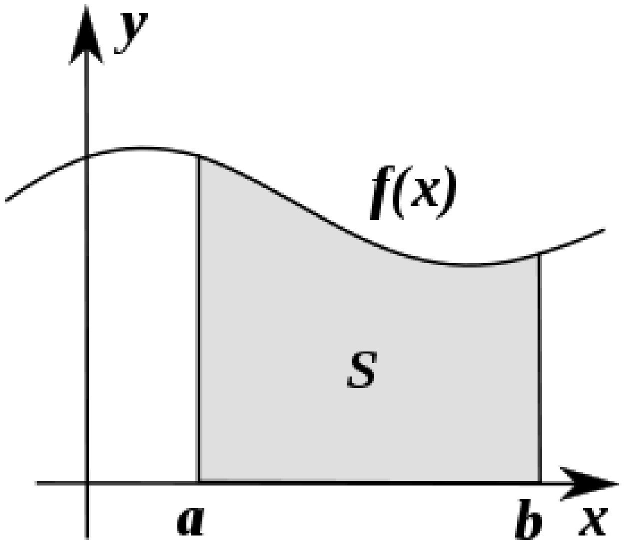
Teorema Fundamental do Cálculo

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL DEFINIDA

Se f é uma função continua e não negativa em [a,b], o número $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais x = a e x = b.

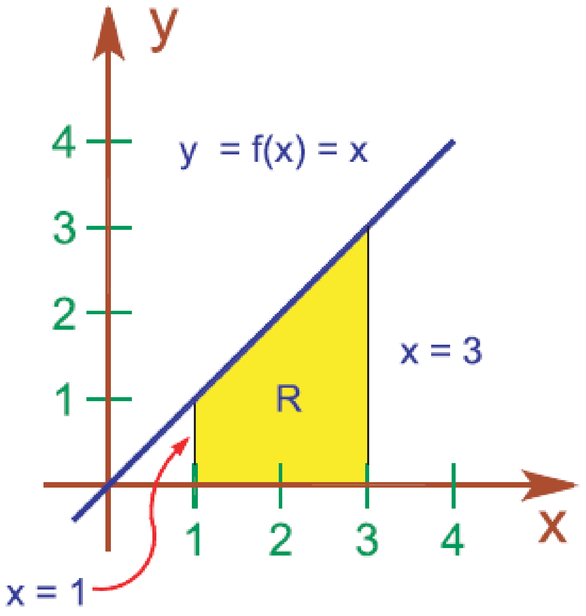


$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo 1:

Seja **R** a região sob o gráfico de **f (x) = x** no intervalo [**1 , 3**]. Use o teorema fundamental do cálculo para determinar a área A de R e verifique seu resultado por meios elementares.

A região **R** é mostrada na figura (a) abaixo. Como **f** não é negativa no intervalo [**1,3**], a área da região **R** é dada pela integral definida de **f** de **1** a **3**, ou seja, $A = \int_1^3 x\,dx$

