Derivadas Direcionais e Gradiente

Derivadas Direcionais

Suponha que desejamos calcular a taxa de variação de $z = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, no ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na direção de um vetor unitário $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Lembre-se que um vetor $\mathbf{u}$ é unitário se $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Situação:

Suponha que $f(\mathbf{a})$ é a temperatura no ponto $\mathbf{a}$ numa sala com ar-condicionado mas com a porta aberta. Se movemos na direção da porta, a temperatura irá aumentar. Porém, se movemos na direção do ar-condicionado, a temperatura irá diminuir.

A taxa de variação de *z=f(x)* em ***a*** na direção de **u** é a derivada direcional. Note que a derivada direcional depende tanto do ponto ***a*** como da direção ***u*** na qual afastamos de ***a***.

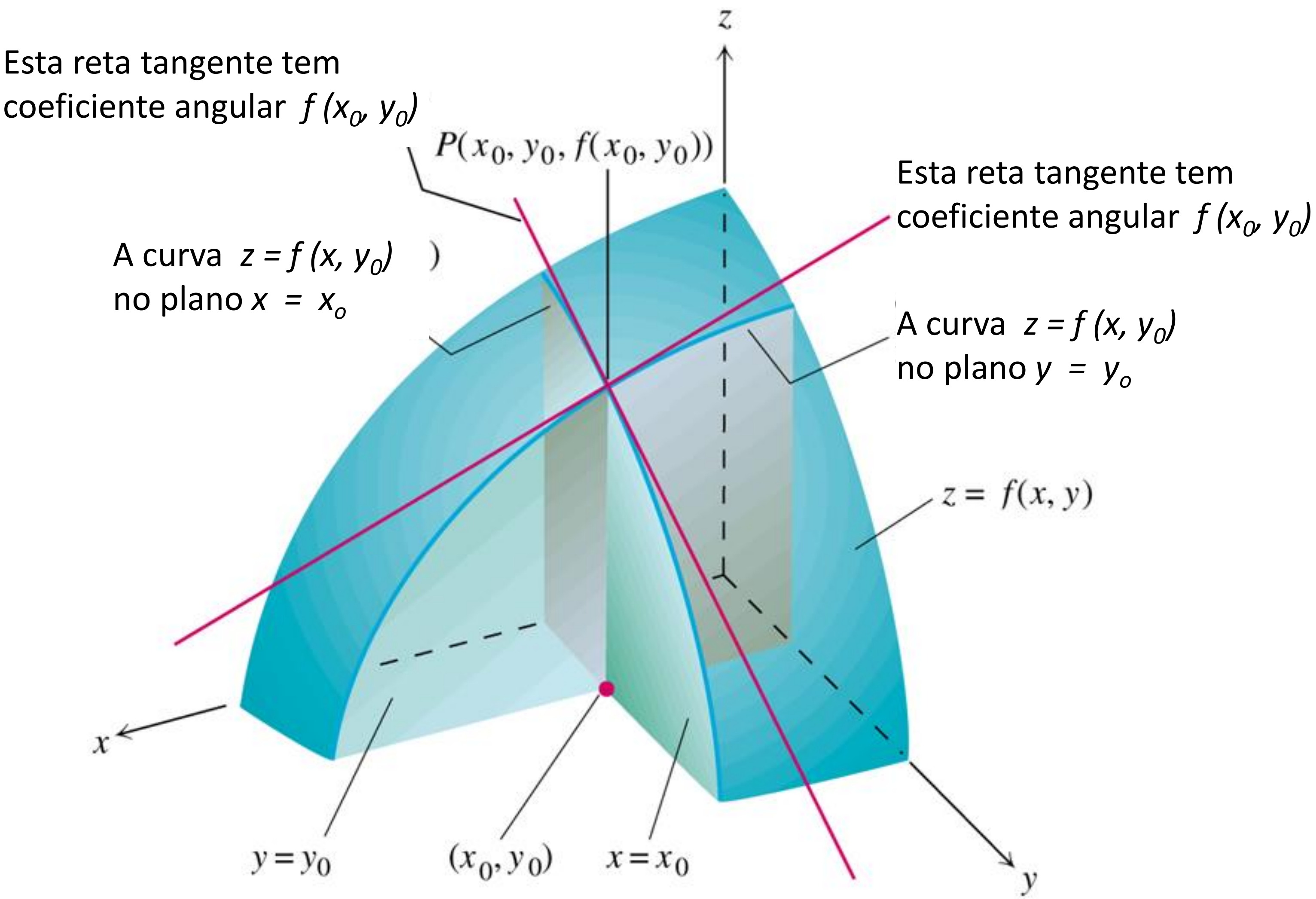
Derivadas Direcionais

As derivadas parciais de uma função de duas variáveis f(x,y) são consideradas na direção do eixo x (f_x) ou do eixo y (f_y).
Quando se considera uma direção qualquer no domínio de f(x,y), ou seja, no plano xy, têm-se a derivada direcional que vale:

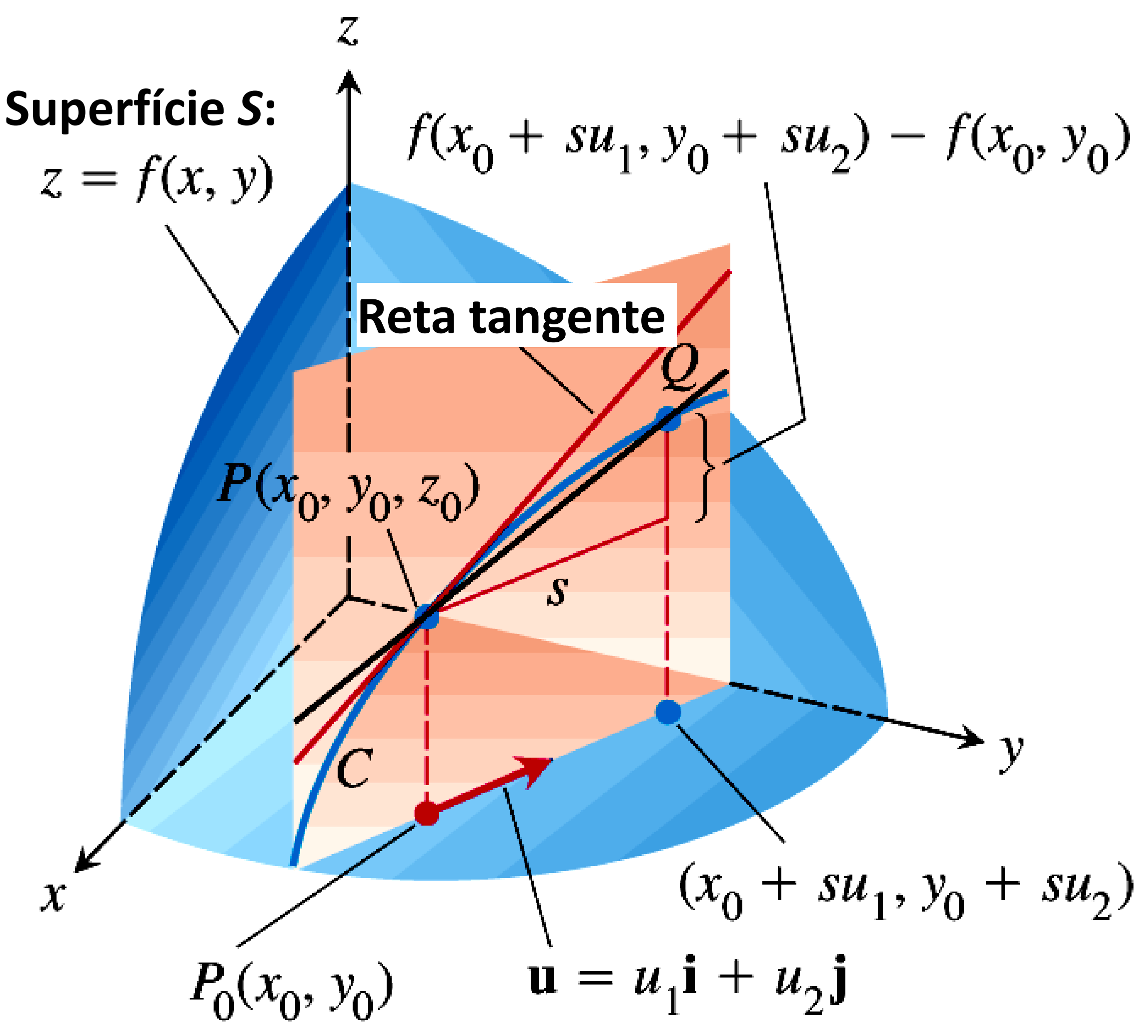
$$f_{\vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial u} = (\cos\theta . i + \operatorname{sen}\theta . j).(\frac{\partial f}{\partial x} . i + \frac{\partial f}{\partial y} . j)$$

