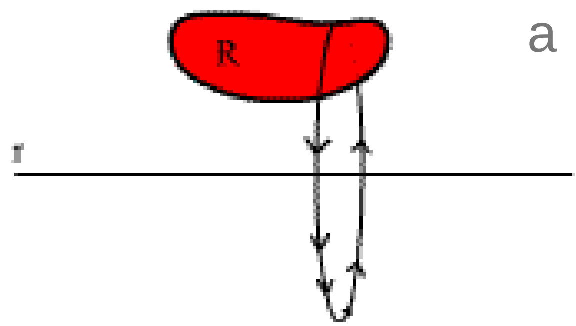
Sólidos de Revolução

Introdução:

Dados um plano ***a***, uma reta ***r*** desse plano e uma região ***R*** do plano ***a*** inteiramente contida num dos semi-planos de ***a*** determinado por ***r***, vamos considerar o sólido de revolução gerado pela rotação da região ***R*** em torno da reta ***r***.



Para isso usaremos ainda seções transversais e tomaremos *como eixo orientado o eixo de rotação (a reta **r**).*

Volume de Sólidos

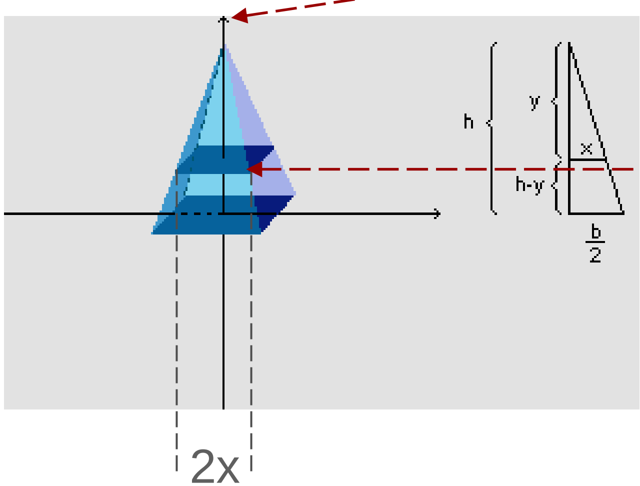
Volume de um sólido quando é conhecida a área de qualquer secção transversal.

Volume de Sólidos

Exemplo 1:

Usando o Cálculo Integral, mostre que o **volume de uma pirâmide reta de base quadrada** - sendo ***b*** a medida da aresta da base e ***h*** a altura da pirâmide – é $\frac{1}{3}b^2h.$

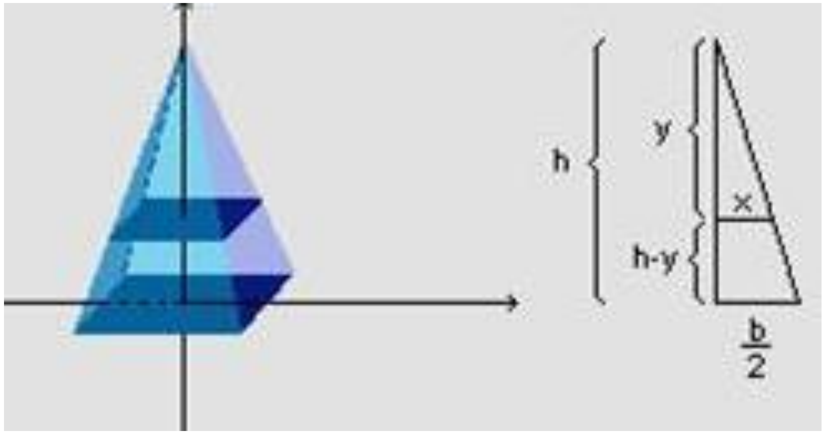
Colocando o sistema de eixos de modo que o ***eixo y*** seja perpendicular à base da pirâmide reta, passando pelo centro, temos:



Para cada corte transversal na altura ***h - y***, temos que a secção obtida é um quadrado, paralelo à base, cuja área é ***(2x)²***.
Examinando o corte longitudinal ao lado, por semelhança de triângulos, podemos escrever: $\frac{b}{2h} = \frac{x}{y}$ e daí $x = \frac{by}{2h}$

Volume de Sólidos

Exemplo 1:



$$\frac{b}{2h} = \frac{x}{y} \quad \text{e daí} \quad x = \frac{by}{2h}$$

$$A(y) = (2x)^2 = 4x^2$$

$$A(y) = 4\left(\frac{by}{2h}\right)^2 = \frac{b^2}{h^2}y^2$$

Logo, o volume da pirâmide é dado por:

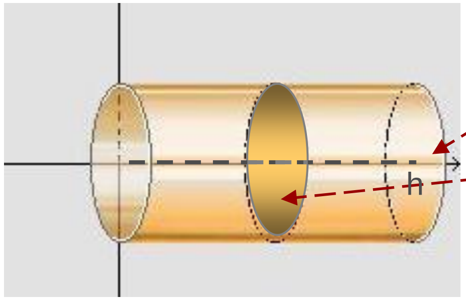
$$V = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}y^2\,dy = \frac{b^2}{h^2}\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\cdot b^2 h$$

Volume de Sólidos

Exemplo 2:

Usando o Cálculo Integral, mostre que o volume de um cilindro reto, de altura ***h*** e cuja base é um círculo de raio ***r***, é $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$.

Colocando o sistema de eixos de modo que a origem do sistema esteja no centro da base do cilindro e o ***eixo x*** seja perpendicular à base do cilindro, temos:



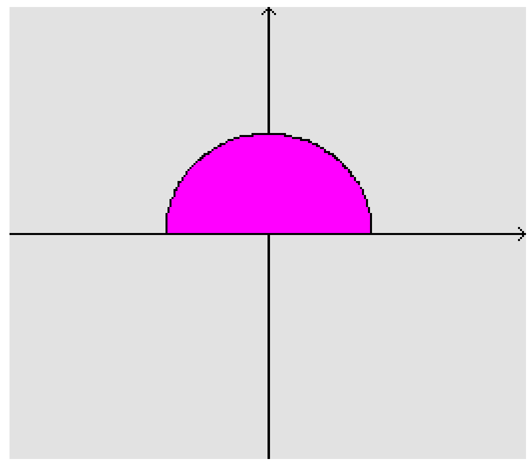
Para cada corte transversal na altura ***x***, temos que a secção obtida é um círculo, paralelo à base, cuja área é $\boldsymbol{\pi r^2}$.

