ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Práctica dirigida 4

(solucionario)

Ejercicio 1

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la variable aleatoria $X \sim exp(\theta^{-\frac{1}{2}})$. Considere los de θ siguientes:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n}{n+1}\overline{X}^2 \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}\underbrace{\overline{X^2}}_{1}.$$

Analice si estos estimadores son consistentes.

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\overline{X}^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\overline{X}^2\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{X}^2) = \left(\lim_{n\to\infty}\overline{X}\right)^2 = (E(X))^2, \ c.s. \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\overline{X}^2) = \theta$$

$$E(X) = \frac{1}{\theta^{-1/2}} = \theta^{1/2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_1 = \theta, \ c.s \ \therefore \ \hat{\theta}_1 \text{ es consistente.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\overline{X^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\overline{X^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{X^2} = \underbrace{E(X^2)}_{2\theta}, \ c.s \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_2 = \theta, \ c.s. \ \therefore \ \hat{\theta}_2 \text{ es consistente}$$

Ejercicio 2

Considere el modelo de regresión sin intercepto: $Y_j = \beta x_j + \epsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$, donde β es un parámetro desconocido, $x_1, \ldots, x_n$ son constantes conocidas y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son variables aleatorias independientes, cada una con media cero y varianza σ^2 para estimar.

Determine los estimadores por el método de los momentos.

La muestra no tiene la suficiente información

Los estimadores corresponden a le solución del sistema de ecuaciones:

$$(**)\begin{cases} \overline{Y} = E(\overline{Y}) \\ \overline{Y^2} = E(\overline{Y^2}) \end{cases}$$

$$E(Y_j) = E(\beta x_j + \varepsilon_j) = \beta x_j + \underbrace{E(\varepsilon_j)}_{0} = \beta x_j$$

$$V(Y_j) = V(\beta x_j + \varepsilon_j) = V(\varepsilon_j) = \sigma^2, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$E(\overline{Y}) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{E(Y_j)}_{\beta x_j} = \beta\overline{x}$$

$$V(\overline{Y}) = V\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\overbrace{V(Y_j)}^{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(\overline{Y^2}) = V(\overline{Y}) + E^2(\overline{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} + \beta^2\overline{x}^2$$

$$(**) \equiv \begin{cases} \overline{Y} = \beta\overline{x} \\ \overline{Y^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \beta^2\overline{x}^2 \end{cases} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\overline{Y}}{\overline{x}}\ ; \ \hat{\sigma}^2 = n\overline{Y^2} - n\overline{Y}^2$$

Ejercicio 3

Sea $X \sim W(2;\theta)$, donde $\theta > 0$.

a) Deducir un estimador de θ por el método de los momentos (emplee los primeros momentos) y analice si este es consistente.

El estimador es la solución de la ecuación

$$\overline{X} = E(X) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \overline{X} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\theta^{1/2}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\pi}{4\overline{X}^2}$$

$(*)$ $E(X) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\theta^{1/2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\theta^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\theta^{1/2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\theta} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4\overline{X}^2}\right) = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\overline{X}^2} = \frac{\pi}{4}\times\frac{1}{(\lim \overline{X})^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{[E(X)]^2} \overset{(*)}{=} \theta, \text{ c.s.} \quad \therefore\ \hat{\theta} \text{ es consistente.}$$

b) Deducir el estimador de θ por el método de máxima verosimilitud (use la función de log-verosimilitud) y analice si este es consistente.

$$f(x) = 2\theta x^{2-1} e^{-\theta x^2}, \quad x>0, \ \theta>0$$

$$Ln(f(x)) = Ln(2) + Ln(\theta) + Ln(x) - \theta x^2$$

Dada la muestra registrada $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$:

$$l(\theta) = Ln(f_{X_1}(x_1)) + \dots + Ln(f_{X_n}(x_n))$$

$$= Ln(2) + Ln(\theta) + Ln(x_1) - \theta x_1^2 + \dots + Ln(2) + Ln(\theta) + Ln(x_n) - \theta x_n^2$$

$$l(\theta) = n\,Ln(2) + n\,Ln(\theta) + \sum_{j=1}^{n} Ln(x_j) - \theta \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad \theta > 0$$

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \frac{n}{\theta}\left(1 - \theta\,\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{n}\right) = \frac{n}{\theta}\left(1 - \theta\overline{x^2}\right)$$

$$l'(\theta) = \frac{-n}{\theta\,\overline{x^2}}\left(\theta - \frac{1}{\overline{x^2}}\right) \quad \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{x^2} \text{: estimación}$$

$\hat{\theta} = \overline{X^2}$: estimador. $\lim_{n\to\infty}\hat{\theta} = \lim_{n\to\infty}\overline{X^2} = E(X^2)$, c.s. θ

$\therefore\ \hat{\theta}$ es consistente.