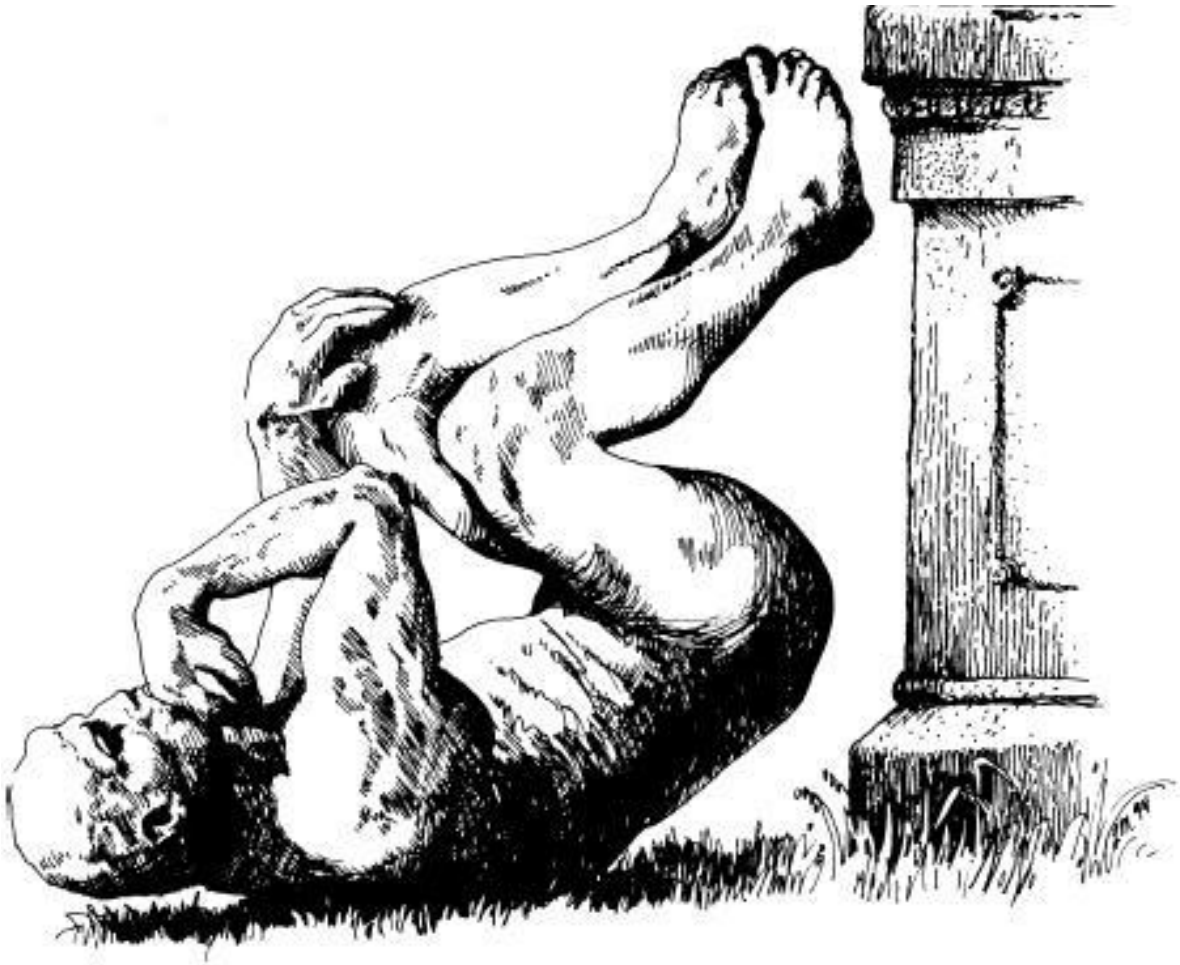
Cálculo 2



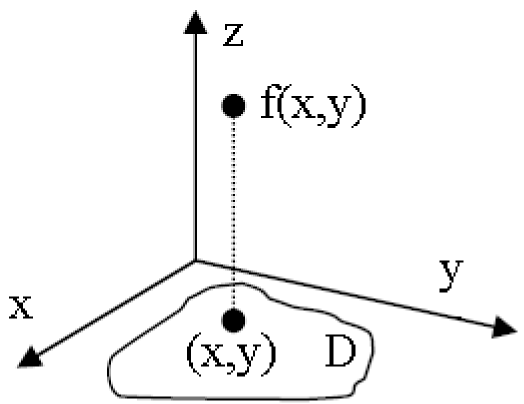
FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Introdução à funções de várias variáveis (FVV).

2. Limites e derivadas de FVV.

Funções de duas Variáveis

Seja ***D*** um subconjunto (região) do espaço $\boldsymbol{R^2}$ (plano). Chama-se função ***f*** de ***D*** toda relação que associa, a cada par ***(x,y)*** $\in$ ***D***, um único número real, representado por ***f(x,y)***. O conjunto ***D*** é o domínio da função.



Assim,

D é o domínio da função em $\boldsymbol{R^2}$,

f é a função

f(x,y) é o valor da função calculado em ***(x,y)***.

Exemplos de valores de função de 2 variáveis:

Ex_1: se $f(x, y) = x^2 + 2y$, então $f(2, 3) =$

Ex_2: $f(x, y) = (3x + y^3)^{1/2}$, então $f(1, 2) =$

EXEMPLOS

$V = \pi r^2 h$ $\longrightarrow$ Volume de um cilindro

$F = m.a$ $\longrightarrow$ Força para movimentar uma massa m

$$P = \frac{nRT}{V}$$ $\longrightarrow$ Pressão de um gás

Definições: Função Real de Variável Vetorial

Def: ***f*** é uma função real se todos os valores que assume são números reais, isto é, se $C \in \mathbf{R}$.

f é uma função de variável vetorial se o seu domínio é um subconjunto de números reais no espaço n-dimensional com $n > 1$, isto é, se $D \in \mathbf{R}^n$.

$$y = f\,(x_1, x_2)$$

imagem argumentos

Exemplos

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

imagem argumentos

- $f(x_1, x_2) = 2x_1^{\,4} + x_2^{\,2} - x_1 + 1$
- $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{y}{x+1}\right)$
- $f(b, c, d) = sen^2(b + \pi) + \dfrac{c}{d}$
- $f(a, b, c) = \sqrt{ab - 15c}$

Função Composta

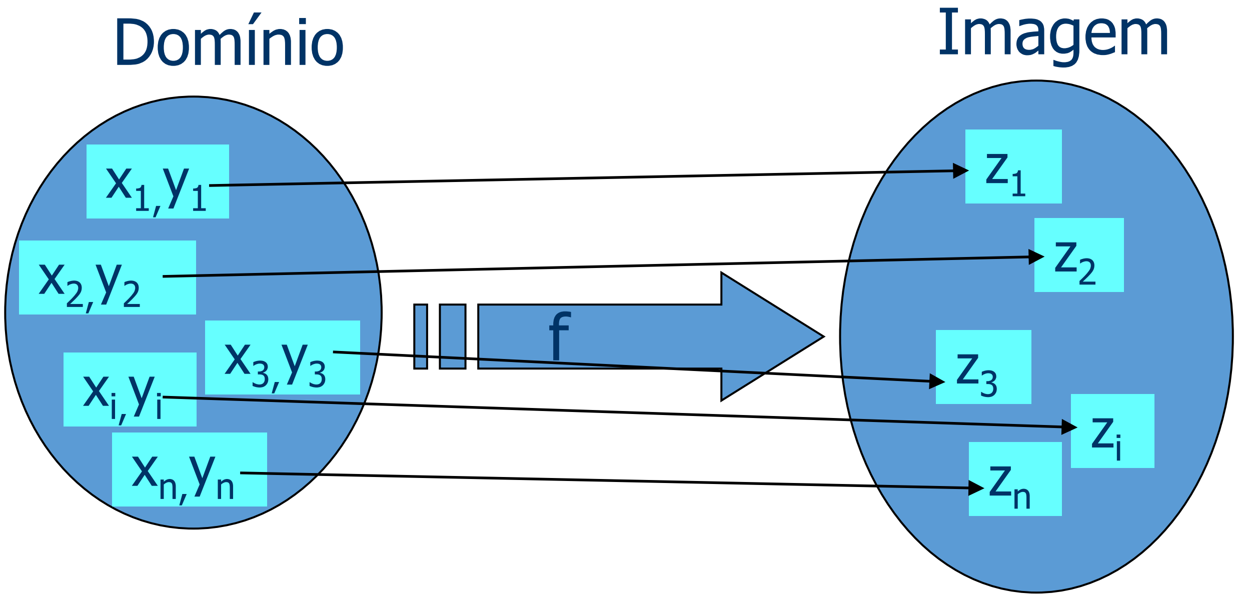
Mais de uma Variável

$$f(k) = senk \quad \text{e} \quad h(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$f(h(x,y)) = sen\left(2x^2 + 3y^2\right)$$

Função de duas Variáveis

$Z = f(x, y)$



Identificar Domínio e Imagem das Funções

Domínio das funções de duas variáveis

O domínio dessas funções segue as mesmas regras do domínio de funções de uma variável, ou seja, o domínio é a região $\boldsymbol{D \in R^2}$, tal que os valores calculados da função, para todo $\boldsymbol{(x,y) \in D}$ resultem em valores **finitos** e **reais** para f(x,y).

Ex.1- Achar o domínio da função $f(x,y) = (y - x)^{1/2}$.

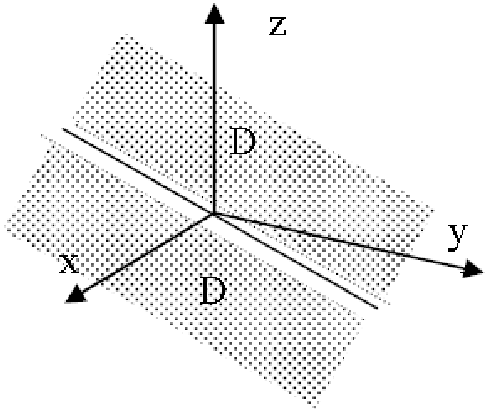
A condição de existência dessa função é $y - x \geq 0$ (real), portanto o seu domínio é $D = \{(x, y) \in R^2 \,/\, y - x \geq 0\}$.

Identificar Domínio e Imagem das Funções

Ex.2 – Ache o domínio da função f(x, y) = $x^2 / (2x - y)$,

A função é finita quando $2x - y \neq 0$.

Assim, domínio $D \in (x, y)$ é o conjunto de pontos, tais que, $D = \{(x, y) \in R^2 / y \neq 2x \}$.



