Chapter 1

Localização de raízes reais e complexas de polinômios

Gabriel Sabaudo, Guilherme Silva

Abstract

This academic work seeks to analyze the location of real and complex polynomial roots. To do this, we first review some basic concepts that are essential for understanding the main subject. With the theme approach, graphs, exercises and algorithms are presented to understand the central theme. Ending with truncation errors and a discussion of possible applications in the real world on the central theme.

Resumo

Este trabalho acadêmico busca analisar a localização de raízes reais e complexas de polinômios. Para isso, primeiro revisamos alguns conceitos básicos que são essenciais para o entendimento do assunto principal. Com a abordagem do tema, são apresentados gráficos, exercícios e algoritmos para o entendimento do tema central. Finalizando com os erros de truncamento e uma discussão das possíveis aplicações no mundo real sobre o tema central.

1.1. Informacao Geral

Ciência da Computação, Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Departamento de Computação
Email: gabriel.angelo@uel.br, guilherme.henrique.silva@uel.br

1.2. Introdução

O conceito de localizações de raízes reais e complexas de um polinômio é algo bem complexo de entendimento, com isso, é importante o conhecimento básico de alguns conceitos como definições de polinômios, raízes de polinômios e da teoria fundamental da álgebra. Após o compreendimento desses conceitos é possível a compreensão dos métodos de localizações. Bem como, Regra de Sinal de Descartes, Teorema do Bolzano, Regra de Huat, Regra da Lacuna, Cota de Kojima, Cota de Laguerre-Thibault e outros métodos que serão citados para o conhecimento de existência e algumas aplicações em algoritmos para a demonstração prática de como esses métodos funcionam. Além de compreendemos a importância dos polinômios na nossa vida, visto que a aplicação deles fazem parte de tantas áreas do mundo real que na maioria das vezes passam despercebidos.

1.3. Definição de Polinômios

Polinômio é uma expressão matemática que consiste em uma soma de termos, sendo que cada um destes inclui uma variável ou mais elevadas a uma potência $(1 \cdots N)$ e multiplicadas por um coeficiente. [1]

1.3.1. Classificação de polinômio

De acordo com a quantidade de termos, podemos classificar os polinômios da seguinte forma:

- Monômio, polinômios mais simples possuem apenas uma variável
- Binômio, quando há dois monômios;
- Trinômio, quando há três monômios;
- Para quatro ou mais monômios não existe um nome especial, chamamos apenas de polinômio;

1.3.2. Forma geral de um polinômio

$$anx^n + an - 1x^n - 1 + an - 2x^n - 2 + ... + a1x^1 + a0x^0$$

Os ai representam os coeficientes e x representa a variável.

1.3.3. Raízes de polinômios

No estudo do valor numérico de um polinômio, notamos que para cada valor que atribuímos à variável x, encontramos um valor numérico para o polinômio. A raiz de um polinômio é denotada pelo valor que a variável assume de modo que o valor numérico do polinômio seja igual a zero. [4]

O termo “raiz” é visto pela primeira vez como a solução de uma equação, entretanto você deve lembrar que aquela equação estava igual a zero, sendo o zero o valor numérico da equação. As raízes polinomiais possuem grande importância para a construção de gráficos dos polinômios, afinal, com essas raízes podemos encontrar os pontos onde a função intersecta o eixo das abscissas (eixo x).

Problemas envolvendo raízes polinomiais podem aparecer, normalmente, de duas maneiras. Em uma verifica-se se o valor informado para a variável levará ao valor numérico zero, ou seja, se este valor é a raiz do polinômio; e na outra maneira deverá ser encontrada a raiz do polinômio.

Exemplos: Verifique se 2 é a raiz do polinômio: p(x)=3x-6.

Teremos que p(2)=0. Vamos verificar se isso é verdade.

(2)=3*2–6=0

Portanto, o valor x=2 é uma das raízes do polinômio.

