

Phénomène de seuil des équation réaction-diffusion non locale de type bistable

CAPEL Alexandre - FOUILHE Guilhem

Juin Juillet 2021

1 Introduction

On s'intéresse aux équation dites de réaction-diffusion c'est à dire de la forme :

$$\partial_t u = D(u) + R(u) \quad (1)$$

où D est un opérateur de diffusion et R de réaction.

Ces équation possèdent des propriétés intéressantes qui ont bien été étudié depuis quelques années. En particulier, il a été montré qu'il existe dans certains cas des phénomènes de seuil portant sur les conditions initiales. Par exemple, considérons l'équation de réaction-diffusion Laplacienne (qui est locale), soit :

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + f(u) \quad (2)$$

avec f bistable, c'est à dire vérifiant une fonction de classe \mathcal{C}^1 :

- (i) $f(0) = f(1) = 0$
- (ii) $\exists a \in]0, 1[, f(a) = 0$
- (iii) $f'(0) < 0, f'(1) < 0, f'(a) > 0$
- (iv) $\int_0^1 f(u) du > 0$

Pour le problème de Cauchy associé à la condition initiale :

$$u(t = 0, x) = u_0(x) = \mathbb{1}_{[-\ell, \ell]}(x) \quad (3)$$

avec $\ell > 0$, il a été montré [1] l'existence de $\ell^* > 0$ tel que :

- $\forall \ell < \ell^*, u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{unif} 0$ (Extinction)
- $\forall \ell > \ell^*, u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{loc.unif} 1$ (Propagation)
- et pour $\ell = \ell^*$, $u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{unif} U_*(x)$ (Ground state)

où U_* est l'unique solution de l'équation $U'' + f(U) = 0$ avec $U(\pm\infty) = 0$ et $0 \leq U \leq 1$.

Le but de ce document est d'essayer d'obtenir des résultats similaires, mais pour le cas d'un opérateur de diffusion qui est dit non-local.

2 L'opérateur non-local

Ici, nous allons donc étudier un opérateur différent de celui du (2). L'équation sera présentée, dans $L^2(\mathbb{R})$, sous la forme :

$$\partial_t u = d(-u + K * u) + f(u) \quad (4)$$

avec f toujours supposée bistable, où d est le coefficient de diffusion, K un noyau et $*$ définit le produit de convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ (soit que $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$). De plus, on va faire quelques hypothèses supplémentaires sur le noyau :

- (i) $K, K' \in L^1(\mathbb{R})$
 - (ii) K est paire,
 - (iii) $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$
 - (iv) $\int_{\mathbb{R}} K(y)|y|^2 dy < \infty$
- (5)

Pour notre étude, on prendra comme noyau $K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (FIGURE 1).

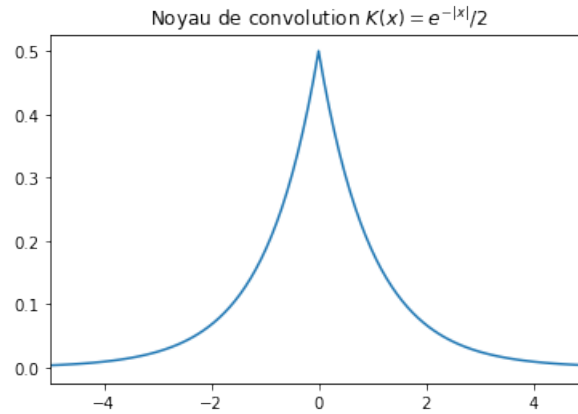


Fig 1. Noyau

2.1 Présentation

D'un point de vue concret, ce nouvel opérateur peut être interprété de la sorte : si $u(t, x)$ correspond à la densité de population en x à l'instant t , alors on peut dire que la valeur $K(x - y)$ correspond à la probabilité de passer de x à y en un instant, et donc le terme $-u + K * u$ représente le taux en l'instant t de population se déplaçant en x . Ainsi, cet opérateur est non local au sens que la convolution entraine que la diffusion au voisinage de x ne dépend pas que des valeurs de $u(x, t)$ sur ce voisinage mais des valeurs de $u(x, t)$ partout ailleurs.

Cette équation partage quelques propriétés communes avec l'équation de la chaleur $\partial_t u = d\partial_{xx}u$, par exemple les solutions stationnaires bornées sont constantes, mais aussi quelques différences : la diffusion non locale ne régularise pas les solutions en général. Un étude approfondie de l'équation sans terme de réaction a été effectuée dans l'article de Chaseigne, où il montre des résultats sur le comportement asymptotique des solutions de ce modèle de diffusion non local $\partial_t u = K * u - u$.

2.2 Solution fondamentale

Nous allons rappeler brièvement les étapes pour avoir une solution de (4) sans terme de réaction, et avec comme condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$. On suivra la démarche [4] via les transformées de Fourier.

