Investigación Operativa

Problema Dual

Nazareno Faillace Mullen

Dualidad - Motivación

Cada problema lineal tiene asociado un problema dual. Entre ellos existe una conexión que da lugar a una serie de propiedades interesantes.

El planteo del problema dual puede surgir a partir de la necesidad de encontrar cotas para el valor óptimo de nuestro problema.

Dualidad - Motivación

Por ejemplo, si tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \textit{s.a:} \quad & x_1 + 3x_2 \leq \quad 5 \\ & 6x_1 - x_2 \leq \quad 18 \\ & x_1 + 2x_2 \leq \quad 4 \\ & x_1, x_2 \geq \quad 0 \end{aligned}$$

Nos podría interesar hallar una cota superior para el valor óptimo z^*. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar z^*.

Dualidad - Motivación

Idea:

Consideramos las variables $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ tales que:

$$\begin{array}{rl} (x_1 + 3x_2)y_1 \leq & 5y_1 \\ (6x_1 - x_2)y_2 \leq & 18y_2 \\ (x_1 + 2x_2)y_3 \leq & 4y_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} x_1y_1 + 3x_2y_1 \leq & 5y_1 \\ 6x_1y_2 - x_2y_2 \leq & 18y_2 \\ x_1y_3 + 2x_2y_3 \leq & 4y_3 \end{array}$$

Si sumamos las tres desigualdades, tenemos que:

$$(y_1 + 6y_2 + y_3)x_1 + (3y_1 - y_2 + 2y_3)x_2 \leq 5y_1 + 18y_2 + 4y_3$$

Ahora, como nos gustaría que el lado izquierdo de la desigualdad acote a z, tenemos que pedir las siguientes condiciones:

$$y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 3 \qquad (1)$$

$$3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 2 \qquad (2)$$

Es decir, si se cumplen ambas condiciones, tenemos que:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \overset{\text{(1) y (2)}}{\leq} (y_1 + 6y_2 + y_3)x_1 + (3y_1 - y_2 + 2y_3)x_2 \leq 5y_1 + 18y_2 + 4y_3$$

Luego, para cualesquiera $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ que cumplan (1) y (2), podemos armarnos una cota para z

Dualidad

Como el problema primal tiene como objetivo maximizar, nos interesa la mejor cota superior para z, entonces, el problema dual se plantea como:

$$
\begin{array}{rrl}
\text{mín} & 5y_1 + 18y_2 + 4y_3 & \\
\text{s.a:} & y_1 + 6y_2 + y_3 \geq & 3 \\
 & 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq & 2 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq & 0
\end{array}
$$

Dualidad

Como el problema primal tiene como objetivo maximizar, nos interesa la mejor cota superior para z, entonces, el problema dual se plantea como:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{mín} & 5y_1 + 18y_2 + 4y_3 & & \\
\text{s.a:} & y_1 + 6y_2 + y_3 & \geq & 3 \\
 & 3y_1 - y_2 + 2y_3 & \geq & 2 \\
 & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Observación 1:
\# Variables del primal = # Restricciones del dual
\# Restricciones del primal = # Variables del dual

Primal	Dual
Obj: Minimizar	Obj: Maximizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Primal	Dual
Obj: Maximizar	Obj: Minimizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Ejercicio: hallar el dual asociado al siguiente problema:

$$
\begin{array}{rrl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & \\
\text{s.a:} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq & 3 \\
 & x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq & 5 \\
 & 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = & 2 \\
 & x_1 \geq & 0 \\
 & x_4 \leq & 0 \\
 & x_2, x_3 & \text{libres}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & \\
\text{s.a:} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq & 3 \\
& x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq & 5 \\
& 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = & 2 \\
& x_1 \geq & 0 \\
& x_4 \leq & 0 \\
& x_2, x_3 & \text{libres}
\end{array}
$$

Notemos que:

- El primal tiene 4 variables $\Rightarrow$ El dual tendrá 4 restricciones
- El primal tiene 3 restricciones $\Rightarrow$ El dual tendrá 3 variables

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & 1x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & 0x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$1y_1 + 0y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & 1x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$-2y_1 + 1y_2 - 3y_3 = 2$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$
$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$

$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$
\begin{gathered}
y_1 + 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\
3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3
\end{gathered}
$$

$$4y_1 + 4y_2 - 4\ y_3 \leq 4$$

$$\begin{array}{rccccccccccc}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}$$

Restricciones:

$$\begin{gathered}
y_1 + 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\
3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\
4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4
\end{gathered}$$

Variables:

$$y_1 \geq 0$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrcr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}$$

Restricciones:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$
$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2$$
$$3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3$$
$$4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4$$

Variables:

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
& & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
& & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
& & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
& & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$
\begin{gathered}
y_1 + 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\
3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\
4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4
\end{gathered}
$$

Variables:

$y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3$ libre

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$
\begin{gathered}
y_1 + 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\
3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\
4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4
\end{gathered}
$$

Variables:

$$
y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \text{ libre}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$
\begin{gathered}
y_1 + 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\
3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\
4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4
\end{gathered}
$$

Variables:

$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3$ libre

Objetivo:

$\text{mín } 3y_1 + 5y_2 + 2y_3$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{s.a:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_2, x_3 & & \text{libres}
\end{array}
$$

Restricciones:

$$
\begin{gathered}
y_1 + 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\
3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\
4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq 4
\end{gathered}
$$

Variables:

$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3$ libre

Objetivo:

$$\text{mín} \quad 3y_1 + 5y_2 + 2y_3$$

Primal:

$$
\begin{array}{rrl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & \\
\text{s.a:} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq & 3 \\
& x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq & 5 \\
& 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = & 2 \\
& x_1 \geq & 0 \\
& x_4 \leq & 0
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{rrl}
\text{mín} & 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 & \\
\text{s.a:} & y_1 + 2y_3 \geq & 3 \\
& -2y_1 + y_2 - 3y_3 = & 2 \\
& 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = & -3 \\
& 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 \leq & 4 \\
& y_1 \geq & 0 \\
& y_2 \leq & 0 \\
& y_3 & \text{libre}
\end{array}
$$

Teorema débil de dualidad

Para un problema con objetivo de maximizar, sean $(x_1, \cdots, x_n)$ solución factible del primal e $(y_1, \cdots, y_m)$ solución factible del dual, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Obs: si el objetivo del primal es minimizar, la desigualdad se invierte.

Teorema fundamental de dualidad

Si el problema primal tiene solución óptima $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$, entonces el dual tiene solución óptima $(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Dualidad - Teorema fundamental de dualidad

Los teoremas de dualidad nos permiten observar otra relación muy importante entre el problema primal y el problema dual:

		Dual		
		Óptimo	Infactible	No acotado
Primal	Óptimo	✓	✗	✗
	Infactible	✗	✓	✓
	No acotado	✗	✓	✗

✓: puede ocurrir ✗: no puede ocurrir

Dualidad - Teorema de Holgura Complementaria)

Teorema de Holgura Complementaria (THC)

Sean $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ solución del primal e $y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$ solución del dual, las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \text{o} \quad x_j^* = 0 \quad \text{(o ambos)} \qquad \forall j = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i \quad \text{o} \quad y_i^* = 0 \quad \text{(o ambos)} \qquad \forall i = 1, \cdots, m$$

El THC nos permite calcular el óptimo del primal a partir del óptimo del dual (y viceversa).

Ejemplo: resolver el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 \end{array}$$

Primal	Dual
Obj: Minimizar	Obj: Maximizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Primal	Dual
Obj: Maximizar	Obj: Minimizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

El THC nos permite calcular el óptimo del primal a partir del óptimo del dual (y viceversa).

