Método Simplex

P.PORTO

ESCOLA
SUPERIOR
DE TECNOLOGIA
E GESTÃO

Conteúdo

- Método Simplex.

Método Simplex

Forma aumentada

- O desenvolvimento dos cálculos do método Simplex é facilitado pela imposição de dois requisitos ao modelo PL:
  - Todas as restrições são equações com termos independentes não-negativos.
  - Todas as variáveis são não-negativas.

Conversão para a forma aumentada

- Conversão das desigualdades em equações com termos independentes não-negativos.
  - Para converter uma desigualdade $\leq$ numa equação, uma variável de folga não-negativa é adicionada.

$$x_1 + x_2 \leq 10 \longrightarrow \begin{array}{c} x_1 + x_2 + s_1 = 10 \\ s_1 \geq 0 \end{array}$$

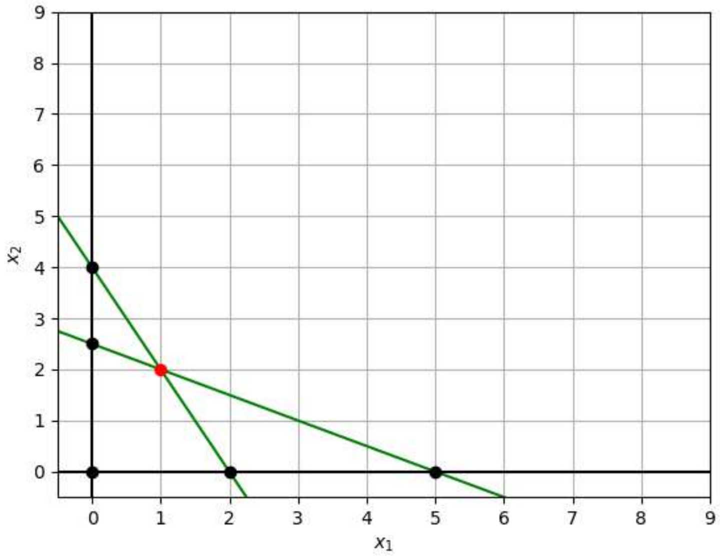
    - A variável não negativa s_1 é a folga (ou montante não utilizado) do recurso.
  - Para converter uma desigualdade $\geq$ numa equação, é efetuada a substração de uma variável de folga não-negativa.

$$x_1 + x_2 \geq 10 \longrightarrow \begin{array}{c} x_1 + x_2 - s_1 = 10 \\ s_1 \geq 0 \end{array}$$

    - A quantidade de s_1 representa o excesso sobre o mínimo requerido (10).
- O requisito restante obriga a que os termos independentes sejam não-negativos.
  - Multiplicar ambos os lados da equação por -1.

Modelo de PL

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 & \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 & \leq 5 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$



Espaço de soluções

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 && \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 && \leq 5 \\
& x_1, x_2 && \geq 0
\end{aligned}
$$

- Algebricamente, o espaço de soluções é representado pelas seguintes $m\ (=\ 2)$ equações e $n\ (=\ 4)$ variáveis.

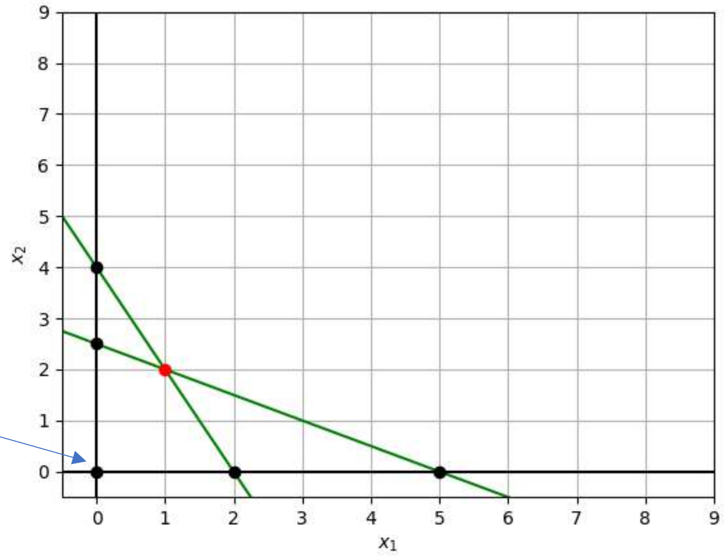
$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 && = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 && = 5 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 && \geq 0
\end{aligned}
$$

Soluções básicas

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 & \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 & \leq 5 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

- As soluções básicas são determinadas definindo $n - m$ $(4 - 2 = 2)$ variáveis iguais a zero e resolvendo para as restantes m $(= 2)$ variáveis.
- O número (máximo) de CPS é $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ $(C_2^4 = \frac{4!}{2!(2)!} = 6)$.

