Derivada da soma, produto e quociente

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 12 13/12/2021

Derivada da soma e da diferença de funções.

Se $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 5$ então $f'(x) = 12x^2 + 6x - 1$.

$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1 + 0 = 1$

$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$

$f(x) = \text{sen}\, x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \text{sen}\, x$

$f(x) = x^2 - e^x \Rightarrow f'(x) = 2x - e^x$

Derivada da soma e da diferença de funções.

. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 8x^{11}$

b) $f(x) = -\frac{7}{5}x^3 - \frac{\sqrt{3}}{7}$

c) $f(x) = 5 + x + 3x^2$

d) $f(x) = 3 + 5x^2 + x^4$

e) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$

f) $f(x) = 3 + 2x^n + x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$

As Regras de Produto e Quociente

- As fórmulas desta seção nos permitem derivar novas funções formadas a partir de funções conhecidas por multiplicação ou divisão.
- A derivada do produto, não é igual ao produto das derivadas.
- A derivada do quociente de duas funções não é igual ao quociente de sua derivadas.

A Regra do Produto Se f e g são ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Na notação "linha":

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Derivada do Produto de funções.

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x, então $f.g$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ são função deriváveis, então a função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ tem derivada dada por $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

$$h'(x) = g(x).f'(x) + f(x).g'(x).$$

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Derivada do Produto de funções.

1º) $f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$

2º) $f(x) = 3x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = 6x + 5$

3º) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 2x) + (x^2 + 1)(3x^2 + 2) =$
$= 5x^4 + 9x^2 + 2$

4º) $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) =$
$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Se $f(x) = (x^3 - x)(2 - x)$

Derivada do Produto de funções.

Notemos que a propriedade da derivada do produto pode ser estendida para um produto de *n* fatores. Assim:

$$f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) \Rightarrow f'(x) = u'_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u'_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + \ldots + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u'_n(x)$$

sempre que $x \in \mathbf{I}$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sejam deriváveis em **I**.

Em particular, se $u_1(x) = u_2(x) = \ldots = u_n(x) = u(x)$, esta propriedade se reduz a:

$$f(x) = [(u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

Derivada do Produto de funções.

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

(b) Encontre a n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUÇÃO

(a) Pela Regra do Produto, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

5

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$

Derivada do Produto de funções.

(b) Usando a Regra do Produto uma segunda vez, obtemos

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x]$$

$$= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x$$

Aplicações subsequentes da Regra do Produto nos dão

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

Na realidade, cada derivação sucessiva adiciona outro termo e^x, logo

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

Derivada do Produto de funções.

$$f'(x) = u'(x).v(x).w(x) + v'(x).u(x).w(x) + w'(x).u(x).v(x)$$

e assim sucessivamente.

$$1^{\underline{o}})\ f(x) = \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{2x}_{u'_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} +$$

$$+ \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} + \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u'_3}$$

$$2^{\underline{o}})\ f(x) = \text{sen}^4 x = \underbrace{(\text{sen } x)^4}_{u} \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \underbrace{\text{sen}^3 x}_{u^3} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}$$

$$3^{\underline{o}})\ f(x) = e^{5x} = \underbrace{(e^x)^5}_{u} \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \underbrace{e^{4x}}_{u^4} \cdot \underbrace{e^x}_{u'}$$

Derivada do Produto de funções.

Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x + 4x^3$

b) $g(x) = (x^2 + x + 1)^5$

c) $h(x) = (e^x \cdot \cos x - x^2)^4$

Solução

a) *f* deve ser vista como soma de duas parcelas $\left(e^x \cdot \operatorname{sen} x \text{ e } 4x^3\right)$; portanto f' é a soma das derivadas das parcelas, sendo que a primeira parcela é um produto.

Então:

$$f'(x) = Df(x) = D(e^x \cdot \operatorname{sen} x) + D\left(4x^3\right) =$$
$$= e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x + 12x^2$$

b) Fazendo $x^2 + x + 1 = u(x)$, vem $g(x) = [u(x)]^5$, então:

$$g'(x) = 5 \cdot [u(x)]^4 \cdot u'(x) = 5\left(x^2 + x + 1\right)^4 (2x + 1)$$

c) Fazendo $e^x \cdot \cos x - x^2 = u(x)$, vem $h(x) = [u(x)]^4$, então:

$$h'(x) = 4 \cdot [u(x)]^3 \cdot u'(x) = 4 \cdot \left(e^x \cdot \cos x - x^2\right)^3 \cdot (e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \operatorname{sen} x - 2x)$$

Derivada de um quociente de funções.