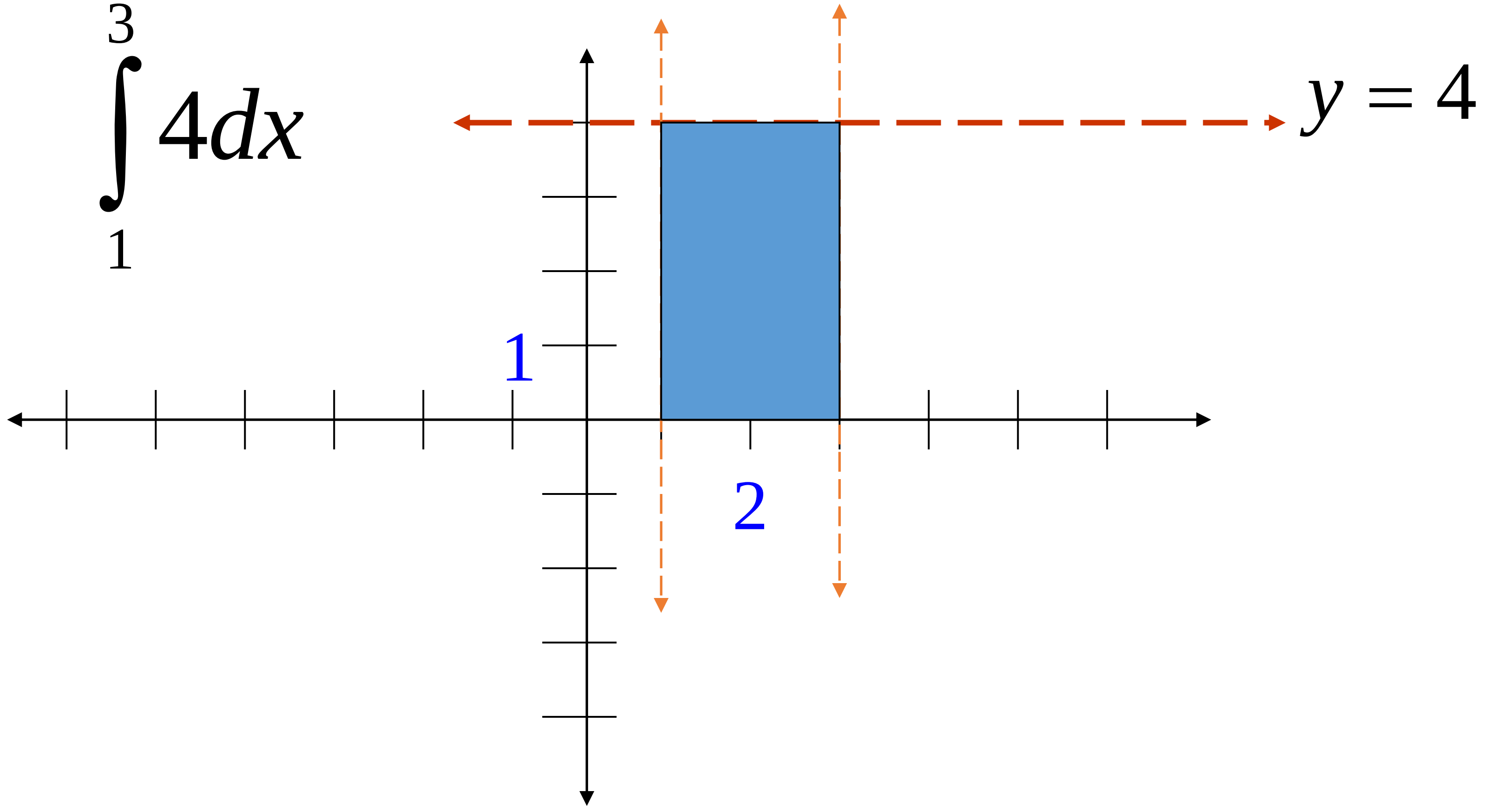


$$A = \int_1^3 x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C\Big|_1^3$$

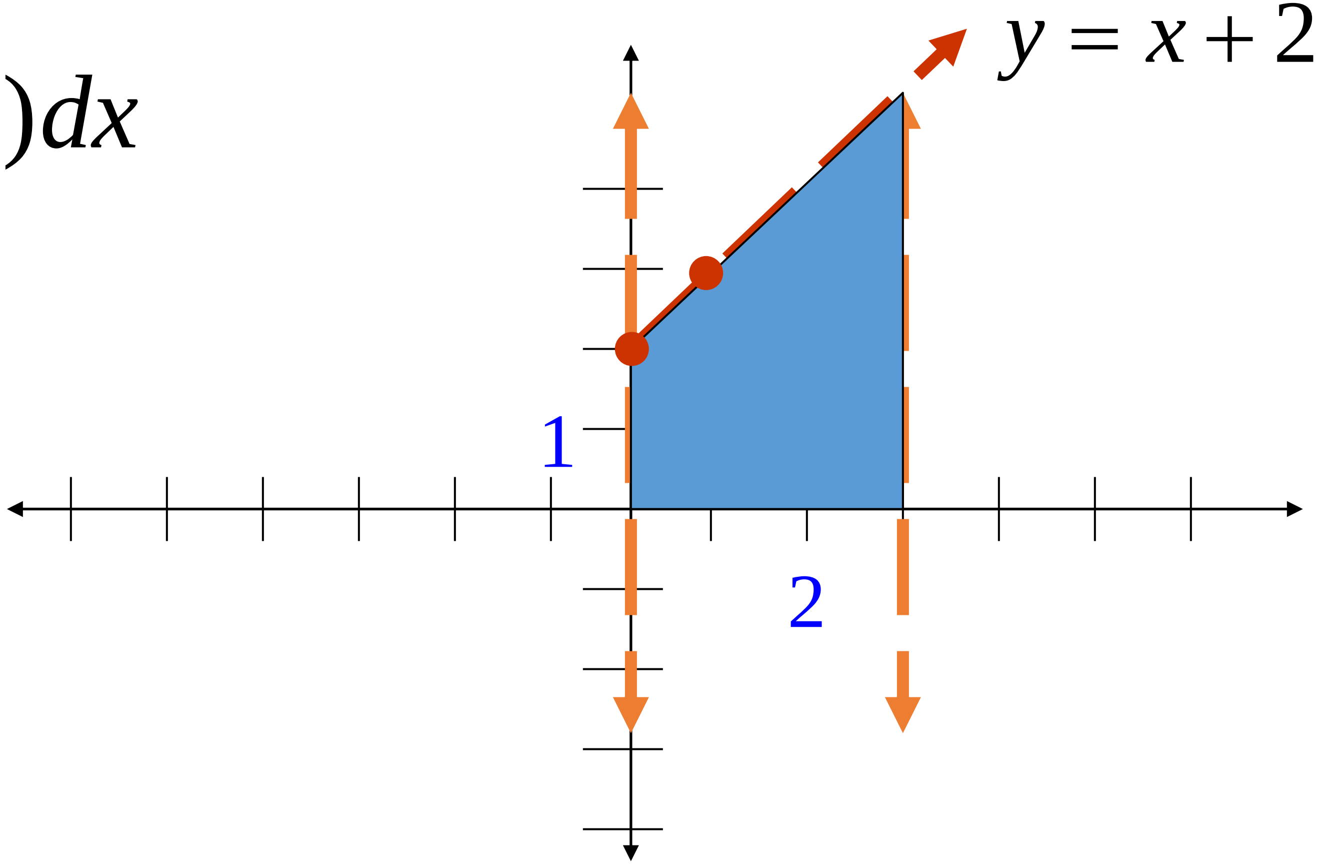
$$= \left(\frac{9}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{2} + C\right) = 4 \text{ unidades quadradas}$$

Avalie as seguintes integrais definidos usando fórmulas de área geométrica.