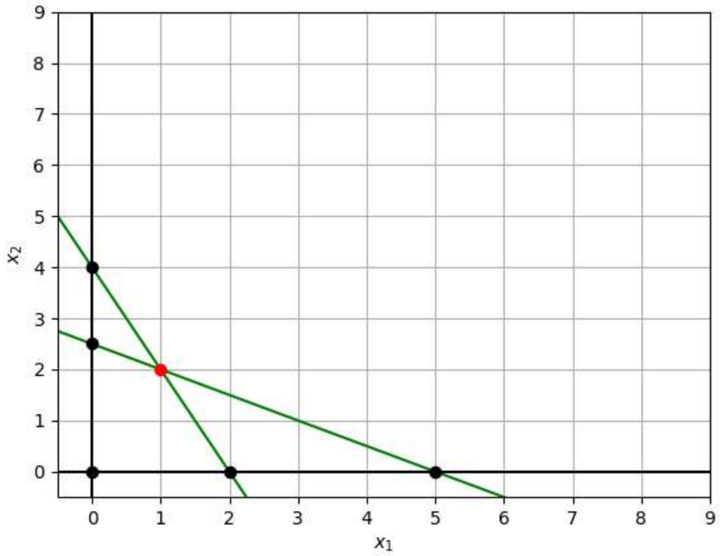
Por exemplo, se definirmos $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, as equações fornecem a solução básica única $s_1 = 4$, $s_2 = 5$.



Variáveis básicas e não básicas

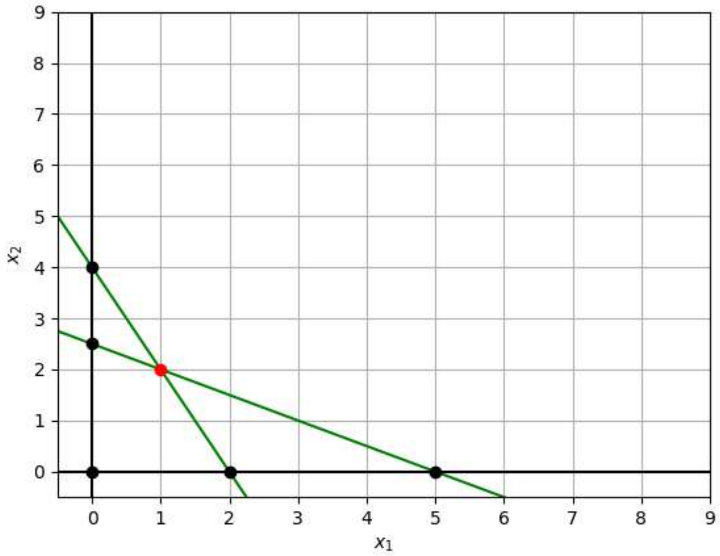
$$\begin{aligned} Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- Para completar a transição da solução gráfica para a algébrica, as $n - m$ variáveis com valor 0 são conhecidas como variáveis não-básicas. As restantes m variáveis são chamadas variáveis básicas, e a sua solução (obtida através da resolução das m equações) é referida como solução básica.



