UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Salvador - BA
2025

Avaliação 2 - Métodos Numéricos - 2025.1

Aluno: Guilherme Rocha Ribeiro
Professor: Reiner Requião
Matéria: ENGG03

Questão 1: Modelagem de dois tanques acoplados

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = -a\sqrt{h_1} + b(h_2 - h_1) \\ \frac{dh_2}{dt} = a\sqrt{h_1} - b(h_2 - h_1) \end{cases} \tag{1}$$

Baseado nessa modelagem foi possível identificar que esse sistema, ao decorrer do tempo, chega a um estado estacionário.

Resultados

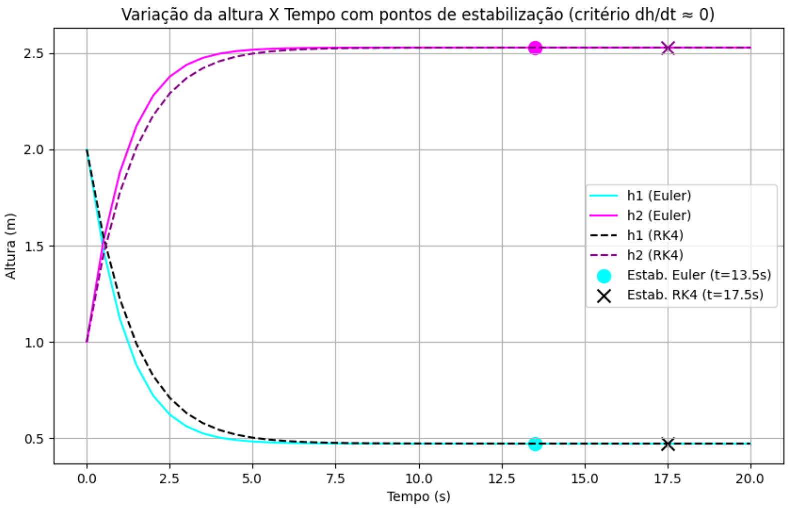

Figura 1: Comparação visual do comportamento das alturas do sistema

A análise do gráfico revela que:

- A altura do tanque 1 (h1), que começa em 2.0 m, diminui com o tempo até chegar a estabilidade.
- A altura do tanque 2 (h2), que começa em 1.0 m, aumenta com o tempo até chegar a estabilidade.

Tabela 1: Alturas nos tanques pelo método Euler

Tempo (s)	**h1 (m)**	**h2 (m)**
0.0	2.00000000	1.00000000
0.5	0.71999966	2.28000034
1.0	0.50197444	2.49802556
1.5	0.47439824	2.52560176
2.0	0.47120199	2.52879801
2.5	0.47083620	2.52916380
3.0	0.47079440	2.52920560
3.5	0.47078962	2.52921038
4.0	0.47078908	2.52921092
4.5	0.47078902	2.52921098

Tabela 2: Alturas nos tanques pelo método RK4

Tempo (s)	**h1 (m)**	**h2 (m)**
0.0	2.00000000	1.00000000
0.5	0.82346894	2.17653106
1.0	0.54156059	2.45843941
1.5	0.48426581	2.51573419
2.0	0.47332385	2.52667615
2.5	0.47126462	2.52873538
3.0	0.47087821	2.52912179
3.5	0.47080573	2.52919427
4.0	0.47079214	2.52920786
4.5	0.47078960	2.52921040

Conclusão

O método RK4 é mais "suave"em relação ao comportamento do sistema ao decorrer do tempo.Entretanto, o método de Euler atinge o estado estacionário primeiro devido a propagação de erros durante a integração, o que resulta em saltos com baixa precisão, logo esse valor não seria válido físicamente, portanto, não representaria bem o sistema.