Ex.3 - Ache o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3x - y}}$

A função é finita quando $3x - y > 0$. O domínio é o conjunto de pontos, tais que $D = \{(x, y) \in R^2 / 3x - y > 0\}$.

Domínios: Funções Reais de Variável Vetorial

Função	Domínio
$x^2 + y^2$	
$1 / \sqrt{x^2 + y^2}$	
$\sqrt{10x - 5y}$	
$\sqrt{25 - x^2 - y^2}$	

Contradomínios: Funções Reais de Variável Vetorial

Função	Contradomínio
x^2	
$\sqrt{x + 3^2}$	
$\sqrt{x^2 - 16}$	
$1/x$	
$(1/x) - 2$	
$-\sqrt{-x}$	
e^x	
$4sen(x)$	

Domínios: Funções Reais de Variável Vetorial

Função	Domínio
x^2	
$\sqrt{x+3^2}$	
$\sqrt{x^2-16}$	
$1/x$	
$1/(x-2)$	
$\sqrt{x-3}/x-2$	
$x-2/\sqrt{x-3}$	
$\ln(\pi \cdot x+1)$	
$\ln(3x+1)-3\sqrt{x^2+1}$	]

Identificar Domínio e Imagem das Funções

Função	Conj. Domínio	Conj. Imagem
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y > x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{x.y}$	$x.y \neq 0$	$(-\infty, 0)$ U $(0, \infty)$
$z = \text{sen}(x.y)$	Plano xy	$[-1, 1]$
$z = x^2 + y^2$	Plano xy	$[0, \infty)$

Função de Três ou mais Variáveis

1) Regra ou lei matemática que associa três ou mais variáveis independentes a uma variável dependente.

2) Uma função de três ou mais variáveis não pode ser representada geometricamente.

3) **x, y, z**: variáveis e saída, **w** variável de chegada.

4) Superfícies de nível $\Rightarrow$ **f(x, y, z) = constante**

Identificar Domínio e Imagem das Funções

Função	Conj. Domínio	Conj. Imagem
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Espaço inteiro	[0, ∞)
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	(x, y, z) = 0	[0, ∞)
$w = x.y \ln z$	Semi-espaço, z > 0	(-∞, ∞)
$w = x^2 + y^2 + z^2$	Espaço inteiro	[0, ∞)

Exemplos

1) Domínio da função $f(x,y)=\dfrac{x^2+5y+senxy}{\sqrt{-3xy^2+27xy}}$

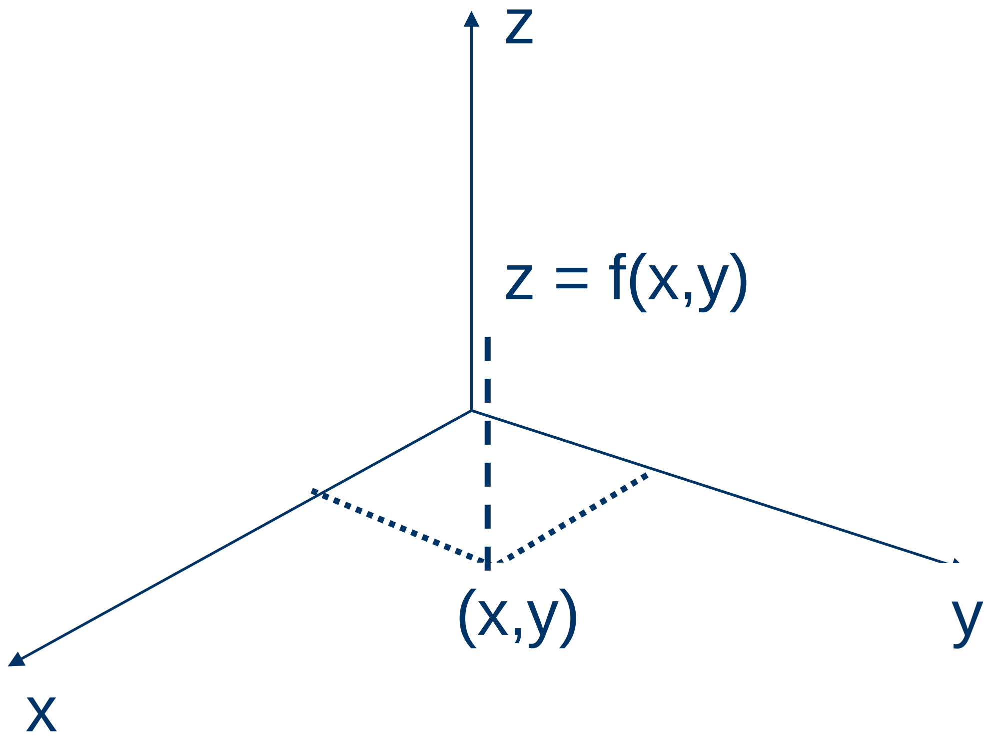
$$Dm=\{(x,y)\in\Re \,/\, -3xy^2+27xy>0\}$$

2) Imagem da função $h(x,y,z)=\sqrt{2yx^2z-3yz^3}$

$$a)\ \ h(2,1,1)=\sqrt{2.1.2^2.1-3.1.1^3}=\sqrt{5}$$

$$b)\ \ h(x^3,y^2,z^2)=\sqrt{2.y^2.x^6.z^2-3.y^2.z^6}$$

Representação Geométrica de uma f(x,y)

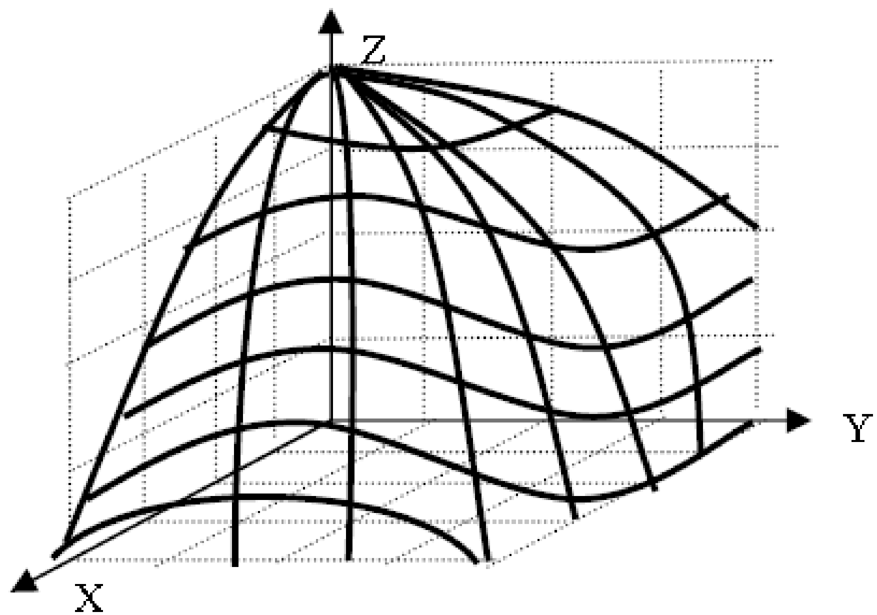


Uma f(x, y) é representada por planos ou superfícies no espaço

Representação Geométrica de uma f(x, y)

Já vimos que para as funções de uma variável, o gráfico é no plano x, y e y = f(x).

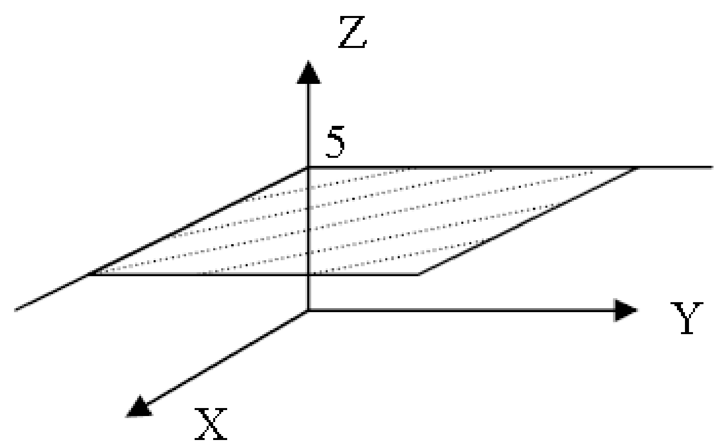
Para funções de 2 variáveis o gráfico é em R^3 e z = f(x, y). Uma função de 2 variáveis sempre gera uma superfície no espaço R^3.



Exemplos de funções de 2 variáveis

Ex$_1$: A função é $z = f(x, y) = 5$

A superfície é um plano infinito, paralelo a x, y e passando por $z = 5$.



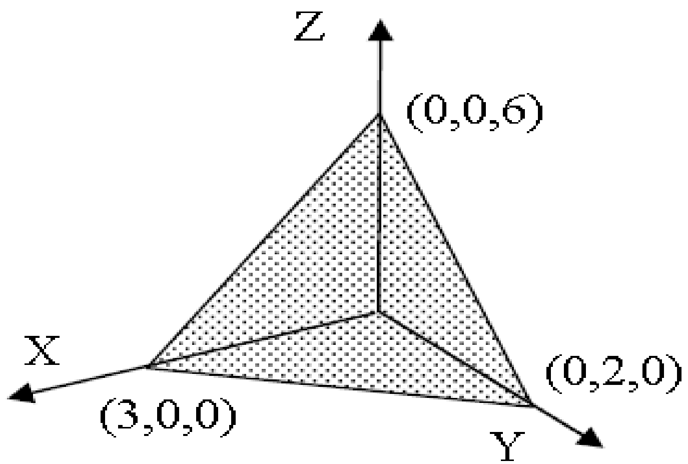
Ex$_2$: A função é $z = f(x, y) = 6 – 2x + 3y$.