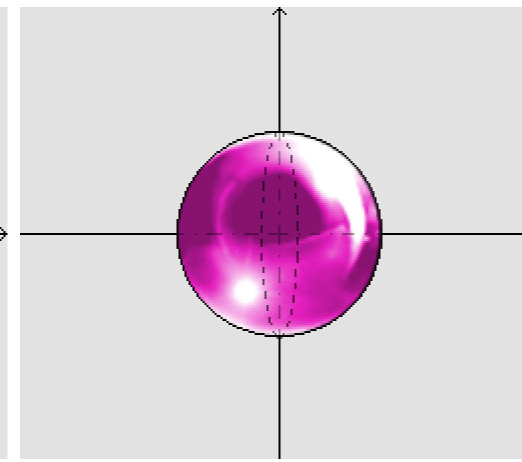
Logo, o volume do cilindro é dado por:

$$V = \int_0^h \pi r^2 \, dx = \pi r^2 x \Big|_0^h = \pi r^2 h$$

Sólidos de Revolução

Exemplo 3: Considere a região delimitada por $y=\sqrt{a^2-x^2}$, o **eixo x** e as retas **x = -a** e **x = a**, sendo girada ao redor do **eixo x**. O sólido originado é uma esfera de **raio a**. Mostre que seu volume é $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.





O volume da esfera gerada é:

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-x^2)\,dx=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\pi\left[a^3-\frac{a^3}{3}+a^3-\frac{a^3}{3}\right]=\frac{4}{3}\pi a^3$$

Volume de Sólidos

Volume de um sólido de revolução, obtido pela rotação em torno ao eixo x - ou y - de um conjunto A.

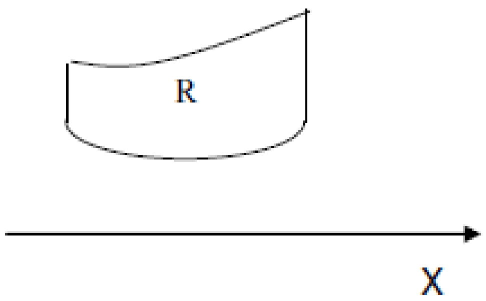
Sólidos de Revolução

Volume de Sólidos de Revolução – Método do Disco

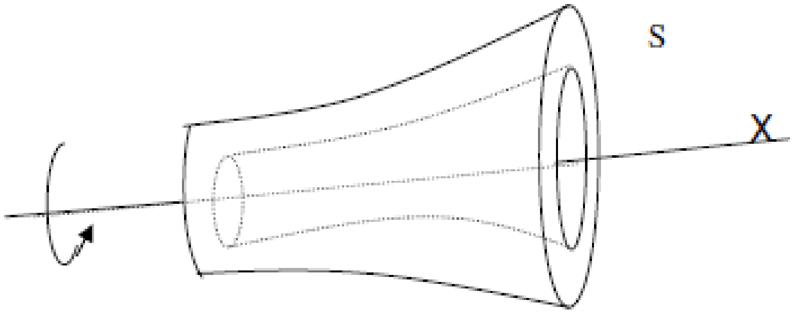
Um sólido de revolução se forma da seguinte maneira:

Dada uma região R plana e x uma linha reta que pode tocar ou não em R e que esteja no mesmo plano de R.

Girando-se R em torno de x, forma-se uma região chamada de sólido de revolução.



Área plana



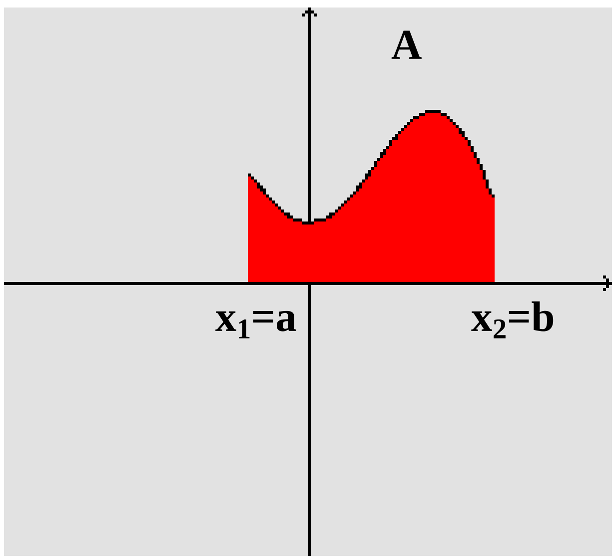
Sólido gerado pela Rotação.

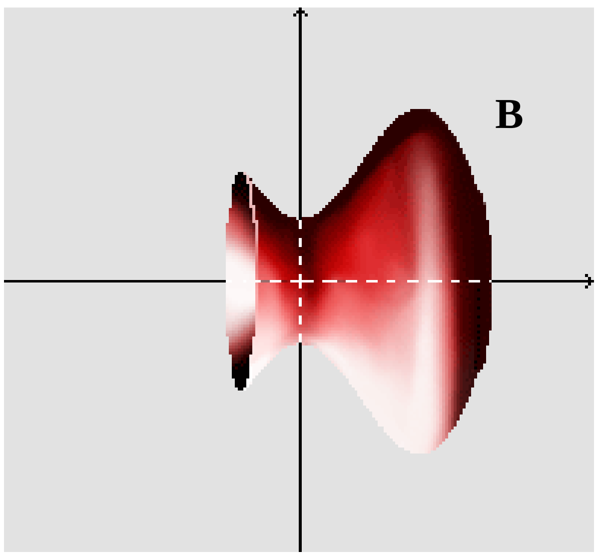
Sólidos de Revolução

Cálculo do volume

Seja f uma função contínua num intervalo **[a,b]**, sendo **f(x) ≥ 0** para todo **x**, tal que **a ≤ x ≤ b**. Considere o conjunto **A**, delimitado pelo eixo **x**, o gráfico de **f** e as retas $\mathbf{x_1 = a}$ e $\mathbf{x_2 = b}$.

Seja B o sólido obtido através da rotação do conjunto A em torno do eixo x:

