Trabalho Teórico 5

Unidade I:

Introdução - Algoritmo de Ordenação por Seleção

Slide A.

1)Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

$$\sum_{i=1}^{i<n} i$$

2)O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;

    for (int j = (i + 1); j < n; j++) {
        if (array[menor] > array[j]) {
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

$$\sum_{i=0}^{n-2} n-1-i$$

Resolva os Somatórios abaixo:

3)	$\sum_{n=1}^{4} n^2$	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ =30
4)	$\sum_{i=1}^{4} 3i$	3*(1 + 2 + 3 + 4) =30
5)	$\sum_{1}^{4} (3-2i)$	(3+3+3+3) – 2*(1+2+3+4) = -8
6)	$\sum_{1}^{3} 2i+x$	(x+x+x) +2*(1+2+3) = 3x +12
7)	$\sum_{0}^{5} i*(i-1)*(5-1)$	2 *(2-1)*(5-2) 3 *(3-1)*(5-3) 4 *(4-1)*(5-4)=30

8) Podemos afirmar que:

$$\sum_{0}^{5} i * (i-1) * (5-1) \quad = \quad \sum_{2}^{4} i * (i-1) * (5-1)$$

Resposta: Sim, Pois no momento que i tem valor 0 1 e 5 o resultado desse somatório e igual a 0

9) Considere a soma abaixo e faça o somatório.

4 + 25 + 64 + 121 $\quad = \quad \sum_{0}^{3} (3 * i + 2)^2$

10) Resolva este somatório.

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m$$

8k -6 + 8k -12 + 8k -18 + 8k -24

11) Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} ai \quad + \quad \sum_{3}^{n} bi \qquad b1 + b2 \sum_{3}^{n} (ai + bi)$$

12) Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$	Verdadeiro
$\sum_{p=0}^{1000} 3 + p = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p$	Falso, No 1 caso temos (3+1)+(3+2)...+(3+1000) Já no 2º caso temos 3+(1+2+3+4...+1000)
$\sum_{l=1}^{n} 3l = 3 \sum_{l=1}^{n} l$	Verdadeiro
$\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$	Falso No 1 caso temos (1^p)+ (2^p)...+(12^p)) Já no 2º caso temos (1+2+..+12)^p
$\sum_{t=8}^{32} 3 + t = 75 \sum_{t=8}^{32} t$	Verdadeiro

13) Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.1) = \sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2(4 - i))$$

Temos o mesmo somatório alterando apenas a ordem dos elementos devido ao (4-1).

14) Mostre os valores de a e b na sequência 1, 4, 7, 10, 13, ...

a = início   b = saltos x=variação

f(x) = 1 + 3 * x   a=1 b=3

15) Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma Sn dos elementos de uma PA.

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a + bi$$

Aplicando a comutativa temos

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a + b(n - i)$$

Sabemos que 2 S e igual a:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} a + bi + \sum_{0 \le i \le n} a + b * n \; - b * i$$

Aplicando a associativa temos

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a + bi + a + b(n - i)$$

Simplificar

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} (2a + bn)$$

Aplicando a distributiva temos

$$2S_n = (2a \; + b.n) \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Simplificar

$$2S_n = (2a \; + b.n).(n + 1)$$

Temos 2 somatórios para achar apenas um:

$$S_n = \frac{(2a \; + b.n).(n + 1)}{2}$$

16) Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n =$\sum_{0\leq i\leq n} i$

a = 0   b = 1 i=variação(n)

$$S_n = \sum_{0\leq i\leq n} 0 + 1i$$

$$S_n = \frac{(2.0 + 1.n).(n+1)}{2} = \frac{(n).(n+1)}{2}$$

17) Dada a fórmula fechada do somatório dos n primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
    }
}
```

