Análisis Avanzado
Recuperatorio del Segundo Parcial - 20/7/2023

"Pero tenés que tener en cuenta una cosa ineludible. Rosario... pleno verano... mediodía,un sol de la puta madre que lo reparió, algo así como 83 grados a la sombra, y ese gordo metido adentro de un traje de Papá Noel con una tela tipo felpa así de gruesa, así de gruesa no te miento, gorro, barba de algodón, bigotes, botas y guantes.¡Guantes! Porque la vieja era una vieja hinchapelotas, conservadora, que quería que el Gordo se pareciera exactamente a Papá Noel y que se vistiera todo como correspondía,el pobre Gordo"

El Gordo Luis - Roberto Fontanarrosa

1. **Consideramos el espacio normado $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Demostrar que los siguientes operadores son lineales, acotados y hallar su norma:**

   a) $T : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad T(f)(x) = x^2 f(0)$**.**

   b) $T : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad T(f)(x) = f(x^2)$**.**

a. Operador $T : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad T(f)(x) = x^2 f(0)$

Linealidad: Para mostrar que T es lineal, debemos verificar que para cualquier $f, g \in C([0,1])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x).$$

Calculamos:

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = x^2(\alpha f(0) + \beta g(0)) = \alpha x^2 f(0) + \beta x^2 g(0) = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x).$$

Esto muestra que T es lineal.

Acotado: Para mostrar que T es acotado, necesitamos encontrar una constante C tal que $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ para todo $f \in C([0,1])$.

Primero, observemos que:

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |T(f)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^2 f(0)|.$$

Dado que $x^2 \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, tenemos:

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^2 f(0)| = |f(0)| \sup_{x\in[0,1]} x^2 \leq |f(0)| \leq \|f\|_\infty.$$

Por lo tanto, $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, y podemos tomar $C = 1$. Esto muestra que T es acotado con $\|T\| = 1$.

Norma: Dado que $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ y que para $f(x) = 1$,

$$\|T(f)\|_\infty = \|x^2\|_\infty = 1 = \|f\|_\infty,$$

tenemos que la norma de T es:

$$\|T\| = 1.$$

b. Operador $T : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad T(f)(x) = f(x^2)$

Linealidad: Para mostrar que T es lineal, debemos verificar que para cualquier $f, g \in C([0,1])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x).$$

Calculamos:

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(x^2) = \alpha f(x^2) + \beta g(x^2) = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x).$$

Esto muestra que T es lineal.

Acotado: Para mostrar que T es acotado, necesitamos encontrar una constante C tal que $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ para todo $f \in C([0,1])$.

Primero, observemos que:

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |T(f)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x^2)|.$$

Dado que $x^2 \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$, tenemos:

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x^2)| \leq \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| = \|f\|_\infty.$$

Por lo tanto, $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, y podemos tomar $C = 1$. Esto muestra que T es acotado con $\|T\| = 1$.

Norma: Dado que $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ y que para $f(x) = x$,

$$\|T(f)\|_\infty = \|f(x^2)\|_\infty = \|x^2\|_\infty = 1 = \|f\|_\infty,$$

tenemos que la norma de T es:

$$\|T\| = 1.$$

Conclusión:

Ambos operadores son lineales y acotados, y sus normas son: 1. $\|T\| = 1$ para $T(f)(x) = x^2 f(0)$. 2. $\|T\| = 1$ para $T(f)(x) = f(x^2)$.

2. **Sean K un espacio métrico compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ con $f_n(x_n) = 0$. Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f : K \to \mathbb{R}$, entonces existe $x \in K$ tal que $f(x) = 0$.**

1. Convergencia Uniforme y Compacidad

Dado que (f_n) converge uniformemente a f en el espacio métrico compacto K, sabemos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \implies \|f_n - f\|_\infty < \epsilon,$$

2. Propiedades de los x_n

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que $f_n(x_n) = 0$.

3. Compacidad y Sucesión de Puntos

Dado que K es compacto, la sucesión (x_n) en K tiene una subsecuencia convergente, es decir, existe una subsecuencia (x_{n_k}) y un punto $x \in K$ tal que:

$$x_{n_k} \to x \text{ cuando } k \to \infty.$$

4. Continuidad de f y Convergencia Uniforme

Sabemos que (f_n) converge uniformemente a f. Consideremos $\epsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \epsilon.$$

En particular, esto implica que para $n = n_k \geq N$,

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \epsilon.$$

Pero sabemos que $f_{n_k}(x_{n_k}) = 0$, por lo tanto,

$$|f(x_{n_k})| < \epsilon.$$

5. Paso al Límite

Dado que $x_{n_k} \to x$ y f es continua (la función límite de una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente es continua),

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Usando la propiedad anterior,

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \leq \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, esto implica que:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0.$$

Por la continuidad de f,

$$f(x) = 0.$$

3. **Sea $S \subseteq [0,1]$ el conjunto de todos los puntos x tales que el número 2 aparece antes que el número 3 en el desarrollo decimal de x. Probar que S es medible y hallar su medida.**

Para abordar este problema, primero necesitamos entender cómo los números en el intervalo $[0,1]$ se representan en su desarrollo decimal y luego determinar las propiedades del conjunto S.