Il nous faut d'abord calculer la solution fondamentale qui correspond à la solution vérifiant :

$$\begin{cases} \partial_t w(t, x) = d(-w(t, x) + K * w(t, x)) \\ w(t = 0, x) = w_0(x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

où $\delta_0(x)$ est la distribution de Dirac en 0, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x) dx = 1$

En passant l'équation en transformée de Fourier, on a donc :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{w}(t, \xi) = d(-\widehat{w}(t, \xi) + \widehat{K}(\xi) \widehat{w}(t, \xi)) \\ \widehat{w}(t = 0, \xi) = 1 \end{cases}$$

On a, pour ξ fixé, une équation différentielle linéaire, dont la solution s'exprime par :

$$\widehat{w}(t, \xi) = e^{d(\widehat{K}(\xi) - 1)t}$$

et donc $w(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{d(\widehat{K}(\xi) - 1)t})$

Enfin, on peut calculer toutes les autres solutions pour des certains u_0 avec cette solution fondamentale :

$$u(x, t) = w * u_0(x) \tag{6}$$

3 Solutions sous formes d'ondes

Pour revenir à notre problème initial, on s'intéressera plutôt à l'équation (4).

3.1 Existence

Dans le problème de l'équation de réaction diffusion avec opérateur laplacien, on avait remarqué qu'il existait des solutions sous forme d'ondes progressives. L'objectif est de savoir si il existe toujours de telles solutions dans le cas où la diffusion est non locale.

On veut donc trouver des solutions de la forme $u(t, x) = U(x - ct)$, pour une certaine volicité de propagation c et avec $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = 1$. Autrement dit, on cherche un couple (U, c) vérifiant l'équation :

$$\begin{cases} 0 = -U + K * U + cU' + f(U) \\ U(+\infty) = 0, U(-\infty) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

dans le cas où $d = 1$. Et un tel couple existe, avec en plus u monotone. Cela a été démontré [2] par Bates. On a même réussi à avoir des informations sur le comportement des solutions. Tout d'abord définissons la fonction suivante :

$$g(u, a, d) = u - \frac{1}{d}f(u) \quad (8)$$

ce qui correspond au produit de convolution $K * u$ dans le cas où u est solution stationnaire (donc $c = 0$). De plus, en supposant que g a au plus trois intervalles de monotonie c'est à dire que :

$$g' > 0 \text{ sur } [0, \beta[\cup]\gamma, 1], \text{ et } g' < 0 \text{ sur }]\beta, \gamma[$$

on peut définir pour $k \in \{g(u, a, d), u \in [0, \beta[\cap \{g(u, a, d), u \in]\gamma, 1]\}$, la fonction :

$$g_k(u, a, d) = \begin{cases} g(u, a, d), & \text{si } u \in [0, \beta_1[\cup]\beta_2, 1] \\ k, & \text{si } u \in [\beta_1, \beta_2] \end{cases}$$

où $g(\beta_1, a, d) = g(\beta_2, a, d) = k$, $\beta_1 \in [0, \beta]$ et $\beta_2 \in [\gamma, 1]$. On peut alors énoncé le résultat de [2].

Théorème 3.1 (Bates 97). *Soit (u, c) solution de (7), on a :*

- (i) *si $c \neq 0$ alors $u \in C^2$*
- (ii) *$c = 0$ si et seulement si il existe un k tel que $\int_0^1 g_k(u, a, d) du = \frac{1}{2}$*
- (iii) *dans le cas où $c = 0$, la solution u a au plus un point de discontinuité.*

Ce théorème va entrainer de nombreuses conséquences dont les phénomène de blocages.

3.2 Phénomènes de blocages

Grâce au théorème 3.1, on peut remarquer dans certains cas, que les solutions sous forme d'onde ont tendance à se "stopper" et à faire apparaître des discontinuités : c'est ce qu'on appelle des phénomènes de blocages. Ces phénomènes de blocages ont ainsi lieu dans une certaine région continue du (a, d) -espace que l'on sait bien décrire grâce au théorème de Bates. Cette question a été traitée notamment par les étudiants ayant participé au stage de recherche organisé aux états-unis par G. Faye [3]. Dans (Fig.2), voici la zone théorique (situé en dessous de la courbe jaune), où il y a phénomène de blocage dans le cas où $f(u) = u(1 - u)(u - a)$.