```
int somatorio(int n){
    return ((n*(n+1))/2);
}
```

18) O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0\leq i\leq n}(\mathrm{n} - \mathrm{i} - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório.

$$S_n = \sum_{0\leq i\leq n-2} n - 1 - i$$

$$S_n = \sum_{0\leq i\leq n-2} n - \sum_{0\leq i\leq n-2} i - \sum_{0\leq i\leq n-2} 1$$

$$S_n = \sum_{0\leq i\leq n} n = n(n-1) \;\&\&\; \sum_{0\leq i\leq n} 1 = 1(n-1) \;\&\&\; \sum_{0\leq i\leq n} i = \frac{(n-2)*(n-1)}{2}$$

$$S_n = \sum_{0\leq i\leq n-2} n - 1 - i = n(n-1) - \frac{(n-2)*(n-1)}{2} - 1(n-1)$$

$$n(n-1) - \frac{(n-2)*(n-1)}{2} - 1(n-1)$$

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

$$\theta(n^2)$$

19)Justifique a igualdade:

$$\sum_{0\leq i\leq n} i = \sum_{1\leq i\leq n} i$$

Os dois são iguais entretanto um faz uma soma a mais com o 0.

20) Justifique a diferença:

$$\sum_{0}^{n} ai \neq \sum_{1}^{n} ai$$

Não necessariamente o termo a0 = 0.

21) Justifique a igualdade:

$$\sum_{0}^{n} a_{i+1} \neq \sum_{1}^{n} a_1$$

Igual pois os termos começam em a1 , a2 , a3 .... a,i

22) Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... , n-1 e n)

$$\sum_{I=2}^{n-1} I.(i-1).(n-1) = \sum_{I=0}^{n} I.(i-1).(n-1))$$

O 1 pois ele desconsidera os termos em que valores iguais a 0

23) Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma Sn dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

Usando a P2 temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{1+i}$$

Perturbando o Somatório

$$S_n + a.x^{n+1} = ax^0 + x \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

Substituindo

$$S_n + a.x^{n+1} = a.1 + x.S_n$$

Resolvendo a equação:

$$S_n - x.S_n = a.1 - a.x^{n+1}$$

$$(1-x).S_n = a.1 - a.x^{n+1}$$

$$S_n = \frac{a.1 - a.x^{n+1}}{(1-x)}$$

Para x ≠ 1

24) Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i$$

Usando a cola do Slide

$$S_n + a_{n+1} = a_0 \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1} \mid a_i = i.2^i$$

Temos

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 0 \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

Associatividade

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} i.2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

Distributiva

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} i.2^{i.}.2 + \sum_{0 \le i \le n} 2^i.2$$

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.\sum_{0 \le i \le n} i.2^{i.} + 2.\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2.\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2.\frac{a.-a.x^{n+1}}{(1-x)}$$

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2.\frac{1-2^{n+1}}{(1-2)}$$

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2.\frac{1-2^{n+1}}{-1}$$

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2.(2^{n+1}-1)$$

Manipulação algébrica

$$2.S_n - S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1)$$

$$S_n = n.2^{n+1} +.2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

$$S_n = n.2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

$$S_n = (n-1).2^{n+1} + 2$$

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

25) Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n} 3 + i$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{6(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{6n+6}{2} + \frac{n^2+n}{2}$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Provando pelo passo base

$$\frac{0^2+7.0+6}{2}$$

$$\frac{6}{2}$$

$$3$$

Provando por Indução

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + 7(n-1) + 6}{2} + (3+n)$$

$$S_n = \frac{n^2 - 2n + 1 + 7n - 7 + 6}{2} + \frac{2(3+n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2 - 2n + 1 + 7n - 7 + 6}{2} + \frac{6+2n}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2+7n+6}{2}$$

26) Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2]$$

$$\sum_{1}^{n} 4i^2+4i+1-4i^2$$

$$\sum_{1}^{n} 4i+1$$

$$4.\sum_{1}^{n} i+\sum_{1}^{n} 1$$

$$4.\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\frac{4n^2+4n}{2}+\frac{2n}{2}$$

$$\frac{4n^2+6n}{2}$$

$$2n^2+3n$$

Provando pelo passo base

$$2.1^2+3.1$$

$$2+3$$

$$5$$

Provando por Indução

$$S_n=S_{n-1}+a_n$$

$$S_n=2(n-1)^2+3(n-1)+(4n+1)$$

$$S_n=2.n^2-4.n+2+3n-3+4n+1$$

$$S_n=2.n^2+3n$$

27)Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2]$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)]$$

$$\sum_{1}^{n}10i+10i$$

$$\sum_{1}^{n}20i$$

$$20\sum_{1}^{n}i$$

$$20\frac{n(n+1)}{2}$$

$$10(n^2+n)$$

$$10n^2+10n$$

Provando pelo passo base

$$10.1^2+10.1$$

$$10+10$$

20

Provando por Indução

$$S_n=S_{n-1}+a_n$$

$$S_n=10(n-1)^2+10(n-1)+(20n)$$

$$S_n=10.n^2-20.n+10+10n-10+20n$$

$$S_n=10.n^2+10n$$

28) No Exercício Resolvido (24), encontramos a fórmula abaixo. Prove por indução que a mesma está correta.

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Passo base

$$(0-1).2^{0+1} + 2$$

$$-1.2^1 + 2$$

$$0$$

Provando por Indução

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \left[\left((n-1)-1\right)2^{(n-1)+1} + 2\right] + (n2^2)$$

$$S_n = (n-2)2^n + 2 - n2^2$$

$$S_n = (n-1)2^n.2 + 2$$

$$S_n = (n-1)2^n + 2$$

29) Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} i^2 + 2i + 1$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} i^2 + \sum_{0 \le i \le n} 2i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

$$\cancel{S_n} + (n+1)^2 = \cancel{S_n} + n(n+1) + (n+1)$$

Os somatórios são anulados então vamos mudar a estratégia.

$$SC_n = \sum_{0 \le i \le n} i^3$$

$$SC_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

$$SC_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

$$SC_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} i^3 + \sum_{0 \le i \le n} 3i^2 + \sum_{0 \le i \le n} 3i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$SC_n + (n+1)^3 = SC_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 + 3n(n+1) - 2(n+1)$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

1) Faça um método int somatorioPA(double a, double b, int n) que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial a e razão b

Arquivo Q2.java

```
public class Q2 {
    public static int sumPA(double a, double b , int n) {
        int soma =(int) a;

        for (; a <= n; a++) {
            soma += b;
        }
        return soma;
    }
    public static void main(String[] args) {
        int n = sumPA(1,2,10);
        MyIO.print("Somatorio = " + n);
    }

}
```

2) Faça um vídeo explicando como encontramos o somatório dos quadrados perfeitos (tempo máximo de 5 minutos).

https://youtu.be/brsiPZYHhbk

3) Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso.

Comparações → Melhor caso n-1

Pior caso $\frac{n(n+1)-2}{2}$