Continuidade de funções

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 22/11/2021

Noção de continuidade

Definições

Seja *f* uma função definida em um intervalo aberto I e *a* um elemento de I. Dizemos que *f* é contínua em *a*, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notemos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função.

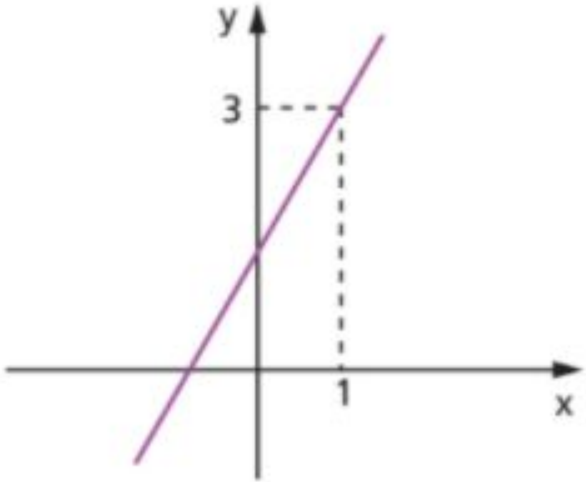
Da definição decorre que, se *f* é contínua em *a*, então as três condições deverão estar satisfeitas:

1º) existe $f(a)$

2º) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

3º) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

1º) A função $f(x) = 2x + 1$ definida em $\mathbb{R}$ é contínua em 1, pois $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f(1)$.



Notemos que *f* é contínua em $\mathbb{R}$, pois para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$

Noção de continuidade

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é descontínua em a se f não for contínua em a.

Observemos também que para falarmos em descontinuidade de uma função em um ponto é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função.

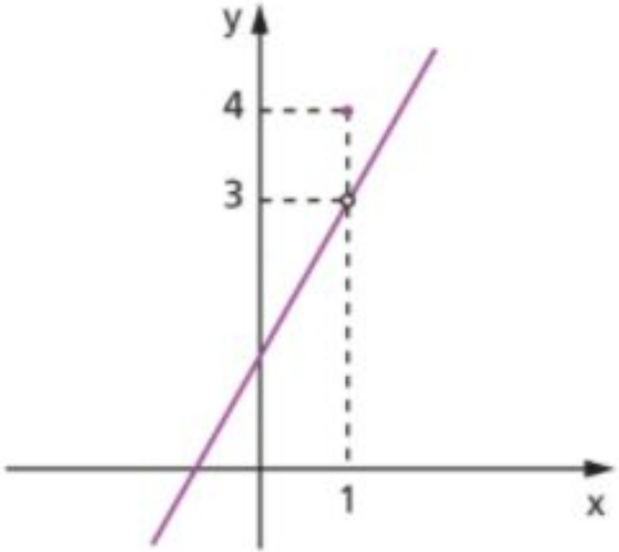
Da definição decorre que, se f é descontínua em a, então as duas condições abaixo deverão estar satisfeitas:

1ª) existe $f(a)$

2ª) não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

2º) A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



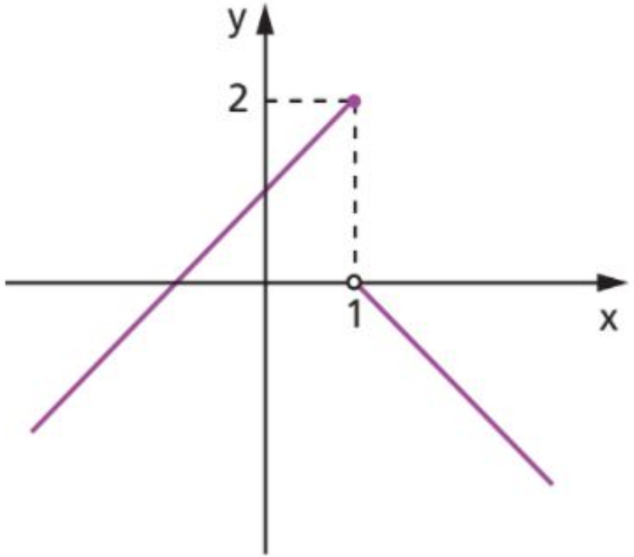
definida em $\mathbb{R}$ é descontínua em 1, pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 \neq 4 = f(1)$.

Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$

3º) A função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



definida em $\mathbb{R}$ é descontínua em 1, pois

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

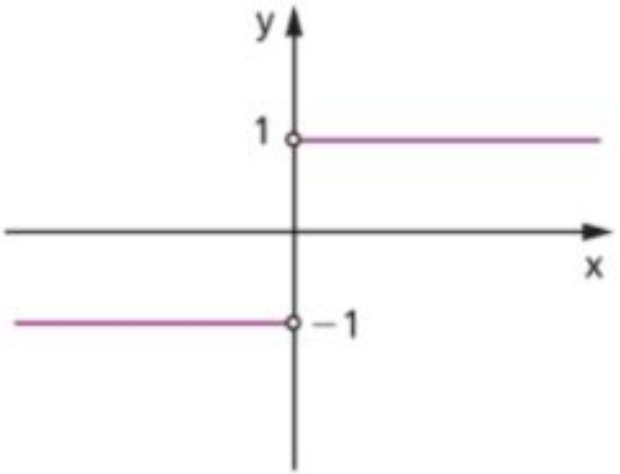
e $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1 - x) = 0$

portanto, não existe $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$.

Observemos que *f* é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

- se $a > 1$, então $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (1 - x) = 1 - a = f(a)$
- se $a < 1$, então $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$

4º) Na função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definida em $\mathbb{R}^*$ não podemos afirmar que *f* é descontínua em $x = 0$, pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função.

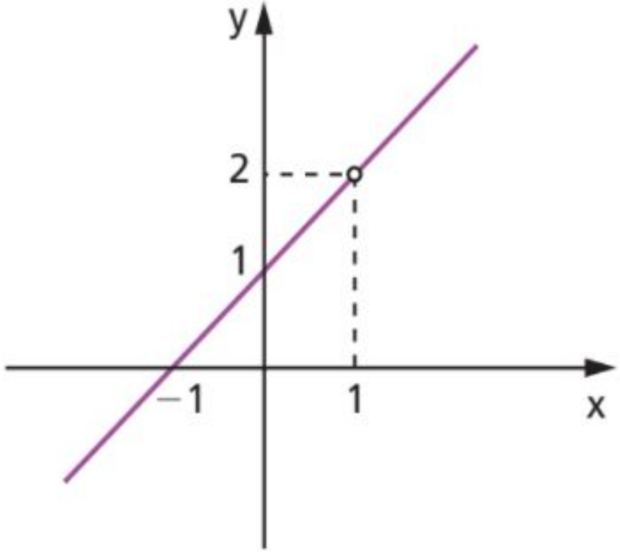


$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^*$ pois, para todo $a \in \mathbb{R}^*$, temos:

- se $a > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} 1 = 1 = f(a)$
- se $a < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (-1) = -1 = f(a)$

5º) Na função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$ não podemos afirmar que *f* é descontínua em $x = 1$, pois $x = 1$ não pertence ao domínio da função.



Notemos que *f* é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$$

Verifique se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

é contínua em $x = 2$.

Solução

Devemos verificar se $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

a) $f(2) = 7 - 2 \cdot 2 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (7 - 2x) = 3$

então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$

logo *f* é contínua em $x = 2$.

Noção de continuidade

Dizemos que uma função *f* é contínua em um intervalo aberto]a, b[se *f* for contínua em qualquer elemento *x* desse intervalo.

Seja *a* um ponto do domínio da função *f*.