Variáveis não-básicas	**Variáveis básicas**	**Solução básica**	**Admissível**	Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	Sim	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	Não	-
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(1, 2)	Sim	8

Soluções

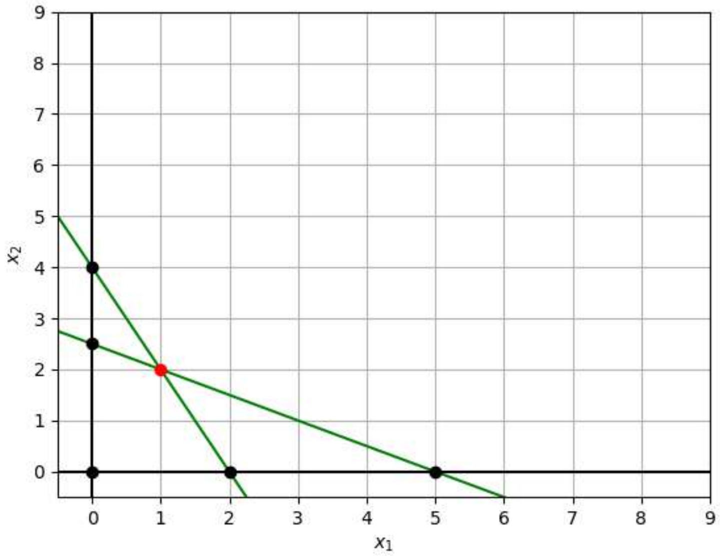


$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 \quad \le 4 \\
& x_1 + 2x_2 \quad \le 5 \\
& x_1, x_2 \quad \ge 0
\end{aligned}
$$

Soluções

Variáveis não-básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Admissível	Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	Sim	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	Não	-
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(1, 2)	Sim	8

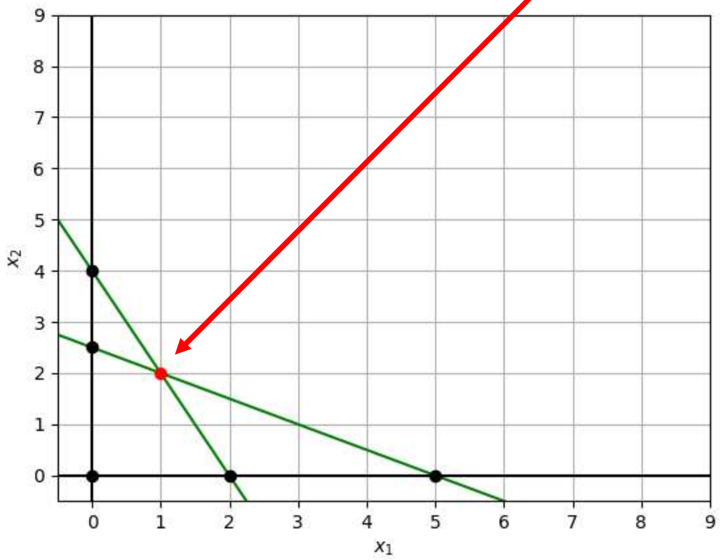
$$\begin{cases} 2(0) + x_2 + (0) = 4 \\ (0) + 2x_2 + s_2 = 5 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ 2x_2 + s_2 = 5 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ 2(4) + s_2 = 5 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ 8 + s_2 = 5 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ s_2 = 5 - 8 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} Max\ Z = \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Variáveis não-básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Admissível	Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	Sim	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	Não	-
$\boldsymbol{(s_1, s_2)}$	$\boldsymbol{(x_1, x_2)}$	**(1, 2)**	**Sim**	**8**

Soluções



$$Max\ Z = \quad 2x_1 + 3x_2$$

s.a. $2x_1 + x_2 \quad \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \quad \leq 5$

$x_1, x_2 \quad \geq 0$

Método Simplex

Forma canónica

- A aplicação do algoritmo Simplex pressupõe que o problema num formato designado de forma canónica.
  a) Variáveis não-negativas.
  b) Termos independentes não-negativos.
  c) Restrições na forma de igualdades.
  d) Existência de uma variável única (variável básica inicial) com coeficiente 1 em cada restrição e que não é incluída em mais nenhuma equação do problema.

Forma canónica

- A aplicação do algoritmo Simplex pressupõe que o problema num formato designado de forma canónica.
  a) Variáveis não-negativas.
  b) Termos independentes não-negativos.
  c) Restrições na forma de igualdades.
  d) Existência de uma variável única (variável básica inicial) com coeficiente 1 em cada restrição e que não é incluída em mais nenhuma equação do problema.

$$\begin{aligned} Max\ Z = \ & 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.a.} \ & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} Max\ Z = \ & 2x_1 + 3x_2 \quad \text{d)} \quad \text{c)} & \\ \text{s.a.} \ & 2x_1 + x_2 + \boxed{s_1} & \boxed{=} \boxed{4} \\ & x_1 + 2x_2 + \boxed{s_2} & \boxed{=} \boxed{5} \quad \text{b)} \\ & \boxed{x_1, x_2, s_1, s_2 \quad \geq 0} & \text{a)} \end{aligned}$$

