Aplicações das derivadas

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 15 31/01/2022

A regra de L'Hospital

Esta regra permite calcular certos tipos de limites (cujas indeterminações são do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$) aplicando as regras de derivação.

Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente, num ponto $a \in I$. Suponha que $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I$ e $x \neq a$.

a) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L;$$

A regra de L'Hospital

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$. (verifique a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x - 2}{x^2 - 1}$. (verifique a indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{4x^3 + 1}{2x} = \frac{5}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2}$. (verifique a indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos(x) - 1}{e^x - e^{-x}}$ Observe que ainda há uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Neste caso podemos continuar aplicando a regra...

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos(x) - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-sen(x)}{e^x + e^{-x}} = -\dfrac{0}{2} = 0$. Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2} = 0$.

A regra de L'Hospital

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$. (verifique a indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x}$ Observe que ainda há uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Neste caso podemos continuar aplicando a regra...

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$. Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Funções Crescentes e Decrescentes

Definição: Uma função $y = f(x)$, definida num intervalo I, é ***crescente*** neste intervalo se para quaisquer $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, temos que $f(x_0) < f(x_1)$. (ver Fig. 1)

Definição: Uma função $y = f(x)$, definida num intervalo I, é ***decrescente*** neste intervalo se para quaisquer $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, temos que $f(x_0) > f(x_1)$. (ver Fig. 2)

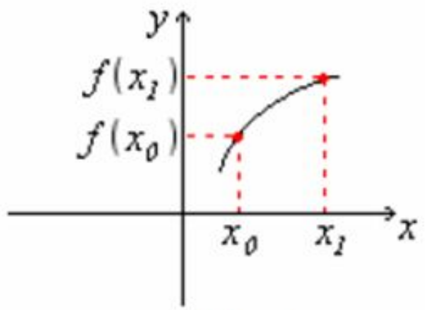


Fig. 1

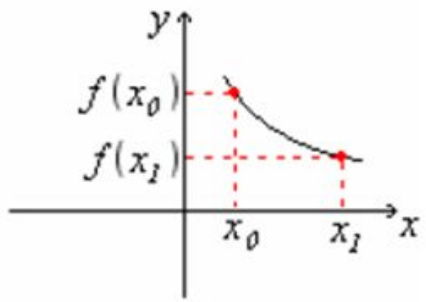


Fig. 2

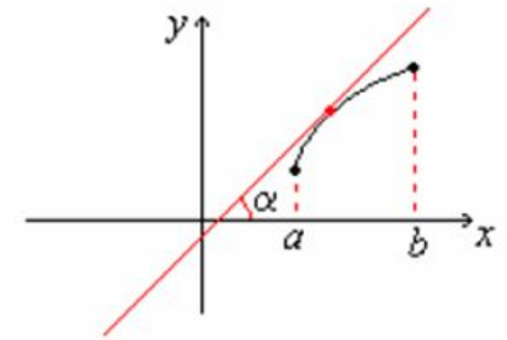
Podemos identificar os intervalos onde uma função é crescente ou decrescente através do estudo do sinal da derivada da função. Segue a proposição.

Funções Crescentes e Decrescentes

Proposição: Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo (a,b).

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é ***crescente*** em $[a,b]$;
b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é ***decrescente*** em $[a,b]$.

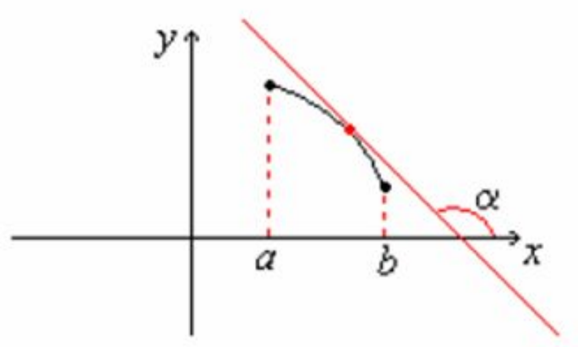
a) Se a função derivada é positiva para todo $x \in (a,b)$ então, geometricamente, a reta tangente tem inclinação positiva para todo $x \in (a,b)$.



