



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Salvador - BA  
2025

## Avaliação 2 - Métodos Numéricos - 2025.1

Aluno: Guilherme Rocha Ribeiro  
Professor: Reiner Requião  
Matéria: ENGG03

### Questão 1: Modelagem de dois tanques acoplados

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = -a\sqrt{h_1} + b(h_2 - h_1) \\ \frac{dh_2}{dt} = a\sqrt{h_1} - b(h_2 - h_1) \end{cases} \quad (1)$$

Baseado nessa modelagem foi possível identificar que esse sistema, ao decorrer do tempo, chega a um estado estacionário.

### Resultados

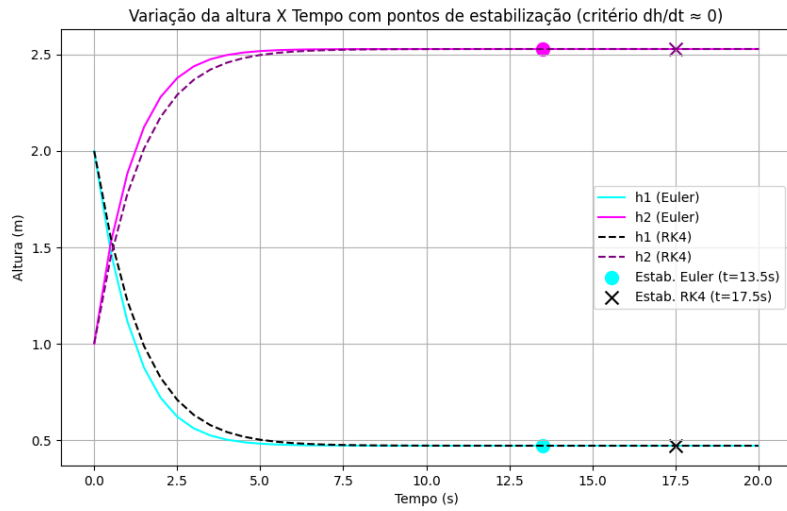


Figura 1: Comparação visual do comportamento das alturas do sistema

A análise do gráfico revela que:

- A altura do tanque 1 ( $h_1$ ), que começa em 2.0 m, diminui com o tempo até chegar a estabilidade.
- A altura do tanque 2 ( $h_2$ ), que começa em 1.0 m, aumenta com o tempo até chegar a estabilidade.

Tabela 1: Alturas nos tanques pelo método Euler

| Tempo (s) | h1 (m)     | h2 (m)     |
|-----------|------------|------------|
| 0.0       | 2.00000000 | 1.00000000 |
| 0.5       | 0.71999966 | 2.28000034 |
| 1.0       | 0.50197444 | 2.49802556 |
| 1.5       | 0.47439824 | 2.52560176 |
| 2.0       | 0.47120199 | 2.52879801 |
| 2.5       | 0.47083620 | 2.52916380 |
| 3.0       | 0.47079440 | 2.52920560 |
| 3.5       | 0.47078962 | 2.52921038 |
| 4.0       | 0.47078908 | 2.52921092 |
| 4.5       | 0.47078902 | 2.52921098 |

Tabela 2: Alturas nos tanques pelo método RK4

| Tempo (s) | h1 (m)     | h2 (m)     |
|-----------|------------|------------|
| 0.0       | 2.00000000 | 1.00000000 |
| 0.5       | 0.82346894 | 2.17653106 |
| 1.0       | 0.54156059 | 2.45843941 |
| 1.5       | 0.48426581 | 2.51573419 |
| 2.0       | 0.47332385 | 2.52667615 |
| 2.5       | 0.47126462 | 2.52873538 |
| 3.0       | 0.47087821 | 2.52912179 |
| 3.5       | 0.47080573 | 2.52919427 |
| 4.0       | 0.47079214 | 2.52920786 |
| 4.5       | 0.47078960 | 2.52921040 |

## Conclusão

O método RK4 é mais "suave" em relação ao comportamento do sistema ao decorrer do tempo. Entretanto, o método de Euler atinge o estado estacionário primeiro devido a propagação de erros durante a integração, o que resulta em saltos com baixa precisão, logo esse valor não seria válido fisicamente, portanto, não representaria bem o sistema.

