se debe a la propiedad de la continuidad.

3. Medibilidad de conjuntos abiertos: Los conjuntos abiertos en $[0,1]$ son medibles en el sentido de Lebesgue.

4. Aplicación de la continuidad: Consideremos un conjunto de la forma (a,∞). Dado que f es continua, la preimagen de (a,∞) bajo f es:

$$f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in [0,1] : f(x) > a\}.$$

Dado que (a,∞) es un conjunto abierto y la preimagen de un conjunto abierto bajo una función continua es abierta, se sigue que:

$$\{x \in [0,1] : f(x) > a\}$$

es un conjunto abierto en $[0,1]$ y, por lo tanto, medible.

item (b)

Demostración

1. Conjunto de discontinuidades: Supongamos que $D \subseteq [0,1]$ es el conjunto de discontinuidades de f. Por hipótesis, D es un conjunto nulo, es decir, $\mu(D) = 0$, donde μ denota la medida de Lebesgue.

2. Descomposición de $[0,1]$: Dado que D es nulo, podemos escribir $[0,1]$ como la unión disjunta de D y C, donde $C = [0,1] \setminus D$ es el conjunto donde f es continua. Así:

$$[0,1] = C \cup D.$$

Dado que $\mu(D) = 0$, tenemos $\mu(C) = 1$.

3. Función medible en C: La función f es continua en C y $C \subseteq [0,1]$. Hemos demostrado en la parte (a) que si f es continua en un conjunto, entonces es medible en ese conjunto. Por lo tanto, f es medible en C.

4. Extensión a $[0,1]$: Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, consideremos el conjunto $\{x \in [0,1] : f(x) > a\}$. Podemos escribir este conjunto como:

$$\{x \in [0,1] : f(x) > a\} = \{x \in C : f(x) > a\} \cup \{x \in D : f(x) > a\}.$$

Dado que f es medible en C, $\{x \in C : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Además, dado que D es un conjunto nulo, cualquier subconjunto de D es también nulo y, por lo tanto, medible:

$$\{x \in D : f(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

5. Unión de conjuntos medibles: La unión de dos conjuntos medibles es medible. Por lo tanto,

$$\{x \in [0,1] : f(x) > a\} = \{x \in C : f(x) > a\} \cup \{x \in D : f(x) > a\}$$

es un conjunto medible.

7. **Dada una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en E, consideremos las funciones**

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \textbf{y} \quad I(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Probar que si las funciones f_n son medibles, entonces S e I también lo son.

Demostración

1. Medibilidad de $S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

Consideremos el conjunto $\{x \in E : S(x) \leq a\}$. Por la definición de $S(x)$:

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

Por lo tanto,

$$\{x \in E : S(x) \leq a\} = \{x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq a\}$$

Formalmente:

$$\{x \in E : S(x) \leq a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \leq a\}$$

Dado que cada f_n es medible, sabemos que $\{x \in E : f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$ para todo n. La unión numerable de conjuntos medibles también es medible, por lo que:

$$\{x \in E : S(x) \leq a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$$

Esto demuestra que $S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ es medible.

2. Medibilidad de $I(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

Consideremos el conjunto $\{x \in E : I(x) \geq a\}$. Por la definición de $I(x)$:

$$I(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

Por lo tanto,

$$\{x \in E : I(x) \geq a\} = \{x \in E : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geq a\}$$

Esto significa que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq a$. Formalmente:

$$\{x \in E : I(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \geq a\}$$

Dado que cada f_n es medible, sabemos que $\{x \in E : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$ para todo n. La intersección numerable de conjuntos medibles también es medible, por lo que:

$$\{x \in E : I(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$$

Esto demuestra que $I(x) = \text{ínf}_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ es medible.

8. **Dada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y no negativas en E, sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Probar que f es medible, y que**

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Parte 1: Medibilidad de f

Dado que cada f_n es medible y no negativa, consideremos la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1. Definición de f:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

2. Funciones parciales f_k: Definamos la sucesión de funciones parciales:

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Cada f_k es una suma finita de funciones medibles y no negativas, por lo tanto, f_k es medible.

3. Límite puntual: La función $f(x)$ es el límite puntual de la sucesión $(f_k(x))$:

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x).$$

Dado que $f_k(x)$ es una sucesión de funciones medibles y la medibilidad es preservada bajo límites puntuales de sucesiones no decrecientes de funciones (cada $f_k \leq f_{k+1}$), se sigue que $f(x)$ es medible.

