Localização de raízes reais e complexas de polinômios

Gabriel Sabaudo, Guilherme Silva

Universidade Estadual de Londrina

October 27, 2020

Introdução

- Localização de raízes reais e complexas de polinômios.
- Conceitos básicos que são essenciais para o entendimento do assunto principal.
- Métodos de localizações.
- Algumas aplicações em algoritmos para a demonstração prática de como esses métodos funcionam.
- Erros de truncamento.
- Finalizando com uma discussão das possíveis aplicações no mundo real.

Polinômios

Definição de polinômio:

- Um polinômio é uma expressão matemática que consiste em uma soma de termos, sendo que cada um destes inclui uma variável ou mais elevadas a uma potência $(1 \cdots N)$ e multiplicadas por um coeficiente.

Forma geral de um polinômio

$$anx^n + an - 1x^n - 1 + an - 2x^n - 2 + ... + a1x^1 + a0x^0$$

- O a representa os coeficientes e x representa a variável.

Raiz de um polinômio

- No estudo do valor numérico de um polinômio, notamos que para cada valor que atribuímos à variável x, encontramos um valor numérico para o polinômio. A raiz de um polinômio é denotada pelo valor que a variável assume de modo que o valor numérico do polinômio seja igual a zero.

Teorema Fundamental da Algebra

- Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa. Se temos uma equação polinomial/algébrica qualquer, seja do primeiro grau do segundo grau ou de qualquer grau, desde que seja maior do que 1, essa equação permite pelo menos 1 raiz complexa. [1] Os números reais fazem parte do conjunto de números complexos. Portanto, todo número real é um número complexo.
- Pode-se provar a partir do teorema fundamental da álgebra que $P(x) = 0$, de $n \geq 1$ admite, exatamente n raízes complexas.

Teorema de Bolzano

- Designado também por Teorema dos Valores Intermédios, é um teorema com grande significado na determinação de valores específicos, nomeadamente zeros, de certas funções reais de variável real. Este teorema foi enunciado pela primeira vez em 1817, por Bernard Bolzano (1781-1848), um sacerdote, matemático e filósofo, nascido em Praga.[5]
- Se f(x) for continua no intervalo [a,b] tal que

  $$f(a) * f(b) < 0$$

  então f(x) possui pelo menos uma raiz no intervalo [a,b]. [1]

Teorema de Bolzano

- Exemplo: A função:

$$f(x) = x^3 – 10$$

possui pelo menos uma raiz no intervalo [2,4]

$$f(2) = 2^3 – 10$$

$$f(2) = 8 - 10$$

$$f(2) = -2$$

$$f(4) = 4^3 - 10$$

$$f(4) = 64 – 10$$

$$f(4) = 54$$

$$f(2) * f(4) = -2 * (+54)$$

$$f(2) * f(4) = -108$$

- Com isso, entre o intervalo [2,4] podemos garantir pelo teorema que existe um raiz para a equação:

$$f(x) = x^3 - 10$$

Regra de Sinal de Descartes

- Desenvolvida por René Descartes em 1637, tem como função estimar o número de zeros positivos ou negativos de um polinômio.
- Essa estimação pode ser feita observando as mudanças de sinais dos coeficientes do polinômio

Usando como exemplo o polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

temos:

x4	x3	-2x2	3x	2
+	+	-	+	+

Table 1: Trocas de sinais do polinômio

Temos 2 trocas de sinais, portanto 2 raízes positivas.

Raízes complexas - Regra de Huat

- A regra de Huat é utilizada para identificar se há raízes complexas num polinômio.
- Para utilizar a regra, alguns passos devem ser seguidos.
- Considerando um polinômio de grau n de coeficientes reais:

$$p(x) = a0x^n + a1x^n - 1 + ... + an - 1x + an$$

- Se p(0) for diferente de 0 e para algum k,

$$0 < k < n$$

, tivermos $(ak)^2 \leq (ak\text{-}1)*(ak+1)$, então p(x) terá raízes complexas

Raízes reais - Cota de Laguerre-Thibault

- Pela definição, podemos considerar que a cota de Laguerre é utilizada para encontrar uma cota superior ou inferior dependendo do resto originado pela divisão do polinômio.
- Calcular a divisão de p(x) por x-1, x-2, x-3, ..., x-m, até que o quociente q(x) tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, e resto R maior que 0.
- Uma cota inferior n menor que 0 pode ser calculada de modo semelhante, multiplicando-se p(-x) por -1 e seguindo o mesmo procedimento.