Representación Decimal en $[0,1]$

Un número $x \in [0,1]$ se puede escribir en forma decimal como:

$$x = 0.a_1a_2a_3a_4\dots$$

donde cada a_i es un dígito decimal (0 a 9).

Definición del Conjunto S

El conjunto $S \subseteq [0,1]$ se define como el conjunto de todos los puntos x tales que el número 2 aparece antes que el número 3 en su desarrollo decimal. Formalmente,

$$S = \{x \in [0,1] : \exists n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n < m \text{ y } a_n = 2, a_m = 3\},$$

donde $0.a_1a_2a_3\dots$ es el desarrollo decimal de x.

Medibilidad del Conjunto S

Esto se puede hacer mostrando que S puede ser escrito como una unión numerable de intervalos abiertos (o cerrados).

Podemos escribir S como la unión de conjuntos de la forma:

$$S_k = \{x \in [0,1] : a_k = 2 \text{ y } a_j \neq 3 \text{ para todo } j < k\}.$$

Cada S_k es el conjunto de números en $[0,1]$ cuyo k-ésimo dígito decimal es 2 y ningún dígito anterior es 3. Cada S_k es un intervalo (o una unión de intervalos) en $[0,1]$.

Por lo tanto, S es la unión numerable:

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Dado que cada S_k es un conjunto de medible, S es también un conjunto medible.

Medida del Conjunto S

Para encontrar la medida de S, observamos que S y su complemento S^c (donde el número 3 aparece antes que el número 2 en el desarrollo decimal) son eventos disjuntos y exhaustivos. Es decir,

$$[0,1] = S \cup S^c.$$

La medida del conjunto $[0,1]$ es 1, y puesto que no hay restricciones adicionales (es decir, cualquier número puede ser el primero en aparecer en un desarrollo decimal), podemos razonablemente inferir que el evento de que 2 aparezca antes que 3 es equiprobable al evento de que 3 aparezca antes que 2.

Esto implica que:

$$\mu(S) = \mu(S^c) = \frac{1}{2}.$$

Conclusión

El conjunto S es medible y su medida es:

$$\mu(S) = \frac{1}{2}.$$

4. **Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva e integrable. Calcular**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^{1/n}\, dx.$$

Paso 1: Análisis del límite puntual

Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideramos la función $f(x)^{1/n}$. Cuando $n \to \infty$, sabemos que:

$$f(x)^{1/n} \to 1.$$

Esto es válido porque para cualquier número positivo a, se cumple que $a^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Paso 2: Dominación por una función integrable

Como $f(x)$ es positiva e integrable, $f(x) \geq 0$ para todo x y $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx < \infty$.

Dado que $f(x) \geq 0$ para todo x, tenemos que $f(x)^{1/n} \leq f(x) + 1$ para n suficientemente grande, ya que $f(x)^{1/n} \leq \max(1, f(x))$.

Paso 3: Teorema de Convergencia Dominada

Aplicamos el Teorema de Convergencia Dominada, que requiere dos condiciones:
1. $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente.
2. Existe una función integrable $g(x)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n y x.

En nuestro caso:
1. La sucesión $f_n(x) = f(x)^{1/n}$ converge puntualmente a 1 para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Necesitamos encontrar una función $g(x)$ integrable que domine $|f(x)^{1/n}|$.

Dado que $f(x)$ es positiva e integrable, podemos tomar:

$$g(x) = f(x) + 1.$$

Verificación de la dominación

Para $n \geq 1$, observamos que:

$$0 \leq f(x)^{1/n} \leq \max(1, f(x)) \leq f(x) + 1.$$

La función $g(x) = f(x) + 1$ es integrable porque la suma de funciones integrables es integrable

Aplicación del Teorema de Convergencia Dominada

Dado que $\{f(x)^{1/n}\}$ está dominada por $f(x) + 1$ y converge puntualmente a 1, aplicamos el Teorema de Convergencia Dominada:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^{1/n}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(x)^{1/n}\, dx = \int_{\mathbb{R}} 1\, dx. = \boxed{1}$$