Quadro inicial do Simplex

$$
\begin{aligned}
Z - 2x_1 - 3x_2 \quad &= 0 \\
2x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 4 \\
x_1 + 2x_2 + s_2 \quad &= 5 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 \quad &\geq 0
\end{aligned}
$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z					
s_1					
s_2					

Quadro inicial do Simplex

$$
\begin{aligned}
Z - 2x_1 - 3x_2 &= 0\\
2x_1 + x_2 + s_1 &= 4\\
x_1 + 2x_2 + s_2 &= 5\\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5

Quadro inicial do Simplex

$$
\begin{aligned}
Z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\
x_1 + 2x_2 + s_2 &= 5 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Valor da F.O.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5

Variáveis básicas

Coeficientes das restrições associadas às variáveis de decisão

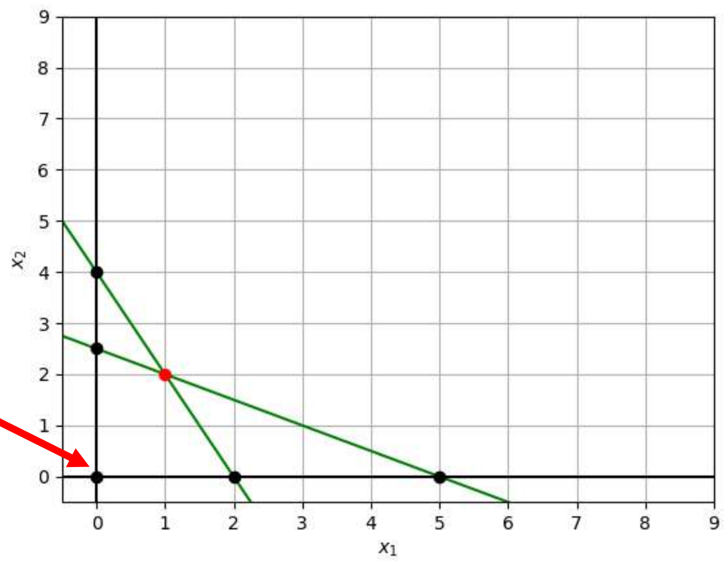
Coeficientes das restrições associadas às variáveis de folga

Valor das variáveis básicas

Método Simplex

Variáveis não-básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Admissível	Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	Sim	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	Não	-
$(\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2})$	$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$	**(1, 2)**	**Sim**	**8**

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5



Melhoria da solução

- A melhoria da solução passa pela entrada de uma variável não básica (ou seja nula) para a base.
- Depois de entrar será positiva e irá contribuir positivamente para a melhoria do valor da F.O.
- Uma das variáveis básicas terá de sair para dar lugar à variável não básica.

Passo 0: Achar uma solução admissível básica inicial.
Passo 1: Verificar se a solução atual é ótima. Se for, parar.
Passo 2: Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.
Passo 3: Determinar a variável básica que deve sair da base.
Passo 4: Achar a nova solução admissível básica, e voltar ao **Passo 1**.

Regra de entrada

- Para problemas de maximização (/minimização), entra para a base a variável não básica que apresenta coeficiente negativo (/positivo) com maior valor em termos absolutos.
  - Entra $\boldsymbol{x_2}$ pois $|-2| < |-3|$.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5

Regra de saída

- A variável que sai da base é sempre (independentemente de ser um problema de maximização ou minimização) aquela que apresenta um menor rácio $\boldsymbol{b_i/a_{ik}}$ com $\boldsymbol{a_{ik} > 0}$.
  - $\boldsymbol{min\left\{\frac{4}{1},\frac{5}{2}\right\} = min\{4, 2.5\} = 2.5}$ saí $\boldsymbol{s_2}$ associado à 2ª restrição.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	b_i/a_{ik}
Z	-2	-3	0	0	0	
s_1	2	1	1	0	4	4
s_2	1	2	0	1	5	2.5

Condensação de Gauss

- Operações que têm por objetivo reparar o formato canónico da solução.
  - As variáveis básicas deve apresentar coeficiente 1 para a restrição associada e 0 para as outras restrições e F.O.

