Funções

Funções

A função é uma "regra" ou "mecanismo" que transforma uma quantidade em outra. Por exemplo, a função f(x) = $x^2 + 4$ toma o inteiro x e transforma no inteiro $x^2 + 4$.

Definição

Uma relação f é chamada função desde que $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ impliquem $b = c$

Exemplos

$$f = \{(1,2), (2,3), (3,1), (4,7)\}$$
$$g = \{(1,2), (1,3), (4,7)\}$$

A relação f é uma função, enquanto a relação g não o é porque $(1,2), (1,3) \in g$ e $2 \neq 3$

Notação de função

Seja f uma função e seja a um objeto. A notação $f(a)$ é definida desde que exista um objeto b de modo que $(a, b) \in f$. Nesse caso $f(a) = b$.

Para a função $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\}$, temos

$f(1) = 2,\ f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 7$

Para g, ela não é considerada função, pois qual o valor de $g(1) = ?$, há duas possibilidades,

Exemplo

Expresse a função $f(x) = \ x^2$

Para representar isso na forma de pares ordenados, precisamos utilizar reticências:

$$f = \{\dots, (-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$$

Ainda poderíamos utilizar a notação de definição de conjunto:

$$f = \{(x,y): x, y \ \in \mathbb{Z}, y = x^2\}$$

Outra forma é escrevermos uma função como uma tabela:

x	***f(x)***
...	...
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
...	...

Domínio e imagem

Seja *f* uma função. O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de *f* é chamado domínio de *f* e se denota por *dom f.* O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de *f* chama *imagem* de *f* e se denota *im f.*

Em outra notação:

$$dom\ f = \{a \colon \exists b, (a,b) \in f\}\ e\ \ im\ f = \{b \colon \exists a, (a,b) \in f\}$$

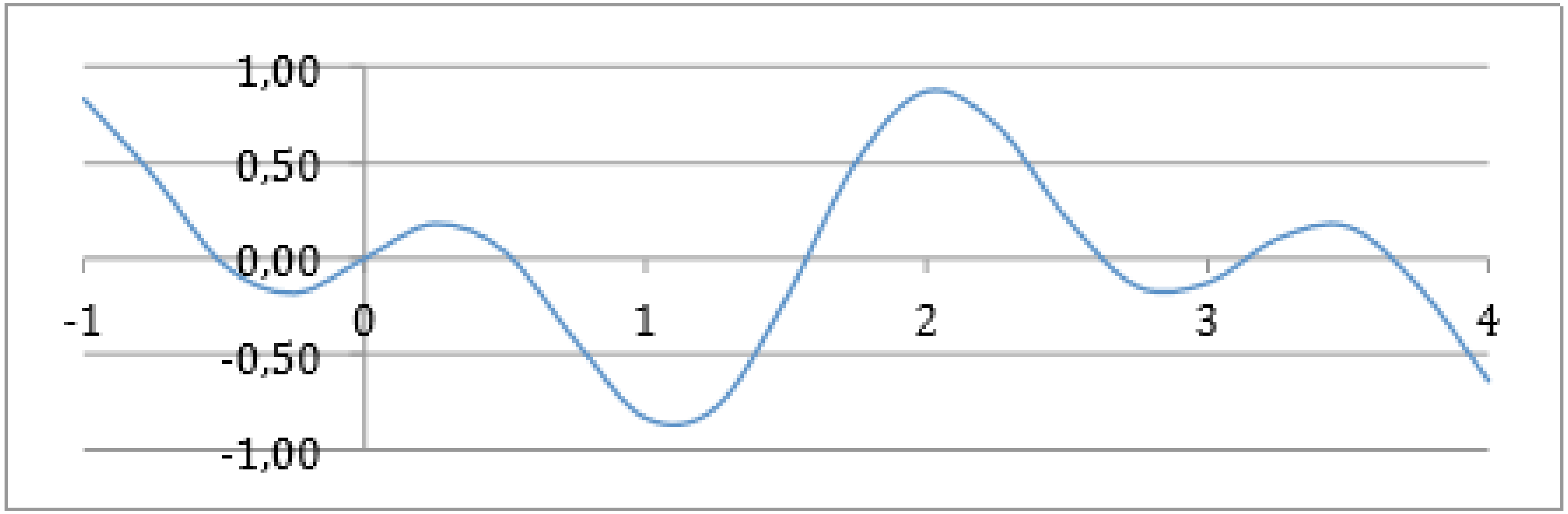
Notação especial para funções

Seja *f* uma função e sejam os conjuntos A e B, dizemos que "*f é uma função de A para B*" se dom *f*=A e im$f \subseteq B$. Nesse caso, escrevemos *f: A* → *B.* Dizemos também que "*f é uma aplicação de A em B*".

