Ejemplo 2do parcial 06/07/2023

1. **Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y completo, y sea $T : E \to E$ un operador lineal acotado tal que existe $r > 0$ tal que**

$$\|Tx\| \geq r\|x\| \quad \textbf{para todo } x \in E.$$

Probar que T es inyectivo y que su imagen $T(E)$ es cerrada.

1. Inyectividad de T:

Para demostrar que T es inyectivo, supongamos que $Tx = Ty$ para algunos $x, y \in E$. Queremos demostrar que $x = y$.

Dado que T es lineal, tenemos:

$$Tx = Ty \implies T(x-y) = 0.$$

Dado que $\|Tx\| \geq r\|x\|$ para todo $x \in E$, aplicamos esta desigualdad al vector $x - y$:

$$\|T(x-y)\| \geq r\|x-y\|.$$

Como $T(x-y) = 0$, se sigue que:

$$0 = \|T(x-y)\| \geq r\|x-y\|.$$

Dado que $r > 0$, esta desigualdad implica que:

$$\|x-y\| = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y.$$

Por lo tanto, T es inyectivo.

2. Cerradura de la imagen de T:

Para demostrar que la imagen $T(E)$ es cerrada, primero mostramos que T tiene un inverso acotado en su imagen.

Dado que T es inyectivo, consideremos el operador $T^{-1} : T(E) \to E$ definido por $T^{-1}(Tx) = x$ para todo $x \in E$.

Queremos demostrar que T^{-1} es acotado. Dado $y \in T(E)$, existe $x \in E$ tal que $y = Tx$. Entonces:

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| = \|T^{-1}y\|.$$

Utilizando la desigualdad $\|Tx\| \geq r\|x\|$, tenemos:

$$\|y\| = \|Tx\| \geq r\|x\| = r\|T^{-1}y\|.$$

Reorganizando, obtenemos:

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{r}\|y\|.$$

Esto muestra que T^{-1} es acotado, es decir, existe una constante $M = \frac{1}{r}$ tal que:

$$\|T^{-1}y\| \leq M\|y\| \quad \text{para todo } y \in T(E).$$

Dado que T^{-1} es acotado y definido en todo $T(E)$, esto implica que $T(E)$ es cerrado. La razón es que el operador T^{-1} es una aplicación continua (por ser lineal y acotado) y, por lo tanto, la inversa de un operador continuo en un espacio normado completo (Banach) que es inyectiva y acotada, implica que la imagen es cerrada.

Para ver esto más explícitamente, consideremos una sucesión $\{y_n\} \subseteq T(E)$ tal que $y_n \to y$ en E. Queremos demostrar que $y \in T(E)$.

Dado que $y_n \in T(E)$, existen $x_n \in E$ tales que $y_n = Tx_n$. Debido a que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy (ya que converge en E), y dado que T^{-1} es continuo, la sucesión $\{x_n\} = \{T^{-1}y_n\}$ también es de Cauchy en E porque:

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|.$$

Dado que E es completo, $\{x_n\}$ converge a algún $x \in E$. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces, por la continuidad de T,

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tx.$$

Por lo tanto, $y \in T(E)$, lo que demuestra que $T(E)$ es cerrado.

2. **Determinar si la sucesión de funciones $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$ converge uniformemente en $[-2, 2]$ y en $\mathbb{R}$.**

1. Convergencia Puntual

Primero, identifiquemos el límite puntual de la sucesión $f_n(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx).$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, notamos que $\frac{x}{n}\sin(nx) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Esto se debe a que $\frac{x}{n} \to 0$ y $\sin(nx)$ está acotada por -1 y 1. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{x}{n}\sin(nx)\right) = x.$$

Entonces, el límite puntual es la función $f(x) = x$.

2. Convergencia Uniforme en $[-2, 2]$

Para verificar la convergencia uniforme en $[-2, 2]$, consideremos la diferencia $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x + \frac{x}{n}\sin(nx) - x\right| = \left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right|.$$

Dado que $|\sin(nx)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right| \leq \frac{|x|}{n}.$$

Para $x \in [-2, 2]$, esto nos da:

$$\left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right| \leq \frac{2}{n}.$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \epsilon$. Entonces, para todo $n \geq N$ y para todo $x \in [-2, 2]$,

$$\left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right| \leq \frac{2}{n} < \epsilon.$$

Esto implica que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in [-2, 2]$ cuando $n \geq N$.

Por lo tanto, la sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = x$ en $[-2, 2]$.