## Questão 2: Análise de métodos de integração numérica

### Resultados

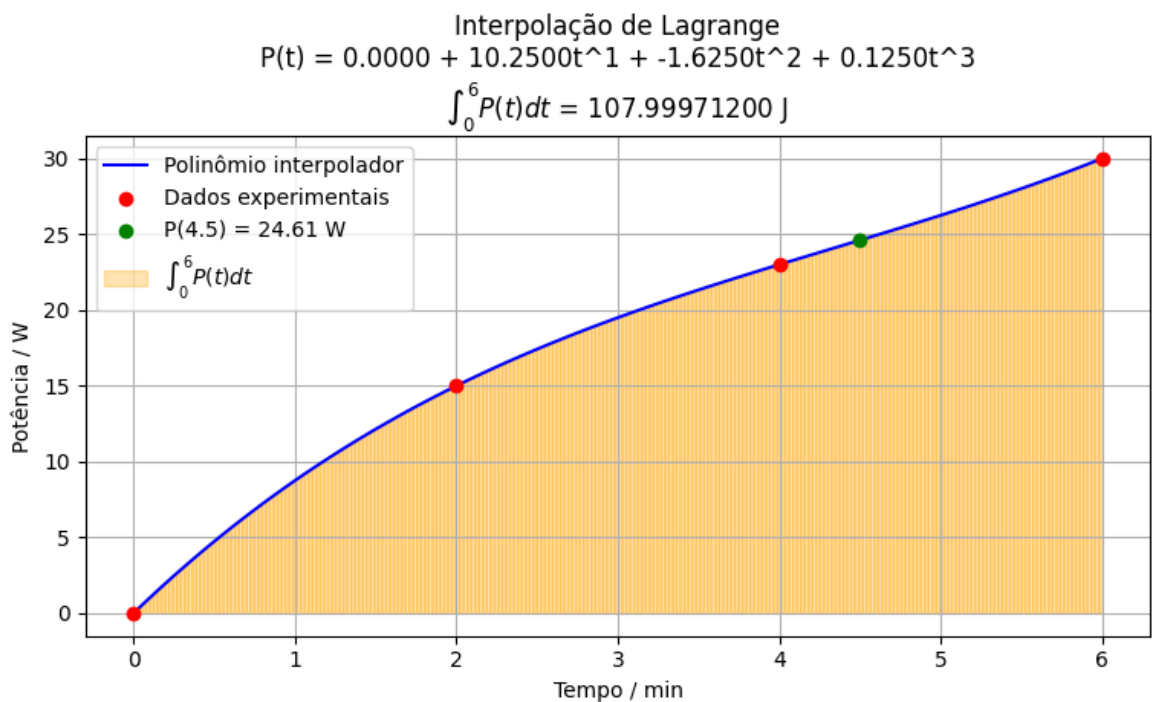


Figura 2: Plotagem da integral da função

- $P(t) = 0.0000 + 10.2500t - 1.6250t^2 + 0.1250t^3$
- $P(4.5) = 24.6094 \text{ W}$  (Watts)
- Área sob o gráfico =  $107.9997 \approx 108 \text{ J}$  (Joules)

A interpolação polinomial é amplamente utilizada em problemas de engenharia onde se necessita estimar valores intermediários entre dados experimentais, pois ela permite encontrar uma curva que descreve a passagem pelos dados experimentais.

## Aplicações na Engenharia Elétrica

Na engenharia elétrica, a interpolação é essencial para a análise de eficiência energética e caracterização de componentes. Dispositivos semicondutores, como diodos e transistores, e fontes de energia, como painéis fotovoltaicos, possuem curvas de operação não lineares (e.g., curvas de Corrente vs. Tensão, I-V). A partir de um conjunto discreto de medições experimentais, a interpolação polinomial permite construir uma função contínua que modela o comportamento do dispositivo em qualquer ponto de operação.

