Ejemplo 2do parcial 06/07/2023

"Pará un cacho, Te digo una cosa... Te digo una cosa... Yo te estoy respondiendo, te estoy contestando por una elemental regla de cortesía. Por una... digamos... elemental norma de respeto . Pero la verdad es que no debería darte ni cinco de pelota, ni cinco de bola debería darte... Vos no sos mi viejo, ni sos cana, ni sos el fiscal de la Nación."

El sordo - Roberto Fontanarrosa

1. **Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y completo, y sea $T : E \to E$ un operador lineal acotado tal que existe $r > 0$ tal que**

$$\|Tx\| \geq r\|x\| \quad \textbf{para todo } x \in E.$$

Probar que T es inyectivo y que su imagen $T(E)$ es cerrada.

1. Inyectividad de T:

Para demostrar que T es inyectivo, supongamos que $Tx = Ty$ para algunos $x, y \in E$. Queremos demostrar que $x = y$.

Dado que T es lineal, tenemos:

$$Tx = Ty \implies T(x - y) = 0.$$

Dado que $\|Tx\| \geq r\|x\|$ para todo $x \in E$, aplicamos esta desigualdad al vector $x - y$:

$$\|T(x - y)\| \geq r\|x - y\|.$$

Como $T(x - y) = 0$, se sigue que:

$$0 = \|T(x - y)\| \geq r\|x - y\|.$$

Dado que $r > 0$, esta desigualdad implica que:

$$\|x - y\| = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y.$$

Por lo tanto, T es inyectivo.

2. Cerradura de la imagen de T:

Para demostrar que la imagen $T(E)$ es cerrada, primero mostramos que T tiene un inverso acotado en su imagen.

Dado que T es inyectivo, consideremos el operador $T^{-1} : T(E) \to E$ definido por $T^{-1}(Tx) = x$ para todo $x \in E$.

Queremos demostrar que T^{-1} es acotado. Dado $y \in T(E)$, existe $x \in E$ tal que $y = Tx$. Entonces:

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| = \|T^{-1}y\|.$$

Utilizando la desigualdad $\|Tx\| \geq r\|x\|$, tenemos:

$$\|y\| = \|Tx\| \geq r\|x\| = r\|T^{-1}y\|.$$

Reorganizando, obtenemos:

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{r}\|y\|.$$

Esto muestra que T^{-1} es acotado, es decir, existe una constante $M = \frac{1}{r}$ tal que:

$$\|T^{-1}y\| \leq M\|y\| \quad \text{para todo } y \in T(E).$$

Dado que T^{-1} es acotado y definido en todo $T(E)$, esto implica que $T(E)$ es cerrado. La razón es que el operador T^{-1} es una aplicación continua (por ser lineal y acotado) y, por lo tanto, la inversa de un operador continuo en un espacio normado completo (Banach) que es inyectiva y acotada, implica que la imagen es cerrada.

Para ver esto más explícitamente, consideremos una sucesión $\{y_n\} \subseteq T(E)$ tal que $y_n \to y$ en E. Queremos demostrar que $y \in T(E)$.

Dado que $y_n \in T(E)$, existen $x_n \in E$ tales que $y_n = Tx_n$. Debido a que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy (ya que converge en E), y dado que T^{-1} es continuo, la sucesión $\{x_n\} = \{T^{-1}y_n\}$ también es de Cauchy en E porque:

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|.$$

Dado que E es completo, $\{x_n\}$ converge a algún $x \in E$. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces, por la continuidad de T,

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tx.$$

Por lo tanto, $y \in T(E)$, lo que demuestra que $T(E)$ es cerrado.

2. **Determinar si la sucesión de funciones $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$ converge uniformemente en $[-2, 2]$ y en $\mathbb{R}$.**

1. Convergencia Puntual

Primero, identifiquemos el límite puntual de la sucesión $f_n(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx).$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, notamos que $\frac{x}{n}\sin(nx) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Esto se debe a que $\frac{x}{n} \to 0$ y $\sin(nx)$ está acotada por -1 y 1. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{x}{n}\sin(nx)\right) = x.$$

Entonces, el límite puntual es la función $f(x) = x$.

2. Convergencia Uniforme en $[-2, 2]$

Para verificar la convergencia uniforme en $[-2, 2]$, consideremos la diferencia $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| x + \frac{x}{n}\sin(nx) - x \right| = \left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right|.$$

Dado que $|\sin(nx)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right| \leq \frac{|x|}{n}.$$

Para $x \in [-2, 2]$, esto nos da:

$$\left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right| \leq \frac{2}{n}.$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \epsilon$. Entonces, para todo $n \geq N$ y para todo $x \in [-2, 2]$,

$$\left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right| \leq \frac{2}{n} < \epsilon.$$

Esto implica que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in [-2, 2]$ cuando $n \geq N$.

Por lo tanto, la sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = x$ en $[-2, 2]$.