Ejemplo: resolver el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq & 18 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq & 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq & 0 \end{array}$$

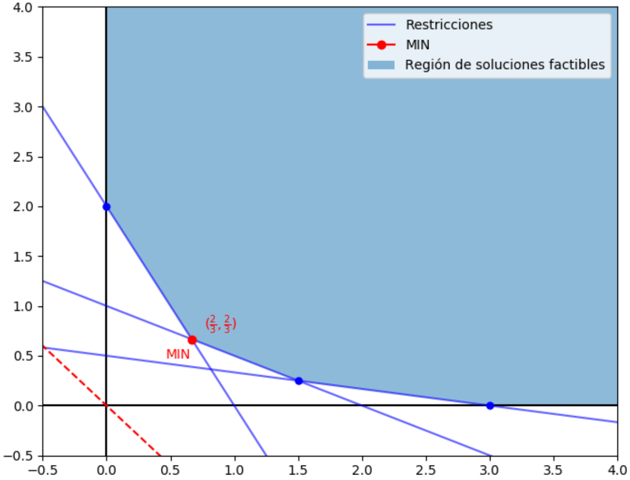
Aprovechamos que el dual tendrá sólo dos variables y podremos resolverlo de manera gráfica:
Pasar al dual $\rightarrow$ Resolver el dual gráficamente $\rightarrow$ Usar THC para recuperar óptimo del primal

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \leq 18 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & 18y_1 + 15y_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & \tfrac{1}{2}y_1 + 3y_2 \geq \tfrac{3}{2} \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ el mínimo se alcanza en $y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Según el THC, debe valer que:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 && \text{(o ambas)} \quad (1)\\
x_2^* &= 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 && \text{(o ambas)} \quad (2)\\
x_3^* &= 0 \quad o \quad \tfrac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \tfrac{3}{2} && \text{(o ambas)} \quad (3)\\
y_1^* &= 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \tfrac{1}{2}x_3^* = 18 && \text{(o ambas)} \quad (4)\\
y_2^* &= 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 && \text{(o ambas)} \quad (5)
\end{aligned}
$$

Según el THC, debe valer que:

$$
\begin{array}{llllll}
x_1^* = 0 & o & 2y_1^* + y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (1) \\
x_2^* = 0 & o & y_1^* + 2y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (2) \\
x_3^* = 0 & o & \frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{3}{2} & \text{(o ambas)} & (3) \\
y_1^* = 0 & o & 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 & \text{(o ambas)} & (4) \\
y_2^* = 0 & o & x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 & \text{(o ambas)} & (5)
\end{array}
$$

$$y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$\boxed{x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 \quad \text{(o ambas)}}$$

$$2y_1^* + y_2^* = 2.\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \quad ✓$$

$$y^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$\boxed{x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 \quad \text{(o ambas)}}$$

$$2y_1^* + y_2^* = 2.\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x_2^* = 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 \quad \text{(o ambas)}}$$

$$y_1^* + 2y_2^* = \frac{2}{3} + 2.\frac{2}{3} = 2 \quad \checkmark$$

$$x_3^* = 0 \quad o \quad \tfrac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \tfrac{3}{2}$$ (o ambas)

$$\frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} + 3.\frac{2}{3} = \frac{7}{3} \neq \frac{3}{2} \quad ✗$$

$$\implies x_3^* = 0$$

$$
\begin{array}{llll}
x_1^* = 0 \quad o \quad 2y_1^* + y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (1) \\
x_2^* = 0 \quad o \quad y_1^* + 2y_2^* = 2 & \text{(o ambas)} & (2) \\
x_3^* = 0 \quad o \quad \frac{1}{2}y_1^* + 3y_2^* = \frac{3}{2} & \text{(o ambas)} & (3) \\
y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 & \text{(o ambas)} & (4) \\
y_2^* = 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 & \text{(o ambas)} & (5)
\end{array}
$$