## Questão 3: Calculo de esforço total em fundação com integração numérica

### Contexto e Metodologia

A integração numérica é fundamental em problemas onde não é possível obter soluções analíticas exatas das EDOs. Neste estudo, foram avaliados os métodos numéricos do Trapézio, Simpson 1/3 e Simpson 3/8 para calcular a  $\int (150 + 30 \sin(\frac{\pi x}{3})) dx$  no intervalo  $[0,3]$ .

### Resultados Comparativos

Foram testadas quatro quantidades distintas de subdivisões ( $n = 4, 20$  e  $100$ ) e seu valor mínimo para convergência para cada método, foram aplicados zooms nos graficos plotados para que fosse possível visualizar o comportamento dos metodos de integração.

- $n = 4$ :

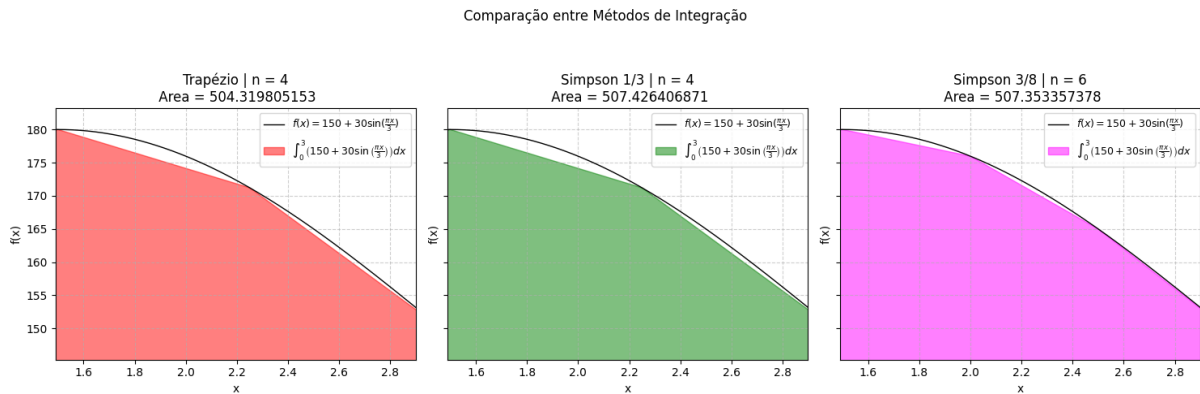


Figura 3: Comparação visual dos métodos de integração para  $n=4$

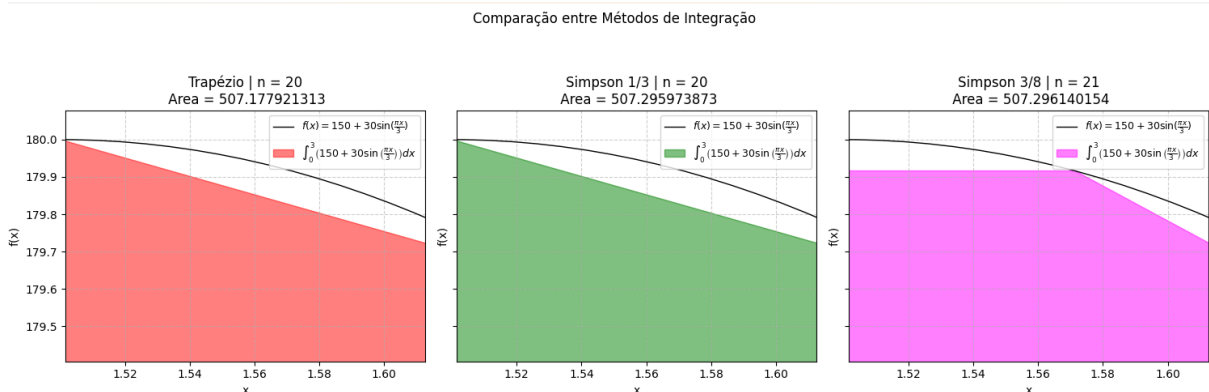


Figura 4: Comparação visual dos métodos de integração para  $n=20$

- $n = 100$ :