Questão 2: Análise de métodos de integração numérica

Contexto e Metodologia

Questão 3: Calculo de esforço total em fundacão com integração numérica

Contexto e Metodologia

A integração numérica é fundamental em problemas onde não é possível obter soluções analíticas exatas das EDOs. Neste estudo, foram avaliados os métodos numéricos do Trapézio, Simpson 1/3 e Simpson 3/8 para calcular a $\int \left(150 + 30\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right) dx$ no intervalo [0,3].

Resultados Comparativos

Foram testadas quatro quantidades distintas de subdivisões (n = 4, 20 e 100) e seu valor mínimo para convergência para cada método, foram aplicados zooms nos graficos plotados para que fosse possível visualizar o comportamento dos metodos de integração.

- **n = 4**:

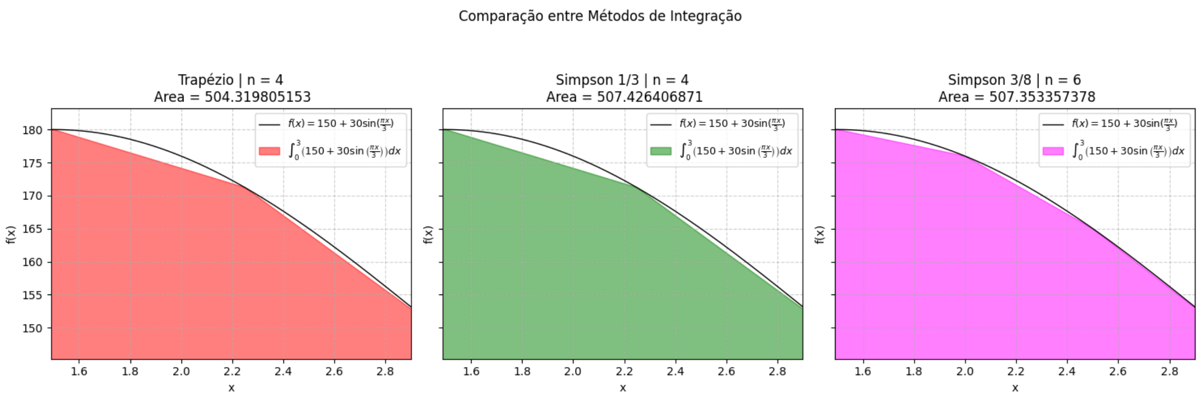

Figura 2: Comparação visual dos métodos de integração para n=4

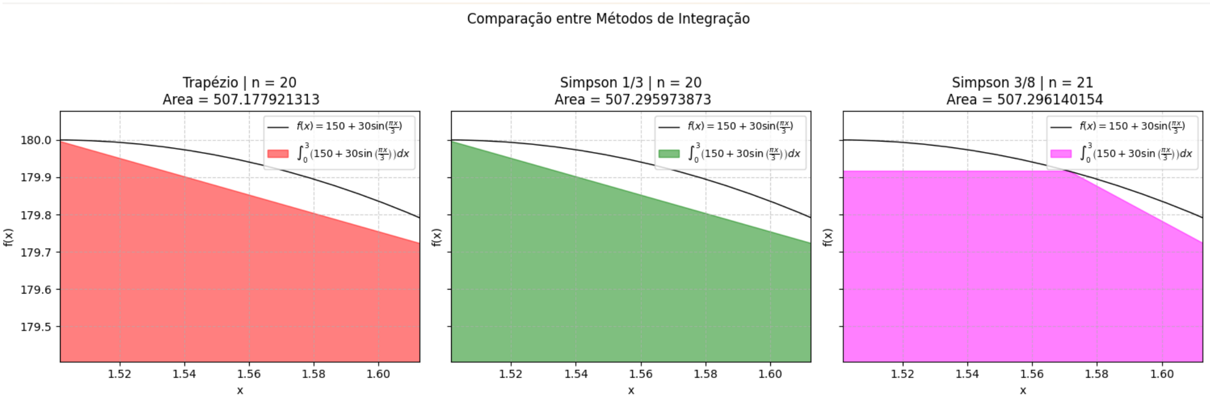

Figura 3: Comparação visual dos métodos de integração para n=20

- **n = 100**:

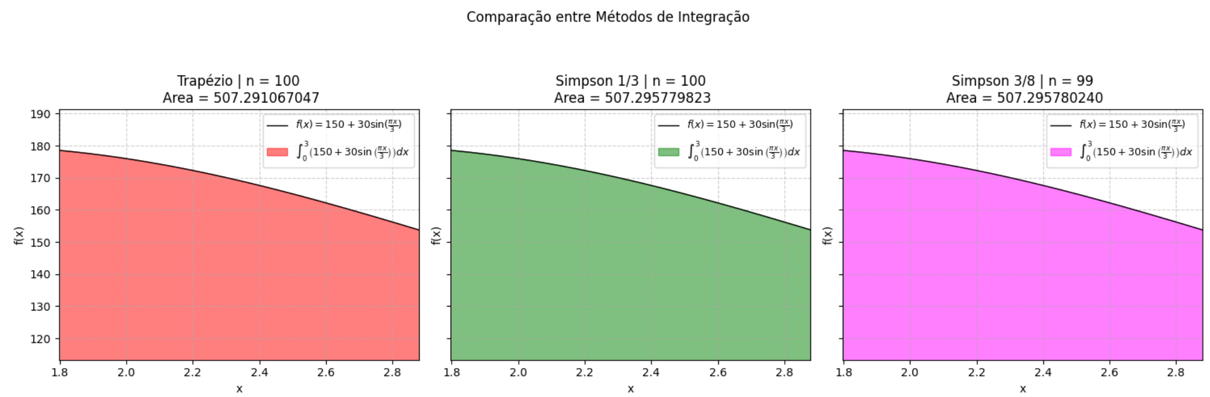

Figura 4: Comparação visual dos métodos de integração para n=100

- **n mínimo para convergência com precisão de 1e-5 do valor numérico**

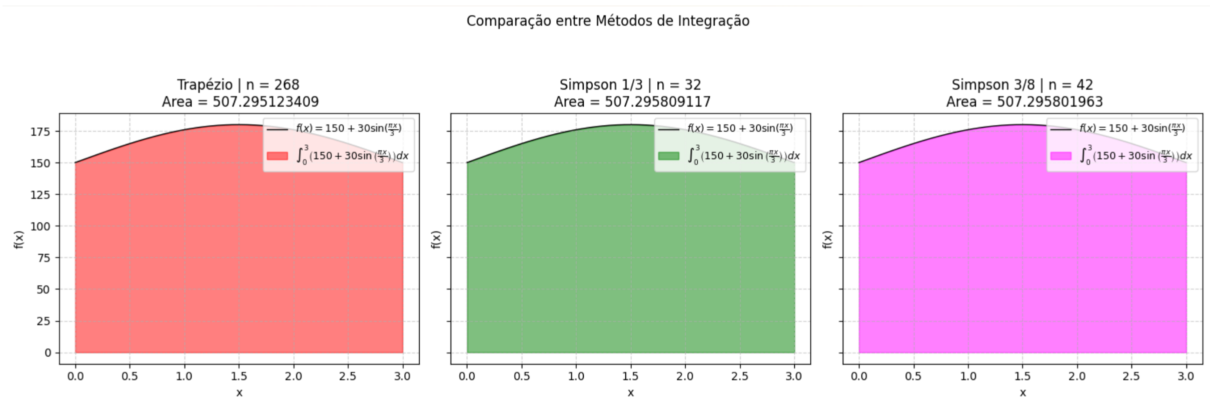

Figura 5: Comparação visual dos métodos de integração para n específicos de cada método

Tabela 3: Comparativo das áreas calculadas para diferentes métodos e subdivisões.