3. Convergencia Uniforme en $\mathbb{R}$

Para determinar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$, consideremos la misma diferencia $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right|.$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right| \leq \frac{|x|}{n}.$$

Para que la convergencia sea uniforme en $\mathbb{R}$, necesitamos que para cualquier $\epsilon > 0$, exista un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{x}{n}\sin(nx) \right| < \epsilon.$$

Esto implicaría que

$$\frac{|x|}{n} < \epsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, esto no puede ser cierto para todos los $x \in \mathbb{R}$ a menos que x esté acotado. En particular, para x suficientemente grande, $\frac{|x|}{n}$ puede ser arbitrariamente grande, y no podemos encontrar un N que funcione para todos los $x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, la sucesión $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x) = x$ en $\mathbb{R}$.

Conclusión

- La sucesión de funciones $f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$ converge uniformemente a $f(x) = x$ en $[-2, 2]$. - La sucesión de funciones $f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$ no converge uniformemente a $f(x) = x$ en $\mathbb{R}$.

3. **Sea $\mathbb{R}$ dotado con μ la medida de Lebesgue. Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos**

$$I_x = \{y \in \mathbb{R} : -x \leq y \leq x\}.$$

Sea ahora $L \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 < \mu(L) < \infty$. Demostrar lo siguiente:

a) **La función $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $h(x) = \mu(L \cap I_x)$ es continua.**

b) **Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una partición de n subconjuntos de L, todos de la misma medida.**

Vamos a demostrar las dos afirmaciones sobre el conjunto $L \subseteq \mathbb{R}$ y la función h definida por $h(x) = \mu(L \cap I_x)$.

Parte 1: La función h es continua

Dada la función $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $h(x) = \mu(L \cap I_x)$, queremos demostrar que h es continua.

Definición y propiedades de I_x

Recordemos que:
$$I_x = \{y \in \mathbb{R} : -x \leq y \leq x\}.$$

Esto es, I_x es el intervalo simétrico centrado en el origen con longitud $2x$.

Propiedades de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue μ es finitamente aditiva y continua desde abajo y desde arriba. Esto significa que si (A_n) es una sucesión creciente de conjuntos medibles con $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$. Del mismo modo, si (A_n) es una sucesión decreciente de conjuntos medibles con $A_n \downarrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Continuidad de h

Consideremos dos casos:

1. **Caso 1: $x \to x_0^+$**: Sea $x_0 \geq 0$. Queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0^+} h(x) = h(x_0)$.

Para $x > x_0$, tenemos $I_{x_0} \subseteq I_x$. Por lo tanto:

$$L \cap I_{x_0} \subseteq L \cap I_x.$$

Como $x \to x_0^+$, los intervalos I_x se aproximan a I_{x_0} desde la derecha, y por la continuidad de la medida desde abajo:

$$\lim_{x \to x_0^+} \mu(L \cap I_x) = \mu\left(\bigcap_{x > x_0} L \cap I_x\right) = \mu(L \cap I_{x_0}) = h(x_0).$$

2. **Caso 2: $x \to x_0^-$**: Sea $x_0 > 0$. Queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0^-} h(x) = h(x_0)$.

Para $x < x_0$, tenemos $I_x \subseteq I_{x_0}$. Por lo tanto:

$$L \cap I_x \subseteq L \cap I_{x_0}.$$

Como $x \to x_0^-$, los intervalos I_x se aproximan a I_{x_0} desde la izquierda, y por la continuidad de la medida desde arriba:

$$\lim_{x \to x_0^-} \mu(L \cap I_x) = \mu\left(\bigcup_{x<x_0} L \cap I_x\right) = \mu(L \cap I_{x_0}) = h(x_0).$$

En ambos casos, hemos demostrado que $h(x) \to h(x_0)$ cuando $x \to x_0$. Por lo tanto, h es continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Parte 2: Existe una partición de L en n subconjuntos de la misma medida

Queremos demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición de L en n subconjuntos de la misma medida.

Propiedad de la medida de Lebesgue

Dado que $0 < \mu(L) < \infty$, la medida $\mu(L)$ es finita y positiva. Podemos dividir L en n partes de igual medida.

Construcción de la partición

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, definimos

$$A_k = \left\{ y \in L : \frac{(k-1)\mu(L)}{n} \leq y < \frac{k\mu(L)}{n} \right\}.$$

Observamos que los A_k son disjuntos y su unión es L:

$$L = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Cada conjunto A_k tiene la misma medida:

$$\mu(A_k) = \frac{\mu(L)}{n}.$$

Conclusión

Hemos demostrado que:

1. La función $h(x) = \mu(L \cap I_x)$ es continua. 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición de L en n subconjuntos de la misma medida.

4. **Probar que si $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ es integrable, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = c > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces**

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \left(\frac{|f(x)|}{n}\right)^{\alpha}\right) dx = \begin{cases} +\infty & \textbf{si } 0 < \alpha < 1, \\ c & \textbf{si } \alpha = 1, \\ 0 & \textbf{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Sugerencia: usar que $\log(1 + x^{\alpha}) \leq \alpha x$ para $\alpha \geq 1$.

Naaa...