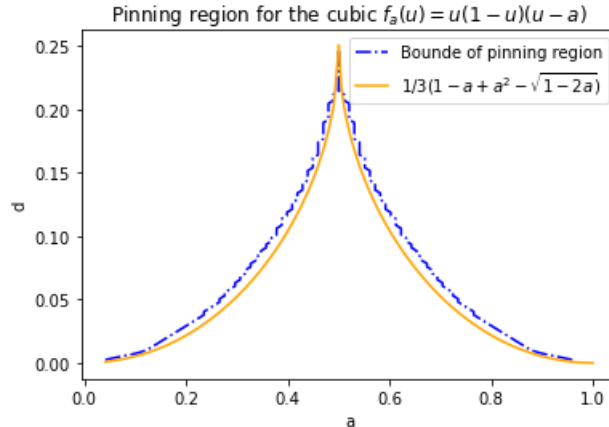


Fig 2. Région où a lieu le phénomène de blocage

Maintenant, on veut montrer, de la même manière que ce qui a été fait pour la diffusion laplacienne, l'existence d'un seuil ℓ^* tel qu'on ait l'alternative :

- $\forall \ell < \ell^*, u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{unif} 0$ (Extinction)
- $\forall \ell > \ell^*, u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{loc.unif} 1$ (Propagation)
- et pour $\ell = \ell^*$, $u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{unif} U_*(x)$ (Ground state)

où U_* est solution de l'équation $d(K * U - U) + f(U) = 0$ avec $U(\pm\infty) = 0$ et $0 \leq U \leq 1$. L'existence a été étudiée dans [3]. A partir de maintenant on supposera que $f(u) = u(1 - u)(u - a)$.

4 Existence de ℓ_0

Commençons, par analogie avec le cas du laplacien, par montrer l'existence de $\ell_0 > 0$ tel que $\forall \ell < \ell_0, u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{unif} 0$ (Extinction).

Tout d'abord, énonçons un principe de comparaison, dans le contexte de notre problème :

Théorème 4.1. *Soient f bistable, K un noyau vérifiant (5) et $v, w \in [0, 1]$ tels que :*

$$\partial_t v - d(K * v - v) - f(v) \geq \partial_t w - d(K * w - w) - f(w)$$

Supposons que $v(0, \cdot) \geq w(0, \cdot)$. Alors $v \geq w$.

Une version de ce théorème (plus forte) est démontrée dans l'article de

Dans le contexte de la diffusion laplacienne, on avait une condition suffisante sur u qui permettait de savoir si ce dernier convergeait uniformément vers 0. Il se trouve que cette condition reste vraie pour la diffusion non-locale. Pour le montrer, nous allons faire la même démarche que dans l'article de Aronson et Weinberger, même si les démonstrations sont très différentes. Voici le théorème :

Théorème 4.2. *Soit $\gamma \in [0, a[$, les solutions de l'équation (4) telles que $\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) \in [0, \gamma]$ vérifient :*

$$u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{unif} 0$$

Pour montrer ce théorème, nous allons d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit f bistable, et K vérifiant H1. Alors $\forall \gamma \in [0, a[$, la solution $v(t, x)$ au problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) = d(-v(t, x) + K * v(t, x)) + f(v(t, x)) \\ v(0, x) = \gamma \end{cases} \quad (9)$$

décroit vers 0 uniformément en x lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Démonstration 4.3 : Dans le cas linéaire, $v(t, x) = w * v_0(x) = \gamma$ donc $v(t, x)_x = 0$. De plus, comme dans l'ont fait remarquer Aronson et Weinberger dans leur article, les solutions d'une telle équation sont toutes indépendantes de x . Posons alors $v(t, x) = \gamma(t)$. L'équation devient :

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= d(-\gamma(t) + K * \gamma(t)) + f(\gamma(t)) \\ &= d(-\gamma(t) + \int_{\mathbb{R}} K(y)\gamma(t)dy) + f(\gamma(t)) \\ &= f(\gamma(t))\end{aligned}$$

On obtient alors une équation différentielle autonome, et le portrait de phase de cette équation nous permet de conclure que $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc cela conclut le lemme. \square

Le théorème 4.2 se démontre alors en utilisant ce lemme avec le principe de comparaison.

Maintenant, on veut utiliser ce résultat pour démontrer l'existence de ℓ_0 . Il s'agit donc de montrer qu'à partir d'une certaine valeur de ℓ , on est sûr que notre solution sera dans $[0, a[$ à partir d'un certain t , et donc y restera et convergera uniformément vers 0. Nous avons réussi à démontrer ce résultat dans le cas où $K(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$, mais sous une certaine contrainte pour le coefficient de diffusion $d > 0$.

Théorème 4.4 (Théorème d'existence de ℓ_0). *Soient $\ell > 0$ et u solution de l'équation :*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = d(-u(t, x) + K * u(t, x)) + f(u(t, x)) \\ u(0, x) = \mathbf{1}_{[-\ell, \ell]}(x) \end{cases} \quad (10)$$

Si $d > \frac{(1-a)^2}{4}$, alors il existe $\ell_0 > 0$ tel que pour tout $\ell < \ell_0$, on a $u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{CU} 0$.

Avant de démontrer ce théorème, il sera utile de rappeler la solution fondamentale de l'équation de diffusion non locale dans notre contexte. Reprenons la relation (6).

