Análisis Avanzado
Recuperatorio del segundo parcial

26/07/2021

"Reparad en ese pato que corre. Reparad en aquel cordero que trisca. Reparad esa cerca que huyen los animalitos.."
Roberto Fontanarrosa

1. **Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ una transformación lineal. Probar que T es continua si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E que tiende a 0 la sucesión $(T(x_n))_{n\geq 1}$ es acotada.**

   Está resuelto en el 2do parcial del primer cuatrimestre de 2024

2. **Probar que la serie**
$$f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$
define una función continua en $(0, +\infty)$. Probar que además f es derivable, y calcular su derivada.

Para probar que la serie
$$f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$
define una función continua en $(0, +\infty)$, procederemos de la siguiente manera:

Paso 1: Estudio de la continuidad de cada sumanto.

Consideremos el término general de la serie:
$$a_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$
se vé facilmente que es continuo, por lo que la sumatoria también es continua.

Paso 2: Cota del Término General

Utilizamos la cota del seno, $|\sin y| \leq |y|$, para obtener:
$$\left|2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)\right| \leq 2^n \left|\frac{1}{3^n x}\right| = \frac{2^n}{3^n x}.$$
Observamos que:
$$\frac{2^n}{3^n x} = \frac{(2/3)^n}{x}.$$

La serie $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ es una serie geométrica con razón $\frac{2}{3} < 1$, por lo que converge. Esto implica que la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{3^n x}$$

converge para cualquier $x > 0$.

Paso 3: Aplicación de la Prueba de la Convergencia Absoluta

Dado que los términos $\frac{2^n}{3^n x}$ son dominados por una serie geométrica convergente, por la prueba de la convergencia absoluta, usando Weierstrass, la serie

$$\sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$

converge absolutamente y uniformemente para todo $x > 0$.

Y como la convergencia uniforme de funciones continua define una función continua, hemos demostrado que la serie

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$

define una función continua en $(0, +\infty)$.

Para probar que $f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$ es derivable y calcular su derivada, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Convergencia Uniforme de la Serie de Derivadas

Primero, necesitamos considerar la derivada de cada término de la serie. Sea

$$f_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

Calculemos la derivada de $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = 2^n \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)\right).$$

Usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)\right) = \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

La derivada de $\frac{1}{3^n x}$ respecto a x es:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3^n x}\right) = -\frac{1}{3^n x^2}.$$

Entonces:

$$f_n'(x) = 2^n \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right)\left(-\frac{1}{3^n x^2}\right) = -\frac{2^n}{3^n x^2}\cos\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

Paso 2: Convergencia de la Serie de Derivadas

Para mostrar que $f(x)$ es derivable, necesitamos que la serie de derivadas $f'_n(x)$ converja uniformemente. Consideremos la cota de $|f'_n(x)|$:

$$|f'_n(x)| = \left| -\frac{2^n}{3^n x^2} \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right) \right| \leq \frac{2^n}{3^n x^2}.$$

La serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

es una serie geométrica con razón $\frac{2}{3}$, que converge. Por lo tanto, la serie de derivadas $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ converge uniformemente en cualquier intervalo $[a, b] \subseteq (0, \infty)$.

Paso 3: Aplicación del Teorema de Convergencia Uniforme

Dado que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente y la serie de derivadas $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ también converge uniformemente, podemos intercambiar la suma y la derivada:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} f'_n(x).$$

Paso 4: Cálculo de la Derivada

Hemos encontrado que:

$$f'_n(x) = -\frac{2^n}{3^n x^2} \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} -\frac{2^n}{3^n x^2} \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

Simplificando, obtenemos:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n} \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

Conclusión

Hemos demostrado que $f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$ es derivable en $(0, +\infty)$ y su derivada es:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n} \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right).$$

3. **Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medible. Probar que para todo $\epsilon > 0$ existen $M \geq 0$ y $A \subseteq [0, 1]$ medible tales que:**

- $|f(x)| \leq M$ **para todo** $x \in [0, 1] \setminus A$.
- $\mu(A) < \epsilon$.

Vamos a trabajar con funciones medibles en un intervalo finito y la noción de conjuntos de nivel.

Paso 1: Definición del Conjunto de Nivel

Dado que f es medible, consideramos los conjuntos de nivel de f. Definimos los conjuntos A_k como:

$$A_k = \{x \in [0,1] : |f(x)| > k\}.$$

Paso 2: Propiedades de los Conjuntos de Nivel

Cada conjunto A_k es medible porque f es medible y el conjunto $\{x \in [0,1] : |f(x)| > k\}$ es un conjunto medible. Además, tenemos:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots .$$

Paso 3: Consideración del Límite de los Conjuntos de Nivel

Definimos $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Este conjunto A contiene los puntos donde $|f(x)|$ no está acotado. Es decir, para $x \in A$, $|f(x)|$ no es finito. La medida de A es:

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Paso 4: Existencia de k para Aproximación Fina

Dado que $\mu(A) \to 0$ a medida que $k \to \infty$, para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un k suficientemente grande tal que:

$$\mu(A_k) < \epsilon.$$

Sea $M = k$. Entonces, $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1] \setminus A_k$ y $\mu(A_k) < \epsilon$.

Conclusión

Tomando $A = A_k$ con el k encontrado en el paso 4, concluimos que existen $M \geq 0$ y un conjunto medible $A \subseteq [0,1]$ tales que: - $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1] \setminus A$, - $\mu(A) < \epsilon$.

Esta conclusión es válida para cualquier $\epsilon > 0$. Por lo tanto, hemos probado el enunciado.

4. **Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que para todo $x > 0$ la función $F_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $F_x(t) = f(t)e^{-xt}$ es integrable, y que la función**

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{[0,1]} f(t)e^{-xt}\, dt$$

es continua.

Ver ejercicio 14 de la guia 9.