Exercícios – Partição e Coeficiente Binomial

Gabarito

1) (2,0) Há apenas duas partições possíveis do conjunto $\{1,2\}$. São $\{\{1\},\{2\}\}$ e $\{\{1,2\}\}$. Ache todas as partições possíveis de $\{1,2,3\}$ e de $\{1,2,3,4\}$.

Partições possíveis de $\{1,2,3\}$:

$$P_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$
$$P_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$$
$$P_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$$
$$P_4 = \{\{2,3\},\{1\}\}$$
$$P_5 = \{\{1,2,3\}\}$$

Partições possíveis de $\{1,2,3,4\}$:

$$P_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$
$$P_2 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$$
$$P_3 = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$$
$$P_4 = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$$
$$P_5 = \{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$$
$$P_6 = \{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$$
$$P_7 = \{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$$
$$P_8 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$$
$$P_9 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$$
$$P_{10} = \{\{2,4\},\{1,3\}\}$$
$$P_{11} = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$$
$$P_{12} = \{\{1,2,4\},\{3\}\}$$
$$P_{13} = \{\{1,3,4\},\{2\}\}$$
$$P_{14} = \{\{2,3,4\},\{1\}\}$$
$$P_{15} = \{\{1,2,3,4\}\}$$

2) (1,0) Quantos anagramas diferentes (inclusive “palavras” sem sentido) podem ser formados com cada uma das seguintes palavras?
a) STAPLE

$$6! = 720$$

b) DISCRETE

$$\frac{8!}{2!} = 8.7.6.5.4.3 = 20160$$

c) MATHEMATICS

$$\frac{11!}{2!\,2!\,2!} = 11.10.9.7.6.5.4.3.2.1 = 4.989.600$$

d) MISSISSIPI

$$\frac{10!}{4!\,4!} = \frac{10.9.8.7.6.5}{24} = 10.9.2.7.5 = 6300$$

3) (1,0) Quantos anagramas diferentes (inclusive "palavras" sem sentido) podem ser formados com a palavra SUCCESS se a primeira e a última letras devem ser ambas S?

S ____ ____ ____ ____ ____ S

$$\frac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

4) (1,0) De quantas maneiras podemos dividir vinte pessoas em dois times com dez jogadores cada?

$$C_{20,10} = \frac{20!}{10!\,10!} = \frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11}{10!} = 87.516$$

5) (1,0) De quantas maneiras podemos dividir cem pessoas em grupos de discussão, com dez pessoas em cada grupo?

$$C_{100,10} = \frac{100!}{90!\,10!} = \frac{100.99.98.97.96.95.94.93.92.91}{10!} = 17.310.309.456.440$$

6) (1,0) Seja A um conjunto e seja $\mathcal{P}$ uma partição de A. É possível termos $A = \mathcal{P}$?

Seja $A = \{1,2\}$ então

$$A \neq \{\{1,2\}\}$$
$$A \neq \{\{1\},\{2\}\}$$

7) (1,0) Escreva todos os subconjuntos de três e de quatro elementos de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ em duas colunas. Emparelhe cada subconjunto de três elementos com o seu complemento. Sua tabela deve ter 35 linhas.

1	{1,2,3}	{4,5,6,7}
2	{1,2,4}	{3,5,6,7}
3	{1,2,5}	{3,4,6,7}
4	{1,2,6}	{3,4,5,7}
5	{1,2,7}	{3,4,5,6}
6	{1,3,4}	{2,5,6,7}
7	{1,3,5}	{2,4,6,7}
8	{1,3,6}	{2,4,5,7}
9	{1,3,7}	{2,4,5,6}
10	{1,4,5}	{2,3,6,7}
11	{1,4,6}	{2,3,5,7}
12	{1,4,7}	{2,3,5,6}
13	{1,5,6}	{2,3,4,7}
14	{1,5,7}	{2,3,4,6}
15	{1,6,7}	{2,3,4,5}
16	{2,3,4}	{1,5,6,7}
17	{2,3,5}	{1,4,6,7}
18	{2,3,6}	{1,4,5,7}
19	{2,3,7}	{1,4,5,6}
20	{2,4,5}	{1,3,6,7}
21	{2,4,6}	{1,3,5,7}
22	{2,4,7}	{1,3,5,6}
23	{2,5,6}	{1,3,4,7}
24	{2,5,7}	{1,3,4,6}
25	{2,6,7}	{1,3,4,5}
26	{3,4,5}	{1,2,6,7}
27	{3,4,6}	{1,2,5,7}
28	{3,4,7}	{1,2,5,6}
29	{3,5,6]	{1,2,4,7}
30	{3,5,7}	{1,2,4,6}
31	{3,6,7}	{1,2,4,5}
32	{4,5,6}	{1,2,3,7}
33	{4,5,7}	{1,2,3,6}
34	{4,6,7}	{1,2,3,5}
35	{5,6,7}	{1,2,3,4}

8) (2,0) Utilizando o triângulo de Pascal desenvolva:

a) $(x+y)^6 = \binom{6}{0}x^6y^0 + \binom{6}{1}x^5y^1 + \binom{6}{2}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 + \binom{6}{5}x^1y^5 + \binom{6}{6}x^0y^6$

$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + y^6$$

b) $(a+b)^8 = \binom{8}{0}a^8b^0 + \binom{8}{1}a^7b^1 + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 +$

$$\binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}a^1b^7 + \binom{8}{8}a^0b^8 =$$

$$= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$