Un simple calcul donne, pour $K(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$, d'une part, que $\widehat{K}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$ et donc on obtient $w(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{d(\frac{1}{1+\xi^2}-1)t} e^{ix\xi} d\xi$. On peut même simplifier cette transformée inverse en utilisant la relation $e^{d(\frac{1}{1+\xi^2}-1)t} = e^{-dt} + (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1)e^{-dt}$ et en déduire que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{d(\frac{1}{1+\xi^2}-1)t} e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (e^{-dt} + (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1)e^{-dt}) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-dt} e^{ix\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1)e^{-dt} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-dt} \delta_0(x) + z(t, x)\end{aligned} \quad (11)$$

où $z(t, x) = \frac{e^{-dt}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1)e^{ix\xi} d\xi$.

Nous avons désormais tous les outils pour démontrer le théorème 4.4.

Démonstration 4.4 : La preuve se fait en trois étapes :

Etape 1 : Majoration de la solution par une solution annexe.

Posons $c = \sup_{u \in]a, 1[} \{ \frac{f(u)}{u} \}$. On peut voir avec un calcul élémentaire que $c = \frac{(1-a)^2}{4}$. Soit maintenant $v(t, x)$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) = d(-v(t, x) + K * v(t, x)) + cv(t, x) \\ v(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

On voit par principe du maximum, que nécessairement $v \geq 0$. De plus, par définition de c , et comme f est négative sur $[0, a]$, on a que :

$$f(u) \leq cu, \quad \forall u \in [0, 1]$$

Ainsi, on peut en déduire que pour u solution de l'équation :

$$\partial_t u - d(-u + K * u) + cu \leq \partial_t u - d(-u + K * u) + f(u) = 0$$

Or, $\partial_t v - d(-v + K * v) + cv = 0$, donc on a que :

$$\partial_t v - d(-v + K * v) + cv \geq \partial_t u - d(-u + K * u) + cu$$

et donc $v \geq u$ par principe de comparaison.

Etape 2 : Identification de v

Considérons $v(t, x)e^{-ct}$. On a que :

$$\begin{aligned} \partial_t (v(t, x)e^{-ct}) &= \partial_t v(t, x)e^{-ct} - cv(t, x)e^{-ct} \\ &= (d(-v(t, x) + K * v(t, x)) + cv(t, x))e^{-ct} - cv(t, x)e^{-ct} \\ &= d(-v(t, x)e^{-ct} + K * v(t, x)e^{-ct}) \end{aligned}$$

Autrement dit, $v(t, x)e^{-ct}$ est solution de l'équation de diffusion non locale avec comme condition initiale u_0 . Ainsi, grâce à la remarque préliminaire, on obtient que :

$$\begin{aligned} v(t, x)e^{-ct} &= w(t, \cdot) * u_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_0(x - y)e^{-td}}{2\pi} u_0(y) dy + \int_{\mathbb{R}} z(t, x - y) u_0(y) dy \\ &= \frac{u_0(x)e^{-td}}{2\pi} + \int_{-l}^l z(t, x - y) dy \end{aligned}$$

Etape 3 : Recherche de l_0

Maintenant nous allons majorer notre expression de v pour obtenir une condition sur l suffisante pour que u tende uniformément vers 0.

$$\begin{aligned}
|u(t, x)| &\leq |v(t, x)| = \left| \frac{u_0(x)e^{t(c-d)}}{2\pi} + e^{tc} \int_{-l}^l z(t, x-y) dy \right| \\
&\leq \frac{e^{t(c-d)}}{2\pi} + e^{tc} \times \left| \int_{-l}^l \frac{e^{-dt}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1) e^{i(x-y)\xi} d\xi dy \right| \\
&\leq \frac{e^{t(c-d)}}{2\pi} + \frac{e^{t(c-d)}}{2\pi} \times \int_{-l}^l \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1) e^{i(x-y)\xi} d\xi \right| dy
\end{aligned}$$

Or, on voit que $\left| \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1) e^{ix\xi} d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1) |e^{ix\xi}| d\xi = \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1) d\xi$, une intégrale qui converge pour tout $t > 0$. On pose alors $M_t > 0$ cette intégrale. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
|u(t, x)| &\leq \frac{e^{t(c-d)}}{2\pi} (1 + \int_{-l}^l \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{dt}{1+\xi^2}} - 1) e^{i(x-y)\xi} d\xi \right| dy) \\
&\leq \frac{e^{t(c-d)}}{2\pi} (1 + 2lM_t)
\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème 4.2, u va converger uniformément vers 0 dès que $\frac{e^{t(c-d)}}{2\pi} (1 + 2lM_t) < a$, soit lorsque $l < \frac{2\pi a e^{t(d-c)} - 1}{2M_t}$. Cependant, on souhaite $l > 0$, on a donc la suivante condition sur le membre de droite pour que l existe : $2\pi a e^{t(d-c)} > 1$ condition qui sera vérifiée pour un certain temps $t_0 > 0$ si $d > c$. Ainsi, en posant $l_0 = \frac{2\pi a e^{t_0(d-c)} - 1}{4M_{t_0}}$, le théorème est prouvé. \square