Gráficos de funções

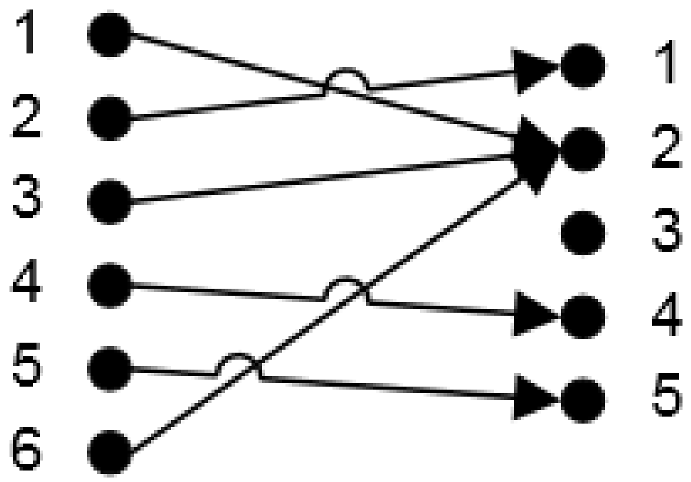
Os gráficos constituem uma forma excelente de visualizarmos funções cujas entradas e saída são número reais.

Por exemplo, veja o gráfico da função $f(x) = sen\ x \cos 3x$:



Outra representação de funções

Sejam os grupos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {1, 2, 3, 4, 5} e considerando a função *f*: {(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 2)}. A representação dessa função poderá ser feita da seguinte forma:



Contagem de funções

Sejam A e B conjuntos finitos. Quantas funções há de A para B? Sem perda de generalidade podemos escolher A como o conjunto {1, 2, ..., a} e B como o conjunto {1, 2, ..., b}. Toda função *f: A* → *B* pode escreve-se como:

$$f: \{(1, ?), (2, ?), (3, ?), \ldots, (a, ?)\}$$

Por exemplo, sejam A = {1, 2, 3} e B = {4, 5}. Todas as funções *f:* A → B possíveis são:

{(1, 4), (2, 4), (3, 4)}	{(1, 5), (2, 4), (3, 4)}
{(1, 4), (2, 4), (3, 5)}	{(1, 5), (2, 4), (3, 5)}
{(1, 4), (2, 5), (3, 4)}	{(1, 5), (2, 5), (3, 4)}
{(1, 4), (2, 5), (3, 5)}	{(1, 5), (2, 5), (3, 5)}

Sejam A e B conjuntos finitos com |A| = a e |B| = b. O número de funções de A para B é b^a.

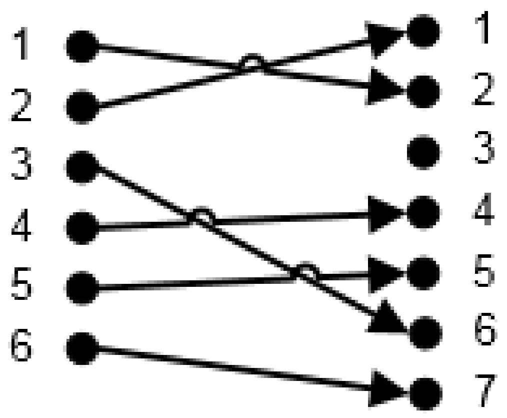
Funções inversas

Uma função é um tipo especial de relação, representada por f^{1}. A regra de função se aplica também para a função inversa.