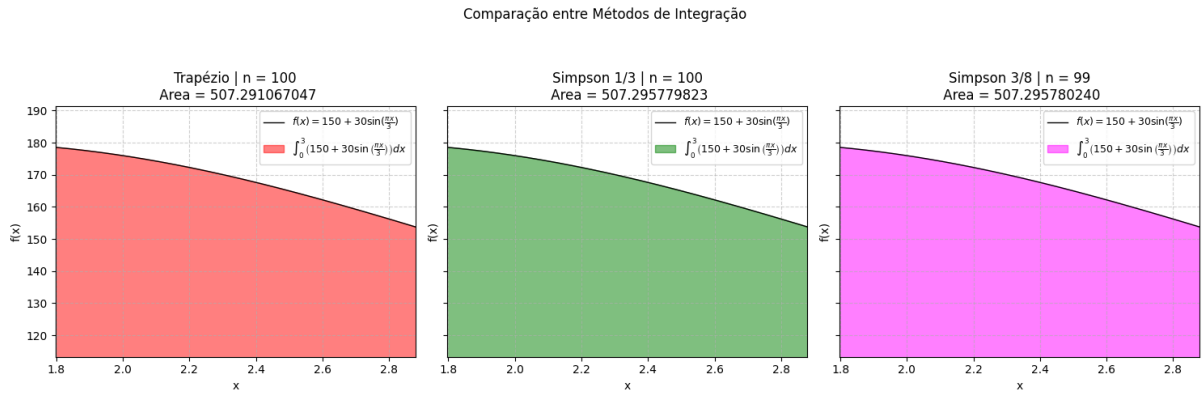


Figura 5: Comparação visual dos métodos de integração para  $n=100$

- $n$  mínimo para convergência com precisão de  $1e-5$  do valor numérico

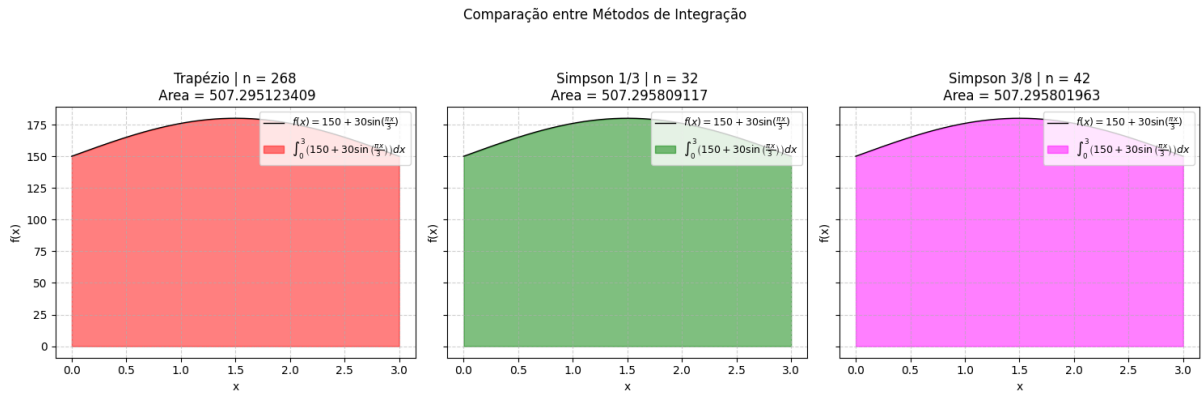


Figura 6: Comparação visual dos métodos de integração para  $n$  específicos de cada método

Tabela 3: Comparativo das áreas calculadas para diferentes métodos e subdivisões.

| $n$ | Método                 | Tensão (kPa)  |
|-----|------------------------|---------------|
| 4   | Trapézio               | 504.319805153 |
|     | Simpson 1/3            | 507.426406871 |
|     | Simpson 3/8 ( $n=6$ )  | 507.353357378 |
| 20  | Trapézio               | 507.177921313 |
|     | Simpson 1/3            | 507.295973873 |
|     | Simpson 3/8 ( $n=21$ ) | 507.296140154 |
| 100 | Trapézio               | 507.291067047 |
|     | Simpson 1/3            | 507.295779823 |
|     | Simpson 3/8 ( $n=99$ ) | 507.295780240 |
| 268 | Trapézio               | 507.295123409 |
| 32  | Simpson 1/3            | 507.295809117 |
| 42  | Simpson 3/8            | 507.295801963 |

