Conjuntos

Quantificadores e Operações

Quantificadores

Existe

Considere a sentença:

Existe um número natural que é primo e par

A forma geral dessa sentença é "Existe um objeto x, elemento do conjunto A, que goza das seguintes propriedades"

A sentença pode se reescrita da seguinte forma:

Existe um x, membro de $\mathbb{N}$, de modo que x é primo e par

Quantificadores

Nesse caso, há apenas um x possível (o número 2), mas a expressão "existe" não elimina a possibilidade de haver mais de um objeto com as propriedades desejadas

O símbolo para representar a notação é ∃ ("e" maiúsculo invertido)

A forma geral de uso dessa notação:

$$\exists x \in A, afirmações\ sobre\ x$$

Escrevendo a sentença:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ é } primo\ e\ par$$

O símbolo ∃ é chamado **quantificador existencial**

Para provar, devemos mostrar que algum elemento satisfaz as afirmações.

Quantificadores

Para todo

Perceba a sentença:

Todo inteiro é par ou impar

Há uma notação com o significado "para todo" ou "qualquer que seja", o A invertido "∀". A forma geral da notação é:

$$\forall x \in A, afirmações\ sobre\ x$$

Isso significa que todos os elementos de A satisfazem a afirmação, como em:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x\ é\ ímpar\ ou\ é\ par$$

O operador ∀ é chamado **quantificador universal.**

Para provar o teorema, temos que demonstrar que todos os elementos do conjunto satisfazem as afirmações requeridas.

Quantificadores

Negação de afirmações quantificadas

Considere as afirmações:

- Não existe inteiro que seja simultaneamente par e ímpar
- Nem todos os inteiros são primos

Simbolicamente, essas afirmações podem escrever-se

- $\neg(\exists x \in \mathbb{Z}, x \text{ é } par\ e\ x \text{ é } ímpar)$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ é } primo)$

O que essas negações significam?

Quantificadores

Considere a primeira negação:

$$\neg(\exists x \in A, asserções\ sobre\ x)$$

Isso significa que nenhum dos elementos de A satisfaz as afirmações. Essa primeira negativa tem como equivalente:

$$\forall x \in A, \neg(afirmações\ sobre\ x)$$

A outra afirmação “Não existe inteiro que seja simultaneamente par e ímpar” diz a mesma coisa que “Nenhum inteiro é simultaneamente par e ímpar”

Assim a negação:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ é } primo)$$

Tem como equivalente:

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \neg(x \text{ é } primo)$$

Quantificadores

Combinação de quantificadores

Considere as seguintes afirmações:

- Para todo *x*, existe um *y* de modo que $x + y = 0$
- Existe um *y*, de modo que, para todo *x*, temos $x + y = 0$

Em símbolos, essas afirmações se escrevem:

$$\forall x, \exists y, x + y = 0$$

$$\exists y, \forall x, x + y = 0$$

Quantificadores

A segunda sentença é falsa, pois se utilizar um valor aleatório para *y*, não são todos os valores de *x* que somados tem como resultado o valor 0.

Opcionalmente, pode-se utilizar parênteses:

$$\forall x, (\exists y, x + y = 0)$$

$$\exists y, (\forall x, x + y = 0)$$

Exercícios: quantificadores

Página 69 – exercícios do 10.1 até o 10.5

1. Escreva as sentenças seguintes utilizando a notação de quantificador, isto é, use os símbolos ∃ e/ou ∀. Nota: como não garantimos que essas afirmações sejam verdadeiras, não procure prova-las!
   a. Todo inteiro é primo; $\forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ é } primo$
   b. Há um inteiro que não é primo, nem composto; $\exists x \in \mathbb{Z}, x \text{ não é } primo, x \text{ não é } composto$
   c. Existe um número inteiro cujo quadrado é igual a 2; $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 2$
   d. Todos os inteiros são divisíveis por 5; $\forall x \in \mathbb{Z}, 5|x$
   e. Algum inteiro é divisível por 7; $\exists x \in \mathbb{Z}, 7|x$
   f. O quadrado de qualquer inteiro e não negativo; $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$
   g. Para todo inteiro x, existe um inteiro y tal que *xy* = 1; $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, xy = 1$
   h. Existem dois inteiros *x* e *y* tais que *x / y = 10*; $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x/y = 10$
   i. Existe um inteiro que, quando multiplicado por qualquer inteiro, sempre dá o resultado 0. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy = 0$
   j. Qualquer que seja o inteiro que escolhamos, existe sempre outro inteiro maior que ele; $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x < y$
   k. Todos amam alguém alguma vez;

2. Escreva a negação de cada uma das sentenças do problema anterior. O leitor deve "mover" a negação dentro dos quantificadores. Dê sua resposta em português e simbolicamente. Por exemplo, a negação da parte (a) seria "Existe um inteiro que não é primo" (português) é "$\exists x \in \mathbb{Z}, x$ *não é primo*" (símbolos).

a) $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ *é primo*

Existe um inteiro que não é primo; $\exists x \in Z, x$ *não é primo*

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, x$ *não é primo*, x *não é composto*