Parte 2: Igualdad de las integrales

Para demostrar que

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu,$$

utilizamos el Teorema de Convergencia Monótona (Teorema de Beppo Levi).

Teorema de Convergencia Monótona

El Teorema de Convergencia Monótona establece que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones no negativas y medibles tales que $g_n \leq g_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, entonces

$$\int_E g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu.$$

Aplicación del Teorema de Convergencia Monótona

1. Definición de f_k: Como antes, definimos

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Entonces, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ para todo $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$, y $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

2. Aplicación del Teorema: Aplicando el Teorema de Convergencia Monótona, obtenemos

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu.$$

3. Integral de f_k: Dado que f_k es una suma finita de funciones medibles y no negativas, podemos usar la linealidad de la integral para obtener:

$$\int_E f_k \, d\mu = \int_E \left(\sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n \, d\mu.$$

4. Límite de la suma: Tomando el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n \, d\mu.$$

5. Serie de integrales: Dado que la suma de una serie infinita de números no negativos es igual al límite de sus sumas parciales, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Conclusión

Hemos demostrado que:

1. Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles y no negativas, entonces $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es medible. 2. La integral de f es igual a la suma de las integrales de f_n:

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Esto se sigue del Teorema de Convergencia Monótona y las propiedades de las funciones medibles y no negativas.

9. **Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa e integrable. Probar que si $A \in \mathcal{M}$, entonces**

$$\int_A f(x+y) \, d\mu(x) = \int_{A+y} f(x) \, d\mu(x)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $A + y \subseteq E$.

10. **Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Supongamos que E tiene medida finita. Probar que f es integrable.**

Demostración:

Dado que f es acotada, tenemos $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E$. Utilizaremos esta propiedad para estimar la integral de $|f|$ sobre E.

1. **Estimación de la Integral**:

Dado que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E$, podemos escribir:

$$\int_E |f(x)|\, d\mu(x) \leq \int_E M\, d\mu(x).$$

2. **Integral de una Constante**:

La integral de una función constante M sobre el conjunto E es simplemente el producto de M con la medida de E:

$$\int_E M\, d\mu(x) = M \cdot \mu(E).$$

3. **Finidad de la Medida de E**:

Dado que $\mu(E) < \infty$ y M es una constante finita (ya que f es acotada), el producto $M \cdot \mu(E)$ es finito:

$$M \cdot \mu(E) < \infty.$$

4. **Conclusión**:

Combinando las desigualdades anteriores, obtenemos:

$$\int_E |f(x)|\, d\mu(x) \leq M \cdot \mu(E) < \infty.$$

Por lo tanto, la función f es integrable sobre E.

Conclusión

Hemos demostrado que si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función medible y acotada, y si E tiene medida finita, entonces f es integrable sobre E.

11. **Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $A \subseteq E$ medible se tiene que**

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu.$$

Probar que $f = g$ en casi todo punto de E.

12. **Consideremos $E = [0, +\infty)$. Sea $f_n : E \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = \left(-\frac{1}{n}\right) \chi_{[0,n]}$. Probar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función nula en E. Probar que, sin embargo,**

$$\int_E f_n \, d\mu = -1, \quad \textbf{de manera que} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = -1 < 0 = \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Deducir que el lema de Fatou no vale si las funciones f_n no son no negativas, aun cuando converjan uniformemente.

13. **Sean $f : E \to \mathbb{R}$ una función integrable y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de E tales que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Probar que:**

    ***a*) Si los E_n son disjuntos dos a dos entonces**

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

    ***b*) Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente entonces**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu \quad \textbf{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus E_n} f \, d\mu = 0.$$

14. **Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que para todo $x > 0$ la función $F_x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F_x(t) = f(t)e^{-xt}$ es integrable, y que la función $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{(0,+\infty)} f(t)e^{-xt} \, dt$, es continua.**

Para demostrar que la función $F_x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F_x(t) = f(t)e^{-xt}$ es integrable para todo $x > 0$, vamos a mostrar que la integral de $|F_x(t)|$ sobre $(0, +\infty)$ es finita.

Paso 1: Propiedades de f y F_x

Primero, recordemos que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $(0, +\infty)$. Esto significa que:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| \, dt < \infty.$$

Queremos demostrar que:

$$\int_0^{+\infty} |F_x(t)| \, dt < \infty,$$

donde $F_x(t) = f(t)e^{-xt}$.