Dizemos que *f* é contínua à direita de *a* se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e dizemos que *f* é contínua à esquerda de *a* se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Noção de continuidade

Dizemos que uma função *f* é contínua em um intervalo fechado [a, b] se *f* for contínua no intervalo aberto]a, b[e se também for contínua à direita de *a* e à esquerda de *b*.

Uma função $f(x)$ é dita *contínua em um intervalo fechado* $[a, b]$, se as seguintes condições forem satisfeitas:

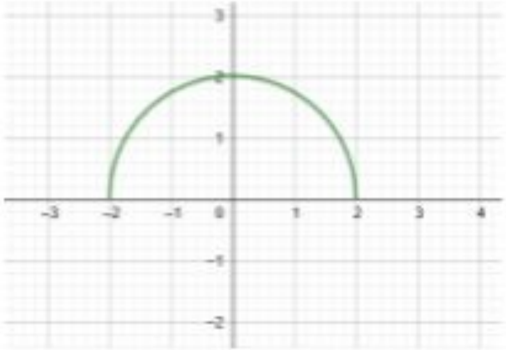
(i) f é contínua em (a, b);

(ii) f é contínua à direita em a;

(iii) f é contínua à esquerda em b.

Noção de continuidade

Verificar se $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em $[-2, 2]$.



Sabemos que o domínio de f é $Df = [-2, 2]$.

(i) Para qualquer $c \in (-2, 2)$, temos que $f(c) = \sqrt{4 - x^2} = \lim\limits_{x \to c} f(x)$. Logo, f é contínua em (a, b).

(ii) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 0 = f(-2)$. Então, f é contínua à direita em a.

(iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 0 = f(2)$. Então, f é contínua à esquerda em a.

<u>Conclusão:</u> $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

Propriedades das funções contínuas

Se f e g são funções contínuas em a, então são contínuas em a as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$, nesse último caso, desde que $g(a) \neq 0$.

Demonstraremos como modelo a continuidade de $f + g$.

Como f e g são contínuas em a, pela definição temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Para provarmos que $f + g$ é contínua em a, devemos provar a igualdade:

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = (f + g)(a)$$

De fato:

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) =$$
$$= (f + g)(a).$$

Propriedades das funções contínuas

Exemplos:

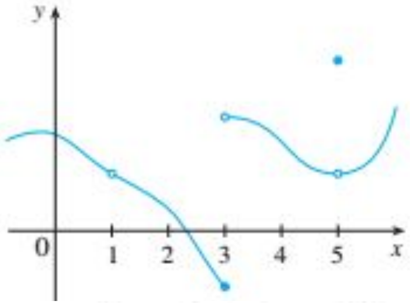
1º) A função $h(x) = x^2 + 2^x$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $h(x) = f(x) + g(x)$.

2º) A função $h(x) = x \cdot \text{sen } x$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen } x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3º) A função $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ são contínuas em $\mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $g(x) \neq 0$ para todo x real.

Continuidade de Funcões

EXEMPLO 1 A Figura 2 mostra o gráfico da função f. Em quais números f é descontínua? Por quê?



SOLUÇÃO Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$, pois aí o gráfico tem um buraco. A razão oficial para f ser descontínua em 1 é que $f(1)$ não está definida.

O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente. Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe (pois o limites esquerdo e direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

E $a = 5$? Aqui, $f(5)$ está definida e $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais). Mas

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Logo, f é descontínua em 5.

Continuidade de Funções

EXEMPLO 2 Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUÇÃO

(a) Observe que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2.

) Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

não existe.