Esta função pode ser escrita na forma $2x – 3y + z = 6$ que é a equação de um plano. Para achar os pontos onde este plano intercepta os eixos, é só fazer :

a) $x = 0$ e $y = 0 \rightarrow z = 6$

b) $x = 0$ e $z = 0 \rightarrow y = 2$

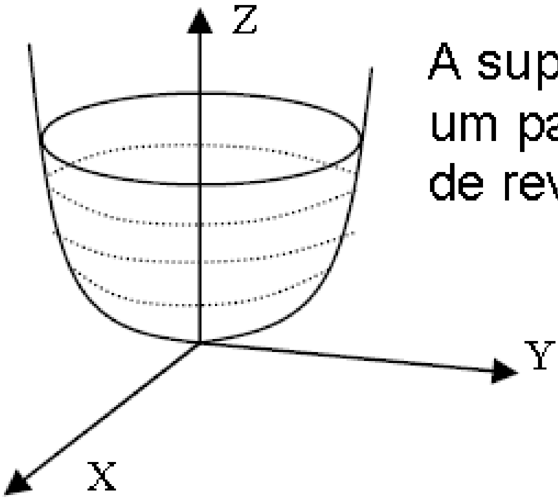
c) $y = 0$ e $z = 0 \rightarrow x = 3$



Exemplos de funções de 2 variáveis

Ex_3: A função é

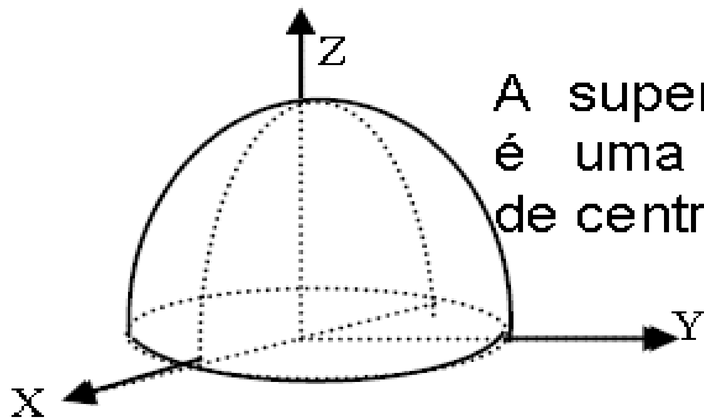
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$



A superfície é um parabolóide de revolução.

Ex_4: A função é

$$z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$



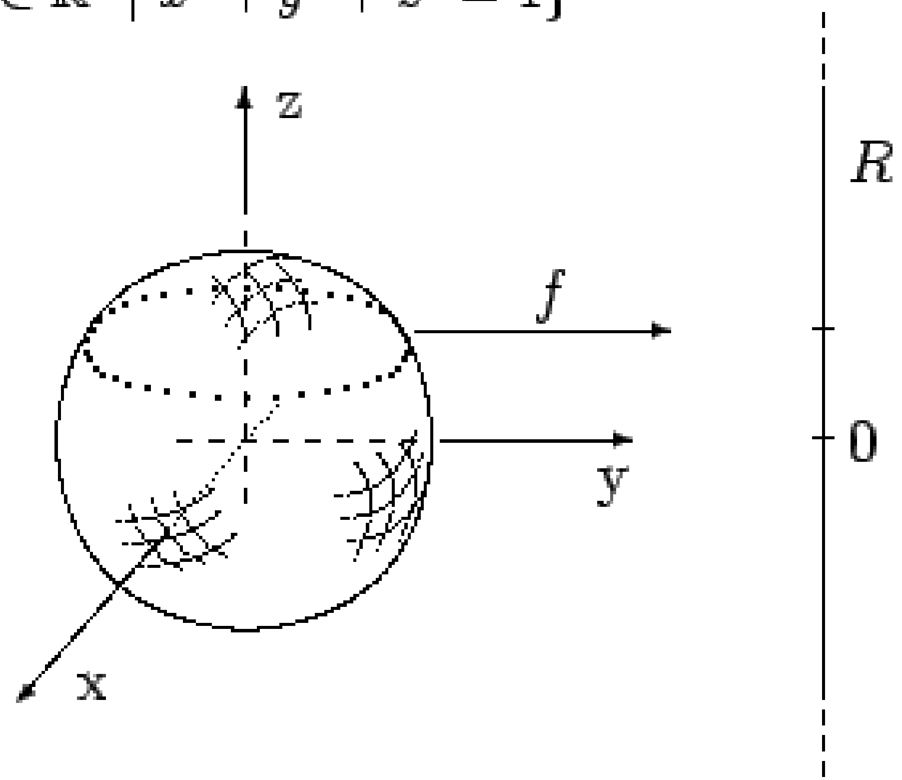
A superfície gerada é uma semi-esfera de centro na origem.

Gráficos - Definição

1) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x, y, z) =$ altura em relação ao plano xy

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

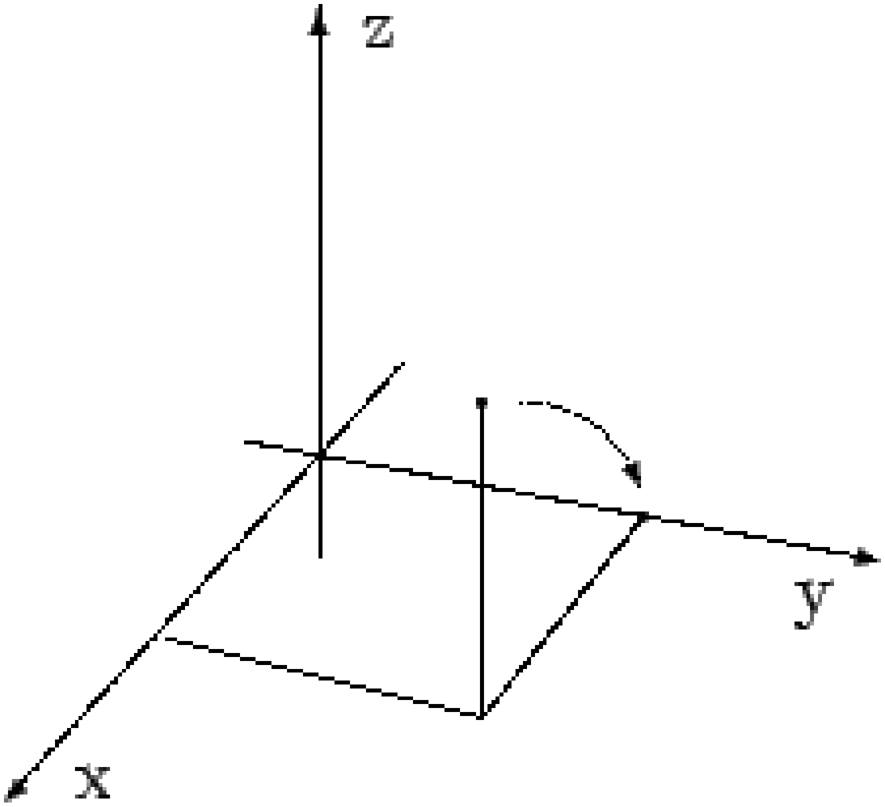


Gráficos - Definição

2) $P_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow x_i$ **i-ésima projeção** por exemplo, $n = \mathbf{3}$ e $i = \mathbf{2}$,

$(x, y, z) \longrightarrow y$



Gráficos - Definição

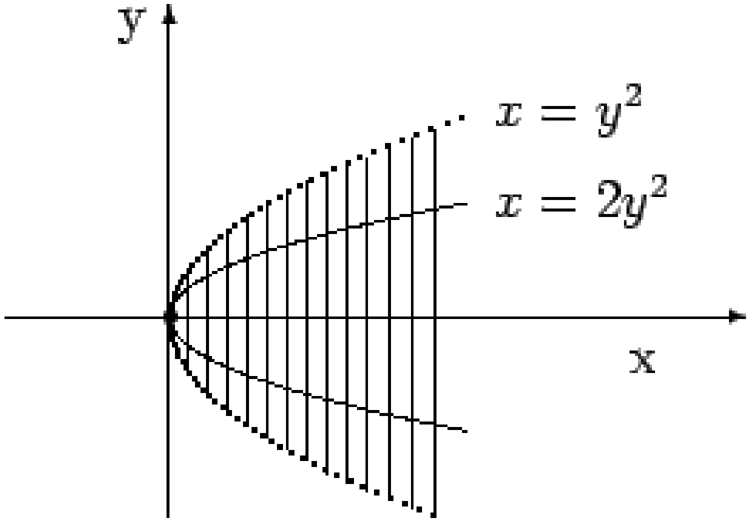
3) Encontre o domínio da função dada por $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x - y^2}}$

encontre também os pontos (x, y) para os quais f(x, y) = 1.

A expressão só faz sentido nos pontos (x, y) tais que $x - y^2 > 0$ ou seja $x > y^2$.

Ainda: $f(x, y) = 1 \iff y = (x - y^2)^{1/2} \Rightarrow y^2 = x - y^2 \iff x = 2y^2$.

A seguir representamos o domínio de f e os pontos onde f(x, y) = 1.



Gráficos - Definição

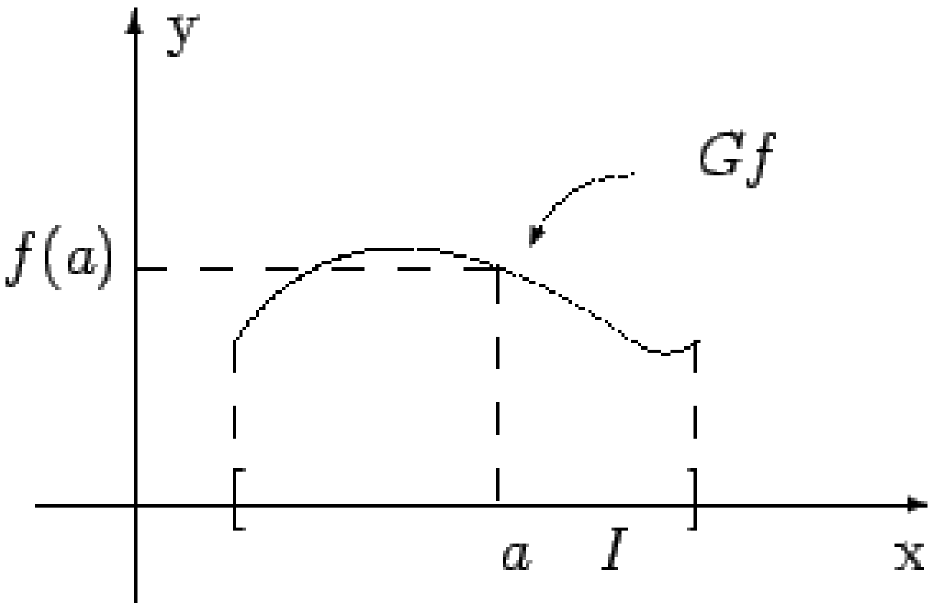
$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Chama-se ***gráfico de*** $\boldsymbol{f}$ ao subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$G_f = \{(P, f(P)) \mid P \in A\}.$$

Observação: Como o gráfico é um subconjunto do R^{n+1} e no papel podemos representar até o $\mathbb{R}^3$ então podemos desenhar o gráfico de funções de no máximo duas variáveis, isto é, $n = 2$.