On a donc bel et bien existence d'un $\ell_0 > 0$ dans une certaine région du plan (a, d) . Une question légitime est de savoir ce qu'il se passe sous cette région. Regardons une simulation pour développer notre intuition. Voici une solution numérique (Fig.3) dans le cas où il y a propagation (hors pinning) dans le cas où $d < \frac{(1-a)^2}{4}$:

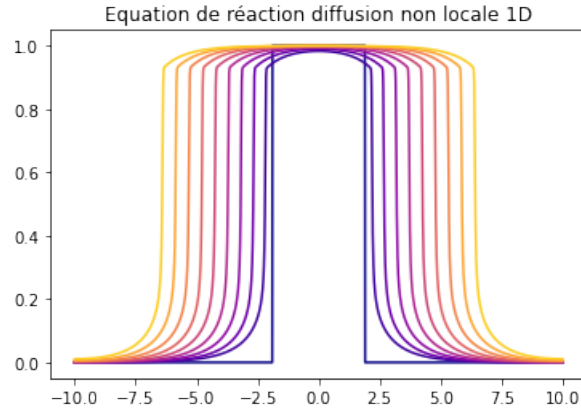


Fig. 3 Propagation pour $d = 0, 1$, $a = 0, 35$ et $l = 1, 9$

Ici, on voit sans surprise qu'il semblerait y avoir existence d'un $\ell_1 > 0$ comme pour le cas laplacien. Par contre, si on se place avec un $\ell > 0$ assez petit, nous avons observé qu'il n'y a pas

d'extinction pour les mêmes valeurs de a et d (Fig. 4). Il n'y a pas de convergence uniforme en 0 (ni même de convergence dans L^∞).

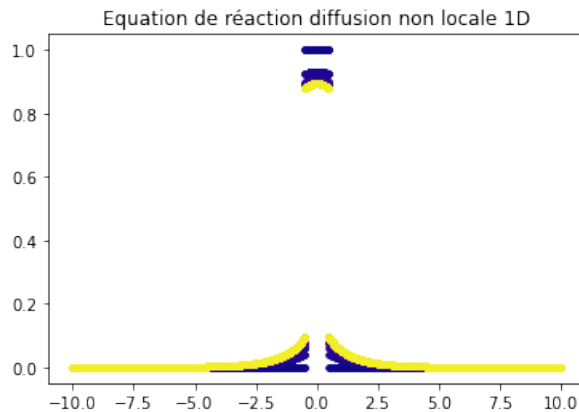


Fig. 4 Pas d'extinction pour $d = 0, 1$, $a = 0, 35$ et $l = 0, 5$

Cependant, cet absence de seuil pour l'extinction laisse place à un autre totalement différent : il semblerait que le seuil ne sépare pas la propagation de l'extinction, mais plutôt d'une zone de solution de type "ground state".

5 Solutions Ground State

5.1 Résultats

Dans cette partie, nous allons regarder les solutions stationnaires homoclines en 0 de (4), c'est à dire les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} 0 = & d(-U + K * U) + f(U) \\ U(\pm\infty) = & 0 \end{cases} \quad (12)$$

On sait [3] qu'il existe des solutions de (12) qui sont dans $L^2(\mathbb{R})$, paires et décroissantes sur $]0, +\infty[$. Notre objectif est de rappeler les principaux résultats de [3] pour de tels solutions et de les illustrer avec des graphiques. Voici la proposition [3] sur laquelle nous allons nous appuyer :

Théorème 5.1 (Chmaj 2006). *Soit g la fonction de (8). Sous les mêmes hypothèses sur g , nous avons les alternatives suivantes :*

- *u est solution de (12) de classe $C^\infty(\mathbb{R})$*
- *il existe une solution de (12) de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ou de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et une famille de solutions de (12) discontinues*
- *il existe une famille de solutions de (12) discontinues*

On peut remarquer que nous sommes bien dans les conditions de ce théorème lorsque $f(u) = u(1 - u)(u - a)$. Par ailleurs, dans le cas où g est monotone croissante, il y a une unique solution de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pour avoir une meilleure compréhension de ce qu'il se passe, prenons un noyau facile

a étudié : $K(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$.