n	Método	Tensão (kPa)
4	Trapézio	504.319805153
	Simpson 1/3	507.426406871
	Simpson 3/8 (n=6)	507.353357378
20	Trapézio	507.177921313
	Simpson 1/3	507.295973873
	Simpson 3/8 (n=21)	507.296140154
100	Trapézio	507.291067047
	Simpson 1/3	507.295779823
	Simpson 3/8 (n=99)	507.295780240
268	Trapézio	507.295123409
32	Simpson 1/3	507.295809117
42	Simpson 3/8	507.295801963

Análise de Convergência

Foi utilizado o seguinte scprit em Python para identificar os valores de n mínimo para atingir uma convergência com uma tolerancia de 1e-5. Com ele foi possível encontrar os valores de n, os quais mostram que, para essa função o método de Simpson 1/3 precisou de uma quantidade menor de passos para chegar ao valor númerico da área sob o gráfico dentro do intervalo

```python
def find_min_steps(
func,
method,
lower_bound,
upper_bound,
tolerance=1e-5,
max_steps=1e4) -> int:
    if method == simpsons_3_8:
        steps = 3
        prev_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)
        while steps <= max_steps:
            steps += 3
            current_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)

            if abs(current_area - prev_area) < tolerance:
                return steps

            prev_area = current_area
        return None
    else:
        steps = 2
        prev_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)

        while steps <= max_steps:
            steps += 2
            current_area = method(func, lower_bound, upper_bound, steps)

            if abs(current_area - prev_area) < tolerance:
                return steps

            prev_area = current_area
        return None
```

Listing 1: Função para encontrar o número mínimo de passos para convergência.

Eficiência Numérica

- **Trapézio**: Demonstrou ser o método menos eficiente, exigindo 268 subdivisões para atingir a convergência. Embora sua aproximação melhore com o aumento de n, a taxa de convergência é notavelmente lenta, confirmando que este método requer um esforço computacional significativamente maior para alcançar alta precisão em funções com curvatura.

- **Simpson 1/3**: Apresentou um desempenho muito superior, convergindo com apenas 32 subdivisões. Isso indica que o método é mais de 8 vezes mais rápido que o método do Trapézio para atingir a mesma precisão. Sua eficiência deriva da aproximação da função por polinômios de grau 2 (parábolas), que modelam a geometria da função senoide de forma muito mais eficaz que as retas do método do Trapézio.

- **Simpson 3/8**: Atingiu a convergência com 42 subdivisões, um resultado também drasticamente superior ao do Trapézio e competitivo com o de Simpson 1/3. Embora neste caso específico tenha exigido um pouco mais de passos que o Simpson 1/3, sua eficiência é da mesma ordem de magnitude. A principal restrição do método continua sendo a necessidade de um número de subintervalos múltiplo de 3.

Discretização e Confiabilidade

- **Passo pequenos**: os erros são significativos pois a quantidade de passos para a convergência é muito baixa, fazendo com que os metodos não atijam a precisão desejada

- A escolha do Simpson 1/3 com $n \geq 32$ garante precisão e eficiência, evitando superdimensionamento ou falhas. Já o método do Trapézio, mesmo com n=100, ainda tem erro residual, enquanto os métodos de Simpson atingem tolerância desejada com menos passos.

Conclusão

A precisão no cálculo da força total em fundações é essencial para segurança, economia e conformidade normativa. O método de Simpson 1/3 mostrou-se o mais confiável para a função analisada, equilibrando precisão e eficiência. Já a discretização inadequada (ex.: n=4 no Trapézio) compromete a confiabilidade, evidenciando a necessidade de critérios rigorosos na seleção do método e do número de subdivisões.

Os métodos de Simpson mostraram-se mais eficientes para esta função, especialmente quando o número de subdivisões é pequeno. O trapézio, embora mais simples, exige mais avaliações para atingir a mesma precisão. A escolha do método deve considerar:

- Natureza da função (suavidade, periodicidade)
- Custo computacional de cada avaliação da função
- Precisão requerida na aplicação prática