$$\int_1^3 4dx$$

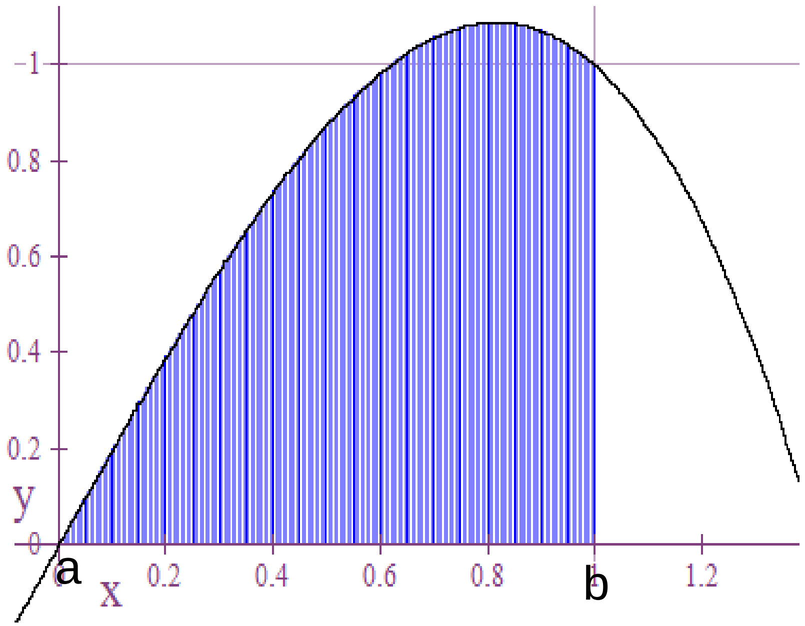


$$\int_0^3 (x+2)\,dx$$



Teorema:

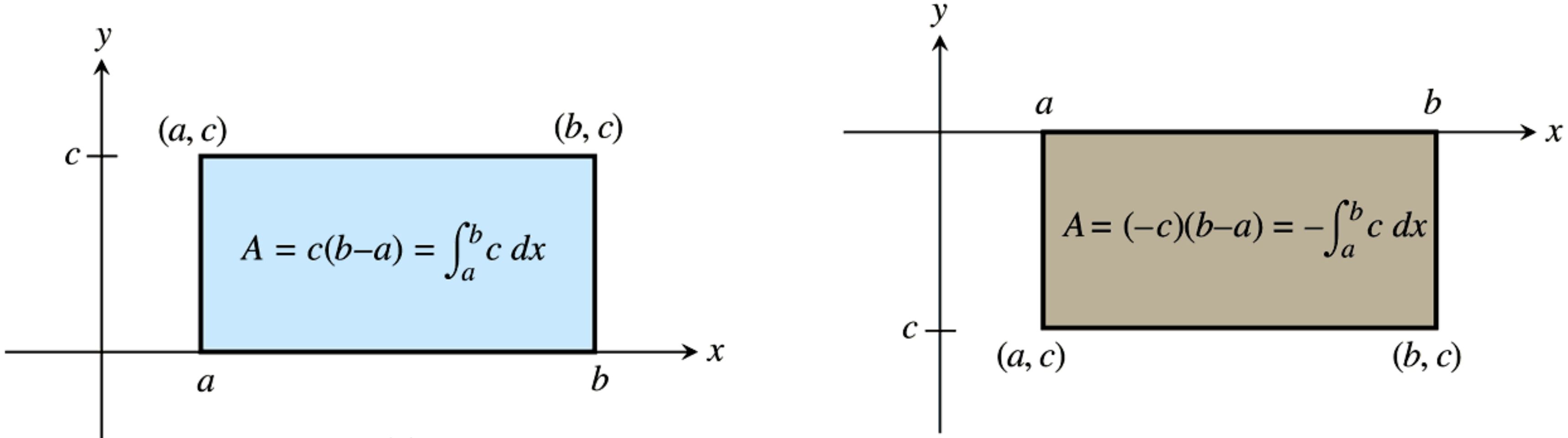
Se f(x) é **contínua** e **não negativa** em [a, b], então a integral definida representa a área da região sob a curva e acima do eixo x entre as linhas verticais x = a e x = b .