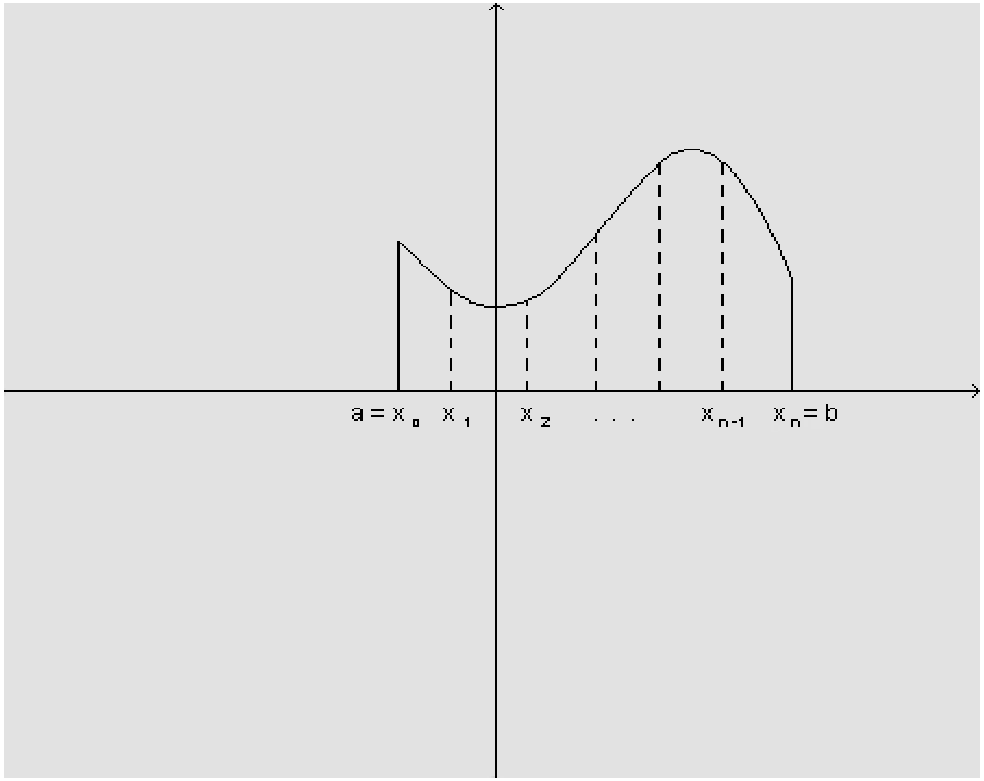




Sólidos de Revolução

Cálculo do volume

Considerando uma partição **P** do intervalo **[a,b]**: **P = {a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b}**, tal que **a = $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ = b**, seja:



Sólidos de Revolução

Cálculo do volume

- Seja ainda $\mathbf{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$ o comprimento do intervalo $\mathbf{[x_{i-1}, x_i]}$.

- Para cada intervalo $\mathbf{[x_{i-1}, x_i]}$, escolhemos um ponto qualquer c_i.

- Para cada **i, i = 1, ..., n**, construímos um retângulo $\mathbf{R_i}$, de base $\mathbf{\Delta x_i}$ e altura $\mathbf{f(c_i)}$.

- Fazendo cada retângulo $\mathbf{R_i}$ girar em torno do eixo dos **x**, o sólido de revolução obtido é um cilindro, cujo volume é dado por:

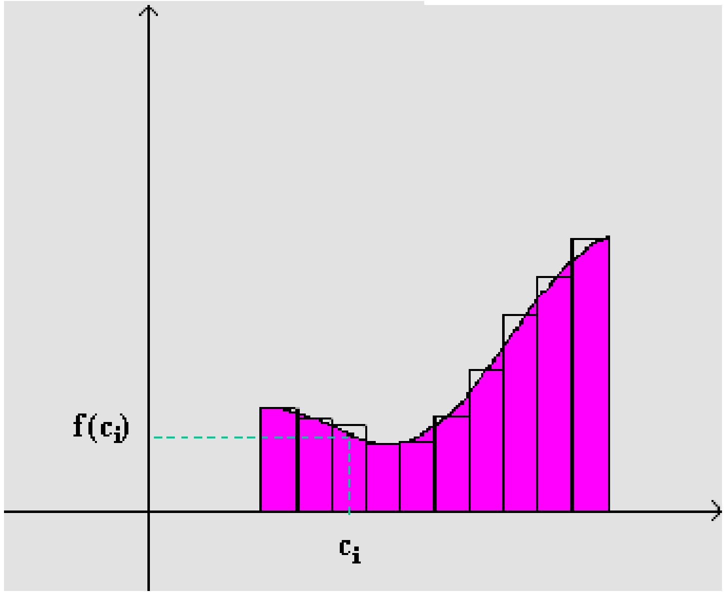
$$V = A_{base}.altura$$

$$V = \pi\left[f(c_i)\right]^2.\Delta x_i$$

Sólidos de Revolução

Cálculo do volume

A soma dos volumes dos **n** cilindros, que representaremos por $\mathbf{V_n}$, é dada por:



$$V_n = \pi[f(c_1)]^2\Delta x_1 + \pi[f(c_2)]^2\Delta x_2 + \ldots + [f(c_n)]^2\Delta x_n$$

$$V_n = \pi\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)]^2\Delta x_i$$

Sólidos de Revolução

Cálculo do volume

– A medida que **n** cresce muito e cada **Δx_i** torna-se muito pequeno, a soma dos volumes dos **n** cilindros aproxima-se do que intuitivamente entendemos como o volume do sólido **B**.

Definição

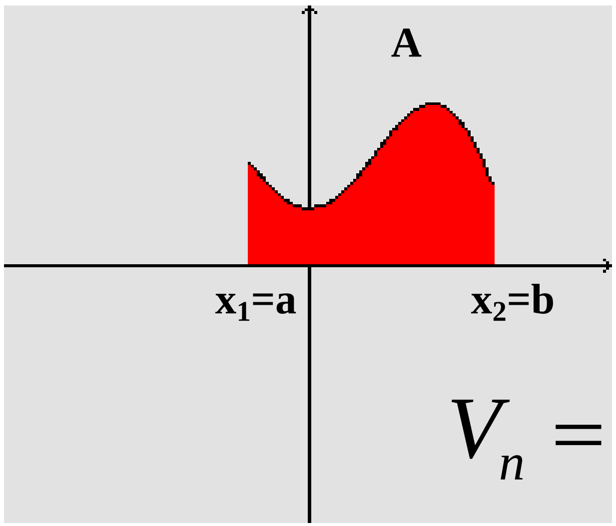
– Seja **y = f(x)** uma função contínua não negativa em **[a,b]**. Seja **R** a região sob o gráfico de **f** de **a** até **b**. O **volume** do sólido **B**, gerado pela revolução de **R** em torno do **eixo x**, é definido por:

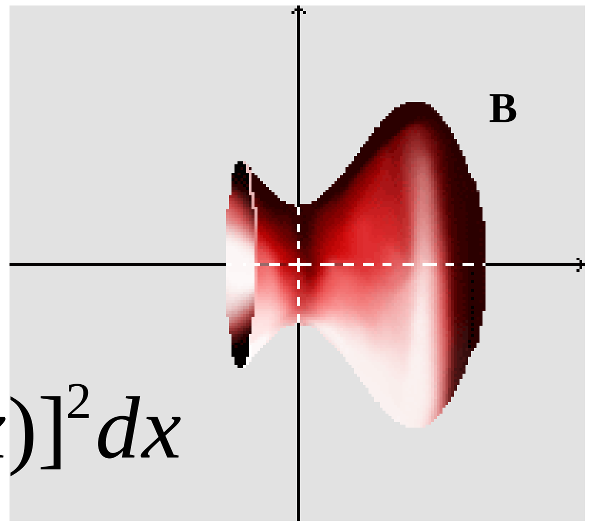
$$V_n = \lim_{máx \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

Sólidos de Revolução

Cálculo do volume

– A soma que aparece no slide anterior pode ser substituída pelo símbolo de integral, uma vez que a função é contínua no intervalo e o limite existe. Logo:



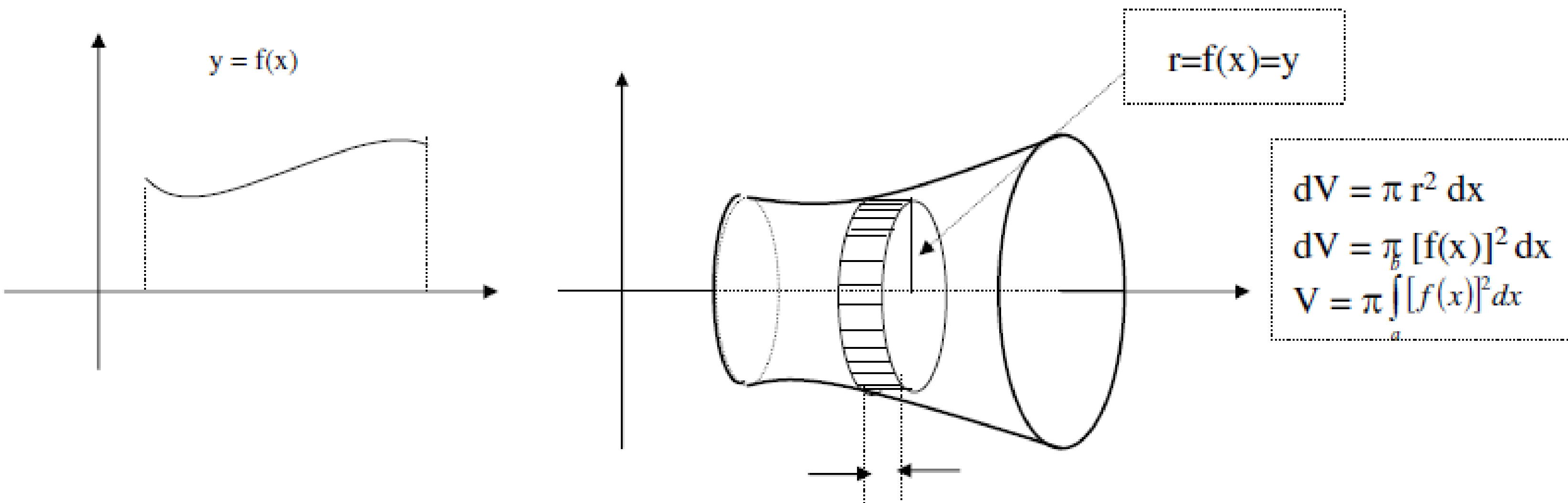


$$V_n = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

– Vamos analisar agora o volume de alguns sólidos em certas situações especiais.

Sólidos de Revolução

Girando o gráfico de uma função f(x) tem-se:



Cálculo do elemento de volume

Sólidos de Revolução

Ex1: Usando o método do disco circular, calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob a função $y = f(x) = x^3$, no intervalo [1,2].

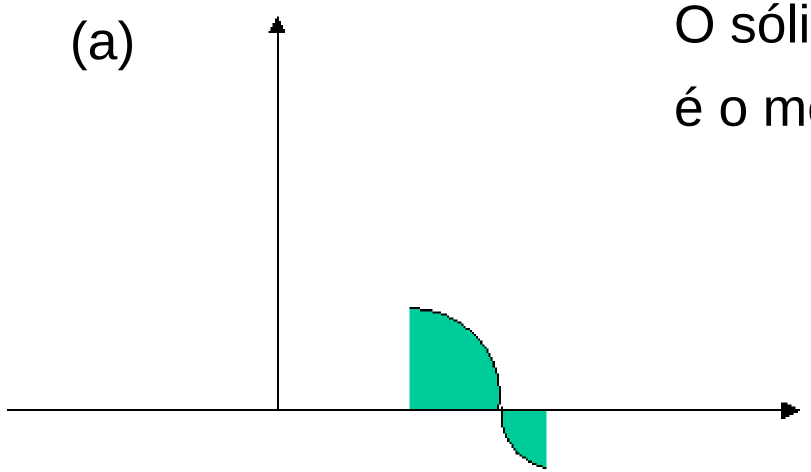
Sólidos de Revolução

Quando a função f(x) é negativa em alguns pontos de [a,b].

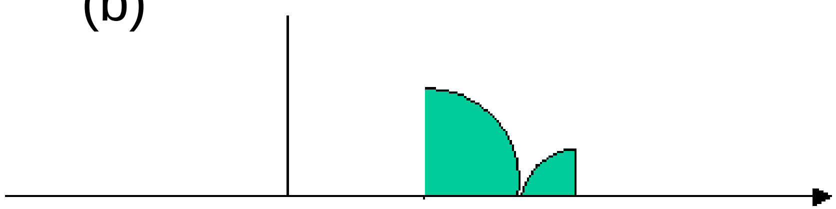
- A fórmula do volume permanece válida, pois $|f(x)| = (f(x))^2$.

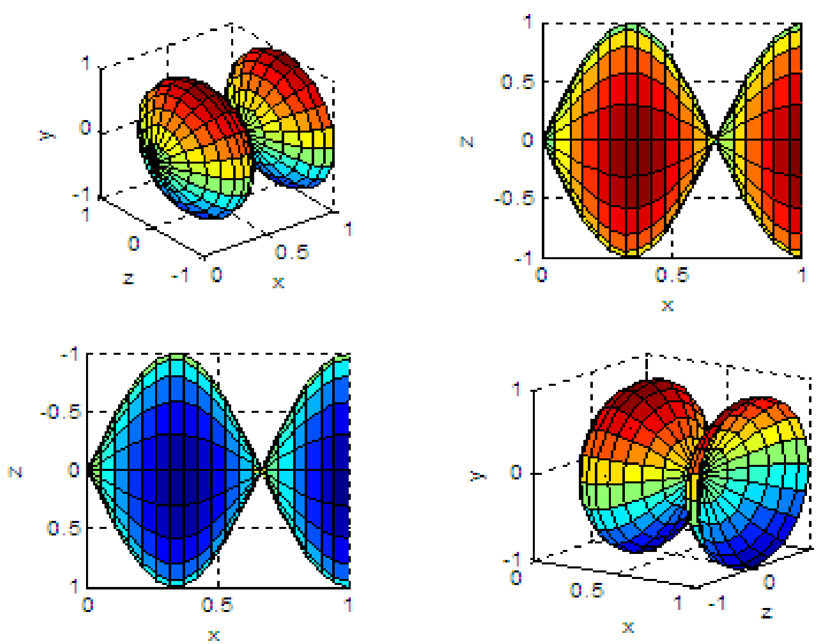
O sólido gerado pela rotação da **figura (a)** é o mesmo gerado pela rotação da **figura (b)**.

(a)



(b)

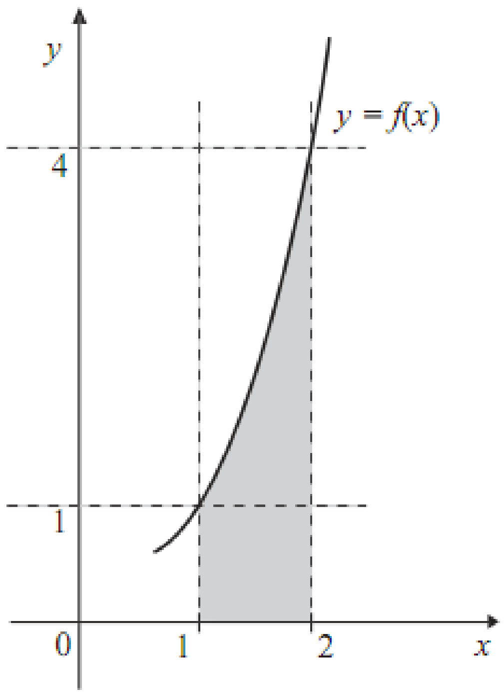




Sólidos de Revolução

Exercício 1: Se **f(x) = x²**, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do ***eixo x***, da região sob o gráfico de **f** no intervalo **[1, 2]**.