	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	s_2	b_i
Z		0	0		
s_1		0	1		
x_2		1	0		

Condensação de Gauss

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5

- 1º - Multiplicar a 2ª restrição por $^1/_2$ de modo a tornar $a_{22} = 1$.
  - Este elemento é chamado de elemento pivot inserido na linha pivot.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
x_2	$^1/_2$	$\boxed{1}$	0	$^1/_2$	2.5

Elemento pivot

Condensação de Gauss

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	2.5

- 2º - Adicionar à 1ª restrição a linha pivot multiplicada por -1 de modo a tornar $a_{12} = 0$.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	$3/2$ $(-1/2+2)$	0 $(-1+1)$	1 $(0+1)$	$-1/2$ $(-1/2+0)$	1.5 $(-2.5+4)$
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	2.5

Condensação de Gauss

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	$3/2$	0	1	$-1/2$	1.5
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	2.5

- 3º - Adicionar à linha da F.O. a linha pivot multiplicada por 3.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	$-1/2$ $(3/2-2)$	0 $(3-3)$	0 $(0+0)$	$3/2$ $(3/2+0)$	7.5 $(7.5+0)$
s_1	$3/2$	0	1	$-1/2$	1.5
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	2.5

Teste de otimalidade

- Verificação dos valores da linha de F.O.
  - Num problema de maximização, se todos os coeficientes da linha de F.O. forem não-negativos estaremos perante a solução ótima.
  - Num problema de minimização, se todos os coeficientes da linha de F.O. forem não-positivos estaremos perante a solução ótima.

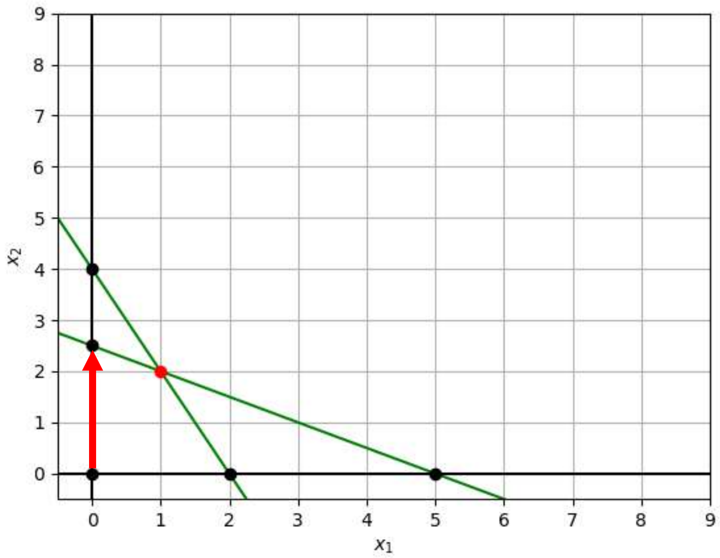
	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	$-{}^{1}/_{2}$	0	0	${}^{3}/_{2}$	7.5
s_1	${}^{3}/_{2}$	0	1	$-{}^{1}/_{2}$	1.5
x_2	${}^{1}/_{2}$	1	0	${}^{1}/_{2}$	2.5

Método Simplex

Variáveis não-básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Admissível	Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	**(2.5, 1.5)**	Sim	**7.5**
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	Não	-
$(\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2})$	$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$	**(1, 2)**	**Sim**	**8**

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	$-{}^1/_2$	0	0	${}^3/_2$	7.5
s_1	${}^3/_2$	0	1	$-{}^1/_2$	1.5
x_2	${}^1/_2$	1	0	${}^1/_2$	2.5



Regra de entrada

- Entra para a base a variável não básica que apresenta coeficiente negativo com maior valor em termos absolutos.
- Como só temos um coeficiente negativo, $\boldsymbol{x_1}$ entra para a base.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	$-{}^{1}/{}_{2}$	0	0	${}^{3}/{}_{2}$	7.5
s_1	${}^{3}/{}_{2}$	0	1	$-{}^{1}/{}_{2}$	1.5
x_2	${}^{1}/{}_{2}$	1	0	${}^{1}/{}_{2}$	2.5