## Análise de Convergência

Foi utilizado a seguinte função para identificar os valores de  $n$  mínimo para atingir a convergência com uma tolerância de  $1e-5$ . Com ele foi possível encontrar os valores de  $n$ , os quais mostram que, para essa função  $f(x) = 150 + 30\sin(\frac{\pi x}{3})$  o método de Simpson 1/3 precisou de uma quantidade menor de passos para atingir o valor numérico da integral dentro do intervalo.

```
1      def find_min_steps(  
2          func,  
3          method,  
4          lower_bound,  
5          upper_bound,  
6          tolerance=1e-5,  
7          max_steps=1e4) -> int:  
8          if method == simpsons_3_8:  
9              steps = 3  
10             prev_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)  
11             while steps <= max_steps:  
12                 steps += 3  
13                 current_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)  
14  
15                 if abs(current_area - prev_area) < tolerance:  
16                     return steps  
17  
18                 prev_area = current_area  
19             return None  
20         else:  
21             steps = 2  
22             prev_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)  
23  
24             while steps <= max_steps:  
25                 steps += 2  
26                 current_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)  
27  
28                 if abs(current_area - prev_area) < tolerance:  
29                     return steps  
30  
31                 prev_area = current_area  
32             return None
```

Listing 1: Função para encontrar o número mínimo de passos para convergência.

## Eficiência Numérica

- **Trapézio:** Demonstrou ser o método menos eficiente, exigindo 268 subdivisões para atingir a convergência. Embora sua aproximação melhore com o aumento de  $n$ , a taxa de convergência é notavelmente lenta, confirmando que este método requer um esforço computacional significativamente maior para alcançar alta precisão em funções com curvatura.
- **Simpson 1/3:** Apresentou um desempenho muito superior, convergindo com apenas 32 subdivisões. Isso indica que o método é mais de 8 vezes mais rápido que o método do Trapézio para atingir a mesma precisão. Sua eficiência deriva da aproximação da função por polinômios de grau 2 (parábolas), que modelam a geometria da função senoide de forma muito mais eficaz que as retas do método do Trapézio.
- **Simpson 3/8:** Atingiu a convergência com 42 subdivisões, um resultado também drasticamente superior ao do Trapézio e competitivo com o de Simpson 1/3. Embora neste caso específico tenha exigido um pouco mais de passos que o Simpson 1/3, sua eficiência é da mesma ordem de magnitude. A principal restrição do método continua sendo a necessidade de um número de subintervalos múltiplo de 3.

## Discretização e Confiabilidade

- **Passo pequenos:** os erros são significativos pois a quantidade de passos para a convergência é muito baixa, fazendo com que os métodos não atinjam a precisão desejada
- A escolha do Simpson 1/3 com  $n \geq 32$  garante precisão e eficiência, evitando superdimensionamento ou falhas. Já o método do Trapézio, mesmo com  $n=100$ , ainda tem erro residual, enquanto os métodos de Simpson atingem tolerância desejada com menos passos.

## Conclusão

A precisão no cálculo da força total em fundações é essencial para segurança, economia e conformidade normativa. O método de Simpson 1/3 mostrou-se o mais confiável para a função analisada, equilibrando precisão e eficiência. Já a discretização inadequada (ex.:  $n=4$  no Trapézio) compromete a confiabilidade, evidenciando a necessidade de critérios rigorosos na seleção do método e do número de subdivisões.

Os métodos de Simpson mostraram-se mais eficientes para esta função, especialmente quando o número de subdivisões é pequeno. O trapézio, embora mais simples, exige mais avaliações para atingir a mesma precisão. A escolha do método deve considerar:

- Natureza da função (suavidade, periodicidade)
- Custo computacional de cada avaliação da função
- Precisão requerida na aplicação prática