La particularité de ce noyau K est qu'avec ce dernier, nous avons la relation :

$$(K * u)'' = K * u - u$$

et comme, lorsque U est solution de (12), on a $g(U, a, d) = K * U$, on obtient la relation :

$$(g(u, a, d))'' = g(u, a, d) - u \Leftrightarrow w'' = w - u \quad (13)$$

en posant $w = g(u, a, d)$. Ainsi, dans le cas où g serait inversible, on a qu'il suffit de résoudre l'équation différentielle ordinaire (pour a et d fixées) :

$$w'' = w - g^{-1}(w) \quad (14)$$

Or dans notre cas, g n'est pas du tout inversible. L'astuce est donc d'inverser partiellement g sur ses intervalles de monotonie (croissante) pour ensuite en tirer une solution. Nous allons donc passer par deux problèmes annexes :

$$(i) \quad w'' = w - g_-^{-1}(w) \quad (ii) \quad w'' = w - g_+^{-1}(w)$$

où g_-^{-1} et g_+^{-1} sont respectivement les inverses de g sur $[0, \beta[$ et $]\gamma, 1]$. Ainsi, notre problème est bien défini par morceau et notre objectif va être de connecter les orbites de (i) passant par 0 avec les orbites de (ii). On notera par la suite $m = g(\beta)$ et $M = g(\gamma)$.

5.2 Portrait de phase et solutions

Nous allons maintenant tracer nos portraits de phases des équations (i) et (ii). Tout d'abord, on peut noter qu'on a déjà le Hamiltonien [5] pour ce problème.

$$H_{\pm}(w, v) = \frac{1}{2}v^2 + G_{\pm}(w) \quad (15)$$

où $G_{\pm}(w, v) = -\frac{1}{2}w^2 + \frac{3}{4d}(g_{\pm}^{-1}(w))^4 - \frac{2}{3d}(1+a)(g_{\pm}^{-1}(w))^3 + \frac{1}{2}(1+\frac{a}{d})(g_{\pm}^{-1}(w))^2$.

Ainsi, on veut tracer les lignes de niveaux de H_- passant par $(0, 0)$ pour résoudre le problème (i) dans notre cas : comme $H_-(0, 0) = 0$, on obtient la relation $v = \pm\sqrt{-2G_-(w)}$. Enfin, on reconnecte [3] les deux orbites définies juste avant en les "collant" avec une orbite de (ii). De cette manière, on construit nos solutions homoclines et on peut retrouver toutes les alternatives du théorème 5.1.

5.2.1 Cas famille de solutions discontinues

Pour avoir une famille de solution discontinues (cas 3 du théorème 5.1), il suffit que $G_-(m) < 0$. C'est le cas lorsque $a = d = 0.2$.

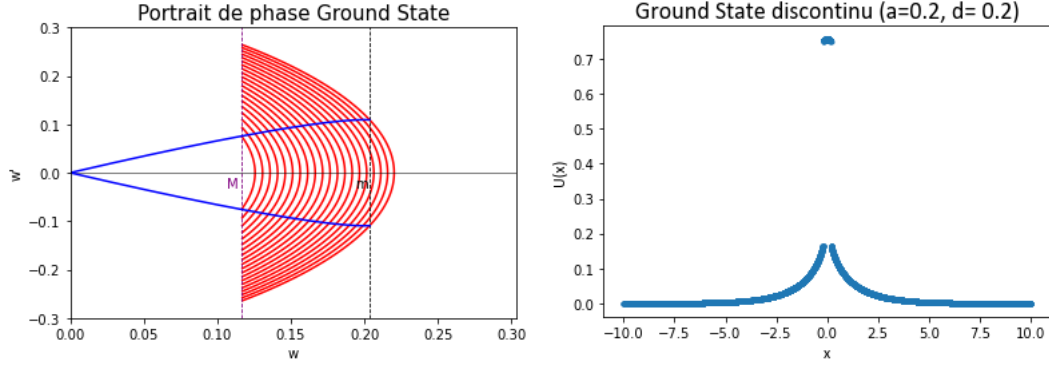


Fig.4 Famille de solution discontinue pour $a = d = 0.2$

La solution tracée à droite s'obtient en choisissant une valeur t comprise entre M et m : l'orbite qui passe de la courbe bleue à la courbe rouge lorsque $w = t$ correspond à la solution W qui nous permet d'obtenir U .

5.2.2 Solutions régulières et famille discontinues

Pour obtenir une telle configuration, plusieurs cas de figure se présentent :
- soit $G_-(m) = 0$ et il y aura une solution régulière sur \mathbb{R}^* et une famille de solution discontinues :