A Regra do Quociente Se f e g são deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Na notação "linha":

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Derivada de um quociente de funções.

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ são função deriváveis, então a função $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem derivada dada por

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

Derivada de um quociente de funções.

A Regra do Quociente e as outras fórmulas de derivação nos permitem calcular a derivada de qualquer função racional, como ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Então

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

Derivada de um quociente de funções.

Se $f(x)=\dfrac{5x^2-8}{2x}$ então $f'(x)=\dfrac{(10x)\cdot(2x)-\left(5x^2-8\right)\cdot(2)}{4x^2}=\ldots=\dfrac{5x^2+8}{2x^2}$.

Se $f\left(x\right)=\frac{x^2+2}{3x-1}$. Determine $f'\left(x\right)$.

Solução: Pela regra do quociente, temos que:

$$f'\left(x\right)=\frac{(3x-1).\left(x^2+2\right)'-\left(x^2+2\right)(3x-1)'}{\left(3x-1\right)^2}=\frac{(3x-1).2x-\left(x^2+2\right)3'}{\left(3x-1\right)^2}=\frac{3x^2-2x-6}{\left(3x-1\right)^2}.$$

Derivada de um quociente de funções.

Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Então

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

Derivada de um quociente de funções.

1º) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{e^x\,(x^2 - 2x)}{x^4}$

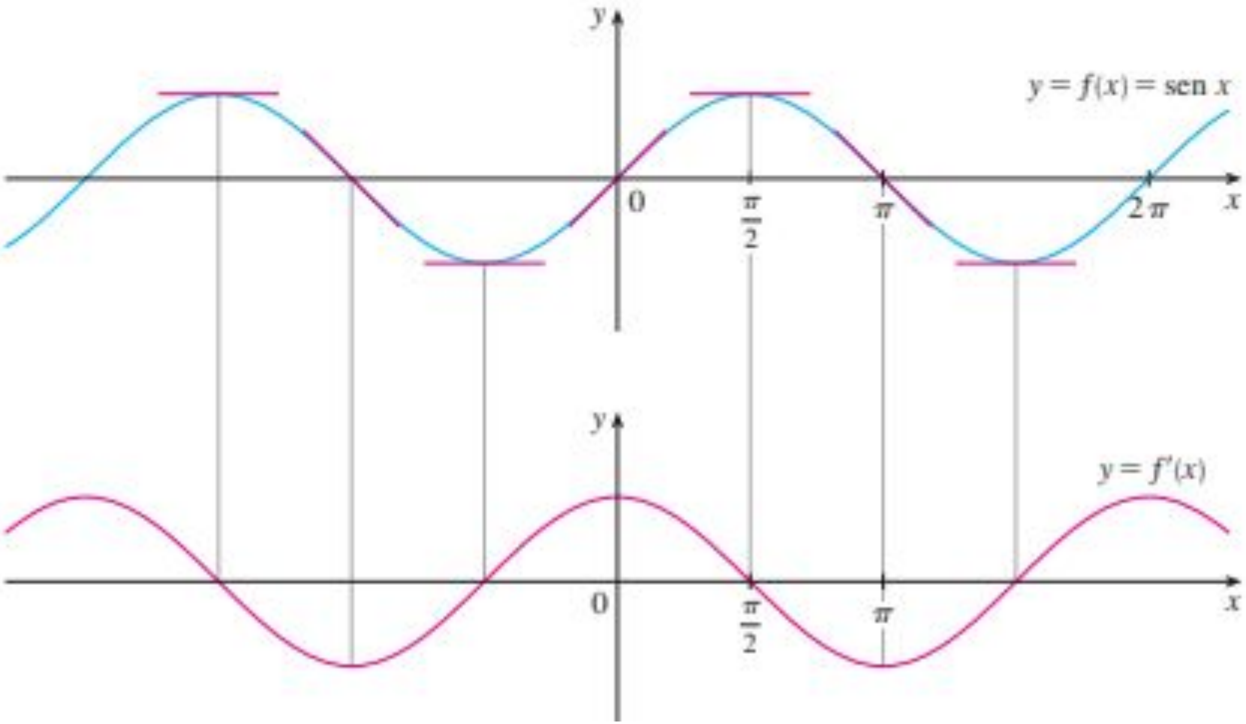
2º) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x)(x + 1) - (x^2 + 1)(1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$