1.4. Teorema Fundamental da Algebra

Toda equação algébrica P(x) = 0 de grau n $\geq$ 1 admite, pelo menos, uma raiz complexa. Se temos uma equação polinomial/algébrica qualquer, seja do primeiro grau do segundo grau ou de qualquer grau, desde que seja maior do que 1, essa equação permite pelo menos 1 raiz complexa. [1] Os números reais fazem parte do conjunto de números complexos. Portanto, todo número real é um número complexo.

Pode-se provar a partir do teorema fundamental da álgebra que P(x) = 0, de n $\geq$ 1 admite, exatamente n raízes complexas. Como exemplo, uma equação polinomial do segundo grau terá duas raízes complexas e esses números complexos podem ser números reais.

1.5. Localização de Raízes

Graficamente, os zeros reais de uma função estão localizados nas abcissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo x. Se por exemplo, encontrarmos uma equação polinomial de 3ºgrau, conseguiremos localizar 3 locais onde uma curva interceptará o eixo x, mas isso não ocorre com as raízes complexas. As raízes complexas são representadas por uma interceptação da curva fora do eixo x. Partindo do teorema fundamental da álgebra, teremos então, além das raízes reais, as raízes 2 raízes complexas, já que elas aparecem apenas em pares, devido à sua raiz conjugada.

A seguir serão apresentadas algumas maneiras de encontrar as localizações de raízes reais e complexas de um polinômio, sendo mostrado os passos e os critérios para cada método.

1.5.1. Regra de Sinal de Descartes

A Regra de Sinal de Descartes, desenvolvida por René Descartes em 1637, tem como função estimar o número de zeros positivos ou negativos de um polinômio olhando apenas para a mudança de sinais de seus coeficientes.

Usando como exemplo o polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 - 9x + 3$$

Podemos encontrar neste exemplo o número de raízes positivas ou negativas, e para encontrarmos raízes positivas, basta contar o número de troca de sinais do polinômio:

x4	x3	-x	3
+	+	-	+

Table 1.1. Trocas de sinais do polinômio

Temos 2 trocas de sinais, portanto 2 raízes positivas. Para descobrirmos as raízes negativas, é necessário primeiro multiplicar x por -x. O polinômio ficará da seguinte forma:

$$f(x) = -x4 - x3 + 9x - 3$$

-x4	-x3	x	-3
-	-	+	-

Table 1.2. Trocas de sinais do polinômio

Aqui, temos 2 trocas, então teremos 2 raízes negativas.

1.5.2. Teorema de Bolzano

Designado também por Teorema dos Valores Intermédios, é um teorema com grande significado na determinação de valores específicos, nomeadamente zeros, de certas funções reais de variável real. Este teorema foi enunciado pela primeira vez em 1817, por Bernard Bolzano (1781-1848), um sacerdote, matemático e filósofo, nascido em Praga.[5]

Se f(x) for continua no intervalo [a,b] tal que

$$f(a) * f(b) < 0$$

então f(x) possui pelo menos uma raiz no intervalo [a,b] [1]

Exemplo: A função:

$$f(x) = x^{3\breve{}}10$$

possui pelo menos uma raiz no intervalo [2,4]

$$f(2) = 2^{3\breve{}}10$$

$$f(2) = 8 - 10$$

$$f(2) = -2$$

$$f(4) = 4^3 - 10$$

$$f(4) = 64\breve{}10$$

$$f(4) = 54$$

$$f(2) * f(4) = -2 * (+54)$$
$$f(2) * f(4) = -108$$

Com isso, entre o intervalo [2,4] podemos garantir pelo teorema que existe uma raiz para a equação

$$f(x) = x^3 - 10$$

Na imagem seguinte, consigo verificar que f(a) e f(b) têm sinais contrários, logo de certeza que esta função possui pelo menos um zero naquele intervalo. Usando o teorema, não consigo calcular o zero nem provar que ele é único, apenas posso afirmar que ele existe.