Regra de saída

- A variável que sai da base é aquela que apresenta um menor rácio ${}^{b_i}/_{a_{ik}}$ com $a_{ik} > 0$.
  - $min\left\{\frac{1.5}{1.5}, \frac{2.5}{.5}\right\} = min\{1, 5\} = 1$ saí s_1 associado à 1ª restrição.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	${}^{b_i}/_{a_{ik}}$
Z	$-{}^{1}/_{2}$	0	0	${}^{3}/_{2}$	7.5	
s_1	${}^{3}/_{2}$	0	1	$-{}^{1}/_{2}$	1.5	1
x_2	${}^{1}/_{2}$	1	0	${}^{1}/_{2}$	2.5	5

Condensação de Gauss

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	$-{}^1/_2$	0	0	${}^3/_2$	7.5
x_1	${}^3/_2$	0	1	$-{}^1/_2$	1.5
x_2	${}^1/_2$	1	0	${}^1/_2$	2.5

- 1º - Multiplicar a linha pivot por ${}^2/_3$.
- 2º- Adicionar à 2ª restrição a linha pivot multiplicada $-{}^1/_2$.
- 3º- Adicionar à linha da F.O. a linha pivot multiplicada ${}^1/_2$.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	0	0	${}^1/_3$	${}^4/_3$	8
x_1	1	0	${}^2/_3$	$-{}^1/_3$	1
x_2	0	1	$-{}^1/_3$	${}^2/_3$	2

Teste de otimalidade

- Todos os coeficientes da linha de F.O. são não-negativos foi encontrada a solução ótima.

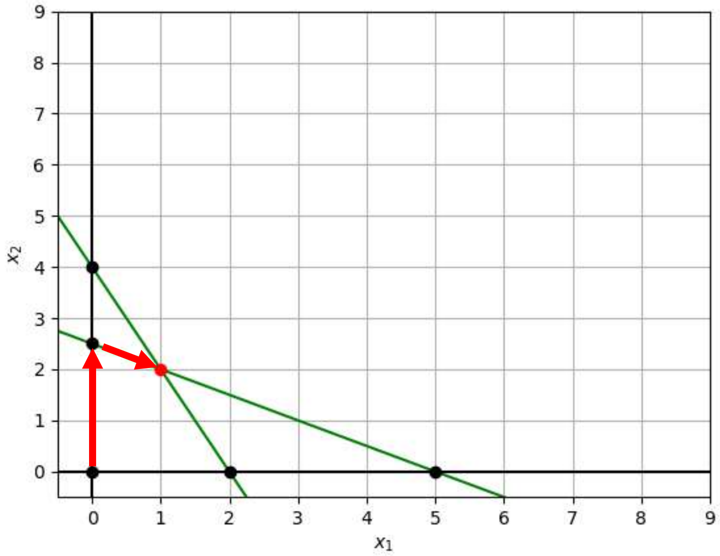
	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	0	${}^{1}/_{3}$	${}^{4}/_{3}$	8
x_1	1	0	${}^{2}/_{3}$	$-{}^{1}/_{3}$	1
x_2	0	1	$-{}^{1}/_{3}$	${}^{2}/_{3}$	2

Método Simplex

Variáveis não-básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Admissível	Z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, -3)	Não	-
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	**(2.5, 1.5)**	Sim	**7.5**
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	Não	-
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	**(1, 2)**	**Sim**	**8**

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-3	0	0	0
s_1	2	1	1	0	4
s_2	1	2	0	1	5

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	0	0	$1/3$	$4/3$	8
x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	1
x_2	0	1	$-1/3$	$2/3$	2



Exemplo 1

Problema

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 & \leq 10 \\
& 4x_1 - 2x_2 & \leq 20 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma canónica

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 && \leq 10 \\
& 4x_1 - 2x_2 && \leq 20 \\
& x_1, x_2 && \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 && = 10 \\
& 4x_1 - 2x_2 + s_2 && = 20 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 && \geq 0
\end{aligned}
$$

Quadro inicial do Simplex

$$
\begin{aligned}
Z - 2x_1 - x_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 + s_1 &= 10 \\
4x_1 - 2x_2 + s_2 &= 20 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	1	1	0	10
s_2	4	-2	0	1	20

