Universidade Federal de Juiz de Fora

Lista de Exercício

Método dos Elementos Finitos - MAC026

Guilherme Almeida Felix da Silva - 201365504B

Problema 1 Resolver o problema de valor inicial $y' = arctan(y)$ com:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 30 \\
N_2 &= 135 \\
y(0) &= 1 \\
x &\in [0, 1]
\end{aligned}
$$

Onde N_1 e N_2 são números de pontos do domínio, usando os métodos:

(a) Euler Explícito

(b) Euler Implícito

(c) Euler Modificado

(d) Trapézio

Solução - Euler Explícito:
Seja $y' = f(y)$, integrando temos:

$$
\begin{aligned}
\int_k^{k+1} y' dy &= \int_k^{k+1} f(y) dy \\
y_{k+1} - y_k &= \int_k^{k+1} f(y) dy
\end{aligned}
$$

Nesse caso, aproxima-se a função $f(y_{k+1})$ pelo valor constante $f(y)$ e tem-se:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} - y_k &= f(y_k)(h) \\
y_{k+1} &= y_k + hf(y_k)
\end{aligned}
$$

onde h é o intervalo entre o ponto no instante k e o instante $k + 1$
Implementando-se a solução, obtém-se:

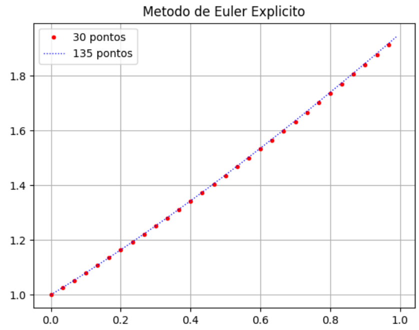

Figura 1: Euler Explícito

Solução - Euler Implícito:
Nesse método, a diferença para o anterior é a aproximação da função $f(y)$ pelo valor constante $f(y_{k+1})$ e tem-se:

$$y_{k+1} - y_k = f(y_{k+1})(h)$$
$$y_{k+1} = y_k + hf(y_{k+1})$$

O que torna o método implícito é a necessidade de se conhecer o valor da função f no instante $k+1$ para se determinar o valor da função y no mesmo instante $k+1$ Reorganizando os termos, tem-se:

$$y_{k+1} - y_k - hf(y_{k+1}) = 0$$
$$F(y_{k+1}) = 0$$

A partir desse ponto utiliza-se algum método numérico para determinar o zero da função $F(y_{k+1})$. Obtém-se:

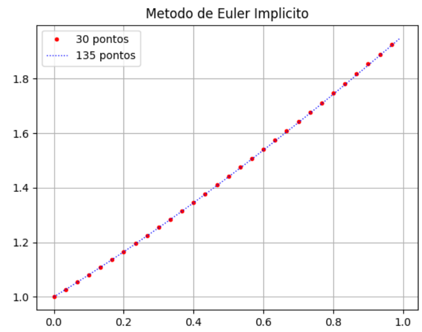

Figura 2: Euler Implícito

Solução - Euler Modificado:

Esse método inicia como o de Euler. Porém, a integral de $f(y)$ é aproximada usando a regra do trapézio.

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2}(f(y_{k+1}) + f(y_k))$$

Da forma como está apresentado, é um método implícito. Para torná-lo explícito, o valor de y_{k+1} a ser avaliado em $f(y_{k+1})$ é determinado pelo método de Euler explícito. Pode-se escrever:

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2}(f(y_k + hf(y_k)) + f(y_k))$$

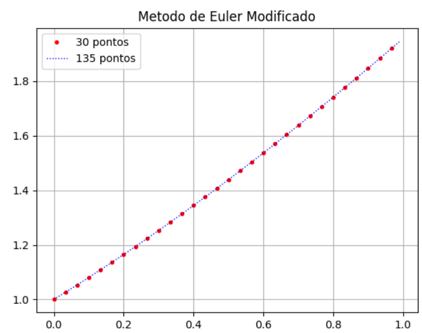

Figura 3: Euler Modificado

Solução - Método do Trapézio:

Esse método consiste em resolver a integral usando a regra do trapézio, que consiste em aproximar a área abaixo da curva pela área de um trapézio.