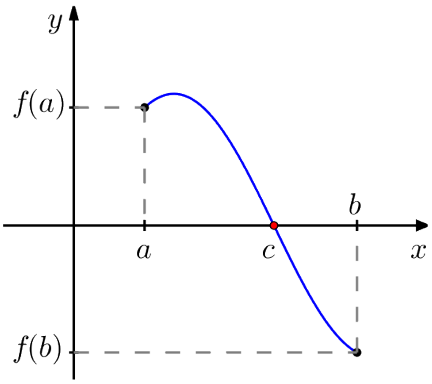

Figure 1.1. Regra de bolzano

Fonte: matematica.pt (2020)

1.5.3. Raízes complexas de um polinômio - Regra de Huat e Regra da Lacuna

De acordo com [2], podemos considerar os seguintes fatos:

- Considere um polinômio de grau n de coeficientes reais:

  $$p(x) = a0x^n + a1x^n - 1 + ... + an - 1x + an$$

- Se p(0) for diferente de 0 e para algum k,

  $$0 < k < n$$

  , tivermos (ak)$^2 \leq$ (ak-1)*(ak+1), então p(x) terá raízes complexas

- A Regra da Lacuna se encaixa como um caso particular, pois se p(0) for diferente de 0, e para algum

  $$0 < k < n$$

  tivermos ak=0, e (ak-1)*(ak+1) > 0, então p(x) terá raizes complexas

- Se p(0) for diferente de 0 e existirem 2 ou mais coeficientes sucessivos, então p(x) terá raízes complexas

A seguir alguns dessas aplicações:

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

Existem 2 ou 0 raízes positivas

$$p(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3$$

Existem 3 ou 1 raízes negativas
Pela Regra de Huat:

$$(a2)^2 <= a1 * a3, 1 < 3 * 2$$

- Portanto, p(x) tem raízes complexas

Possibilidades de raízes:

Positivas	Negativas	Complexas
2	1	2
0	3	2
0	1	4

Table 1.3. Possibilidades de raízes do polinômio

Outro exemplo:

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

Existem 4, 2 ou 0 raízes positivas

$$p(-x) = 2x^6 + 3x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$$

Não tem raízes negativas

De acordo com a Regra da Lacuna:

$$a2 = 0, a1 * a3 > 0, (-3) * (-2) > 0$$

Portanto, p(x) tem raízes complexas.

Possibilidades de raízes:

Positivas	Negativas	Complexas
4	0	2
2	0	4
0	0	6

Table 1.4. Possibilidades de raízes do polinômio

1.5.4. Localização de raízes complexas - Cota de Kojima

De acordo com [2], dado o polinômio

$$p(x) = a0x^n + a1x^n - 1 + ... + an - 1x + an$$

toda raiz x, real ou complexa, está em um anel de raio externo R = q1 + q2, onde q1 e q2 são os maiores valores de

$$|a1/a0|^(1/i), 1 \leq i \leq n$$

Considerando p(1/x), o raio interno r é calculado de modo semelhante: r = 1/(q1+q2). Exemplo:

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

- a0 = 1, a1 = 1, a2 = -9, a3 = -1, a4 = 20, a5 = -12
- $$1^1, 9^(1/2), 1^(1/3), 20^(1/4), 12^(1/5)$$
- q1 = 3, q2 = 2,115, logo, R = 5,115
- Toda raiz x satisfaz que o módulo de x é menor que 5,115
- As raízes de p(1/x) são as mesmas do polinômio -12x5 + 20x4 - x3 - 9x2 + x + 1
- Valores:
  $$(20/12)^1; (1/12)^1/2; (9/12)1/3; (1/12)1/4; (1/12)1/5$$
  Valores:
  $$(20/12); (1/12); (9/12); (1/12); (1/12) = 1,667; 0,289; 0,909; 0,537; 0,608$$
- q1 = 1,667, q2 = 0,909, logo, R = 0,388
- Toda raiz x satisfaz que o módulo de x é maior que 0,388

1.5.5. Localização de raízes reais - Cota de Laguerre-Thibault

Dado o polinômio p(x) de coeficientes reais, calcule a divisão de p(x) por x-1, x-2, x-3, ..., x-m, até que o quociente q(x) tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, e resto R maior que 0. Esse m maior que 0 é uma cota superior das raízes reais de p(x). Uma cota inferior n menor que 0 pode ser calculada de modo semelhante, multiplicando-se p(-x) por -1 e seguindo o mesmo procedimento [2]. Usando de exemplo o polinômio

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x\breve{}2$$

Como o resto é maior que 0, logo, 2 é uma cota superior das raízes reais. Para descobrir a cota inferior do polinômio, basta calcular p(-x) por -1. Como a raiz real é positiva, temos que ela estará entre 0 e 2. Temos:

-	2	-3	4	-2
2	-	4	2	12
-	2	1	6	10

Table 1.5. Método de Briot-Ruffini para dividir o polinômio

1.6. Algoritmos

Abaixo estão alguns algoritmos desenvolvidos para localizar raízes, os algoritmos foram feitos em python.

