Universidade Federal de Juiz de Fora

Lista de Exercício

Método dos Elementos Finitos - MAC026

Guilherme Almeida Felix da Silva - 201365504B

Problema 1 Encontrar a aproximação de funções quadráticas para o método Adams-Bashforth.

Solução: Métodos "multistep" usam a informação dos s passos anteriores para calcular o próximo valor. Em particular, um método "multistep" linear utiliza uma combinação linear de y_i e $f(t_i, y_i)$ para calcular o valor de y para o instante de tempo desejado. Esse método tem forma:

$$y_{n+s} = a_{s-1}y_{n+s-1} + a_{s-2}y_{n+s-2} + \dots a_0 y_n$$
$$+h(b_s f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1}) \dots b_0 f(t_n, y_n))$$

O método (ou família de métodos) de Adams-Bashforth é explícito e tem como coeficientes $a_{s-1} = -1$ e $a_{s-2} = \dots = a_0 = 0$.

O método consiste em aproximar $f(t_{k+i})$ por um polinômio de Lagrange de ordem $s-1$. Nesse caso, $s = 3$ para termos um polinomio quadrático.

$$p(t_{k+i}) = f(t_{k+i})$$
$$p(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^{s-j-1} f(t_{k-j})}{j!(s-j-1)!h^{(s-1)}} \prod_{i=0}^{s-1} (t - t_{k+i})$$

Para $s = 3$ tem-se:

$$p(t) = \frac{(t - t_{k-1})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-2} - t_k)} f(t_{k-2}) \quad - \quad \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_{k-2} - t_{k-1})(t_{k-1} - t_k)} f(t_{k-1}) + $$
$$+ \quad \frac{(t - t_{k-2})(t - t_k)}{(t_k - t_{k-2})(t_k - t_{k-1}} f(t_k)$$

Considerando os pontos do domínio de forma que $k - 2 = 0$, $k - 1 = h$, $k = 2h$, $k + 1 = 3h$

$$\int_{2h}^{3h} (t-h)(t-2h)dt \;=\; \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3ht^2}{2} + 2h^2 t\right]\Bigg|_{2h}^{3h} = \frac{27h^3}{3} - \frac{27h^3}{2} + 6h^3 - \left(\frac{8h^3}{3} - \frac{12h^3}{2} + 4h^3\right)$$
$$= \frac{h^3}{6}(54 - 81 + 36 - 16 + 36 - 24) = \frac{5h^3}{6}$$

Analogamente, para os outros termos:

$$\int_{2h}^{3h} t(t-2h)dt = \frac{4h^3}{3}$$
$$\int_{2h}^{3h} t(t-h)dt = \frac{23h^3}{6}$$

Somando todos os termos, chega-se a:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{5h^3 f(t_{k-2})}{6.2h^2} - \frac{4h^3 f(t_{k-1})}{3h^2} + \frac{23h^3 f(t_k)}{6.2h^2}$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f(t_k) - 16f(t_{k-1} + 5f(t_{k-2})\right)$$

Problema 2 Verificar a solução de $y'' - 10y' - 11y = 0$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

Solução: Equação característica:

$$\lambda^2 - 10\lambda - 11 = 0$$
$$\Delta = 100 + 4.11 = 144$$
$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$$
$$\lambda_1 = \frac{10+12}{2} = 11$$
$$\lambda_2 = \frac{10-12}{2} = -1$$

Solução: $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{11x} + C_2 e^{-1x}$$

Aplicando a condição $y(0) = 1$, tem-se:

$$C_1 + C_2 = 1$$

Aplicando a condição $y'(0) = -1$, tem-se:

$$11C_1 - C_2 = -1$$

Resolvendo o sistema:

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$11C_1 - C_2 = -1$$

$$
\begin{aligned}
11C - 1 - C_2 &= -1 \\
11C_1 - (1 - C_1) &= -1 \\
11C_1 - 1 + C_1 &= -1 \\
12C_1 &= 0 \\
C_1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= 1 \\
C_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Logo, a solução fica:

$$y(x) = e^{-x}$$

Problema 3 Desenvolver Runge-Kutta de terceira ordem.

Solução: Seja a EDO do tipo

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

com $y(t_0) = y_0$. Expandindo em série de Taylor em torno de t:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{y''(t)h^2}{2} + \frac{y'''(t)h^3}{3!} + O(h^4)$$

fazendo a substituição $y(t+h) = y_{t+1}$, $y(t) = y_t$ e usando a equação 1, tem-se:

$$y_{t+1} = y_t + f(t, y_t)h + \frac{f'(t, y_t)h^2}{2} + \frac{f''(t, y_t)h^3}{3!} + O(h^4) \tag{2}$$

onde,

$$f'(t, y_t) = \frac{\partial f(t, y_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y_t)}{\partial y}\frac{\partial y_t}{\partial t} = \frac{\partial f(t, y_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y_t)}{\partial y} f(t, y_t) \tag{3}$$

e

$$f''(t, y_t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} f + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} f \right) \tag{4}$$

As expressões 3 e 4 podem ser escritas na forma compacta como:

$$f'(t, y_t) = f_t + f_y f \tag{5}$$

$$f''(t, y_t) = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_t f_y + f_{yy}f^2 + f_y f_y f \tag{6}$$

Substituindo essas expressões em 2, obtém-se:

$$y_{t+1} = y_t + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^3}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_t f_y + f_{yy}f^2 + f_y f_y f) + O(h^4) \tag{7}$$