A Integral de uma Constante

Se F(x) = c, onde c é a constante, no intervalo [a, b], então

$$\int_a^b f_o(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$



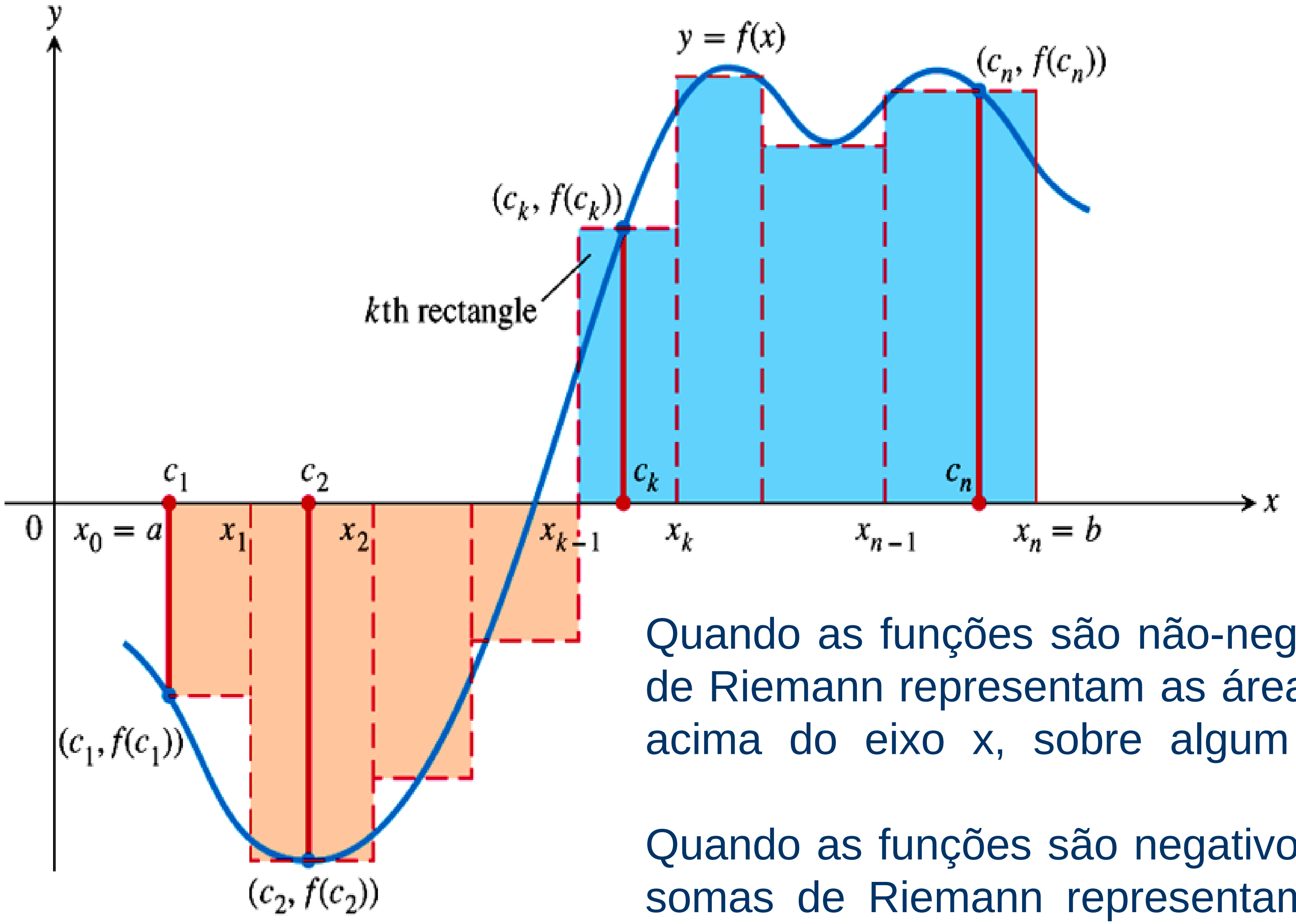
(a) (b)

Se f é integrável e não negativa em [a, b] então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Se f e g são integráveis e não negativa em [a, b] e
f (x) < g (x) para todo x em [a, b], então

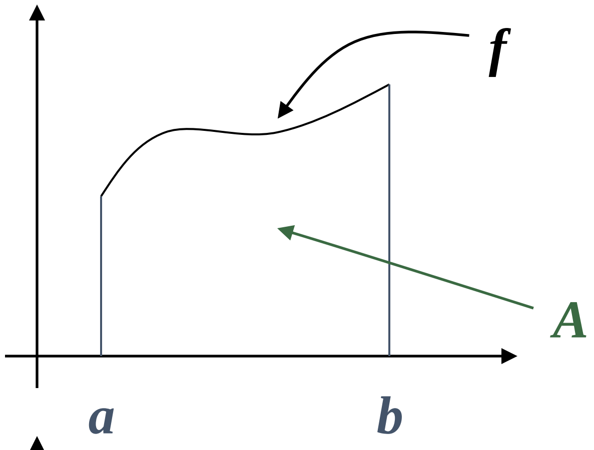
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$



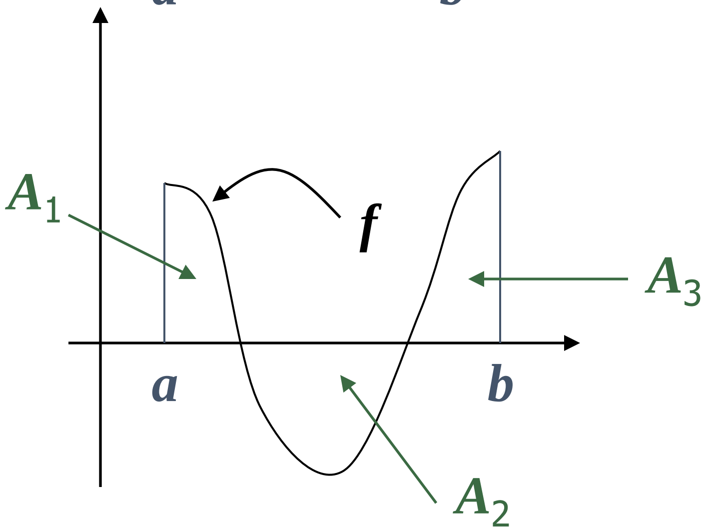
Quando as funções são não-negativos, as somas de Riemann representam as áreas sob as curvas, acima do eixo x, sobre algum intervalo [a, b].

Quando as funções são negativos, no entanto, as somas de Riemann representam o negativo (ou oposto) os valores das referidas zonas. Em outras palavras, as somas de Riemann NÃO tem sentido e pode assumir valores negativos.