1.6.1. Algoritmo para a Regra de Huat:

```python
def le_pol(n):
    a = []
    for i in range(n, -1, -1):
        print(" Informe o a[", i , "] = " )
        val = float(input( ))
        a.append(val)
    return a

n = int(input("Digite o n para definir o grau do polinômio "))

a = le_pol(n)
print(a)
def huat(a, n):
    comp = False
    for k in range (1, n):
        if(pow(a[k], 2)<= (a[k-1] * a[k+1])):
            comp = True
    if(comp):
        print("O polinomio possui raízes complexas")
    else:
        print("O polinomio não possui raízes complexas")
    return(0)

h = huat(a, n)
```

Figure 1.2. Regra de Huat

1.6.2. Algoritmo para o Teorema de Bolzano:

O código a seguir é a representação do teorema de Bolzano. Nesse código existe a necessidade da entrada de um polinômio e de um intervalo de valores, com isso, o algoritmo faz o processamento do teorema e na saida do código verifica se neste intervalo existe alguma raiz ou não.

```
import numpy as np


def fx(a, x):
  n = np.shape(a)[0]
  soma  = a[0]
  for i in range(1, n):
    soma = (soma * x) + a[i]
  return soma

def le_pol(n):
    a = []
    for i in range(n, -1, -1):
        print(" Informe o a[", i , "] = " )
        val = float(input( ))
        a.append(val)
    return a

n = int(input("Digite o n para definir o grau do polinômio "))
a = le_pol(n)
print(a)
i1 = int(input("Digite o primeiro intervalo:  "))
i2 = int(input("Digite o segundo intervalo: "))
print(fx(a, i1))
print(fx(a, i2))
r1 = fx(a, i1)
r2 = fx(a, i2)
mult = r1*r2
print(mult)
if(mult < 0):
  print("Existe uma raíz real para a equação neste intervalo")
else:
  print("Existe um número par de raízes ou nenhuma raíz real para esta equação neste intervalo")
```

Figure 1.3. Teorema de Bolzano

1.7. Erros de Truncamento

De acordo com [3], os erros de truncamento são aqueles originários de quando se utiliza uma aproximação ao invés de um procedimento matemático exato. Com base no Teorema de Taylor, que diz que qualquer função suave pode ser aproximada por um polinômio, a série de Taylor fornece o meio para expressar essa ideia de maneira matemática de forma que gere resultados práticos.

$$f(xi+1) = f(xi) + f'(xi)h + (f^n(xi)/2!)h^2 + (f^3(xi)/3!)h^3 + ... + (f^n(xi)/n!)h^n + Rn$$

A aproximação de ordem n é exata para polinômios até da ordem n. Para funções diferenciáveis e contínuas, exponenciais e senoidais, qualquer aproximação com uma quantidade finita de termos não fornecerá um resultado exato.

1.7.1. Exemplo de Erros de Truncamento

Utilizar a expansão por Taylor de ordem 0 até ordem 6 para aproximar f(x) = cos(x) em xi+1 = pi/3 na base do valor de f(x) e suas derivadas em xi = pi/4:

h = pi/3 - pi/4 = pi/12

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) = 0.707106781$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) - sen(pi/4)(pi/12) = 0.521986659$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) - sen(pi/4)(pi/12) - cos/2(pi/4)(pi/12)^2 = 0.497754491$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) - sen(pi/4)(pi/12) - cos/2(pi/4)(pi/12)^2 + sin/3!(pi/4)(pi/12)^3 = 0.499869147$$

O valor aproximado no caso seria 0,5.