De acordo com a definição: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$



Temos:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(32 - 1\right)$$

$$= \frac{31}{5}\pi \text{ , unidades de volume } (u.v.).$$

Sólidos de Revolução

Exercício 2: Se $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$, determine o volume do sólido gerado ela revolução, em torno do ***eixo x***, da região sob o gráfico de $\boldsymbol{f}$ no intervalo **[-1, 1]**.

- De acordo com a definição: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [x^2 + 1]^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{1}$$

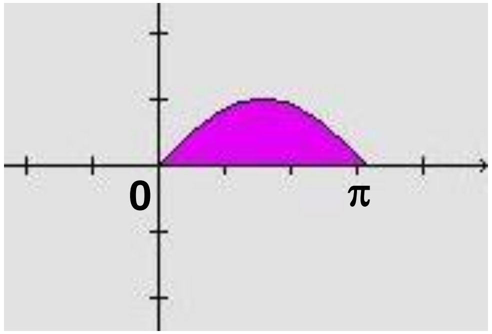
$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right] = \frac{56\pi}{15}$$

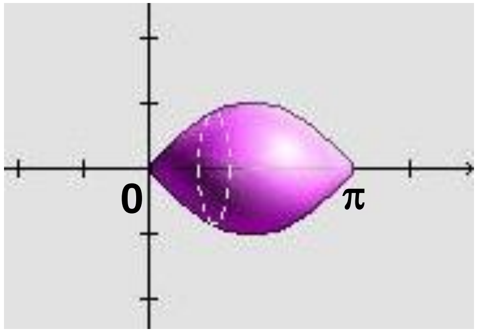
Sólidos de Revolução

Exercício 3: Seja $f(x) = sen\ x$, $x \in [a, b]$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de f, ou seja pela rotação da região delimitada pelo **eixo x**, o gráfico de f e as retas $x = 0$ e $x = \pi$.

O volume do sólido é dado por:

$$V = \pi \int_0^{\pi} sen^2 x\, dx$$





$$\int sen^2 x = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4} + C$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} sen^2 x\, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{sen 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{0}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Integral Indefinida

Revisão

INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS QUADRÁTICAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SEN(X) E COS(X)

Sejam as **identidades trigonométricas**:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\boxed{\int \cos 2x\,dx}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^{0+1}}{0+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]$$

$$\int \cos 2x\,dx$$

$$u = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = dx$$

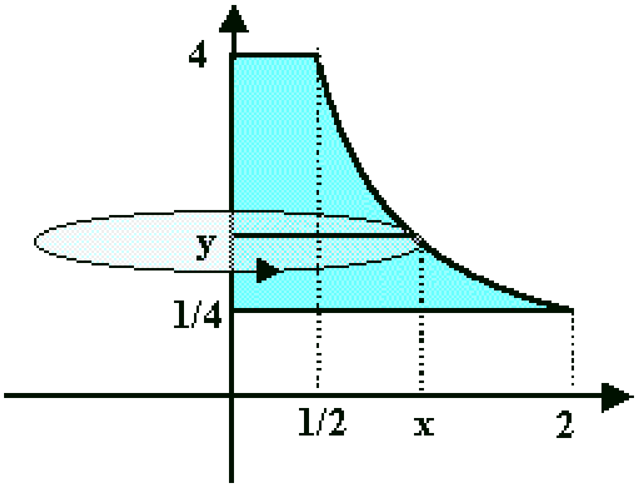
$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Sólidos de Revolução

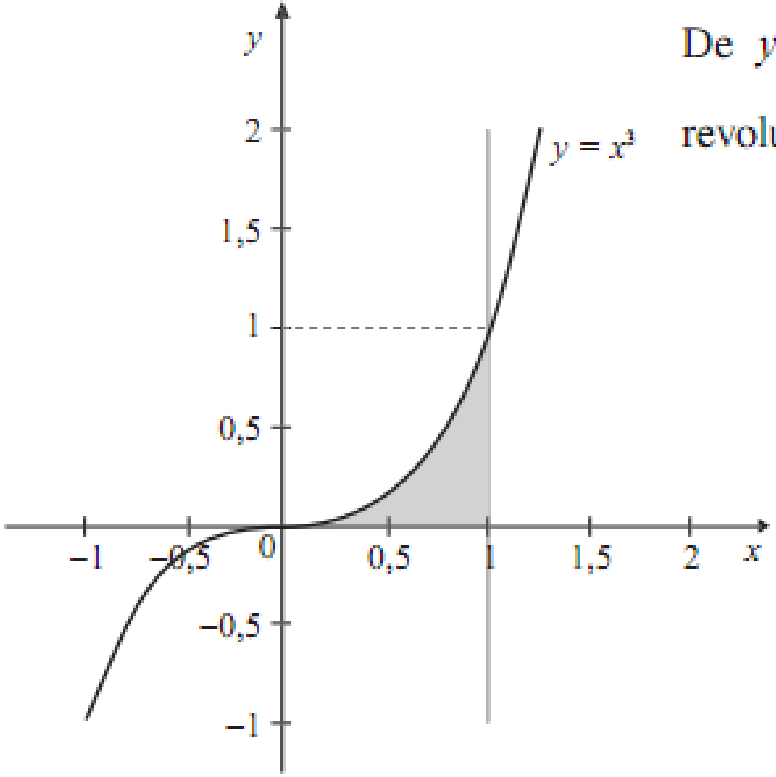
Quando, ao invés de girar ao redor do eixo dos x, a região A gira em torno do eixo dos y.



- Neste caso, temos: $V = \pi \int_{c}^{d} [g(y)]^2 \, dy$

Sólidos de Revolução

Exercício 4: Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno do ***eixo y***.