Para resumir esse pensamento ...



$$\int_a^b f(x)dx = A$$



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_3 - A_2$$

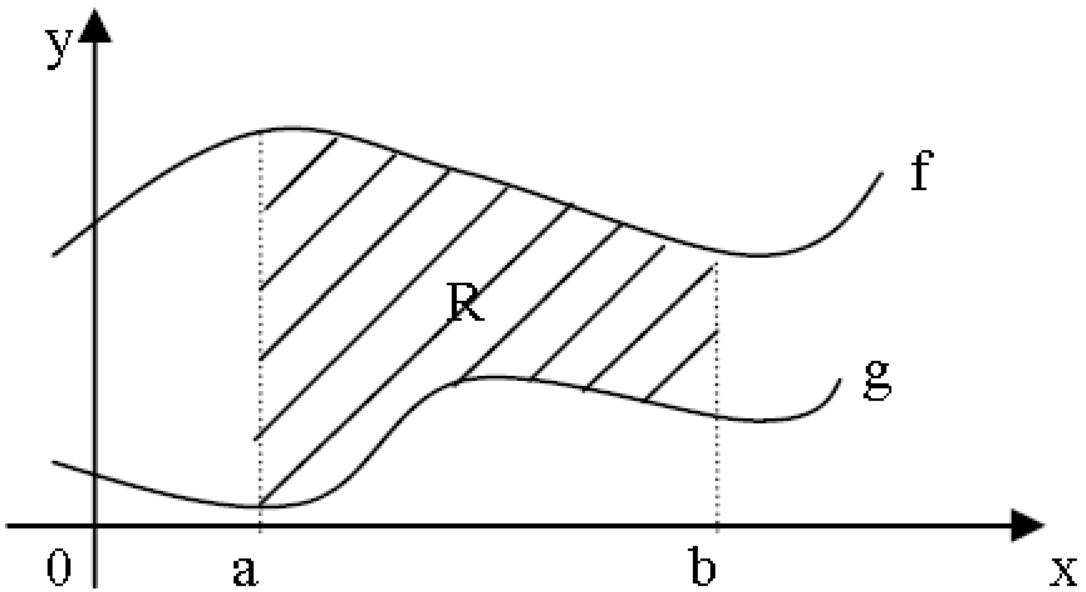
= área superior - área abaixo

3. ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

Sejam f e g funções continuas em [a,b] , com $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Se R é a região limitada pelos gráficos de f, g, x=a e x=b

então $A_R = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$



O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos as situações que comumente ocorrem.

6.12.1 Caso I Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$ (ver Figura 6.11).

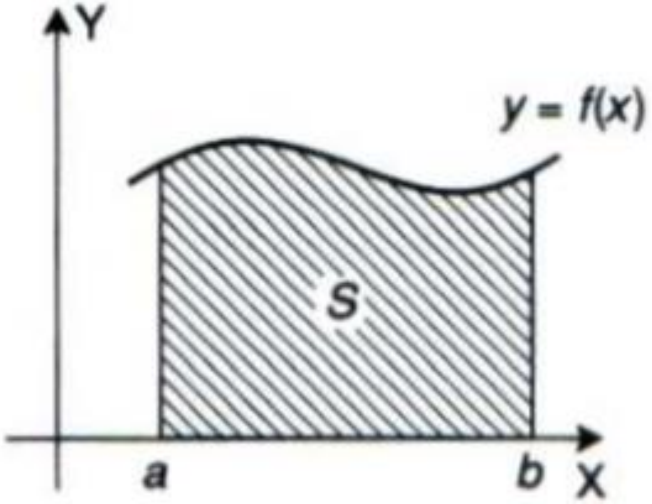


Figura 6.11

Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6.12.2 Exemplo Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.12).

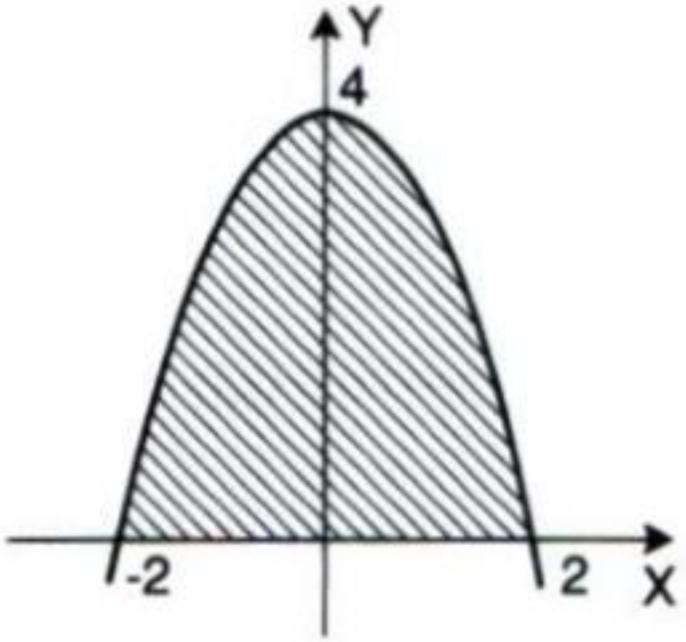


Figura 6.12

No intervalo $[-2, 2]$, $y = 4 - x^2 \geq 0$. Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2.

Temos:
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] = \frac{32}{3}.$$

Portanto, $A = 32/3$ (32/3 unidades de área).