Usando de exemplo o polinômio

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

temos:

-	2	-3	4	-2
2	-	4	2	12
-	2	1	6	10

Table 2: Método de Briot-Ruffini para dividir o polinômio

Erros de Truncamento

- Os erros de truncamento são aqueles originários de quando se utiliza uma aproximação ao invés de um procedimento matemático exato.
- Qualquer função suave pode ser aproximada por um polinômio.
- A série de Taylor nos fornece o meio para expressar essa ideia de maneira matemática de forma que gere resultados práticos.
- A aproximação de ordem n é exata para polinômios até da ordem n.
- Para outros tipos de funções, qualquer aproximação com uma quantidade finita de termos não fornecerá um resultado exato.

Exemplo - Erros de Truncamento

Utilizar a expansão por Taylor de ordem 0 até ordem 6 para aproximar f(x) = cos(x) em xi+1 = pi/3 na base do valor de f(x) e suas derivadas em xi = pi/4:

$$h = pi/3 - pi/4 = pi/12$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) = 0.707106781$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) - sen(pi/4)(pi/12) = 0.521986659$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) - sen(pi/4)(pi/12) - cos/2(pi/4)(pi/12)^2 = 0.497754491$$

$$f(pi/3) \cong cos(pi/4) - sen(pi/4)(pi/12) - cos/2(pi/4)(pi/12)^2 + sin/3!(pi/4)(pi/12)^3$$

$$= 0.499869147$$

O valor aproximado no caso seria 0,5.

Aplicações no mundo real

- Na física é bastante utilizado para descrever a trajetória de um projétil.
- soma de diversos polinômios pode ser utilizada para expressar conceitos como energia e inércia.
- Em química os polinômios são utilizados para determinar a composição de determinados tipos de moléculas e compostos.
- A programação utiliza muito os polinômios para a estruturação lógica de um sistema, assim como em criptografia de dados.
- Existe a aplicação dos polinômios para descrever curvas, um exemplo seria a utilização para descrever as curvas de um trilho de montanha russa.

Conclusão

- Este trabalho visou analisar alguns conceitos básicos sobre polinômios.
- Partindo para o tema central do trabalho podemos verificar que existe diversos métodos de localização de raízes.
- Erros de truncamento que possam acontecer e as várias áreas que os polinômios são aplicados e comprovando que sem eles o mundo hoje seria muito diferente do que conhecemos.

Referências I

J. Duilio Brancher (2020), "Computação Algébrica e Numérica - Localização de raízes reais e complexas", https://classroom.google.com/u/2/c/MTEwMzcxNzgwNDkz/m/MTI5NTkyMDU2OTE4/details, Outubro

A. Carlos and J. De Melo (2014), "Matemámatica Computacional", http://www.comp.ita.br/ alonso/ensino/CCI22/cci22-cap4.pdf, Outubro

D. Roza José (2016), "Erros de arredondamento e truncamento", http://professor.luzerna.ifc.edu.br/david-jose/wp-content/uploads/sites/25/2016/02/, Outubro

G. Alessandro de Oliveira (2019), "Raiz de um polinômio", https://www.preparaenem.com/matematica/raiz-um-polinomio, Outubro

V. Nunes (2019), "Teorema de Bolzano", https://www.matematica.pt/faq/teorema-bolzano.php", Outubro

A. Elahi (2019), "Polinômios no dia-a-dia", https://www.ehow.com.br/calcular-transformadores-toroidais-como-97066/, Outubro