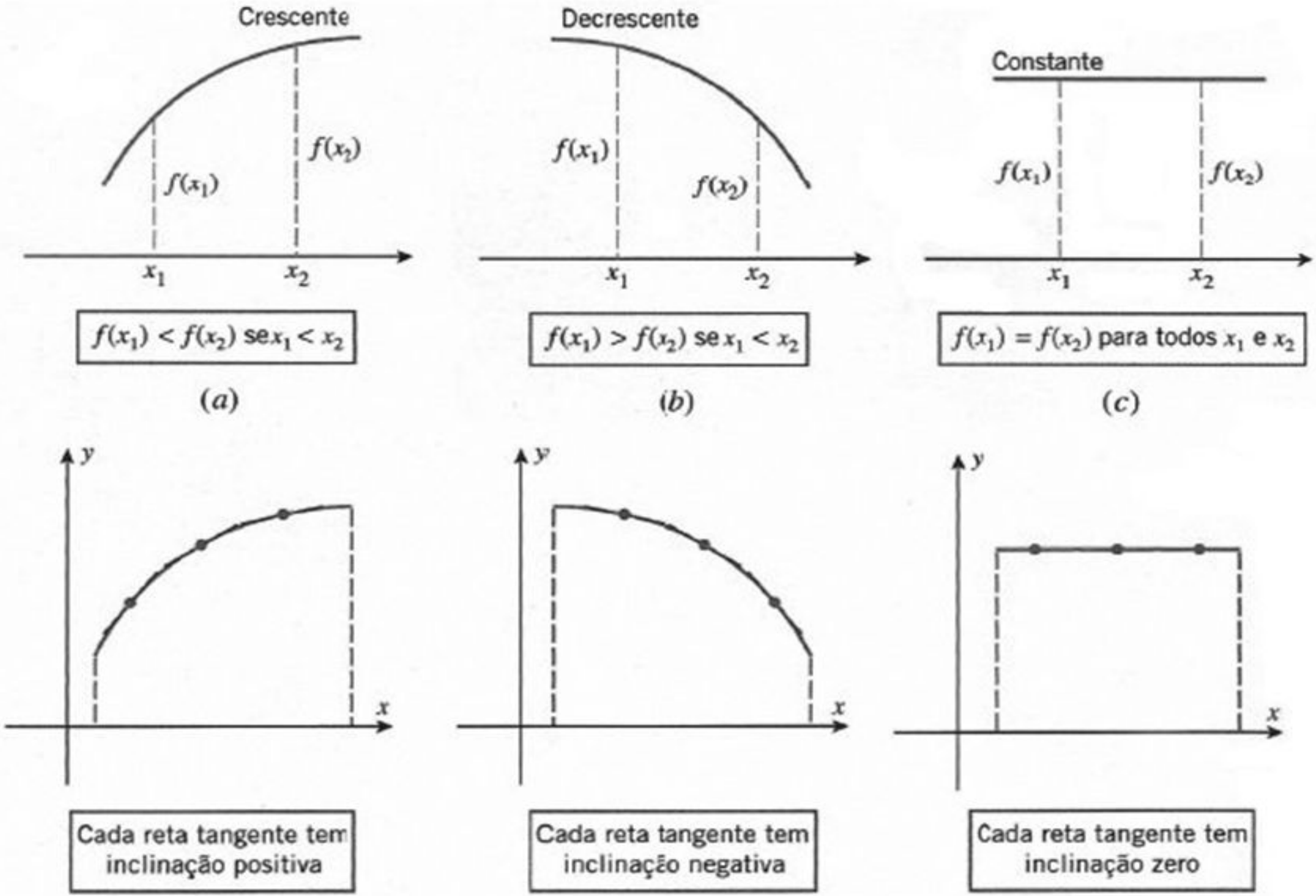
$$f'(x) = tg(\alpha) > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < 90^o .$$

Funções Crescentes e Decrescentes

b) Se a função derivada é negativa para todo $x \in (a,b)$ então, geometricamente, a reta tangente tem inclinação negativa para todo $x \in (a,b)$.



$$f'(x) = tg(\alpha) < 0 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ .$$