3º) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{a^x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot a^x - \operatorname{sen} x \cdot a^x \cdot \log_e a}{(a^x)^2} =$

$= \dfrac{(\cos x - \operatorname{sen} x \cdot \log_e a)}{a^x}$

Derivadas Trigonométricas

$$f(x) = \text{sen}\, x$$



$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \cos x$$

Derivadas Trigonométricas

Proposição

a) $y = sen(x) \Rightarrow y' = cos(x)$.

b) $y = cos(x) \Rightarrow y' = -sen(x)$.

c) $y = tg(x) \Rightarrow y' = sec^2(x)$.

d) $y = cot\,g(x) \Rightarrow y' = -cos\,ec^2(x)$.

e) $y = sec(x) \Rightarrow y' = sec(x)tg(x)$.

f) $y = cos\,ec(x) \Rightarrow y' = -cos\,ec(x)cot\,g(x)$.

$$y'\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Lembrete

a) $y = tg(x) \rightarrow \dfrac{senx}{cosx}$

b) $y = cotg(x) = \dfrac{cosx}{senx}$

c) $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

d) $y = \cos\sec x = \dfrac{1}{sen\,x}$

Obs. $sen^2x + cos^2x = 1$

Derivadas Trigonométricas

- *Se* $y = tg(x)$ *e sua derivada é* $y' = sec^2(x)$, *Justifique através do cálculo*

- *Se* $y = \text{cotg}(x)$ *e sua derivada é* $y' = -\cos \sec^2(x)$, *Justifique através do cálculo.*

Se $y = \sec(x)$ *e sua derivada é* $y' = \sec(x)\,\text{tg}(x)$, *Justifique através do cálculo.*

- *Se* $y = \cos \sec(x)$ *e sua derivada é* $y' = -\cos \sec(x) \,.\, \text{cotg}(x)$, *Justifique através do cálculo.*

Derivada de um quociente de funções- Consequências

1ª) Derivada da função tangente

Dada a função $f(x) = tg\ x$, sabemos que $f(x) = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$ e então podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$u(x) = sen\ x \Rightarrow u'(x) = cos\ x$

$v(x) = cos\ x \Rightarrow v'(x) = -sen\ x$

portanto,

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{cos^2\ x + sen^2\ x}{cos^2\ x} = \frac{1}{cos^2\ x} = sec^2\ x$$

Logo:

$$\boxed{f(x) = tg\ x \Rightarrow f'(x) = sec^2\ x}$$

Derivada de um quociente de funções- Consequências

2ª) Derivada da função $f(x) = [u(x)]^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Dada a função $f(x) = [u(x)]^{-n} = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$, podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot [u(x)]^n - 1 \cdot n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)}{[u(x)]^{2n}} = \frac{-n \cdot u'(x)}{[u(x)]^{n+1}} =$$

$$= -n \cdot [u(x)]^{-(n+1)} \cdot u'(x)$$

Em particular, se $u(x) = x$, vem a importante regra:

$$\boxed{f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{-(n+1)}}$$

Derivada de um quociente de funções- Consequências

. Derive as seguintes funções:

$$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{2}{x^4},\ h(x) = \frac{1}{\text{sen } x},\ i(x) = \frac{7}{e^{2x}}$$

Solução

$$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = 2 \cdot x^{-4} \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$$

$$h(x) = (\text{sen } x)^{-1} \Rightarrow h'(x) = (-1) \cdot (\text{sen } x)^{-2} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

$$i(x) = 7 \cdot (e^x)^{-2} \Rightarrow i'(x) = 7 \cdot (-2) \cdot (e^x)^{-3} \cdot e^x = -\frac{14}{e^{2x}}$$

Proposição:

a) $y = sen(x) \quad \Rightarrow \quad y' = cos(x).$

b) $y = cos(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -sen(x).$

c) $y = tg(x) \quad \Rightarrow \quad y' = sec^2(x).$

d) $y = cot\,g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -cos\,ec^2(x).$

e) $y = sec(x) \quad \Rightarrow \quad y' = sec(x)tg(x).$

f) $y = cos\,ec(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -cos\,ec(x)cot\,g(x).$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$