Regra de entrada

- Entra $\boldsymbol{x_1}$ pois $|-2| > |-1|$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	1	1	0	10
s_2	4	-2	0	1	20

Regra de saída

- $\boldsymbol{min\left\{\frac{10}{1},\frac{20}{4}\right\} = min\{10,5\} = 5}$ saí $\boldsymbol{s_2}$ associado à 2ª restrição

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$	b_i/a_{ik}
Z	-2	-1	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	10	10
s_2	4	-2	0	1	20	5

Condensação de Gauss

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	1	1	0	10
x_1	4	-2	0	1	20

- 1º - Multiplicar a 2ª restrição por ${}^{1}/_{4}$ de modo a tornar $a_{21} = 1$.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	1	1	0	10
x_1	$\boxed{1}$	$-{}^{1}/_{2}$	0	${}^{1}/_{4}$	5

Elemento pivot

Condensação de Gauss

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	1	1	1	0	10
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

- 2º - Adicionar a linha pivot multiplicada por -1 à 1ª restrição de modo a tornar $a_{11} = 0$.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	0 $(-1+1)$	$3/2$ $(1/2+1)$	1 $(0+1)$	$-1/4$ $(-1/4+0)$	5 $(-5+10)$
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

Condensação de Gauss

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	-2	-1	0	0	0
s_1	0	$3/2$	1	$-1/4$	5
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

- 3º - Adicionar a linha pivot multiplicada por 2 à linha da F.O.

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
Z	0 $(2-2)$	-2 $(-1-1)$	0 $(0+0)$	$1/2$ $(1/2+0)$	10 $(10+0)$
s_1	0	$3/2$	1	$-1/4$	5
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

Teste de otimalidade

- Como $-c_2 = -2$ (≤ 0) a solução não é ótima.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	-2	0	$1/2$	10
s_1	0	$3/2$	1	$-1/4$	5
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

Entrada

- Entra x_2 pois é a única variável com coeficiente negativo.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	-2	0	$1/2$	10
s_1	0	$3/2$	1	$-1/4$	5
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

Saída

- Saí s_1 pois a_{22} é o único a_{ik} positivo.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	-2	0	$1/2$	10
s_1	0	$3/2$	1	$-1/4$	5
x_1	1	$-1/2$	0	$1/4$	5

Condensação de Gauss

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	-2	0	$^1/_2$	10
x_2	0	$^3/_2$	1	$-^1/_4$	5
x_1	1	$-^1/_2$	0	$^1/_4$	5

- 1º - Multiplicação da linha pivot por $^2/_3$.
- 2º - Adicionar a linha pivot multiplicada por $^1/_2$ à 2ª restrição.
- 3º - Adicionar a linha pivot multiplicada por 2 à linha da F.O.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	0	$^4/_3$	$^1/_6$	$^{50}/_3$
x_2	0	1	$^2/_3$	$-^1/_6$	$^{10}/_3$
x_1	1	0	$^1/_3$	$^1/_6$	$^{20}/_3$

Teste de otimalidade

- Como os coeficientes da F.O. são todos não-negativos, obtivemos a solução ótima.

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	0	0	$^4/_3$	$^1/_6$	$\boldsymbol{^{50}/_3}$
x_2	0	1	$^2/_3$	$-^1/_6$	$^{10}/_3$
x_1	1	0	$^1/_3$	$^1/_6$	$^{20}/_3$

Exercício 1

Problema

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \quad & 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.a.} \quad & x_1 & \leq 4 \\
& 2x_2 & \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema

$$
\begin{aligned}
Max\ Z = \ & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 && \leq 4 \\
& 2x_2 && \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 && \leq 18 \\
& x_1, x_2 && \geq 0
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
& Z - 3x_1 - 5x_2 && = 0 \\
& x_1 + s_1 && = 4 \\
& 2x_2 + s_2 && = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 + s_3 && = 18 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 && \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolução

$$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$
$$x_1 + s_1 = 4$$
$$2x_2 + s_2 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18

Resolução

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	b_i/a_{ik}
Z	-3	-5	0	0	0	0	
s_1	1	0	1	0	0	4	
s_2	0	2	0	1	0	12	$12/2$
s_3	3	2	0	0	1	18	$18/2$

Resolução

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-3	0	0	${}^{5}/_{2}$	0	30
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	${}^{1}/_{2}$	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6