Foi considerada a direção do vetor unitário u, u = cosθi + senθj

Derivadas Parciais



Derivadas Parciais

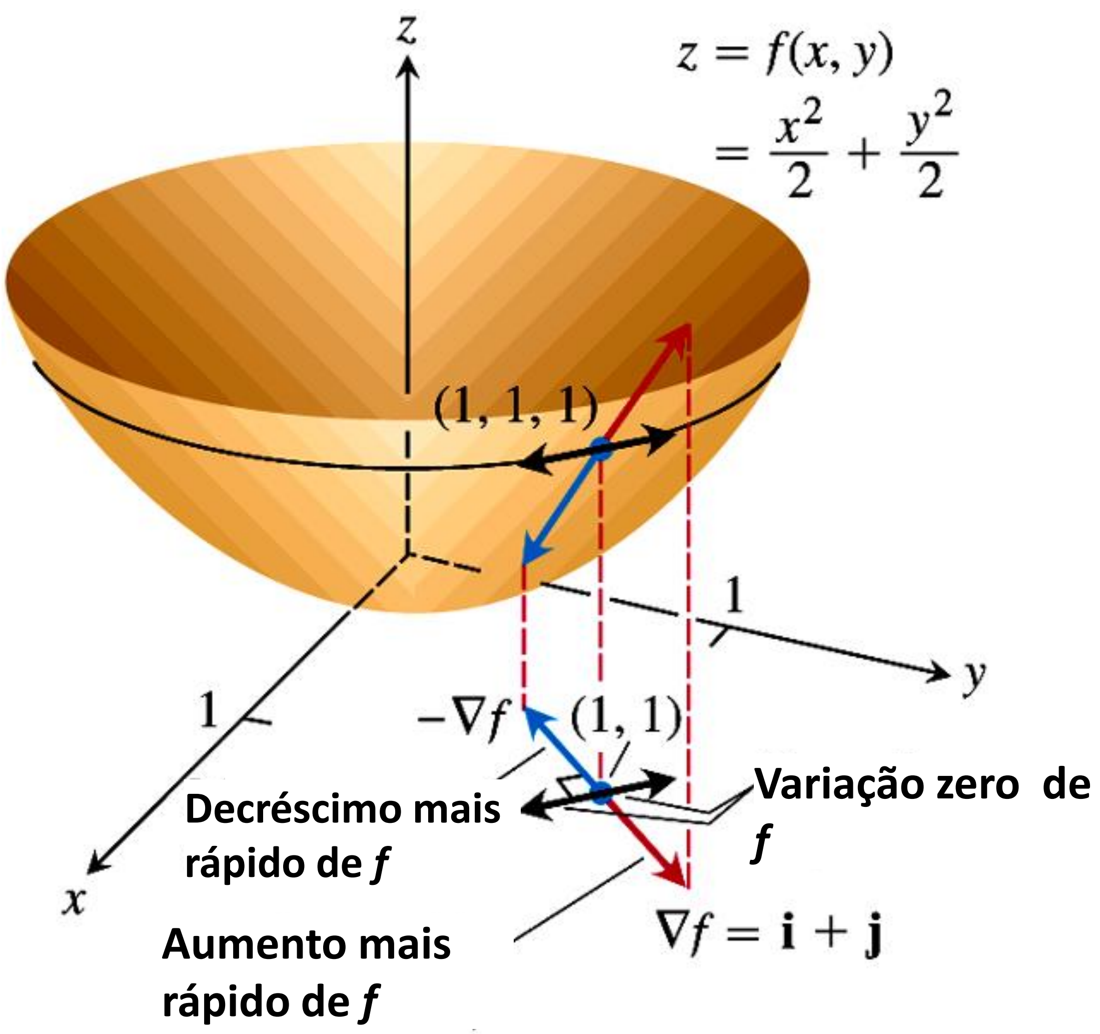


Gradiente de uma função de várias variáveis

- O segundo termo do produto escalar da derivada direcional é o vetor gradiente.

$$Grad(f(x,y) = \nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}.i + \frac{\partial f}{\partial y}.j$$

- Este vetor fornece a direção e sentido no qual ocorre a maior variação das curvas de níveis da função de duas variáveis.



z
$z = f(x, y)$
$= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$
(1, 1, 1)
1
y
1
x
$-\nabla f$
(1, 1)
Variação zero de *f*
Decréscimo mais rápido de *f*
Aumento mais rápido de *f*
$\nabla f = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Exemplo 1

Determine a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2,$$

e **u** é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$.
Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

Resposta:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\right)$$

e

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 2

Determine a derivada direcional da função

$$f(x, y) = x^2y^3 - 4y,$$

no ponto $P = (2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Resposta:

$$D_{\mathbf{u}}f(2, -1) = \frac{32}{\sqrt{29}}.$$

Gradiente de uma função

- O gradiente de uma função f(x,y) num ponto (x_0,y_0), designado por $\nabla f(x_0,y_0)$ ou grad $f(x_0,y_0)$, é o vetor livre cujas coordenadas são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- Simbolicamente:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$$

Exemplo

- Calcule o gradiente da função $f(x,y) = 3x^2y - x^{2/3}.y^2$ no ponto (1,3).