Continuidade de Funções

(c) Aqui $f(2) = 1$ está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

existe. Mas

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

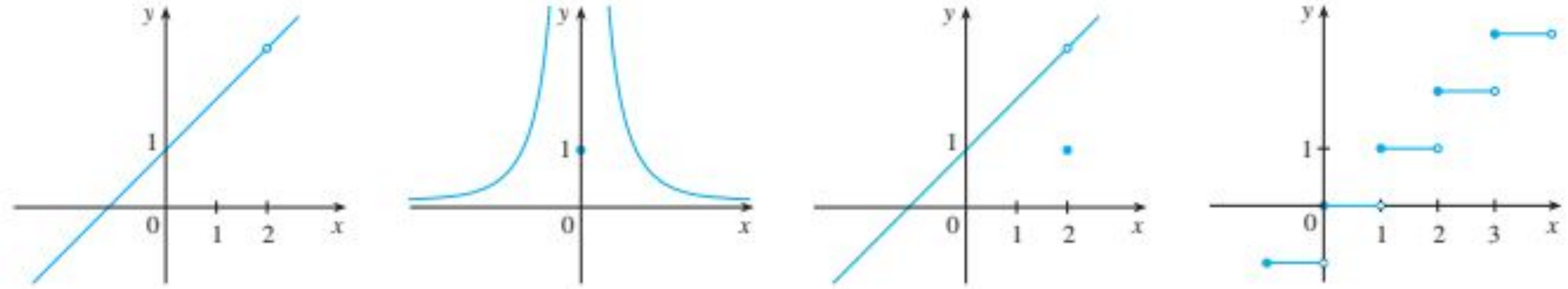
logo, f não é contínua em 2.

(d) A função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ tem descontinuidades em todos os inteiros, pois

$\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ não existe se n for um inteiro.

Continuidade de Funções

A Figura 3 mostra os gráficos das funções no Exemplo 2. Em cada caso o gráfico não pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou salto ocorrem no gráfico. As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas **removíveis**, pois podemos removê-las redefinindo f somente no número 2. [A função $g(x) = x + 1$ é contínua.] A descontinuidade da parte (b) é denominada **descontinuidade infinita**. As descontinuidades da parte (d) são ditas **descontinuidades em saltos**, porque a função "salta" de um valor para outro.



(a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2\end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

Continuidade de Funções

2 **Definição** Uma função f é **contínua à direita em um número a** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda em a** se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EXEMPLO 3 Em cada inteiro n, a função $f(x) = [\![x]\!]$ [veja a Figura 3(d)] é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

mas

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

Continuidade de Funções

$\boxed{3}$ **Definição** Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

EXEMPLO 4 Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

SOLUÇÃO Se $-1 < a < 1$, então, usando as Propriedades dos Limites, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(pelas Propriedades 2 e 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(pela Propriedade 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(pelas Propriedades 2, 7 e 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Continuidade de Funções

Assim, pela Definição 1, f é contínua em a se $-1 < a < 1$. Cálculos análogos mostram que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

logo, f é contínua à direita em -1 e contínua à esquerda em 1. Consequentemente, de acordo com a Definição 3, f é contínua em $[-1, 1]$.

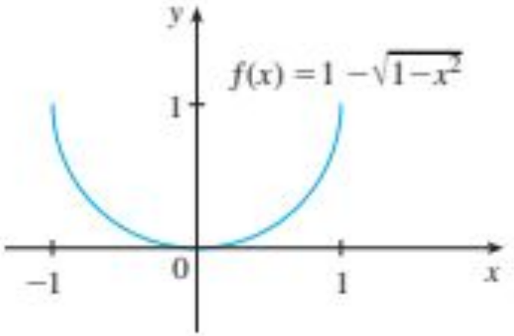


FIGURA 4

O gráfico de f está esboçado na Figura 4. É a metade inferior do círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Continuidade de Funções

Ao invés de sempre usar as Definições 1, 2 e 3 para verificar a continuidade de uma função como no Exemplo 4, muitas vezes é conveniente usar o próximo teorema, que mostra como construir as funções contínuas complicadas a partir de simples.

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

Continuidade de Funções

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Isso mostra que $f + g$ é contínua em a.