Todo inteiro é primo ou composto; $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ *é primo ou* x *é composto*.

c) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 2$

Todo número inteiro tem quadrado que não é igual a 2; $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 2$

d) $\forall x \in \mathbb{Z}, 5|x$

Existe inteiros que não são divisíveis por 5; $\exists x \in \mathbb{Z}, \neg(5|x)$

e) $\exists x \in \mathbb{Z}, 7|x$

Todos inteiros não são divisíveis por 7; $\forall x \in \mathbb{Z}, \neg(7|x)$

f) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$

Existe inteiro, cujo quadrado é negativo; $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < 0$

g) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, xy = 1$

Existe um inteiro x, para que todo inteiro y, $xy \neq 1$; $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \neg(xy = 1)$

h) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x/y = 10$

Para todos os inteiros *x* e *y, não satisfazem a equação x / y = 10*; $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \neg(x/y = 10)$

i) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy = 0$

Para todo inteiro x, quando multiplicado por algum outro inteiro, nunca dá o resultado 0. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, xy \neq 0$

j) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x < y$

Existe inteiro que escolhamos, em que outro inteiro nunca é maior que ele; $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \neg(x < y)$

3. O que significa a sentença: "Todo mundo não foi convidado para minha reunião"? Presumivelmente, o sentido dessa sentença não é o que a pessoa tinha em vista. Reformule a sentença de modo a atribui-lhe o sentido desejado.

Existem pessoas que não foram convidadas para minha reunião.

4. *Verdadeiro ou Falso*: assinale como verdadeira ou falsa cada uma das sentenças seguintes sobre inteiros. (Não é preciso provas suas afirmações)

a. $\forall x, \forall y, x + y = 0$ (F)

b. $\forall x, \exists y, x + y = 0$ (V)

c. $\exists x, \forall y, x + y = 0$ (F)

d. $\exists x, \exists y, x + y = 0$ (V)

e. $\forall x, \forall y, xy = 0$ (F)

f. $\forall x, \exists y, xy = 0$ (V)

g. $\exists x, \forall y, xy = 0$ (F)

h. $\exists x, \exists y, xy = 0$ (V)

5. Para cada uma das sentenças seguintes, escreva a negação correspondente colocando o símbolo $\neg$ o mais a direita possível. Reescreva, então, a negação em português.

Por exemplo, para a sentença:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ é } ímpar$$

A negação seria:

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \neg(x \text{ é } ímpar)$$

Que em português, é "há um inteiro que não é ímpar"

a. $\forall x \in \mathbb{Z}, x < 0$ $\exists x \in \mathbb{Z}, \neg\ (x < 0)$ – existe inteiro, que não é menor do que zero

b. $\exists x \in \mathbb{Z}, x = x + 1$ $\forall x \in Z, \neg\ (x = x + 1)$ – para todo inteiro, x não é igual a x + 1

c. $\exists x \in \mathbb{N}, x > 10$ $\forall x \in \mathbb{N}, \neg(x > 10)$ – para todo número natural, x não é maior que 10

d. $\forall x \in \mathbb{N}, x + x = 2x$ $\exists x \in N, \neg(x + x = 2x)$ – Existe número natural, em que x + x não é igual a 2x

e. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x > y$ $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \neg(x > y)$ - Para todo inteiro, existe outro inteiro que não é maior.

Operações

União e intersecção

(**União**) – a **união** de A e B é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou em B. denota-se por $A \cup B$

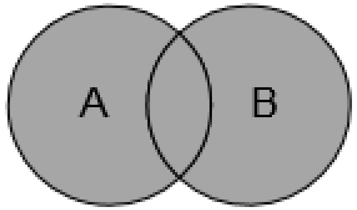
(**Intersecção**) – A intersecção de A e B é o conjunto de todos os elementos que estão tanto em A como em B. Denota-se por $A \cap B$

Em símbolos, representamos:

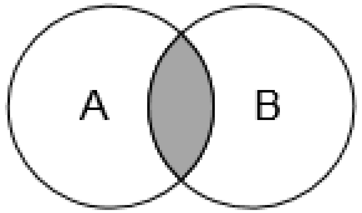
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$$

O diagrama de Venn representa os conjuntos como círculos ou outras formas. Atente as áreas sombreadas:



$A \cup B$



$A \cap B$

Operações

Propriedades

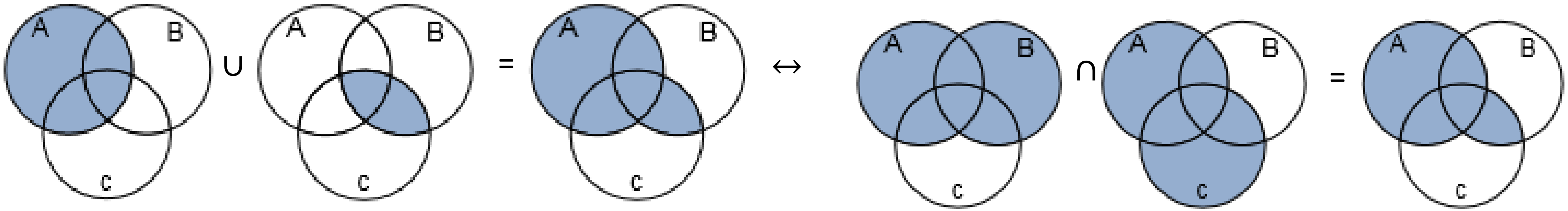
Sejam os conjuntos A, B e C. valem as seguintes propriedades:

Propriedades comutativas	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Propriedades associativas	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Propriedades distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Operações

Comprovação da propriedade distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



A $\qquad$ $B \cap C$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C)$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ $A \cup C$ $\qquad$ $A \cup B\ \cap (A \cup C)$

Operações

- Número de elementos (cardinalidade) de uma reunião

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Exemplo:

Quantos inteiros entre 1 a 1000 são divisíveis por 2 ou por 5?

$A = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x \leq 1000 \; e \; 2|x\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x \leq 1000 \; e \; 5|x\}$ e

O problema pede $|A \cup B|$

Não é difícil ver que $|A| = 500$ e $|B| = 200$. Mas temos os números que são divisíveis por 2 e por 5 simultaneamente (divisíveis por 10).

$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x \leq 1000 \; e \; 10|x\}$

Que $|A \cap B| = 100$

Portanto: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 500 + 200 - 100 = 600$

Operações

Disjunto, disjuntos aos pares

Sejam os conjuntos A e B. Dizemos que A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$

Sem $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma coleção de conjuntos. Esses conjuntos se dizem disjuntos aos pares se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo i ≠ j. Em outras palavras, eles são disjuntos aos pares se não há dois deles que tenham um elemento em comum.

Exemplo

Sejam A={1,2,3}, B = {4,5,6} e C = {7,8,9}. Esses conjuntos são disjuntos dois a dois, ou aos pares, porque $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$

(Princípio da adição) – sejam A e B conjuntos finitos. Se A e B são disjuntos, então $|A \cup B| = |A|+|B|$

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são disjuntos dois a dois, então:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Ou através de outra notação: $$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$$

Operações

Diferença e diferença simétrica

(**Diferença de conjuntos**) – Sejam A e B, a diferença $A - B$ é conjunto de todos os elementos de A que não estão em B:

$$A - B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B\}$$

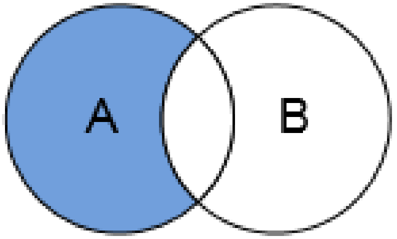
(**Diferença simétrica**) – denotada por $A \, \Delta \, B$ é o conjunto de todos os elementos que estão em A, mas não em B, ou que estão em B, porém não em A. isto é:

$$A \, \Delta \, B = (A - B) \cup (B - A)$$

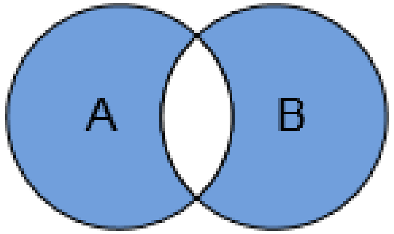
Exemplo:

Sejam os conjuntos A = {1,2,3,4} e B = {3,4,5,6}. Então, A-B = {1,2}, B-A= {5,6} e $A \,\Delta\, B = \{1,2,5,6\}$.

Em diagrama de Venn:



$A - B$



$A \,\Delta\, B$

Leis de DeMorgan

Sejam os conjuntos *A*, *B* e *C* então:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Operações

Produto Cartesiano

Sejam os conjuntos *A* e *B*. O produto cartesiano de *A* e *B*, denotado por A x B, é o conjunto de todos os pares ordenados (listas de dois elementos) formados tomando-se um elemento de *A* juntamente com um elemento de B de todas as maneiras possíveis. Ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \; e \; b \in B\}$$

A cardinalidade então é dada por:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Exemplo

Suponhamos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,4,5\}$. Então

A x B = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)} e

B x A = {(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)}

Exercicios:

11.1 até 11.12, 11.16, 11.17, 11.20

Autoteste, página 90.

11.1 - Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, calcule:

a) $A \cup B$ $= \{1,2,3,4,5,6,7\}$

b) $A \cap B$ $= \{4,5\}$

c) $A - B$. $= \{1,2,3\}$

d) $B - A$. $= \{6,7\}$

e) $A \Delta B$. $= \{1,2,3,6,7\}$

f) $A \times B$. $= \{(1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,4), (4,5), (4,6), (4,7), (5,4), (5,5), (5,6), (5,7)\}$

g) $B \times A$. $= \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(6,1), (6,2),(6,3), (6,4), (6,5), (7,1),(7,2),(7,3), (7,4), (7,5)\}$