Gráficos - Exemplos

$(1)\ f : I \subset R \longrightarrow R$

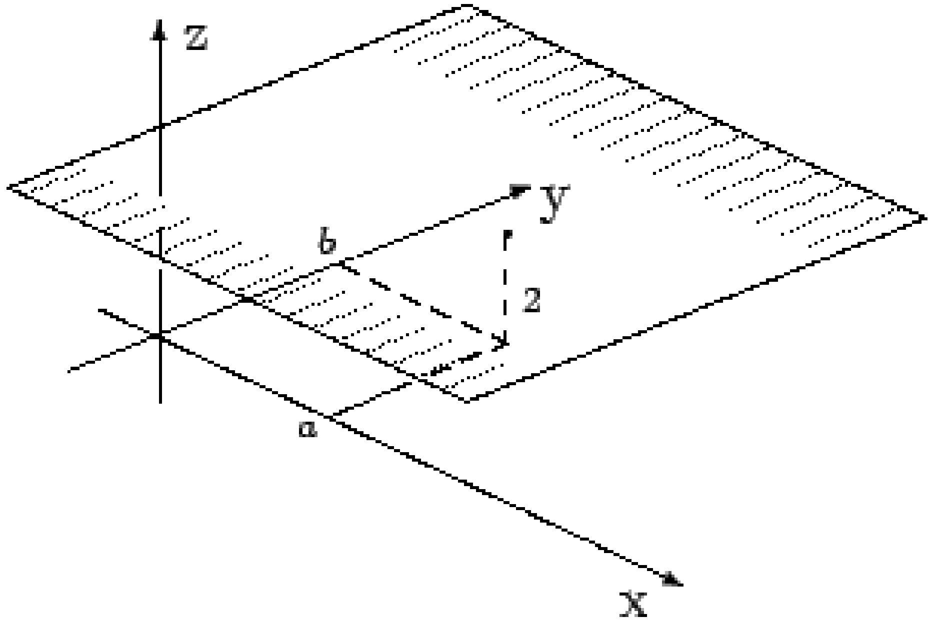


Gráficos - Exemplos

$$(2) \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(P) = 2$$

$$G_f = \{(x, y, 2) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

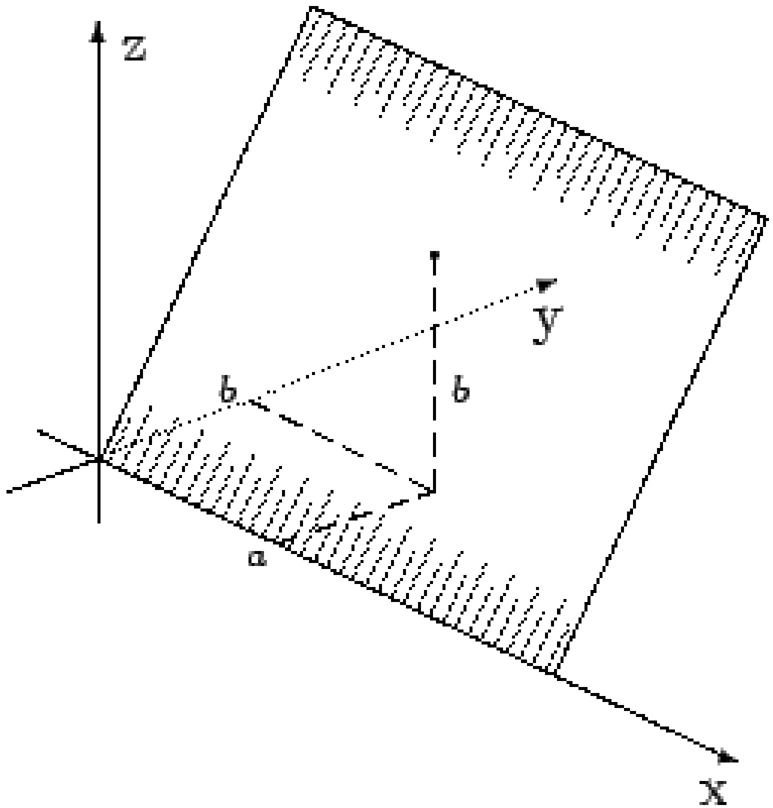


Gráficos - Exemplos

(3) $f : R^2 \to R$

$(x, y) \to y$

$G_f = \{(x, y, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$



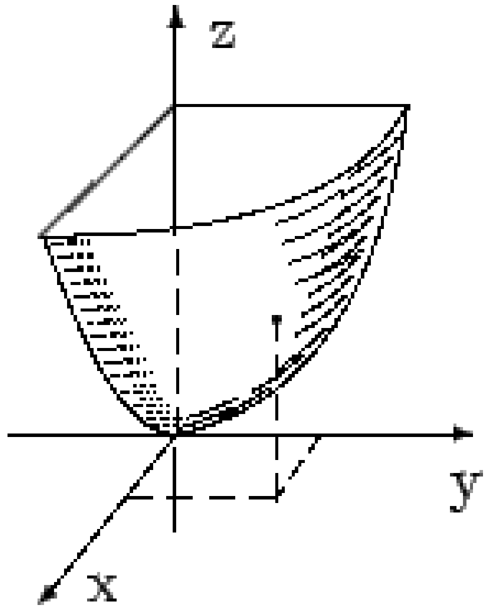
Gráficos - Exemplos

$(4) \quad f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$

$\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

$\quad G_f = \{(x, y, x^2 + y^2) \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

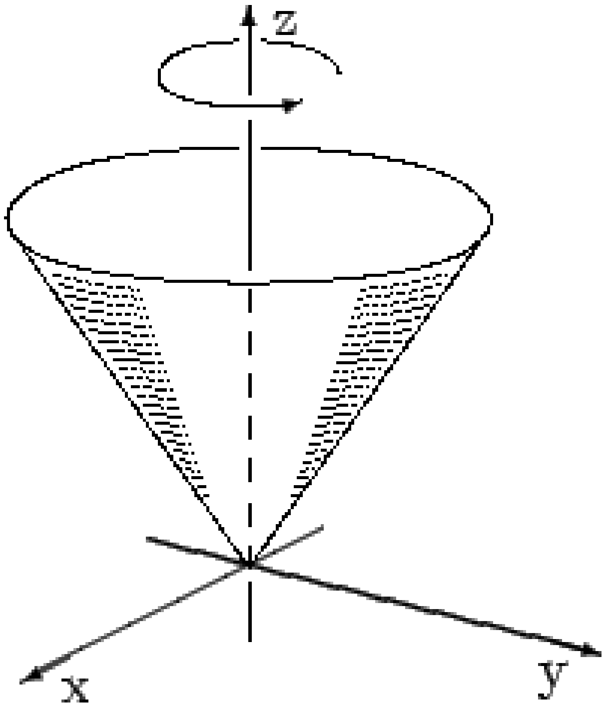


Gráficos - Exemplos

(5) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(P) =$ distância de P ao ponto $(0{,}0)$, ou seja,