De $y = x^3$ temos $x = y^{1/3}$. Logo, o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo y é dado por

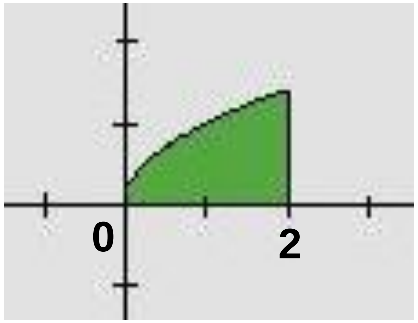
$$V = \pi\int_c^d \left(g\left(y\right)\right)^2 dy = \pi\int_0^1 y^{2/3}dy$$

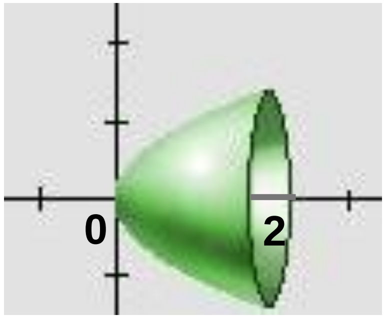
$$= \frac{3\pi}{5}\, y^{5/3}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5}\ u.v.$$

Sólidos de Revolução

Exercício 5: Considere a região do plano delimitada pelo ***eixo x***, o gráfico de $y = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 2$, sendo girada primeiro ao redor do ***eixo x*** e depois ao redor do ***eixo y***. Calcule o volume dos dois sólidos gerados.

a) A região do plano delimitada pelo eixo x, o gráfico de $y = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 2$ é girada **ao redor do eixo x**:





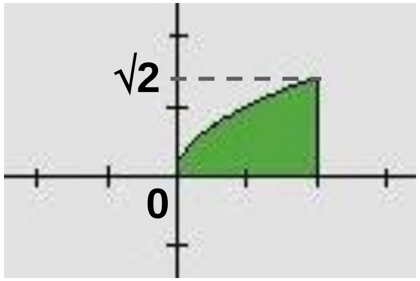
O volume do sólido é dado por:

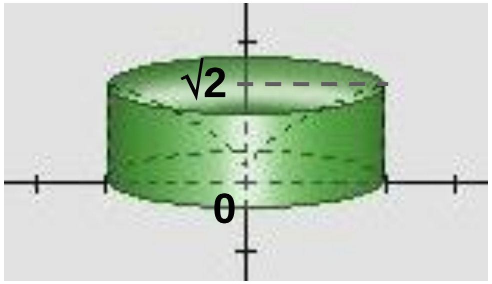
$$V = \int_0^2 \pi x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2\pi$$

Sólidos de Revolução

Exercício 5:

b) A região do plano delimitada pelo eixo x, o gráfico de $y = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 2$ é girada **ao redor do eixo y**:



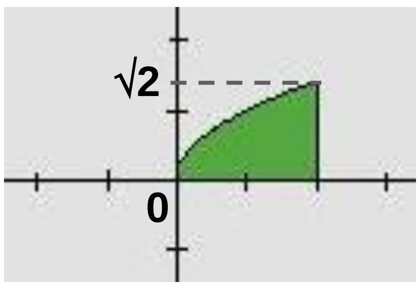


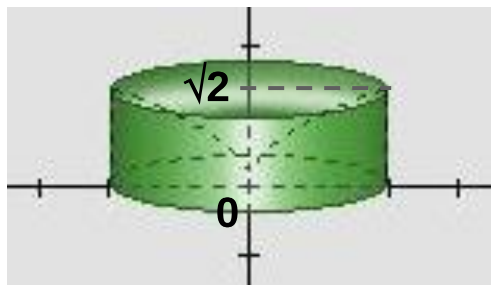
O volume do sólido é dado por: $\int_0^{\sqrt{2}} \left(y^2\right)^2 dy = \int_0^{\sqrt{2}} y^4 dy$

Sólidos de Revolução

Exercício 5:

b) A região do plano delimitada pelo eixo x, o gráfico de $y = \sqrt{x}$, para $0 \le x \le 2$ é girada **ao redor do eixo y**:



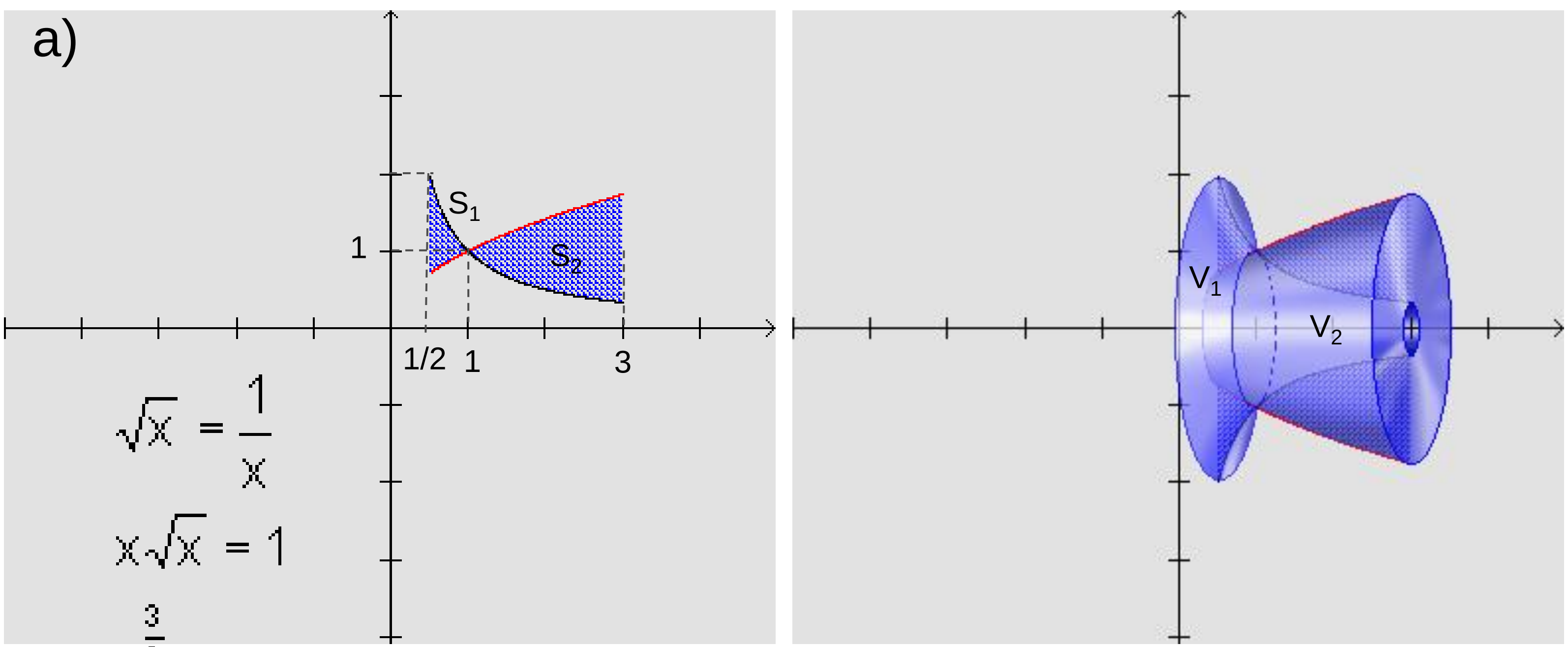


O volume do sólido é dado por:

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi(4 - y^4)\,dy = \pi\left[4y - \frac{y^5}{5}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \pi\,\frac{16\sqrt{2}}{5}$$

Sólidos de Revolução

Exemplo 6: Calcule o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do **eixo x** da região compreendida pelo gráfico de **y = √x** e **y = 1/x**, no intervalo **[1/2, 3]**.