$y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18$ (o ambas)

$$y_1^* \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18$$

$$y_1^* = 0 \quad o \quad 2x_1^* + x_2^* + \tfrac{1}{2}x_3^* = 18 \quad \text{(o ambas)}$$

$$y_1^* \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18$$

$$y_2^* = 0 \quad o \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \quad \text{(o ambas)}$$

$$y_2^* \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15$$

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \end{cases} \quad \overset{x_3^*=0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2}x_3^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = 15 \end{cases} \quad \overset{x_3^*=0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = 18 \\ x_1^* + 2x_2^* = 15 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_1^* = 7 \quad \wedge \quad x_2^* = 4$$

$$x^* = (7, 4, 0)$$
$$z^* = 22$$

Dualidad

Teorema

Una solución factible $x_1^*, \cdots, x_n^*$ de

$$\begin{array}{rrcl}
\text{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{s.a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i & \forall i = 1, \cdots, m \\
& x_j \geq & 0 & \forall j = 1, \cdots, n
\end{array}$$

es óptima si y sólo si existen $y_1^*, \cdots, y_m^*$ tales que:

$$\begin{array}{rclll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & = & c_j & \text{cuando} & x_j^* > 0 \\
y_i^* & = & 0 & \text{cuando} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i
\end{array}$$

y tales que:

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \forall j = 1, \cdots, n \\
y_i^* & \geq & 0 & \forall i = 1, \cdots, m
\end{array}$$

Dada una solución factible de un problema lineal, el teorema anterior brinda una manera de chequear si es óptima.

Ejemplo: supongamos que tenemos el siguiente problema lineal:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcr}
\text{máx} & 18x_1 & - & 7x_2 & + & 12x_3 & + & 5x_4 & & & + & 8x_6 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & + & 8x_6 & \leq & 1 \\
 & -3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & \leq & -2 \\
 & 8x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & & & + & 2x_6 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & & & + & 8x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & - & x_6 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & & \multicolumn{4}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} & \geq & 0
\end{array}
$$

Y queremos chequear si la siguiente solución es óptima:

$$x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 7,\ x_6^* = 0$$

Basta chequear que existan $y_1^*, \cdots, y_5^*$ que cumplan las hipótesis del teorema. Como $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ y $x_5^* > 0$, los y_i^* deben cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \forall j \in \{1, 2, 5\}$$

Es decir, deben cumplir que:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2y_1^* & - & 3y_2^* & + & 8y_3^* & + & 4y_4^* & + & 5y_5^* & = & 18 \\
-6y_1^* & - & y_2^* & - & 3y_3^* & & & + & 2y_5^* & = & -7 \\
3y_1^* & + & y_2^* & & & - & y_4^* & - & 2y_5^* & = & 0
\end{array}$$

Por otro lado:

$$\underbrace{-3x_1^* - x_2^* + 4x_3^* - 3x_4^* + x_5^* + 2x_6^*}_{=-3} < -2 \Rightarrow y_2^* = 0$$

$$\underbrace{5x_1^* + 2x_2^* - 3x_3^* + 6x_4^* - 2x_5^* - x_6^*}_{=4} < 5 \Rightarrow y_5^* = 0$$

Juntando todas las condiciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2y_1^* & - & 3y_2^* & + & 8y_3^* & + & 4y_4^* & + & 5y_5^* & = & 18 \\
-6y_1^* & - & y_2^* & - & 3y_3^* & & & + & 2y_5^* & = & -7 \\
3y_1^* & + & y_2^* & & & - & y_4^* & - & 2y_5^* & = & 0 \\
 & & y_2^* & & & & & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & y_5^* & = & 0
\end{array}$$

La solución para este sistema es $(\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 1, 0)$. Como esta solución verifica que:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{5} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \quad \forall j = 1, \cdots, 6 \\
y_i^* & \geq & 0 & \quad \forall i = 1, \cdots, 5
\end{array}$$

Entonces x^* es solución óptima.