Investigación Operativa - Clase 3

Disyunción

Nazareno Faillace Mullen

Departamento de Matemática - FCEN - UBA

Para ir pensando

Sea x una variable continua o entera (no necesariamente ≥ 0) y C una constante positiva, ¿cómo modelarías linealmente cada una de las siguientes restricciones?

1. $|x| \leq C$
2. $|x| \geq C$

Puesta en común a las 19:30

Módulo

- Puede ocurrir que agunas restricciones involucren al módulo de algunas variables.

$$|x| \leq C$$

  donde $C > 0$. Debemos expresarla de manera lineal.
  Modelamos esa expresión con las siguientes restricciones:

$$x \leq C$$
$$x \geq -C$$

Módulo

- Lo mismo sirve si tenemos una restricción con módulo en general. Sea g lineal:

$$|g(x_1, \dots, x_n)| \leq C$$

Se puede modelar con las restricciones:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &\leq C \\ -g(x_1, \dots, x_n) &\leq C \end{aligned}$$

- O todavía más en general, si g y h son lineales:

$$|g(x_1, \dots, x_n)| + h(x_1, \dots, x_n) \leq C$$

Se puede modelar con:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n) &\leq C \\ -g(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n) &\leq C \end{aligned}$$

Módulo

¿Qué ocurre si la restricción es $|x| \geq c$?

Módulo

¿Qué ocurre si la restricción es $|x| \geq c$?

- Recordar que:

$$|x| \geq c \quad \Leftrightarrow \quad x \geq c \lor x \leq -c$$

Podemos añadir una variable binaria θ, una constante M lo suficientemente grande y las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
x &\geq c - \theta M \\
x &\leq -c + (1 - \theta) M \\
&\theta \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Módulo

- En general, para modelar una restricción del tipo:

$$|g(x_1, \dots, x_n)| \geq C$$

  Consideramos una variable binaria θ que nos sirva de indicadora, M un número lo suficientemente grande y añadimos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &\geq C - \theta M \\ g(x_1, \dots, x_n) &\leq -C + (1-\theta)M \\ \theta &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Disyunción

- En general, cuando queremos modelar una disyunción del tipo:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \ \vee \ g_2(x_1, \ldots, x_n) \geq b_2$$

con g_1 y g_2 funciones lineales. Tomando M lo suficientemente grande como para que las condiciones de $\leq$ queden satisfechas automáticamente si sumamos M al lado derecho y que las condiciones de $\geq$ queden automáticamente satisfechas si restamos M del lado derecho, se modela la disyunción de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq & \quad b_1 + M(1-\theta) \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) \geq & \quad b_2 - M\theta \\ \theta \in & \{0, 1\} \end{aligned}$$

Ejercicio

Una planta de producción de MicroApple cuenta con N operarios para realizar T tareas distintas. A cada tarea t deben ser asignados una cantidad de operarios en el intervalo $[\ell_t, u_t]$ y ningún operario puede quedar sin ser asignado a una tarea. Además, debemos tener en cuenta los siguientes requerimientos propios de la producción:

1. hay un conjunto de tareas $\Gamma \subseteq T$, tales que para cada $t \in \Gamma$, el valor absoluto de la diferencia entre la cantidad de operarios asignados a las tareas t y $t + 1$ debe ser menor o igual que un número conocido m_t.
2. debe ocurrir alguna de las siguientes situaciones:
   2.1 la cantidad de operarios asignados a la tarea 1 debe ser al menos el 25 % de los asignados a la tarea 2.
   2.2 se asignan a lo sumo E empleados al conjunto de tareas $\{3, 4, 5\}$.

Escribir un modelo que permita hallar cuántos operarios pueden asignarse a cada tarea. ¿Cuál es la función objetivo?

Variables:

x_t:	cantidad de operarios asignados a la tarea t ($x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)
θ:	variable auxiliar para la disyunción ($\theta \in \{0, 1\}$)

$$
\begin{array}{lrll}
\text{máx} & 0 & & \\
\text{s.a.:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{|T|} x_t = & N & \\
& x_t \leq & u_t & t \in T \\
& x_t \geq & \ell_t & t \in T \\
& x_t - x_{t+1} \leq & m_t & t \in \Gamma \\
& x_{t+1} - x_t \leq & m_t & t \in \Gamma \\
& x_1 \geq & 0.25x_2 - M\theta & \\
& x_3 + x_4 + x_5 \leq & E + M(1-\theta) & \\
& x_t \in & \mathbb{Z}_{\geq \mathbb{0}} & t \in T \\
& \theta \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$