Paso 2: Análisis de la integrabilidad de F_x

Dado que $|F_x(t)| = |f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-xt}$, la integral que queremos evaluar es:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt.$$

Paso 3: Uso de la comparación

Sabemos que e^{-xt} es una función decreciente y acotada en $(0, +\infty)$ para cualquier $x > 0$. Esto significa que para $t \geq 0$, $0 \leq e^{-xt} \leq 1$.

Multiplicando $|f(t)|$ por e^{-xt} no aumenta la magnitud de $|f(t)|$, y la función e^{-xt} tiende a cero exponencialmente rápido. Esto sugiere que la función $|f(t)|e^{-xt}$ debería ser más fácil de integrar que $|f(t)|$ sola, ya que la exponencial decae rápidamente.

Paso 4: Justificación usando la dominación por una función integrable

Consideremos la integral:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt.$$

Podemos usar la comparación directa para argumentar la integrabilidad. Dado que $|f(t)|$ es integrable, existe una constante M tal que:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt = M < \infty.$$

Multiplicando $|f(t)|$ por e^{-xt} da:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt.$$

Sabemos que $e^{-xt} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, así que:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot 1\, dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt = M.$$

Conclusión

Dado que $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt = M < \infty$, podemos concluir que la integral:

$$\int_0^{+\infty} |F_x(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\, dt < \infty.$$

Por lo tanto, $F_x(t) = f(t)e^{-xt}$ es integrable en $(0, +\infty)$ para cualquier $x > 0$.

Luego, para probar que la función $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\, dt$$

es continua, utilizaremos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y las propiedades de las integrales impropias.

Paso 1: Considerar la definición de g

Definimos $g(x)$ como

$$g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\, dt.$$

Queremos mostrar que $g(x)$ es continua, es decir, que para cualquier $x_0 > 0$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

Paso 2: Diferencia $g(x) - g(x_0)$

Consideremos la diferencia

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\, dt - \int_0^\infty f(t)e^{-x_0 t}\, dt.$$

Podemos combinar estas integrales en una sola integral:

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^\infty f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0 t})\, dt.$$

Paso 3: Dominación

Dado que $f(t)$ es integrable y e^{-xt} y $e^{-x_0 t}$ son acotadas por 1 en $(0, +\infty)$, podemos usar la desigualdad triangular para obtener:

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \int_0^\infty |f(t)||e^{-xt} - e^{-x_0 t}|\, dt.$$

Paso 4: Uso del Teorema de Convergencia Dominada

Para aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, notemos que cuando $x \to x_0$, $e^{-xt} \to e^{-x_0 t}$ puntualmente para cada t. Entonces, si mostramos que $|f(t)||e^{-xt} - e^{-x_0 t}|$ está dominada por una función integrable independiente de x, podemos concluir la continuidad de $g(x)$.

Consideremos la función

$$h(t) = |f(t)|(|e^{-xt} - e^{-x_0 t}|).$$

Paso 5: Dominación de $h(t)$

Notamos que

$$|e^{-xt} - e^{-x_0 t}| \leq |e^{-xt}| + |e^{-x_0 t}| = e^{-xt} + e^{-x_0 t} \leq 2$$

para $t \geq 0$.

Por lo tanto,

$$h(t) = |f(t)||e^{-xt} - e^{-x_0 t}| \leq |f(t)|(e^{-xt} + e^{-x_0 t}) \leq |f(t)| \cdot 2 = 2|f(t)|.$$

Dado que $f(t)$ es integrable en $(0, +\infty)$, también lo es $2|f(t)|$.

Paso 6: Aplicación del Teorema de Convergencia Dominada

Aplicamos el Teorema de Convergencia Dominada. Dado que $|f(t)|(|e^{-xt} - e^{-x_0 t}|)$ está dominada por la función integrable $2|f(t)|$ y $e^{-xt} \to e^{-x_0 t}$ puntualmente, obtenemos que:

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^\infty f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0 t})\, dt = \int_0^\infty f(t) \lim_{x \to x_0} (e^{-xt} - e^{-x_0 t})\, dt = \int_0^\infty f(t)(e^{-x_0 t} - e^{-x_0 t})\, dt = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Conclusión

Hemos demostrado que $g(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-xt}\, dt$ es continua para todo $x > 0$.