6.12.3 Caso II Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ (ver Figura 6.13).

É fácil constatar que neste caso basta tomar o módulo da integral

$\int_a^b f(x)dx$, ou seja,

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

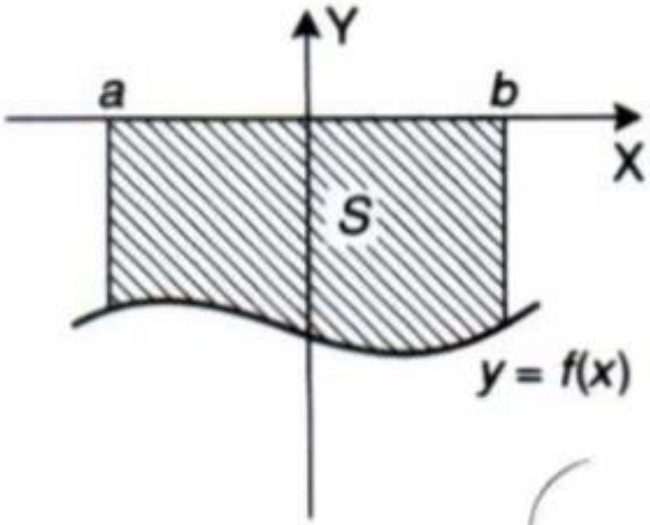


Figura 6.13

6.12.4 Exemplos

(i) Encontre a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = x^2 - 4$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.14).

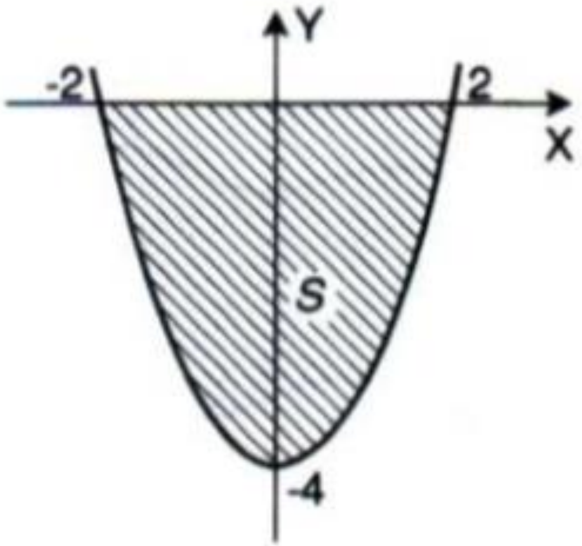


Figura 6.14

No intervalo $[-2, 2]$, $y = x^2 - 4 \leq 0$. Assim:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx \right|$$

$$= \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

(ii) Encontre a área da região S, limitada pela curva $y = \text{sen } x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π. Precisamos dividir a região S em duas sub-regiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.15).

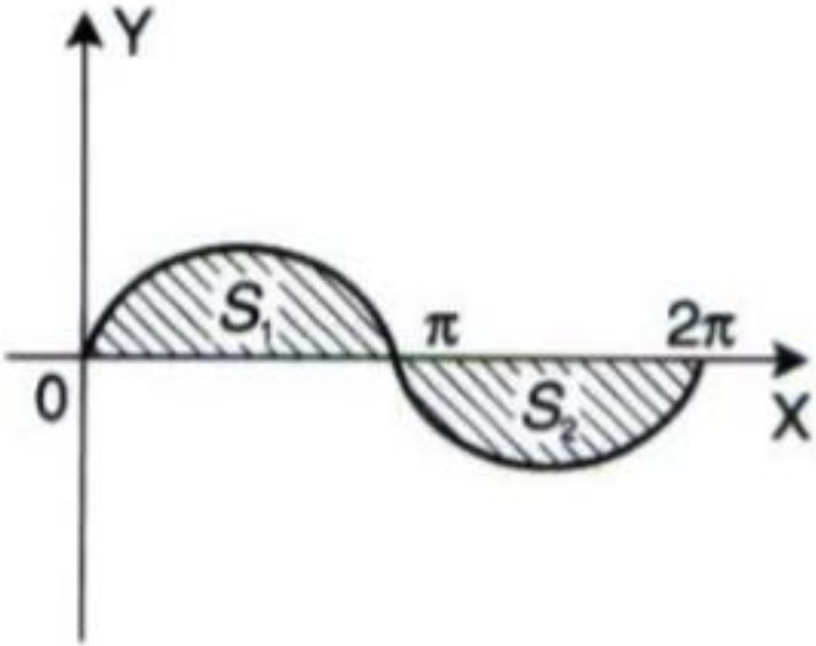


Figura 6.15

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \operatorname{sen} x \geq 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \operatorname{sen} x \leq 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, temos:

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \right| \\
&= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| \\
&= -\cos \pi + \cos 0 + |-\cos 2\pi + \cos \pi| \\
&= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)| \\
&= 4 \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$

6.12.5 Caso III Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a, b]$.

Neste caso pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$ (ver Figura 6.16).

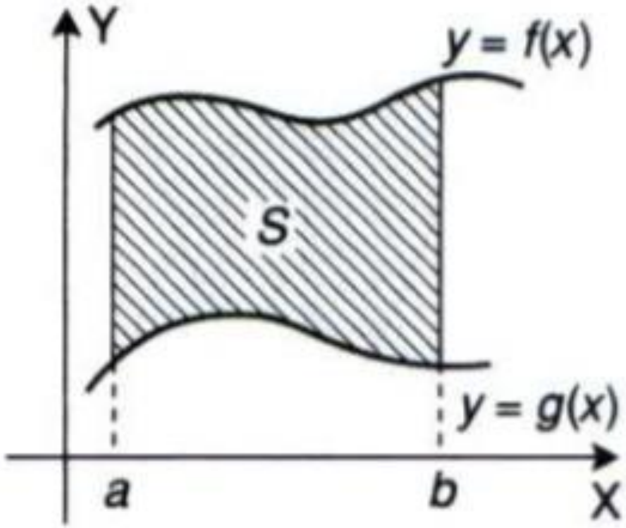


Figura 6.16

Então, a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g, ou ainda,

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \quad = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Observando a Figura 6.17, concluímos que:

$$A' = A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

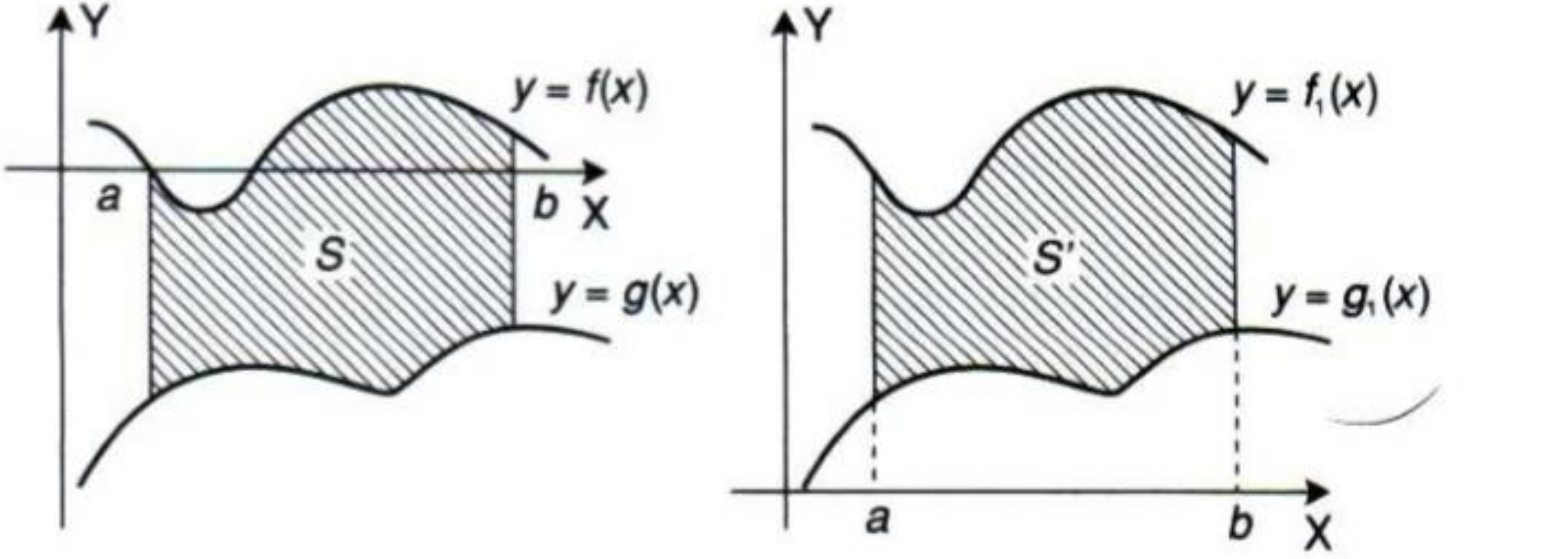


Figura 6.17

6.12.6 Exemplos

(i) Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.18). No intervalo $[-1, 2]$ temos $x + 2 \geq x^2$. Então,

$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

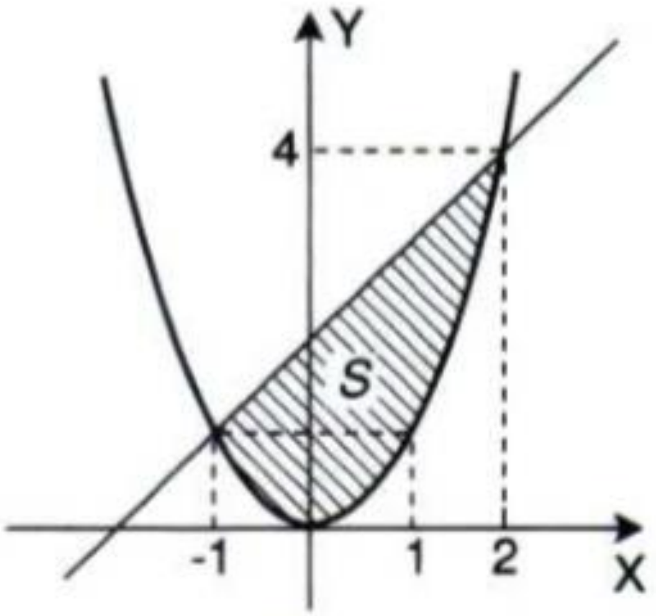


Figura 6.18

(ii) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1, 0 e 1 (ver Figura 6.19).

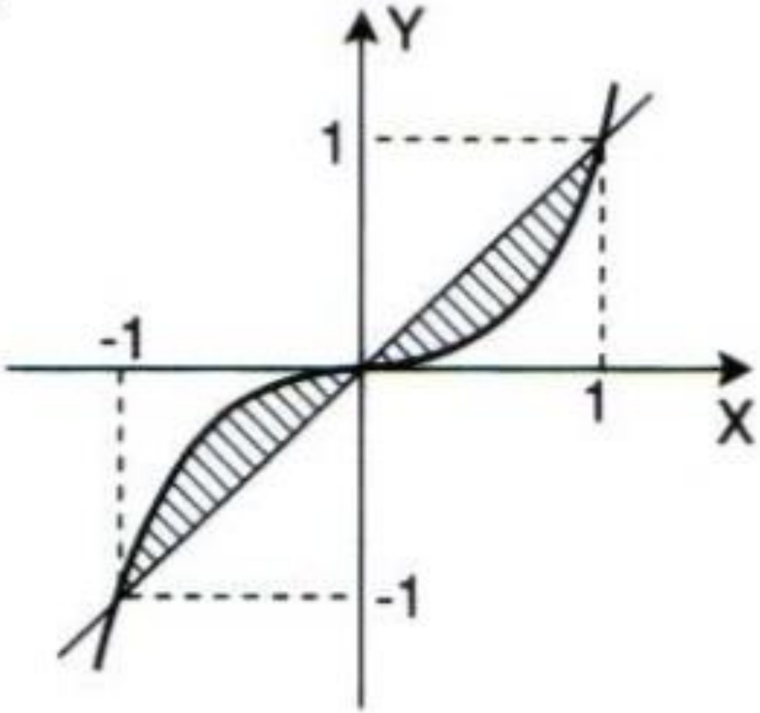


Figura 6.19

No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e, no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$. Logo,