$$\sqrt{x} = \frac{1}{x}$$

$$x\sqrt{x} = 1$$

$$x^{\frac{3}{2}} = 1$$

$$x = 1$$

Sólidos de Revolução

Exemplo 6:

Logo, o volume do sólido é: $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right] = \pi\left(-1+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = \pi\frac{5}{8}$$

$$V_2 = \int_{1}^{3} \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \int_{1}^{3} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\left[\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{x}\right)\right]\Big|_{1}^{3} = \pi\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right) = \pi\left(3+\frac{1}{3}\right) = \pi\frac{10}{3}$$

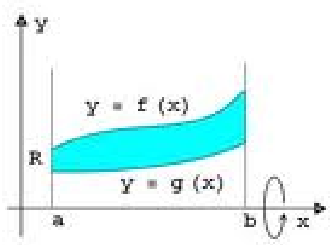
Efetuando os últimos cálculos, temos:

$$V = \pi\left(\frac{10}{3}+\frac{5}{8}\right) = \pi\,\frac{80+15}{24} = \frac{95}{24}\pi$$

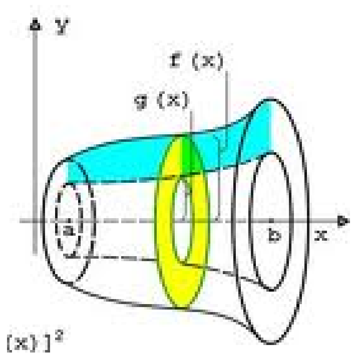
Sólidos de Revolução

Quando a região A está entre os gráficos de duas funções f(x) e g(x) de a até b:

Supondo **f(x)** $\geq$ **g(x)**, para qualquer **x** que pertença ao intervalo **[a, b]**, o volume do sólido **B**, gerado pela rotação de **R** em torno do **eixo x**, é dado por:

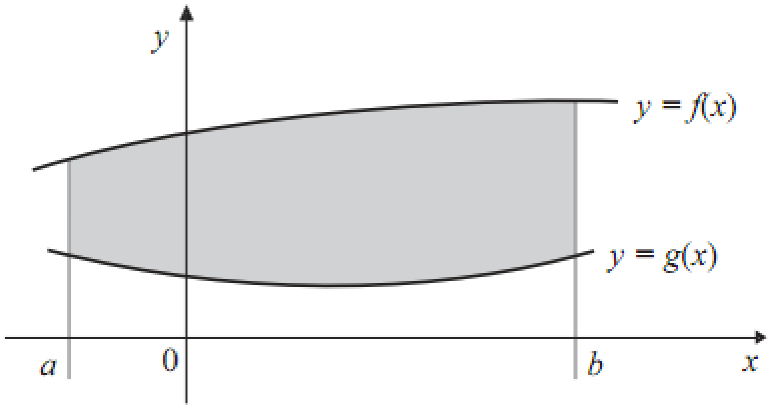


$$A(x) = \pi\left[f(x)\right]^2 - \pi\left[g(x)\right]^2$$

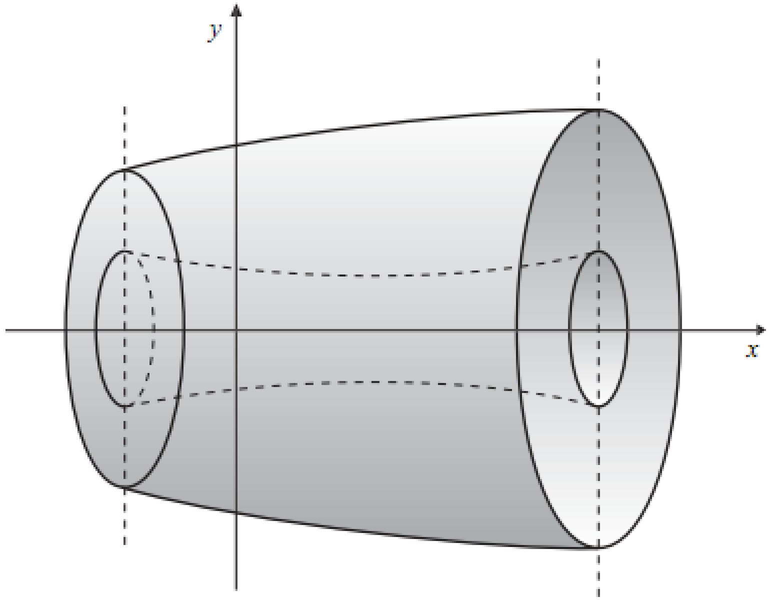


$$V(x) = \pi\int_a^b \left\{\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right\}dx$$

Volume de Sólidos



$$A(x) = \pi\left[f(x)\right]^2 - \pi\left[g(x)\right]^2$$



$$V(x) = \pi\int_a^b \left\{\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right\}dx$$

Sólidos de Revolução

O elemento de volume do anel é dado por:

$dV = \pi\ [f(x)]^2dx - \pi\ [g(x)]^2dx = \pi\ \{\ [f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\ dx$

de forma que o volume todo é dado por:

$$V = \int_a^b dV = \pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}dx$$

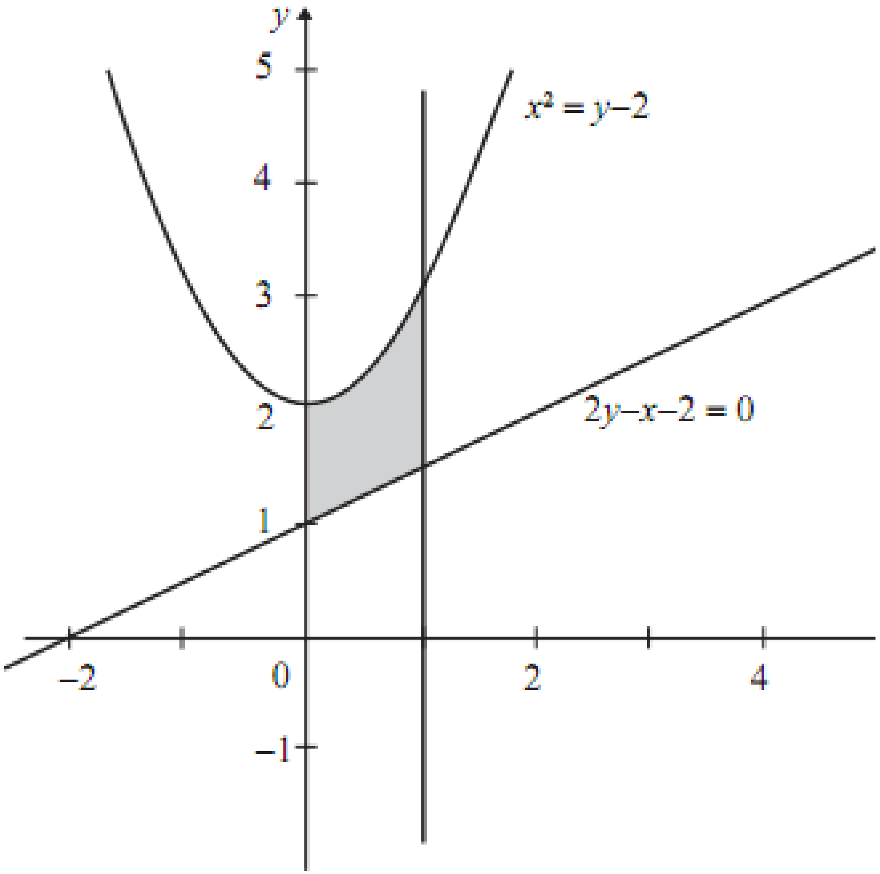
Note que o vão interno é descontado pela subtração dos dois volumes.