Função injetora

Uma função f é chamada *um para um* se, sempre que $(x, b), (y, b) \in f$, devemos ter x = y. Em outras palavras, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$

A expressão *um para um* costuma também ser escrita como 1:1. Outra designação para uma função um para um é **injeção** ou **função injetora.**



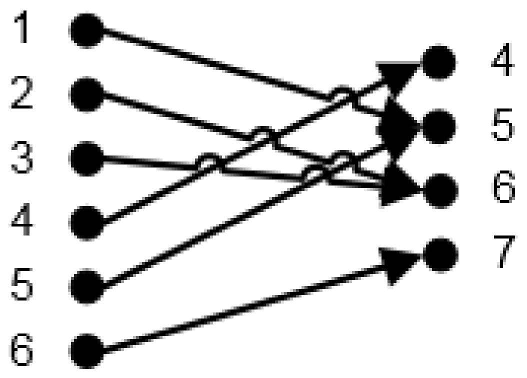
Proposição

Seja f uma função, a relação inversa f^{1} é uma função se e somente se f é uma função injetora

Seja f uma função e f^{1} seja uma função também. Então dom f = imf^{1} e im$f$ = dom f^{1}

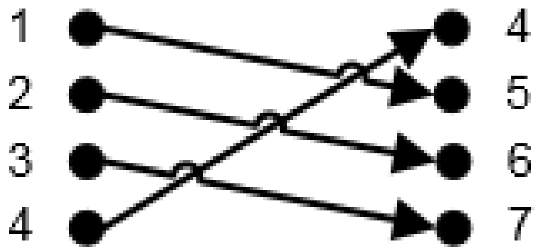
Função sobrejetiva ou sobrejetora

Seja $f: A \rightarrow B$. Dizemos que f é sobre B desde que, para todo $b \in B$, exista um $a \in A$ de modo que $f(a) = b$. Em outras palavras, im$f = B$.



Função bijetora ou bijeção

Seja $f: A \rightarrow B$. f é uma bijeção se é ao mesmo tempo *um para um* e *sobre*



Princípio da casa de pombos:

Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f: A \rightarrow B$. Se $|A| > |B|$, então f não é injetora.

Se $|A| < |B|$, então f não é sobrejetora

Se f é bijetora, então $|A| = |B|$.

Composição de funções

Exercícios sobre funções

Composição

Assim como há operações (por exemplo, + e *) para combinar inteiros e operações para combinar conjuntos (por exemplo, $\cup$ e $\cap$), há uma operação natural para combinar funções.

Definição

Sejam os conjuntos A, B e C e sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Então a função $g \circ f$ é uma função de A para C definida por:

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)]$$

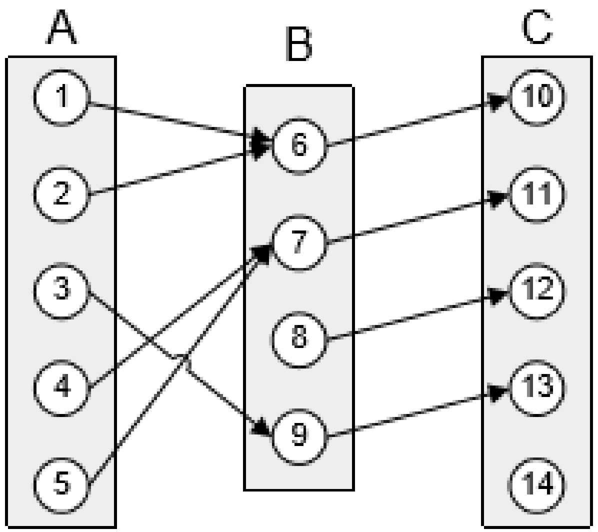
em que $a \in A$. A função $g \circ f$ é chamada composição de g e f.

Exemplo

Sejam A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {6, 7, 8, 9} e C = {10, 11, 12, 13, 14}, sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ definidas por

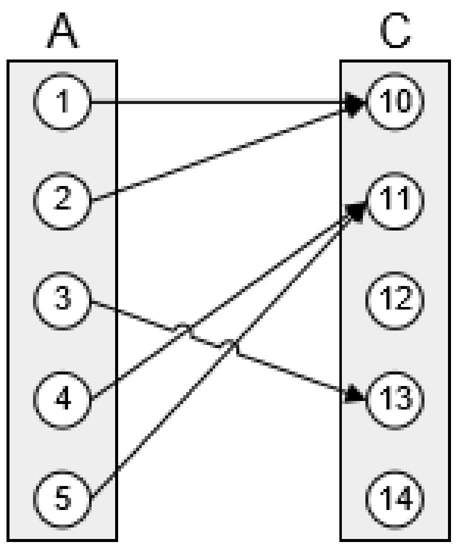
$$f = \{(1,6), (2,6), (3,9), (4,7), (5,7)\}$$
$$g = \{(6,10), (7,11), (8,12), (9,13)\}$$

graficamente:



Então $g \circ f$ é a função:

$$g \circ f = \{(1,10),(2,10),(3,13),(4,11),(5,11)\}$$



assim, se desejo representação a composição do objeto:

$$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g[6] = 10$$

Alguns comentários

- A notação $(g \circ f)$ significa que, primeiro aplicamos f e, em seguida, g. Mas o ideia e associar a proximidade:

$$(g \circ f)(a) \to (g[f(a)])$$

- O domínio de $(g \circ f)$ é o mesmo que o de *f*:

$$dom\ (g \circ f) = dom\ f$$

- Para que $(g \circ f)$ tenha sentido, toda saída de *f* deve ser uma entrada aceitável para *g*. Propriamente dito, devemos ter $im\ f \subseteq dom\ g$. As exigências $f: A \to B$ e $g: B \to C$ asseguram que as funções se adaptam quando formamos $g \circ f$

- É possível que $g \circ f$ e $f \circ g$ tenham ambas sentido (sejam definidas). Em tal situação, pode ocorrer que $f \circ g \neq g \circ f$ (sejam funções diferentes)

Exemplo

$g \circ f \neq f \circ g$.

Seja A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e sejam $f: A \rightarrow A$ e $g: A \rightarrow A$ definidas por:

$$f = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$$
$$g = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

Então $g \circ f e\ f \circ g$ são:

$$g \circ f = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5)\} \text{ e}$$
$$f \circ g = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$$

Assim $g \circ f \neq f \circ g$.

A função identidade

Seja A um conjunto. A função identidade em A é uma função id_A, cujo domínio é A e para todo $a \in A$, $\mathrm{id}_A(a) = a$. Em outras palavras:

$$id_A = \{(a, a) \colon a \in A\}$$

Exercícios propostos

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{R}$:
   a. $f(n) = -n$
   b. $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$
   c. $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

2. Determine se cada uma das funções abaixo de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ é injetora:
   a. $f(n) = n - 1$
   b. $f(n) = n^2 - 1$
   c. $f(n) = n^3$

3. Quais funções do exercício anterior são sobrejetoras?

4. Determine se cada uma das funções abaixo é bijetora de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$:
   a. $f(x) = x - 1$
   b. $f(x) = x^2 - 1$
   c. $f(x) = x^3$
   d. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$

5. Há dois símbolos utilizados para representações que retornar um número inteiro aproximado (página 279 do livro). A primeira é o símbolo $\lfloor\quad\rfloor$ que retorna o *maior inteiro menor que o valor* (também conhecido como *solo*), por exemplo: $\lfloor 3{,}99 \rfloor = 3$, $\lfloor -1/2 \rfloor = -1$, $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$.

Enquanto $\lceil\quad\rceil$ retorna o *menor inteiro maior que o valor* (também conhecido como *teto*), por exemplo$\lceil 3{,}9 \rceil = 4$, $\lceil 3{,}01 \rceil = 4$, $\lceil 1/2 \rceil = 1$, $\lceil -1/2 \rceil = 0$.

Com base nisso, encontre os valores a seguir:

a. $\lfloor 1{,}1 \rfloor$
b. $\lfloor -0{,}1 \rfloor$
c. $\lceil 4 \rceil$
d. $\lfloor 4 \rfloor$
e. $\lceil 1{,}000001 \rceil$
f. $\left\lceil \frac{1}{2} \times \lceil 1{,}9 \rceil \right\rceil$
g. $\left\lceil \frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \right\rceil$

6. Considere $f(x) = \left\lfloor \frac{x^2}{3} \right\rfloor$, encontre $f(A)$ dos seguintes conjuntos:
   a. A = {-2, -1, 0, 1, 2}
   b. A = {0, 1, 2, 3, 4}
   c. A = {1, 5, 7, 11}
   d. A = {2, 4, 6, 8}

7 . Definido f e g como funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ e com as seguintes regras $f(n) = 7n$ e $g(n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Quais os valores de
   a. $g \circ f$ para o conjunto x = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
   b. $g \circ f$ para o conjunto x = {-14, -7, 0, 7, 14}
   c. $g \circ f$ para o conjunto x = {-4, -2, 2, 4}