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

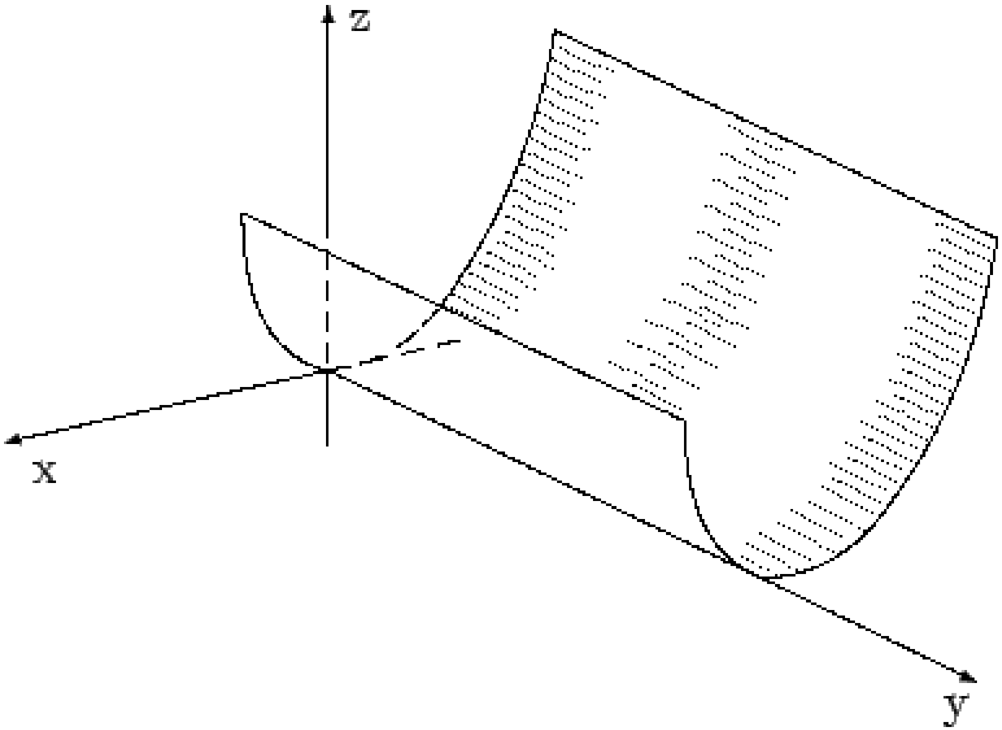


Gráficos - Exemplos

(6) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

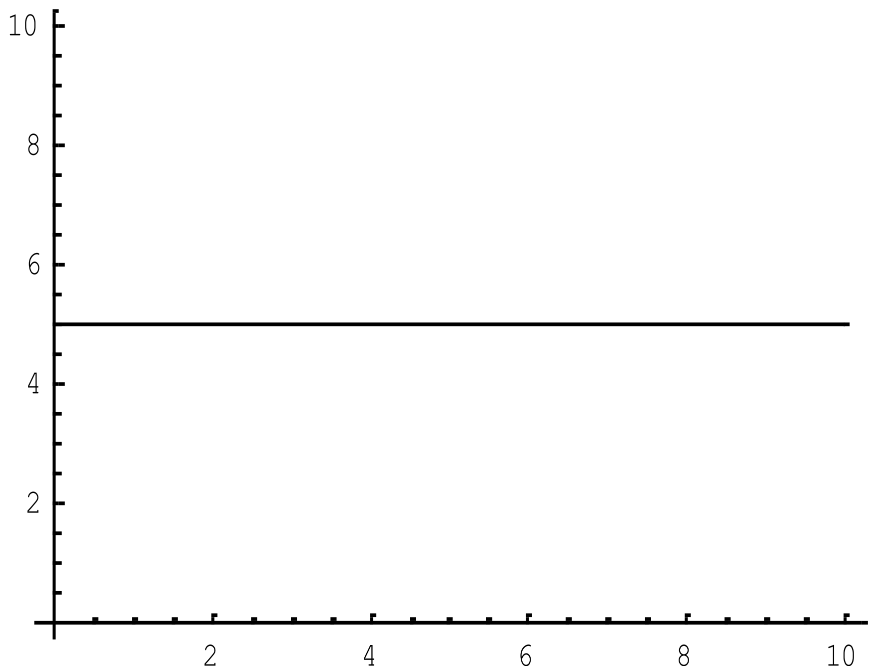
$(x, y) \longrightarrow x^2$

$G_f = \{(x, y, x^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



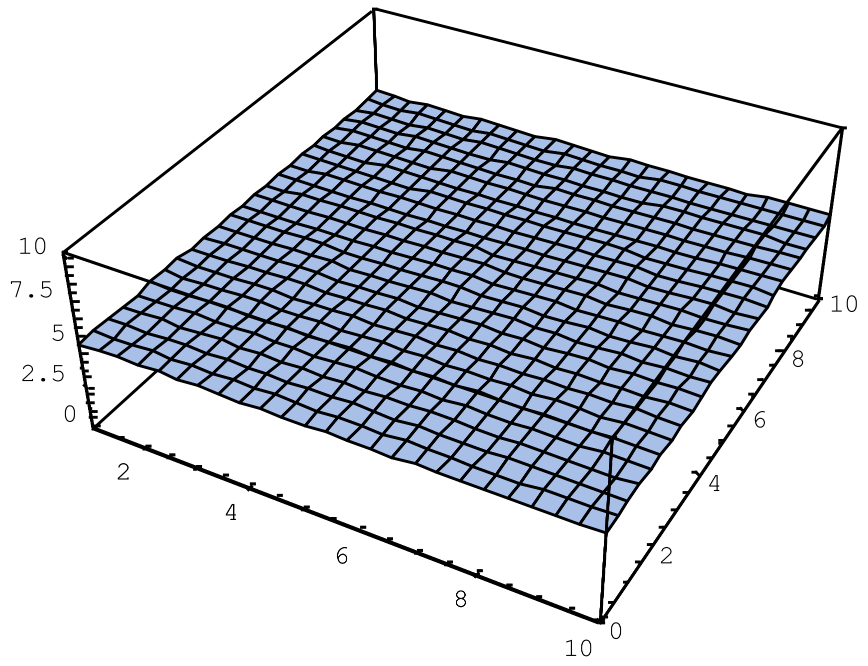
Diferenças entre 2D e 3D

y = f(x)



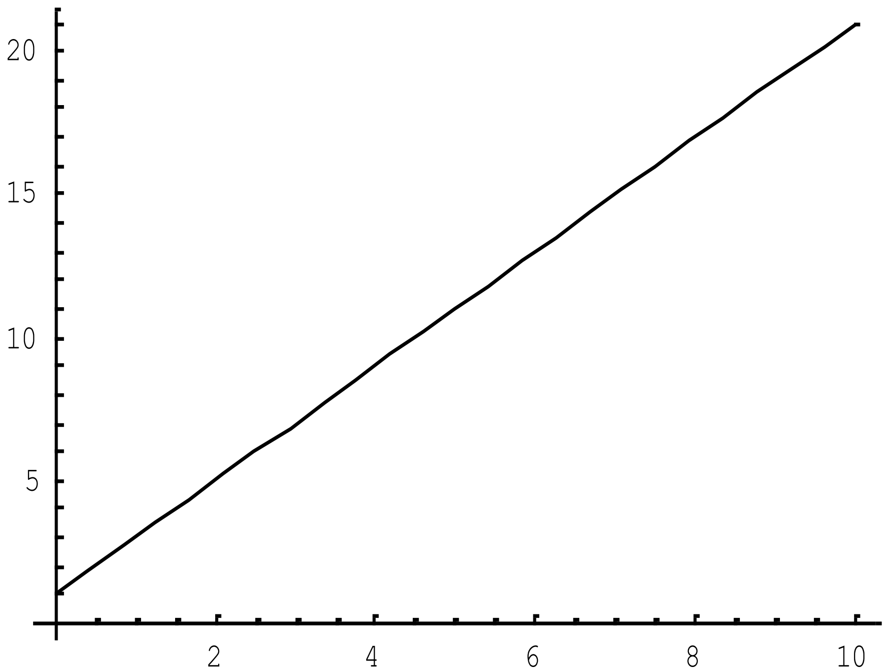
y = 5

z = f(x, y)