Resolução

- Calculemos a derivada parcial da função f(x,y) em relação a x e y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 6xy - \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3x^2 - 2x^{\frac{2}{3}}y$$

- No ponto (1,3):

$$\nabla f(1,3) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)\right]$$

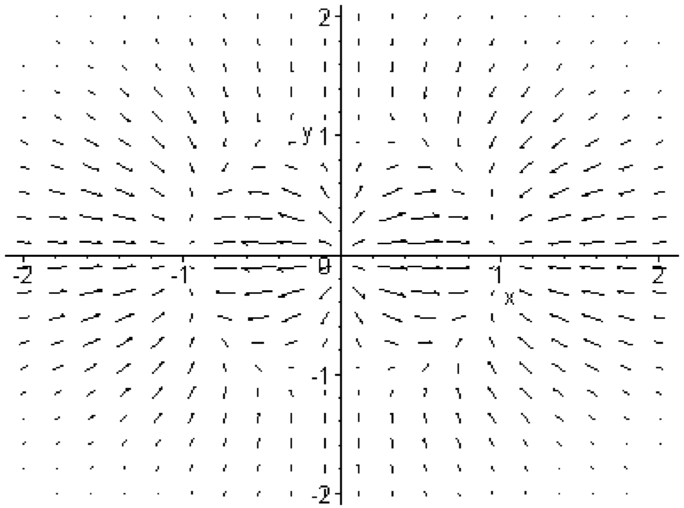
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 6.1.3 - \frac{2}{3}(1)^{\frac{-1}{3}}(3)^2 = 18 - 6 = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 3(1)^2 - 2(1)^{\frac{2}{3}}(3) = -3$$

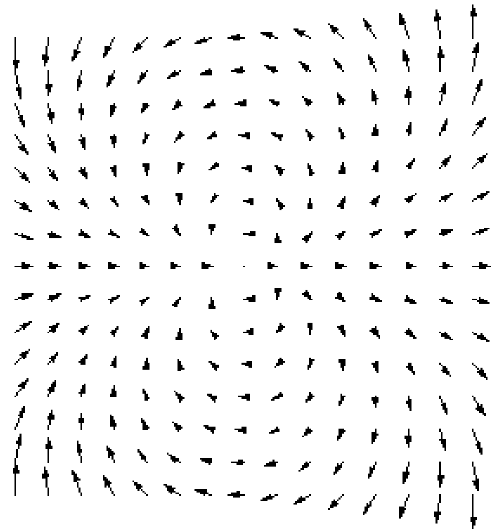
Portanto, o gradiente da função f(x,y) no ponto (1,3) é o vetor ∇f(1,3)=[12,-3].

Gradiente de uma função

- Dessas considerações é possível pensar num campo de vetores gradiente de uma função, que podem ser representados geometricamente por um conjunto de vetores que fornecem em cada ponto distinto do plano o vetor gradiente da função.



PlotVectorField[{x^2 - y^2, 2 x y}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]



- Graphics -

Vetor Gradiente

A derivada direcional de f na direção **u** pode ser escrita em termos do seguinte produto escalar

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_j = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}_{\text{vetor gradiente}} \cdot \mathbf{u} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Definição (Vetor Gradiente)

O gradiente de uma função f, denotado por ∇f ou **grad** f, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Interpretação do Vetor Gradiente

Sabemos que o produto escalar de dois vetores **a** e **b** satisfaz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

em que θ é o angulo entre **a** e **b**. Assim, podemos escrever

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{=1} \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta.$$

O valor máximo de $\cos\theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$. Logo,

Teorema

O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f$ de uma função diferenciável é $\|\nabla f\|$ e ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que ∇f.

Em outras palavras, a maior taxa de variação de $f(\mathbf{x})$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente.

Exemplo 3

Se

$$f(x,y,z) = x \operatorname{sen} yz,$$

a) determine o gradiente de f,

b) determine a derivada direcional de f no ponto $(1,3,0)$ na direção $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Resposta:

a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x,y,z) = (\operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz).$$

b) A derivada direcional é

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y,z) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$