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}\text{ u.a.}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

$$A = 2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\text{ u.a.},$$

pois a área à esquerda do eixo dos y é igual a que se encontra à sua direita.

(iii) Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

As curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.20).

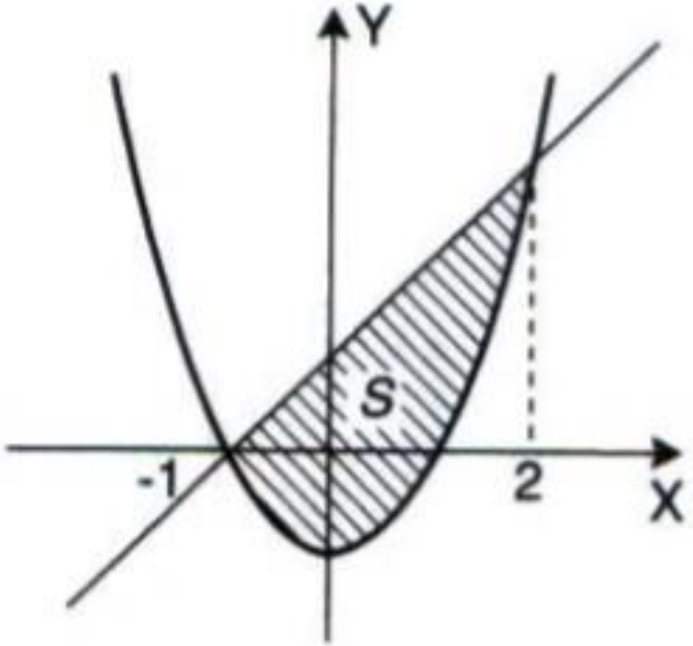


Figura 6.20

No intervalo $[-1, 2]$, $x + 1 \geq x^2 - 1$. Logo,

$$A = \int_{-1}^{2} [(x + 1) - (x^2 - 1)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\,dx \qquad = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} \qquad = 9/2 \text{ u.a.}$$

(iv) Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6, y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Devemos dividir a região em duas sub-regiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.21).

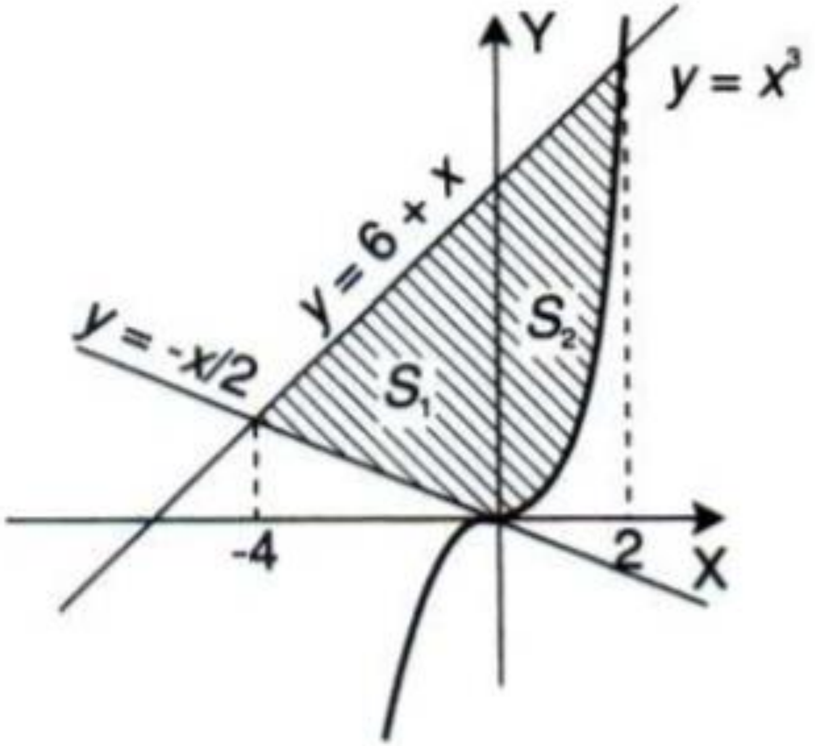


Figura 6.21

No intervalo $[-4, 0]$, a região está compreendida entre os gráficos de $y = \frac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo $[0, 2]$, está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de A_1*:* No intervalo $[-4, 0]$, $6 + x \geq -\frac{x}{2}$. Assim:

$$A_1 = \int_{-4}^{0} [(6 + x) - (-x/2)]dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(6 + \frac{3x}{2}\right)dx$$

$$= \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{0}$$

$$= 12 \text{ u.a.}$$

Cálculo de A_2: No intervalo $[0, 2]$, $6 + x \geq x^3$. Então,

$$A_2 = \int_0^2 [(6 + x) - x^3]\,dx$$

$$= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 10 \text{ u.a.}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$ u.a.