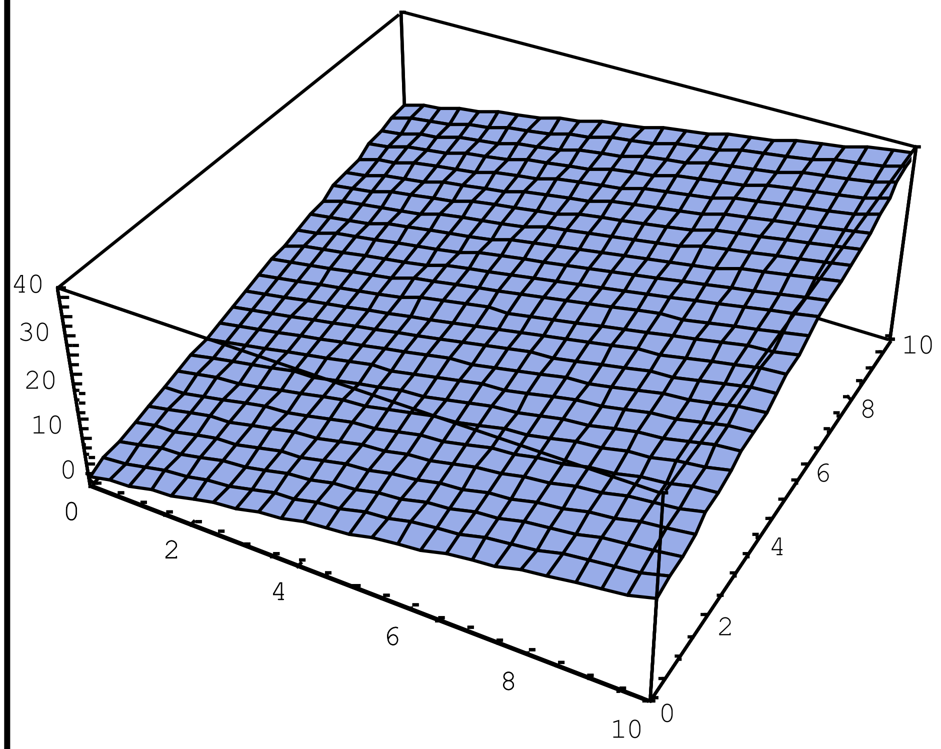


z = 5

Diferenças entre 2D e 3D

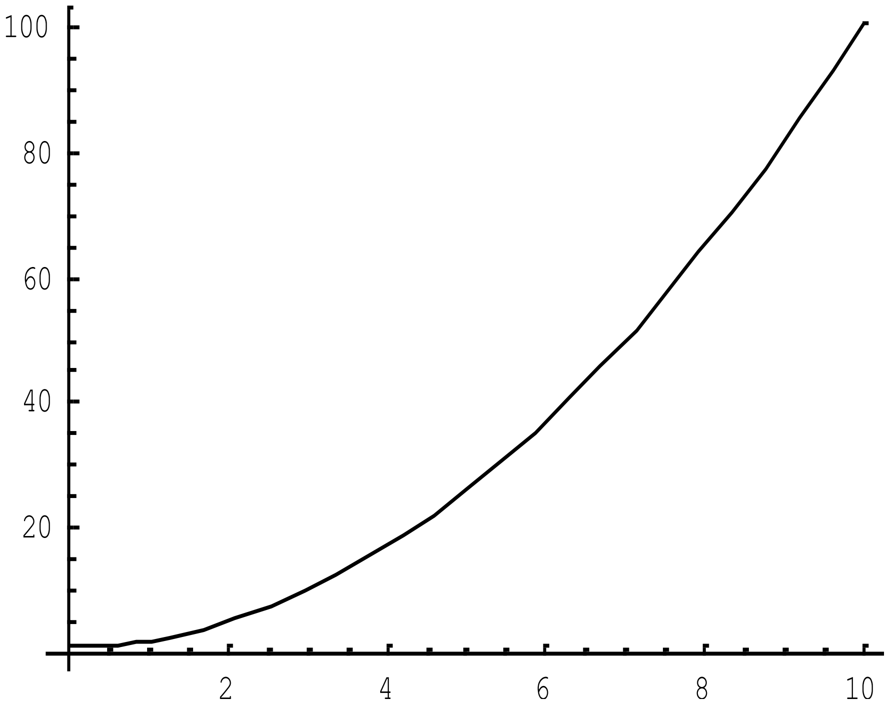


y = 2x + 1

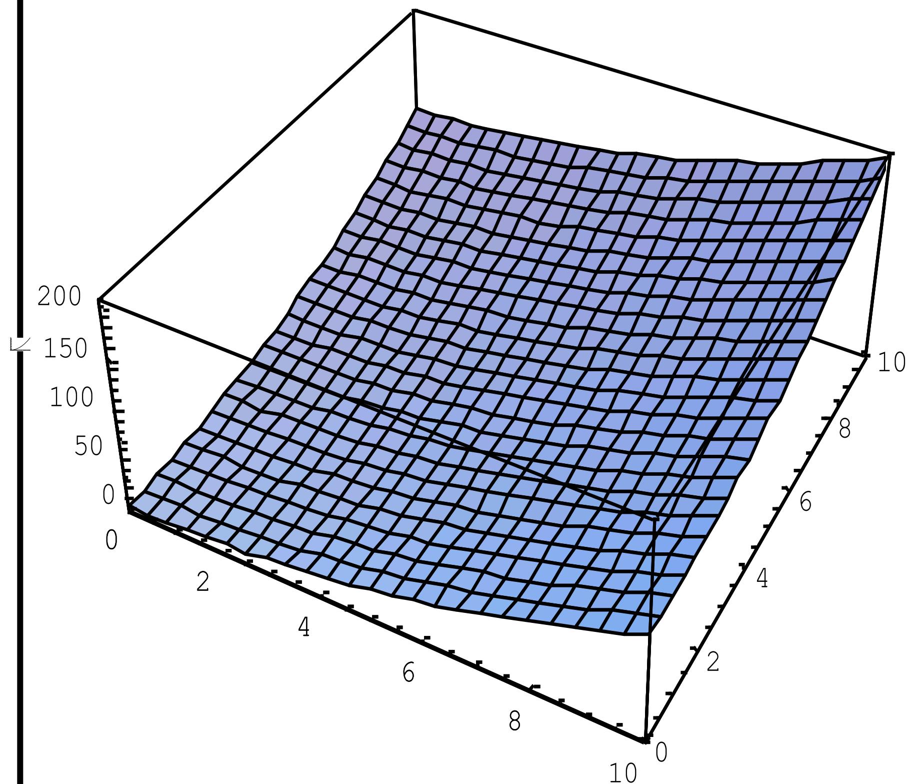


z = 2x + 2y + 1

Diferenças entre 2D e 3D

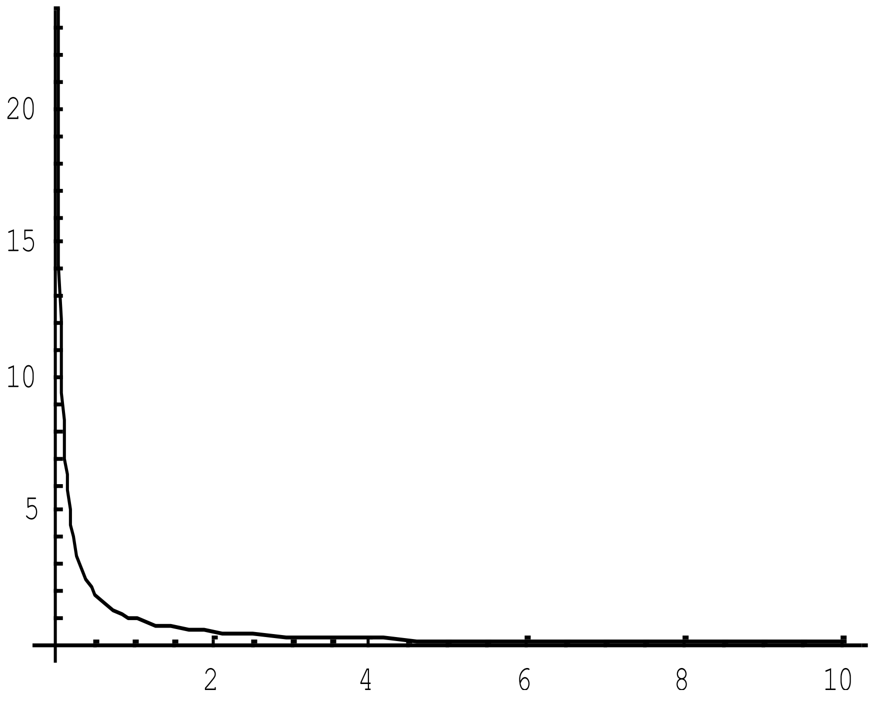


$y = x^2 + 1$

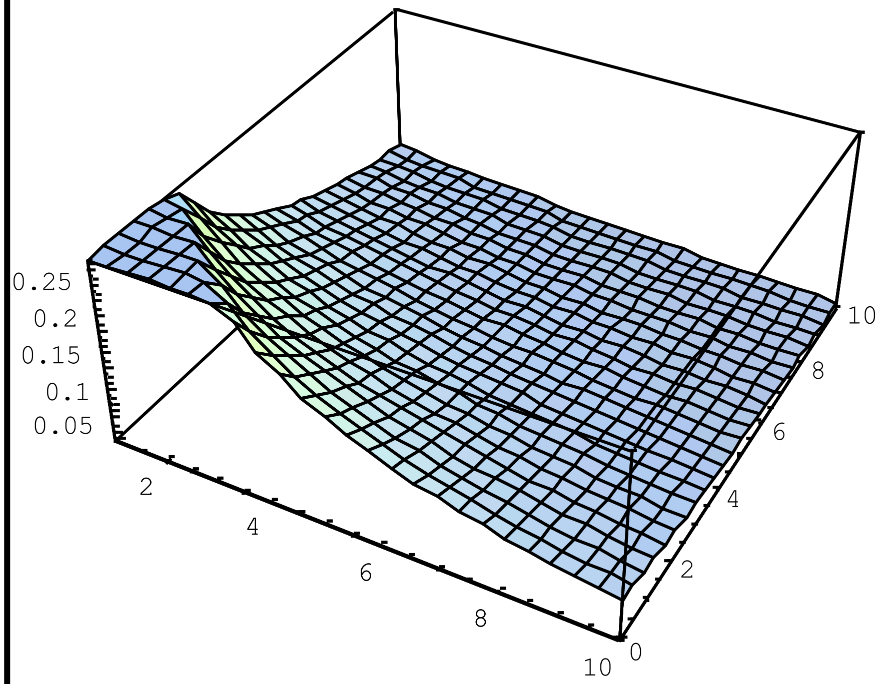


$z = x^2 + y^2 + 1$

Diferenças entre 2D e 3D



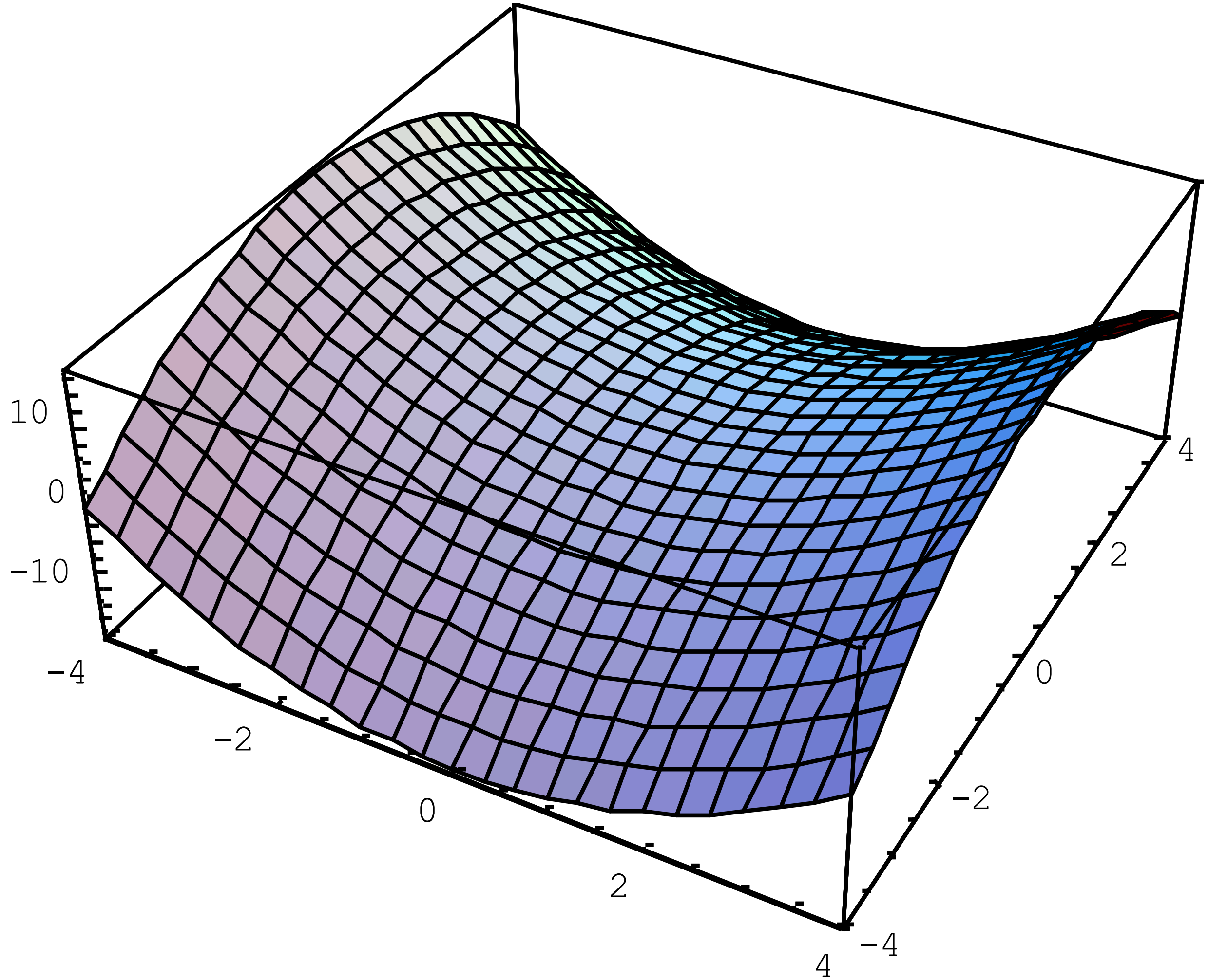
y = 1/x



z = 1/(x + y)

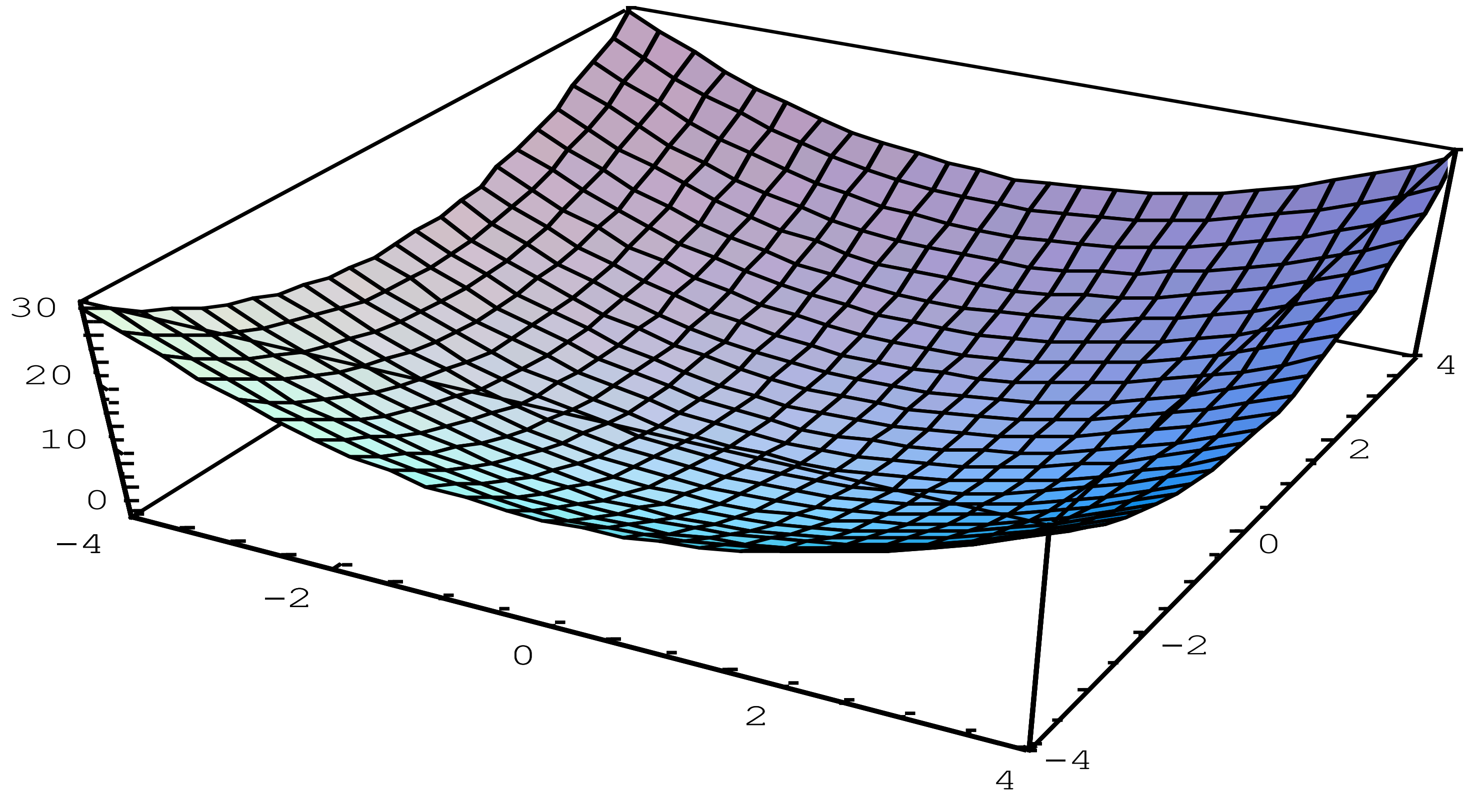
Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = x^2 - y^2$, com x e y variando de – 4 a 4.