1.8. Aplicações no mundo real

Os polinômios têm aplicações para quase todas as ciências. Na física é bastante utilizado para descrever a trajetória de um projétil. A soma de diversos polinômios pode ser utilizada para expressar conceitos como energia, inércia, por exemplo. Astrofísicos usam para calcular a velocidade e a distância de outro objeto no espaço de uma estrela. Também são importantes para determinar a pressão em aplicações da dinâmica dos fluidos. [6]

Em química os polinômios são utilizados para determinar a composição de determinados tipos de moléculas e compostos. Fórmulas estatísticas usam polinômios para verificar valores futuros de nascimento dos animais e as taxas de mortalidade, fluxo monetário e crescimento da população. Os polinômios também são muito utilizados em economia para fazer análise de custos. Outra aplicação é em informática, a programação utiliza muito os polinômios para a estruturação lógica de um sistema, assim como em criptografia de dados.[6]

Sem os polinômios, não teríamos os computadores, CDs, nem o salvamento de músicas. Os polinômios são a base do código que faz com que os dados sejam escritos em CDs, os chamados códigos corretores de erro. A programação de um computador utiliza os polinômios de forma fundamental, sem eles o mundo hoje seria muito diferente do que conhecemos, a informatização das coisas não existiria como é hoje sem a utilização deles.

Existe a aplicação dos polinômios para descrever curvas, um exemplo seria a utilização para descrever as curvas de um trilho de montanha russa. Podemos dizer que os polinômios são muito mais utilizados do que a maioria das pessoas imaginam, sem as aplicações deles o mundo que conhecemos não seria igual hoje em dia.[6]

1.9. Conclusão

Este trabalho visou analisar alguns conceitos básicos sobre polinômios, para ter uma compreensão facilitada sobre o tema central do trabalho. Estes conceitos foram a definição exata do que seria um polinômio e o que fazia um número ser a raiz do polinômio. Partindo para o tema central do trabalho podemos verificar que existe diversos métodos de localização de raízes. E que cada um tem uma vantagem específica para o uso.

Podemos verificar que o método de Bolzano sua principal vantagem é verificar se um existe uma raiz em um certo intervalo na estabelecido. Já a Regra de Descarte é um método para determinar o número máximo de raízes reais positivas ou negativas de um polinômio.

Além desses métodos analisamos que existe de métodos específicos para localizar raízes complexas, como a Regra de Huat, Regra da Lacuna e a Cota de Kojima e a existência de métodos para achar raízes reais como a Cota de Laguerre-Thibault. Existem ainda outros métodos de localização que não foram discutidas neste trabalho como a cota de Fujiwara e a Cauchy que valem a pena ser citados. Assim como, a demonstração em algoritmo da funcionalidade do método de Bolzano e da Regra de Huat.

Demostrando os erros de truncamento que possam acontecer e as várias áreas que os polinômios são aplicados e comprovando que sem eles o mundo hoje seria muito diferente do que conhecemos.

1.10. References

References

[1] J. Duilio Brancher (2020), "Computação Algébrica e Numérica - Localização de raízes reais e complexas", https://classroom.google.com/u/2/c/MTEwMzcxNzgwNDkz/m/MTI5NTkyMDU2OTE4/details, Outubro

[2] A. Carlos and J. De Melo (2014), "Matemámatica Computacional", http://www.comp.ita.br/ alonso/ensino/CCI22/cci22-cap4.pdf, Outubro

[3] D. Roza José (2016), "Erros de arredondamento e truncamento", http://professor.luzerna.ifc.edu.br/david-jose/wp-content/uploads/sites/25/2016/02/, Outubro

[4] G. Alessandro de Oliveira (2019), "Raiz de um polinômio", https://www.preparaenem.com/matematica/raiz-um-polinomio, Outubro

[5] V. Nunes (2019), "Teorema de Bolzano", https://www.matematica.pt/faq/teorema-bolzano.php", Outubro

[6] A. Elahi (2019), "Polinômios no dia-a-dia", https://www.ehow.com.br/calcular-transformadores-toroidais-como-97066/, Outubro