3. Convergencia Uniforme en $\mathbb{R}$

Para determinar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$, consideremos la misma diferencia $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right|.$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right| \leq \frac{|x|}{n}.$$

Para que la convergencia sea uniforme en $\mathbb{R}$, necesitamos que para cualquier $\epsilon > 0$, exista un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{x}{n}\sin(nx)\right| < \epsilon.$$

Esto implicaría que

$$\frac{|x|}{n} < \epsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, esto no puede ser cierto para todos los $x \in \mathbb{R}$ a menos que x esté acotado. En particular, para x suficientemente grande, $\frac{|x|}{n}$ puede ser arbitrariamente grande, y no podemos encontrar un N que funcione para todos los $x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, la sucesión $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x) = x$ en $\mathbb{R}$.

Conclusión

- La sucesión de funciones $f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$ converge uniformemente a $f(x) = x$ en $[-2, 2]$. - La sucesión de funciones $f_n(x) = x + \frac{x}{n}\sin(nx)$ no converge uniformemente a $f(x) = x$ en $\mathbb{R}$.

3. **Sea $\mathbb{R}$ dotado con μ la medida de Lebesgue. Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos**

$$I_x = \{y \in \mathbb{R} : -x \leq y \leq x\}.$$

Sea ahora $L \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 < \mu(L) < \infty$. Demostrar lo siguiente:

a) **La función $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $h(x) = \mu(L \cap I_x)$ es continua.**

b) **Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una partición de n subconjuntos de L, todos de la misma medida.**

Vamos a demostrar las dos afirmaciones sobre el conjunto $L \subseteq \mathbb{R}$ y la función h definida por $h(x) = \mu(L \cap I_x)$.

Parte 1: La función h es continua

Dada la función $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $h(x) = \mu(L \cap I_x)$, queremos demostrar que h es continua.

Definición y propiedades de I_x

Recordemos que:

$$I_x = \{y \in \mathbb{R} : -x \leq y \leq x\}.$$

Esto es, I_x es el intervalo simétrico centrado en el origen con longitud $2x$.

Propiedades de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue μ es finitamente aditiva y continua desde abajo y desde arriba. Esto significa que si (A_n) es una sucesión creciente de conjuntos medibles con $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$. Del mismo modo, si (A_n) es una sucesión decreciente de conjuntos medibles con $A_n \downarrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Continuidad de h

Consideremos dos casos:

1. **Caso 1: $x \to x_0^+$**: Sea $x_0 \geq 0$. Queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0^+} h(x) = h(x_0)$.

Para $x > x_0$, tenemos $I_{x_0} \subseteq I_x$. Por lo tanto:

$$L \cap I_{x_0} \subseteq L \cap I_x.$$

Como $x \to x_0^+$, los intervalos I_x se aproximan a I_{x_0} desde la derecha, y por la continuidad de la medida desde abajo:

$$\lim_{x \to x_0^+} \mu(L \cap I_x) = \mu\left(\bigcap_{x > x_0} L \cap I_x\right) = \mu(L \cap I_{x_0}) = h(x_0).$$

2. **Caso 2: $x \to x_0^-$**: Sea $x_0 > 0$. Queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0^-} h(x) = h(x_0)$.

Para $x < x_0$, tenemos $I_x \subseteq I_{x_0}$. Por lo tanto:

$$L \cap I_x \subseteq L \cap I_{x_0}.$$

Como $x \to x_0^-$, los intervalos I_x se aproximan a I_{x_0} desde la izquierda, y por la continuidad de la medida desde arriba:

$$\lim_{x \to x_0^-} \mu(L \cap I_x) = \mu\left(\bigcup_{x < x_0} L \cap I_x\right) = \mu(L \cap I_{x_0}) = h(x_0).$$

En ambos casos, hemos demostrado que $h(x) \to h(x_0)$ cuando $x \to x_0$. Por lo tanto, h es continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Parte 2: Existe una partición de L en n subconjuntos de la misma medida

Queremos demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición de L en n subconjuntos de la misma medida.

Propiedad de la medida de Lebesgue

Dado que $0 < \mu(L) < \infty$, la medida $\mu(L)$ es finita y positiva. Podemos dividir L en n partes de igual medida.

Construcción de la partición

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, definimos

$$A_k = \left\{ y \in L : \frac{(k-1)\mu(L)}{n} \leq y < \frac{k\mu(L)}{n} \right\}.$$

Observamos que los A_k son disjuntos y su unión es L:

$$L = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Cada conjunto A_k tiene la misma medida:

$$\mu(A_k) = \frac{\mu(L)}{n}.$$

Conclusión

Hemos demostrado que:

1. La función $h(x) = \mu(L \cap I_x)$ es continua. 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición de L en n subconjuntos de la misma medida.

4. **Probar que si $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ es integrable, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = c > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces**

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \left(\frac{|f(x)|}{n}\right)^{\alpha}\right) dx = \begin{cases} +\infty & \textbf{si } 0 < \alpha < 1, \\ c & \textbf{si } \alpha = 1, \\ 0 & \textbf{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Sugerencia: usar que $\log(1 + x^{\alpha}) \leq \alpha x$ para $\alpha \geq 1$.

Naaa...