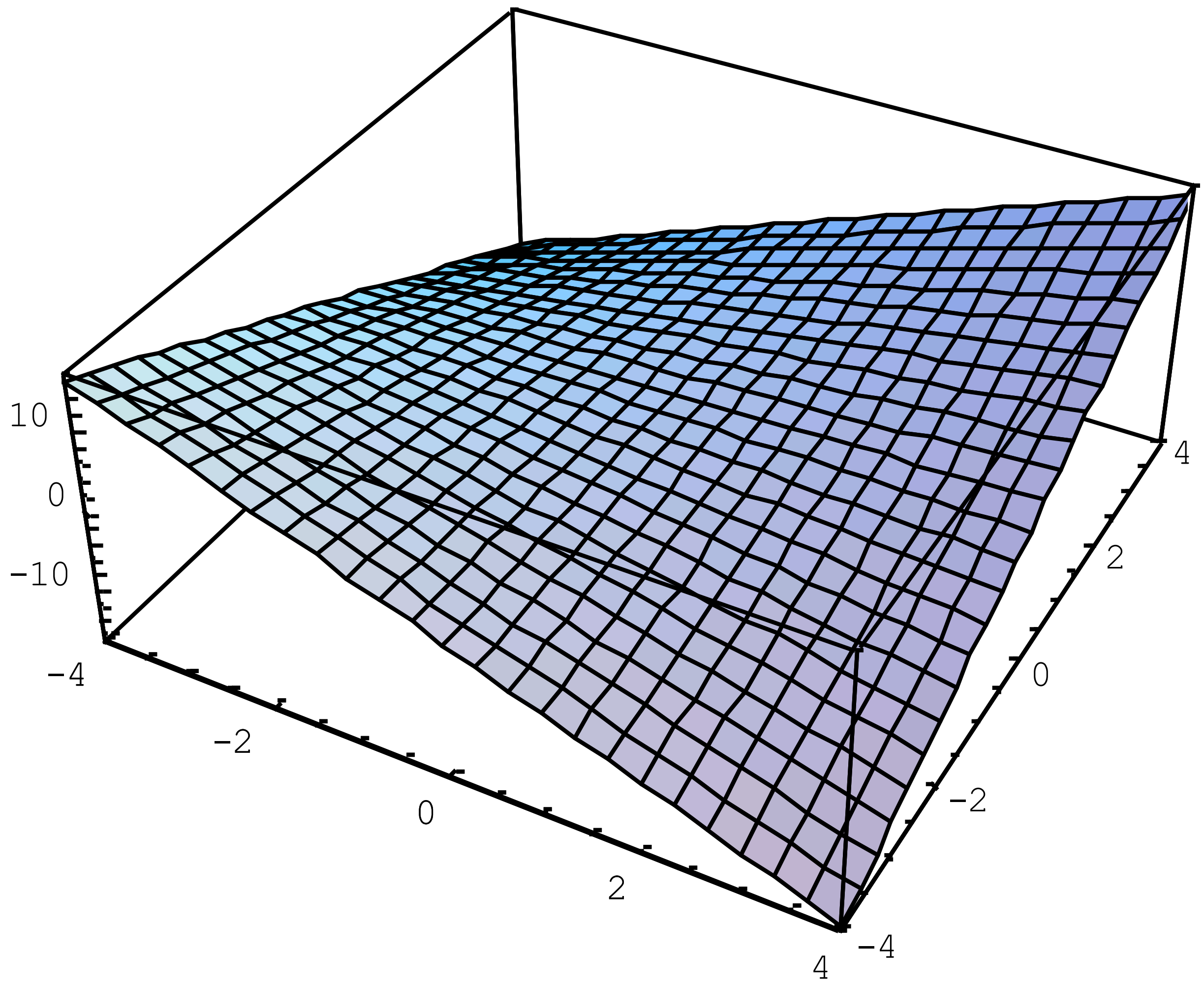
Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = x^2 + y^2$, com x e y variando de – 4 a 4.



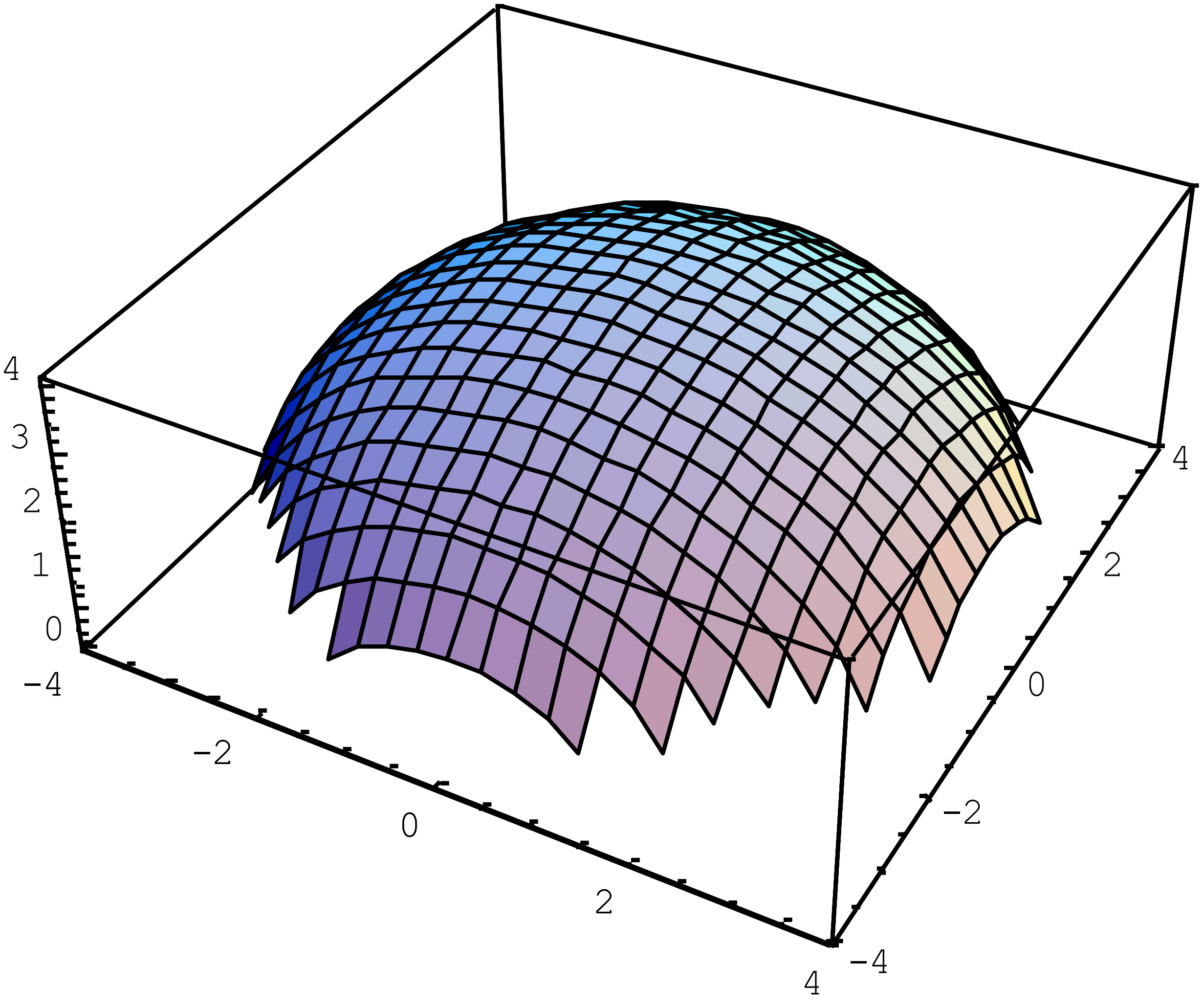
Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = x.y$, com x e y variando de – 4 a 4.