Segue do Teorema 4 e da Definição 3 que se f e g forem contínuas em um intervalo, então

$f + g$, $f - g$, cf, fg, e (se g nunca for 0) f/g também o são.

Continuidade de Funções

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUÇÃO A função

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

é racional; assim, pelo Teorema 5, é contínua em seu domínio, que é $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$.
Logo

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

Resulta que as funções familiares são contínuas em todos os números de seus domínios. Por exemplo, a Propriedade dos Limites 10 é exatamente a afirmação que as funções raízes são contínuas.

Continuidade de Funções

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUÇÃO O Teorema 7 nos diz que a função $y = \operatorname{sen} x$ é contínua. A função no denominador, $y = 2 + \cos x$, é a soma de duas funções contínuas e, portanto, é contínua. Observe que esta função nunca é 0, pois $\cos x \geqslant -1$ para todo x e assim $2 + \cos x > 0$ em toda parte. Logo, a razão

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

é sempre contínua. Portanto, pela definição de função contínua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Outra forma de combinar as funções contínuas f e g para obter novas funções contínuas é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma consequência do seguinte teorema.

Continuidade de Funções

8 Teorema Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.
Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUÇÃO Uma vez que arcsen é uma função contínua, podemos aplicar o Teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Continuidade de Funções

Vamos aplicar agora o Teorema 8 no caso especial em que $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo. Então

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

e

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Se colocarmos essas expressões no Teorema 8, obteremos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

e, assim, a Propriedade dos Limites 11 foi demonstrada. (Pressupomos que a raiz exista.)

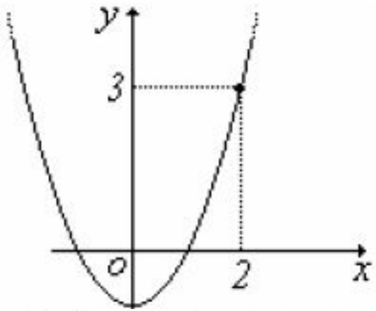
Continuidade de Funções

Definição: Seja x_0 um ponto do domínio de uma função f. Dizemos que f é contínua no ponto x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemplo 1. Se $x = 2$ então $f(2) = 2^2 - 1 = 3$. Dizemos que a *imagem* de $x = 2$ é o valor $f(2) = 3$.

Graficamente:

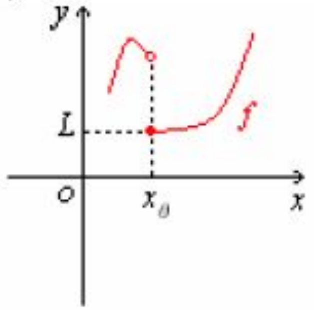


$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$. Na verdade esta função é contínua em $\Re$, isto é, em todos os pontos da reta (do seu domínio).

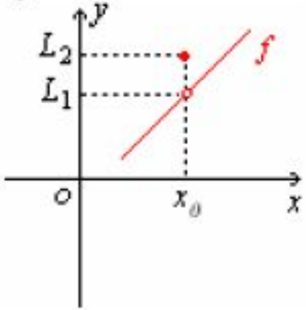
Continuidade de Funções

Exemplo 17. Algumas funções que **não são** contínuas no ponto x_0:

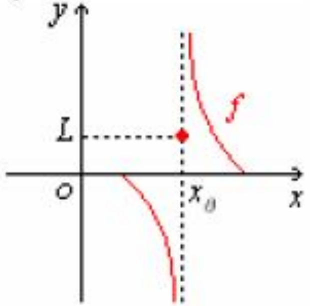
a)



b)



c)



Pois...

a) não existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, apesar de $f(x_0)$ existir, neste caso $f(x_0) = L$;

b) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, isto é $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$. Existe $f(x_0)$, neste caso $f(x_0) = L_2$, mas $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

c) não existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, apesar de $f(x_0)$ existir, neste caso $f(x_0) = L$.