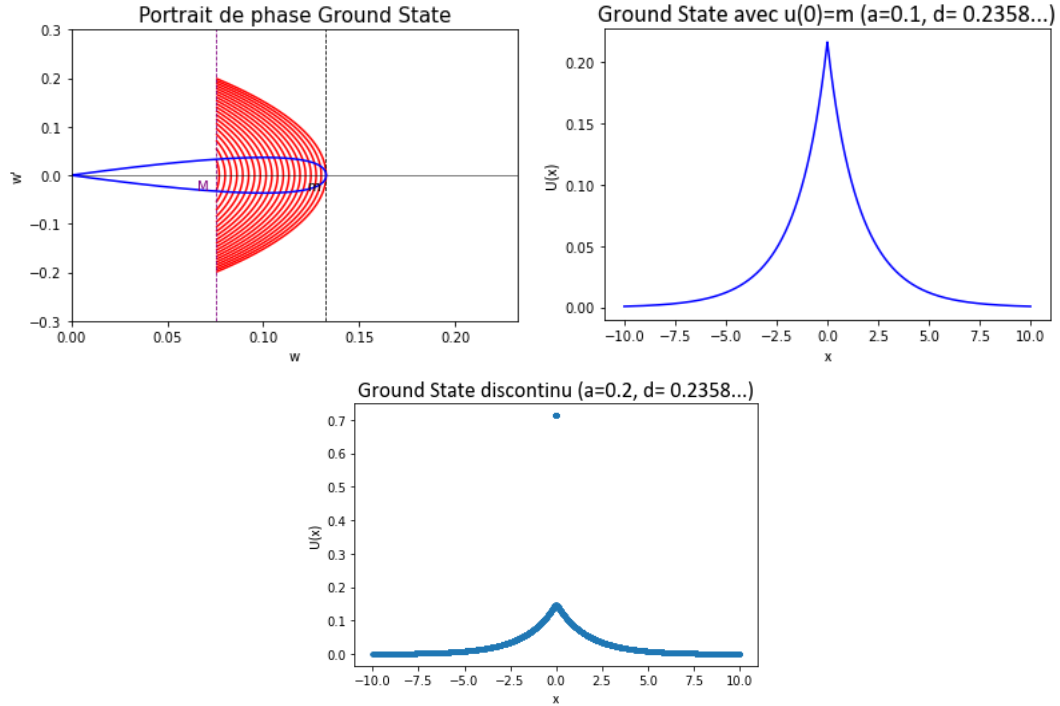


Fig.5 Solution régulière sur \mathbb{R}^* (haut-droite) et famille de solution discontinue (bas) pour $a = 0.1$ et $d = 0.2358...$

- soit $G_-(m) > 0$ et il y aura une solution de classe C^∞ sur \mathbb{R} et une famille de solutions discontinues :

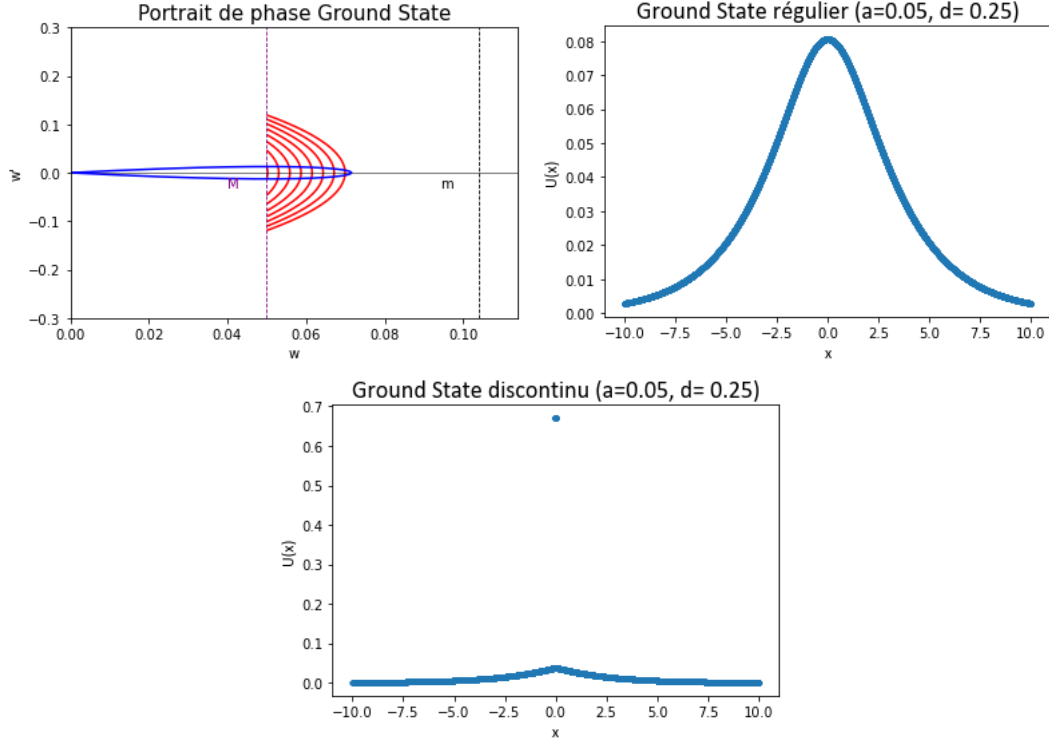


Fig.6 Solution C^∞ sur \mathbb{R}^* (droite) et solutions discontinues (bas) pour $a = 0.05$ et $d = 0.25$