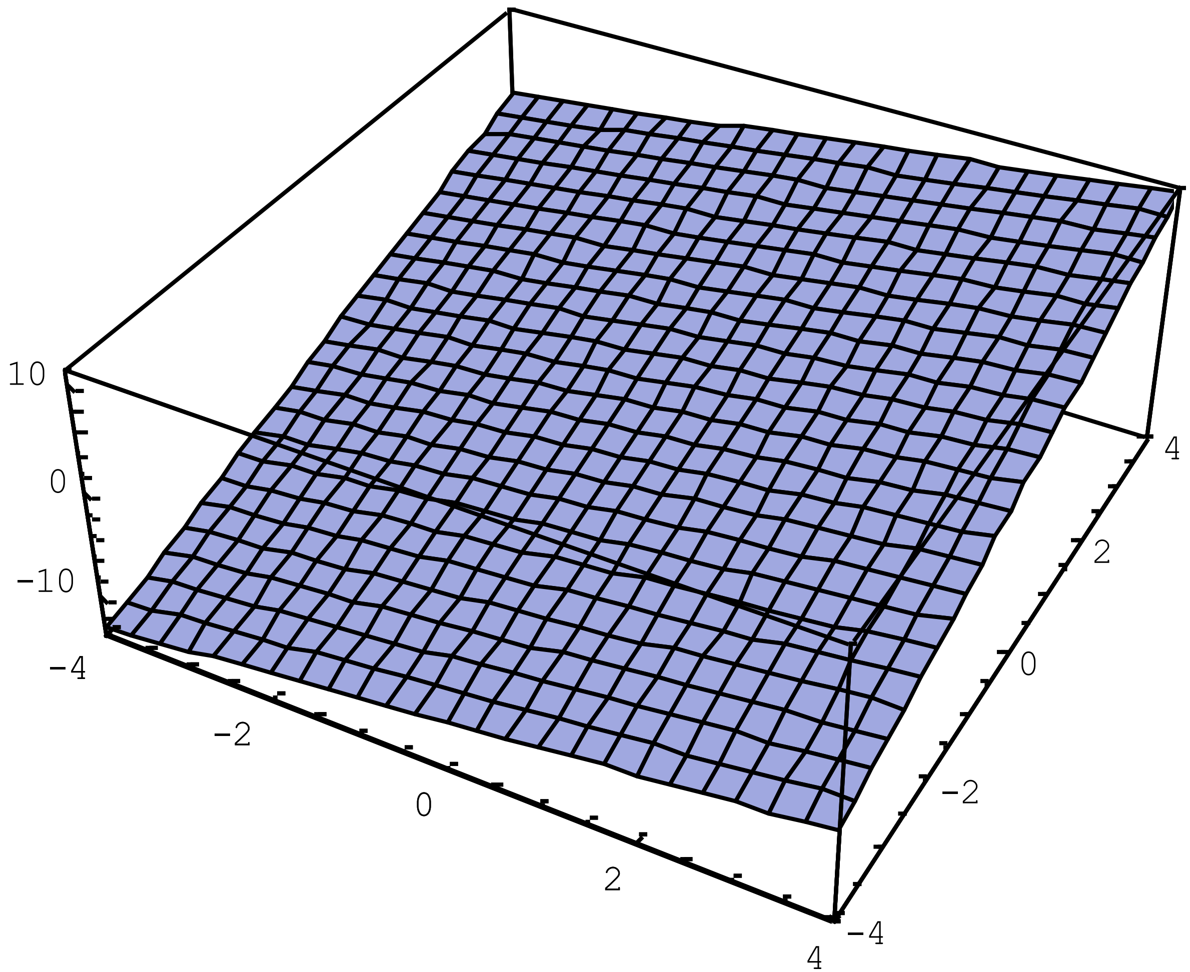
Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = (9 - x^2 - y^2)^{0,5}$, com x e y variando de – 4 a 4.



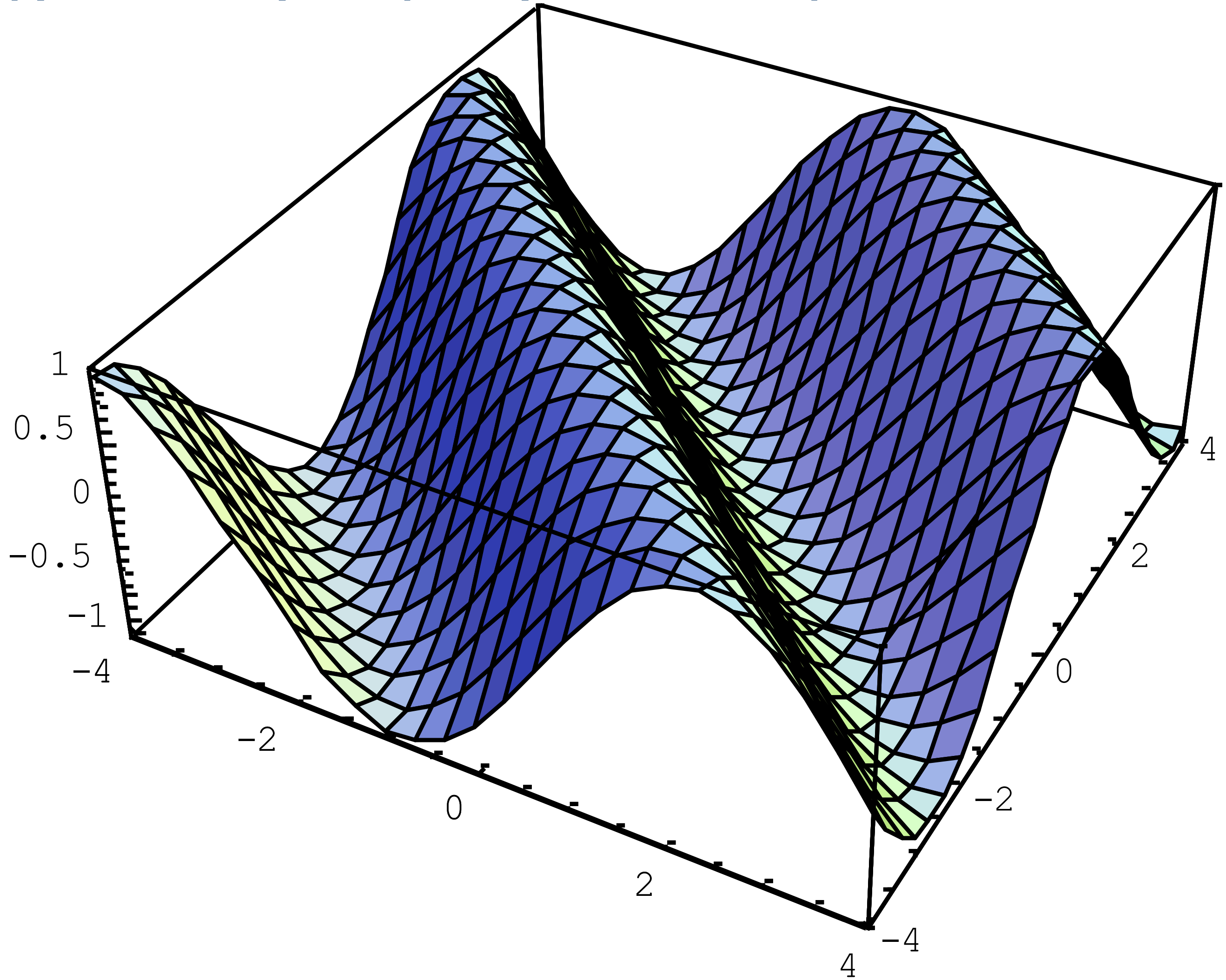
Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = x + 2y - 1$, com x e y variando de – 4 a 4.



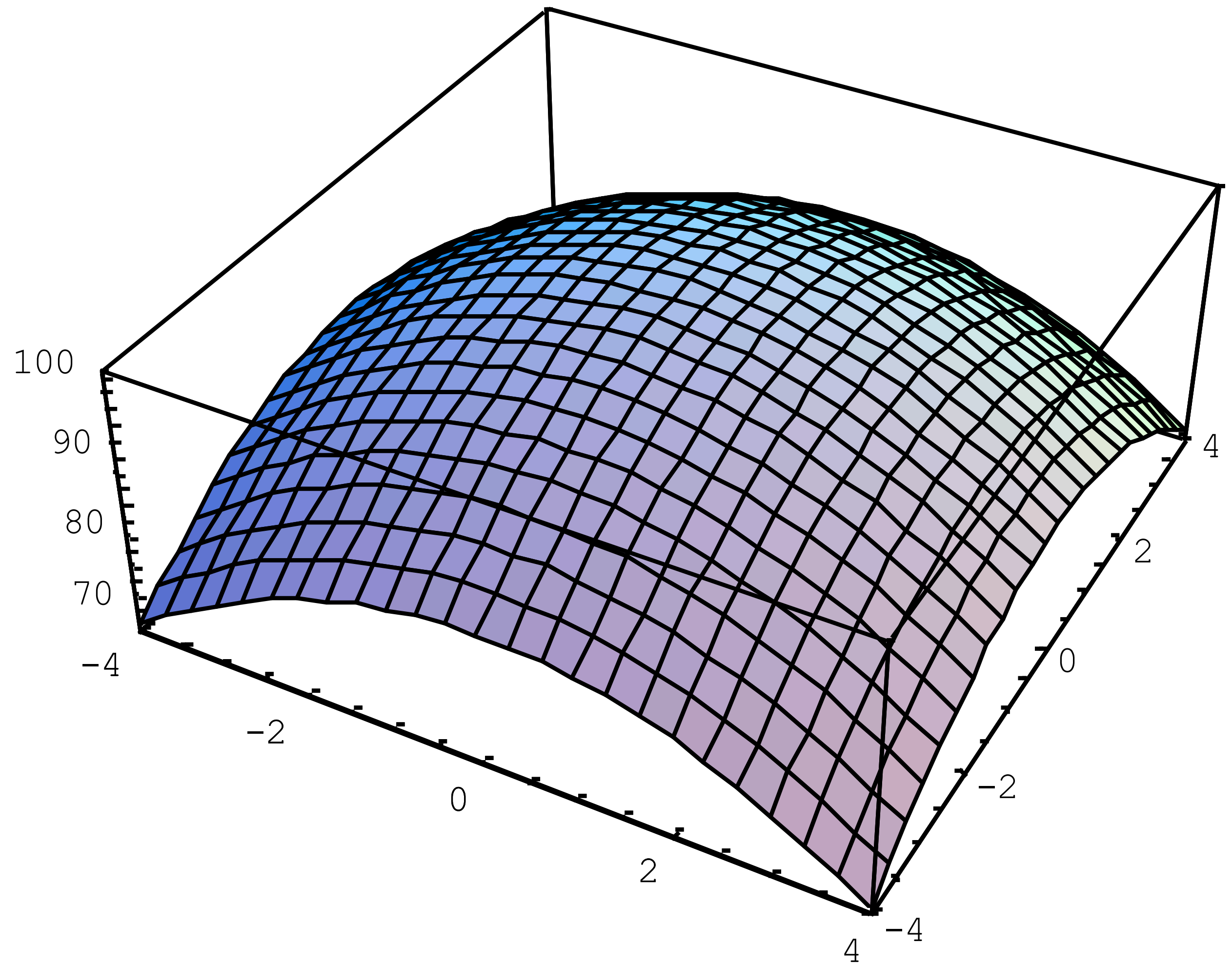
Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

f(x, y) = sem (x + y - 3), com x e y variando de – 4 a 4.



Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, com x e y variando de – 4 a 4.



Gráficos 3D (superfícies) de algumas funções de 2 variáveis

$f(x, y) = x^4/(x^4 + y^4)$, com x e y variando de – 4 a 4.