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2}(f(y_{k+1}) + f(y_k))$$

Da forma como está apresentado, é um método implícito. É, portanto, utilizado um método numérico para a resolução:

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k - \frac{h}{2}(f(y_k + hf(y_k)) + f(y_k)) = 0 \\ F(y_{k+1}) = 0 \end{aligned}$$

A solução:

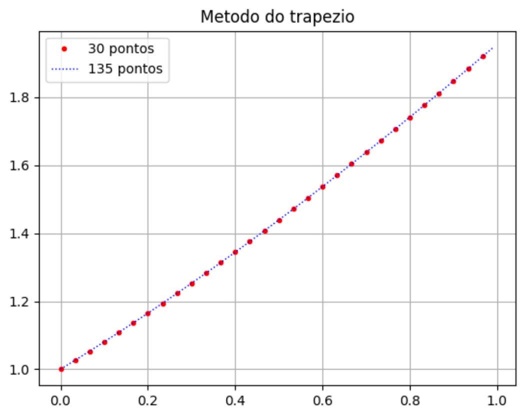

Figura 4: Trapézio

Problema 2 Resolver o problema de valor inicial $y' = y^2 - g(x)$ com:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 9}{(1+x)^2} \\ h_1 &= 0.2 \\ h_2 &= 0.1 \\ h_3 &= 0.05 \\ y(0) &= 2 \\ x &\in [0, 1.6] \end{aligned}$$

Onde h_1, h_2, h_3 é a discretização do domínio, usando os métodos:

(a) Euler Explícito

(b) Euler Implícito

(c) Euler Modificado

(d) Trapézio

Solução

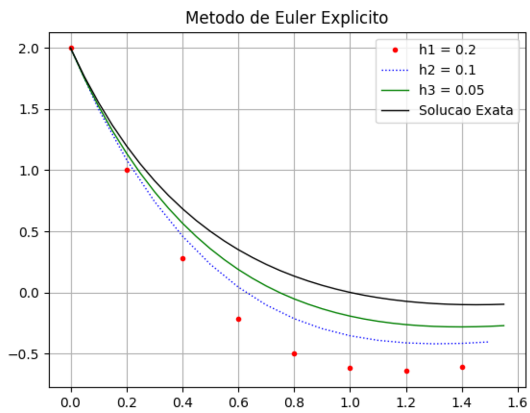

Figura 5: Euler Explícito

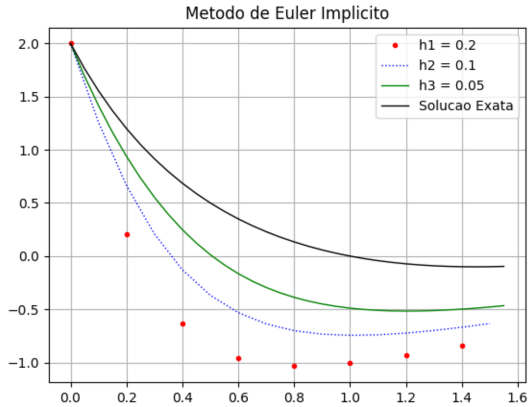

Figura 6: Euler Implícito

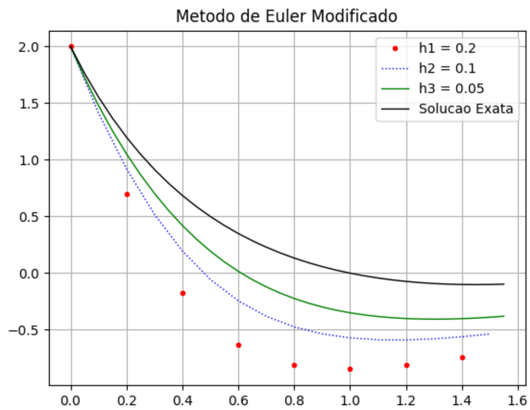

Figura 7: Euler Modificado

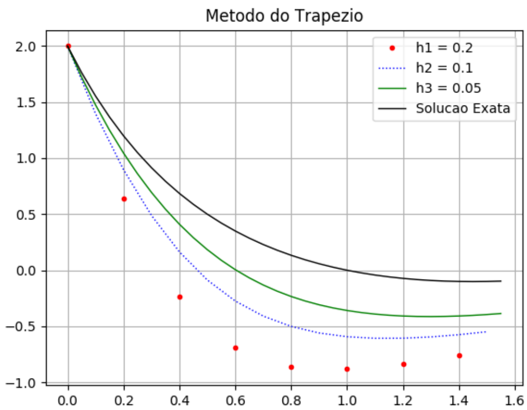

Figura 8: Trapézio