5.2.3 Cas continu

Enfin, on peut voir que la présence des courbes rouges qui intersectent la bleue donne l'existence des solutions discontinues : ces dernières étant limitées par M , il suffit donc que $G_-(M) < 0$ pour retirer la présence de telles solutions :

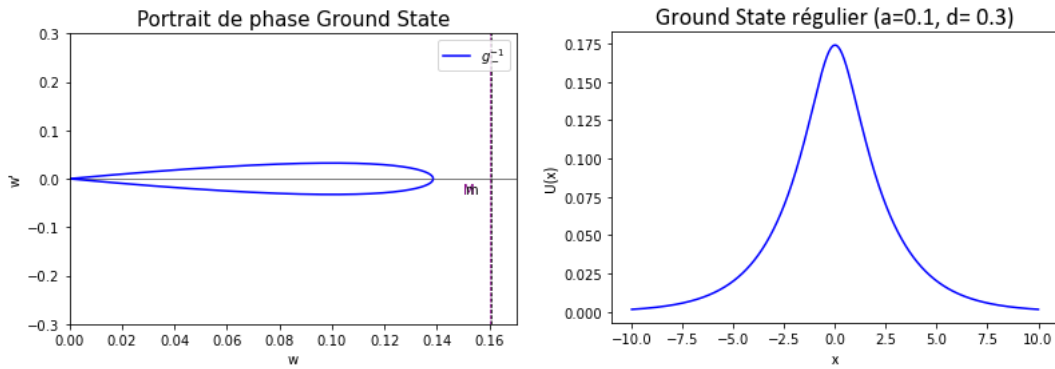


Fig.7 Solutions de classe C^∞ sur \mathbb{R} pour $a = 0.1$ et $d = 0.3$

Pour terminer notre cas, on voit que dès que $d > \frac{1}{3}(a^2 - a + 1)$, g sera strictement croissante et donc inversible : il y aura alors automatiquement une unique solution continue. Pour $d = \frac{1}{3}(a^2 - a + 1)$ les mêmes cas précédents vont apparaître sans discontinuité en fonction de la valeur de $G_-(m)$.

On a donc pu illustrer toutes les alternatives, avec leurs conditions d'apparition, ce qui nous permet de dresser un petit graphique récapitulatif de tout ce que l'on a appris dans notre contexte :

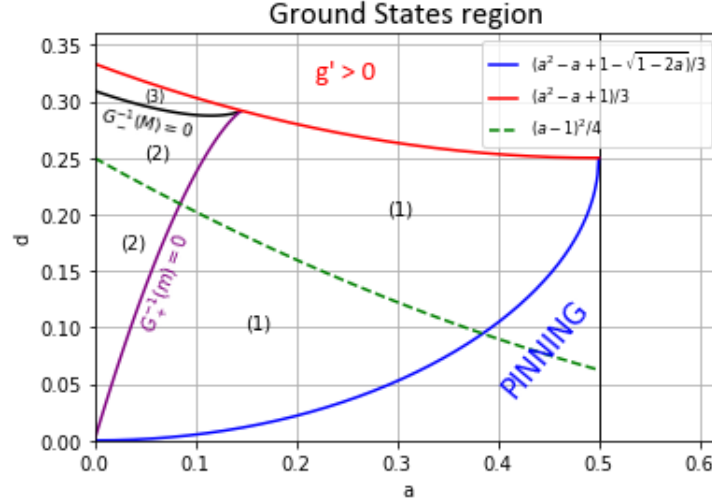


Fig.8 Différentes régions des Ground States et pinning pour $a \in [0, \frac{1}{2}]$

Légende :

- (1) : Famille de solutions discontinues
- (2) : Solution continue et famille de solutions discontinues
- (3) : Unique solution continue

5.3 Stabilité

6 Références

- [1] : A. Zlatos, Sharp transition between extinction and propagation of reaction, J. Amer.Math. Soc. 19 (2006), 251–263.
- [2] : P. W. Bates, P. C. Fife, X. Ren, and X. Wang, Traveling waves in a convolution model for phase transitions, Arch. Rational Mech. Anal. 138 (1997), 105–136.
- [3] : A. Chmaj, X. Ren, Homoclinic Solutions of an Integral Equation : Existence and Stability, Journal of Differential Equations 155 (1999), 17–43.
- [4] : E. Chasseigne, M. Chaves, J. Rossi, Asymptotic behaviour for nonlocal diffusion equations, J. Math. Pures Appl. 86 (2006) 271–291.

[5] : T. Anderson, G. Faye, A. Scheel, D. Stauffer, Pinning and Unpinning in Nonlocal Systems, *Journal of Dynamics and Differential Equations* 28, 897-923 (2016)