Resolução

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$	b_i/a_{ik}
Z	-3	0	0	$5/2$	0	30	
s_1	1	0	1	0	0	4	$4/1$
x_2	0	1	0	$1/2$	0	6	
s_3	3	0	0	-1	1	6	$6/3$

Resolução

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
Z	0	0	0	$3/2$	1	36
s_1	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
x_2	0	1	0	$1/2$	0	6
x_1	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2

Exercício 2

Problema

$$
\begin{aligned}
Min\ Z = \quad & 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 & \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + 5x_2 - 3x_3 & \leq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & \leq 11 \\
& 5x_1 - 6x_2 + x_3 & \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema

$$
\begin{aligned}
Min\ Z = \ & 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 & \\
\text{s.a.}\ \ & x_1 + 5x_2 - 3x_3 & \leq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & \leq 11 \\
& 5x_1 - 6x_2 + x_3 & \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
& Z - 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = 0 \\
& x_1 + 5x_2 - 3x_3 + s_1 & = 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + s_2 & = 11 \\
& 5x_1 - 6x_2 + x_3 + s_3 & = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolução

$$Z - 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$
$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 + s_1 = 15$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 11$$
$$5x_1 - 6x_2 + x_3 + s_3 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	-2	3	4	0	0	0	0
s_1	1	5	-3	1	0	0	15
s_2	1	1	1	0	1	0	11
s_3	5	-6	1	0	0	1	4

Resolução

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$	${b_i}/{a_{ik}}$
Z	-2	3	4	0	0	0	0	
s_1	1	5	-3	1	0	0	15	
s_2	1	1	1	0	1	0	11	${11}/{1}$
s_3	5	-6	1	0	0	1	4	${4}/{1}$

Resolução

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
Z	-2	3	4	0	0	0	0
s_1	1	5	-3	1	0	0	15
s_2	1	1	1	0	1	0	11
x_3	5	-6	1	0	0	1	4

1º - Multiplicar a linha pivot por -1 e adicionar à linha s_2.
2º - Multiplicar a linha pivot por 3 e adicionar à linha s_1.
3º - Multiplicar a linha pivot por -4 e adicionar à linha Z.

Resolução

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$	b_i/a_{ik}
Z	-22	27	0	0	0	-4	-16	
s_1	16	-13	0	1	0	3	27	
s_2	-4	7	0	0	1	-1	7	$7/7$
x_3	5	-6	1	0	0	1	4	

Resolução

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
Z	-22	27	0	0	0	-4	-16
s_1	16	-13	0	1	0	3	27
x_2	-4	7	0	0	1	-1	7
x_3	5	-6	1	0	0	1	4

1º - Multiplicar a linha pivot por $^1/_7$.
2º - Multiplicar a linha pivot por 6 e adicionar à linha x_3.
3º - Multiplicar a linha pivot por 13 e adicionar à linha s_1.
4º - Multiplicar a linha pivot por 27 e adicionar à linha Z.

Resolução

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	$\boldsymbol{b_i}$
Z	$-{}^{46}/_{7}$	0	0	0	$-{}^{27}/_{7}$	$-{}^{1}/_{7}$	-43
s_1	${}^{60}/_{7}$	0	0	1	${}^{13}/_{7}$	${}^{8}/_{7}$	40
x_2	$-{}^{4}/_{7}$	1	0	0	${}^{1}/_{7}$	$-{}^{1}/_{7}$	1
x_3	${}^{11}/_{7}$	0	1	0	${}^{6}/_{7}$	${}^{1}/_{7}$	10

Solução ótima

$x_1 = 0$ $s_1 = 40$

$x_2 = 1$ $s_2 = 0$

$x_3 = 10$ $s_3 = 0$

Leitura recomendada

- [Capítulo 3, 7] Taha, H. A. (2017). Operations Research: An Introduction (10th ed.). Pearson. ISBN: 9780132555937
- [Capítulo 4, 5] Hillier, F., & Lieberman, G. (2015). Introduction to Operations Research (10th ed.). McGraw-Hill. ISBN: 9780073523453
- [Capítulo 5] Santos, M. M. dos, & Hill, M. M. (2015). Investigação Operacional - Volume 1. Edições Sílabo. ISBN: 9789726188155