Sólidos de Revolução

Ex1: Calcular, usando o método dos anéis circulares, o volume formado pela rotação da região entre $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Sólidos de Revolução

Exercício 6: Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$ e $x = 0$ em torno do eixo x.



Sólidos de Revolução

Exercício 7: Calcular o **volume** do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos **x**, da região limitada pela parábola $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2}(x+5)$

De acordo com a definição: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx$

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \{[\frac{1}{4}(13 - x^2)]^2 - [\frac{1}{2}(x+5)]^2\}\, dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \{[(\frac{169}{16} - \frac{26x^2}{16} + \frac{x^4}{16})] - [\frac{x^2}{4} + \frac{10x}{4} + \frac{25}{4}]\}\, dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \{[\frac{169 - 26x^2 + x^4 - 4x^2 - 40x - 100}{16}]\}\, dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^{1} [\frac{x^4 - 30x^2 - 40x + 69}{16}]\, dx$$

Sólidos de Revolução

Exercício 7:

$$V=\frac{\pi}{16}\int_{-3}^{1}(x^4-30x^2-40x+69)\,dx$$

$$V=\frac{\pi}{16}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{30x^3}{3}-\frac{40x^2}{2}+69x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=F(1)-F(-3)$$

$$V=\frac{\pi}{16}\left(\frac{x^5}{5}-10x^3-20x^2+69x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$V=\frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{5}-10-20+69\right)-\left(\frac{(-3)^5}{5}-10(-3)^3-20(-3)^2+69(-3)\right)$$

$$V=\frac{\pi}{16}\left[\left(\frac{1}{5}-30+69\right)-\left(\frac{-243}{5}+270-180-207\right)\right]$$

$$V=\frac{\pi}{16}\left[\left(\frac{1}{5}+39+\frac{243}{5}+117\right)\right]$$

Sólidos de Revolução

Exercício 7: $$V = \frac{\pi}{16}\left(\frac{244}{5} + 156\right)$$

$$V = \frac{\pi}{16}\left(\frac{244 + 780}{5}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{16}\left(\frac{1024}{5}\right) = \frac{1024\pi}{80}$$

Sólidos de Revolução

Se a revolução for em torno do eixo y, como por exemplo para as funções $x = F(y)$ e $x = G(y)$, tem-se:

Ex2: Dados os gráficos $y = x^3$ e $x = 2$, determine o volume da região, para o caso da área plana girar em y.

Sólidos de Revolução

Exercício 8: A região limitada pela parábola cúbica $\boldsymbol{y = x^3}$, pelo eixo dos $\boldsymbol{y}$ e pela reta $\boldsymbol{y = 8}$, gira em torno do eixo dos $\boldsymbol{y}$. Determinar o **volume** do sólido de revolução obtido. De acordo com a definição:

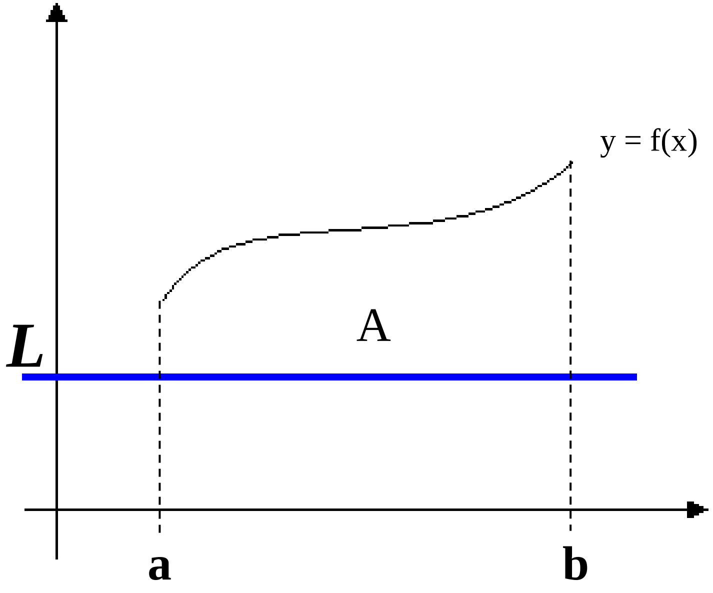
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 .dy \qquad V = \pi . \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = F(8) - F(0)$$

$$V = \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 .dy \qquad V = \frac{3\pi}{5} .(8)^{\frac{5}{3}} - 0 = \frac{3\pi \sqrt[3]{8^5}}{5} =$$

$$V = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} .dy \qquad = \frac{3\pi \sqrt[3]{(2^5)^3}}{5} = \frac{3\pi .32}{5} = \frac{96\pi}{5}$$

Sólidos de Revolução

Quando a rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados.

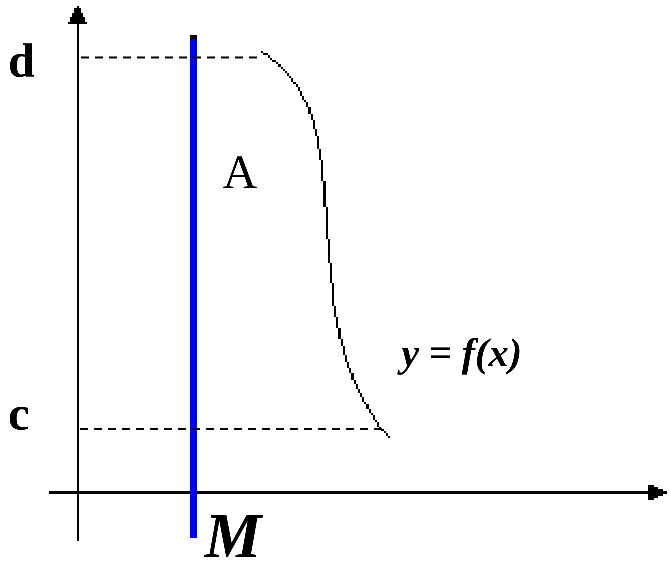


Se o eixo de revolução for a reta $\boldsymbol{y = L}$, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 \, dx$$

Sólidos de Revolução

Quando a rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados.



Se o eixo de revolução

for a reta $\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{M}$, temos:

$$V = \pi \int_{c}^{d} [g(y) - M]^2 \, dy$$