Crescente
$f(x_1)$
$f(x_2)$
x_1
x_2
$f(x_1) < f(x_2)$ se $x_1 < x_2$
(a)
Decrescente
$f(x_1)$
$f(x_2)$
x_1
x_2
$f(x_1) > f(x_2)$ se $x_1 < x_2$
(b)
Constante
$f(x_1)$
$f(x_2)$
x_1
x_2
$f(x_1) = f(x_2)$ para todos x_1 e x_2
(c)
y
x
Cada reta tangente tem inclinação positiva
y
x
Cada reta tangente tem inclinação negativa
y
x
Cada reta tangente tem inclinação zero

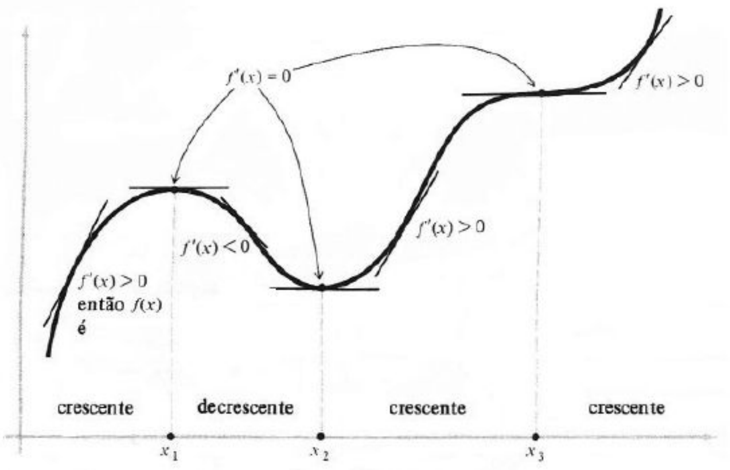
Funções Crescentes e Decrescentes

- Se f'(x)>0 para todo valor de x em (a,b), então f é crescente em [a,b].

- Se f'(x)<0 para todo valor de x em (a,b), então f é decrescente em [a,b].

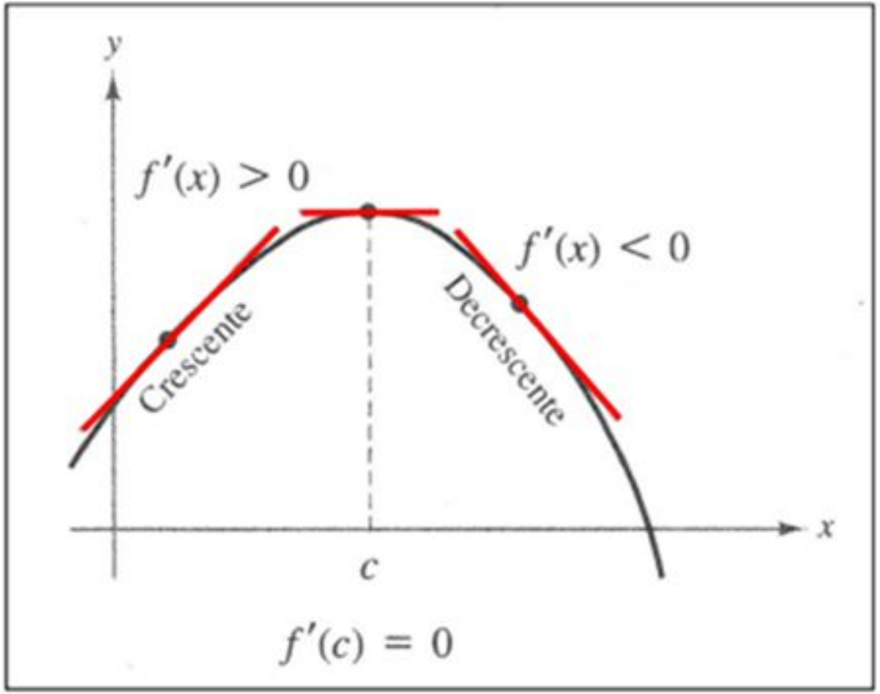
- Se f'(x)=0 para todo valor de x em (a,b), então f é constante em [a,b].

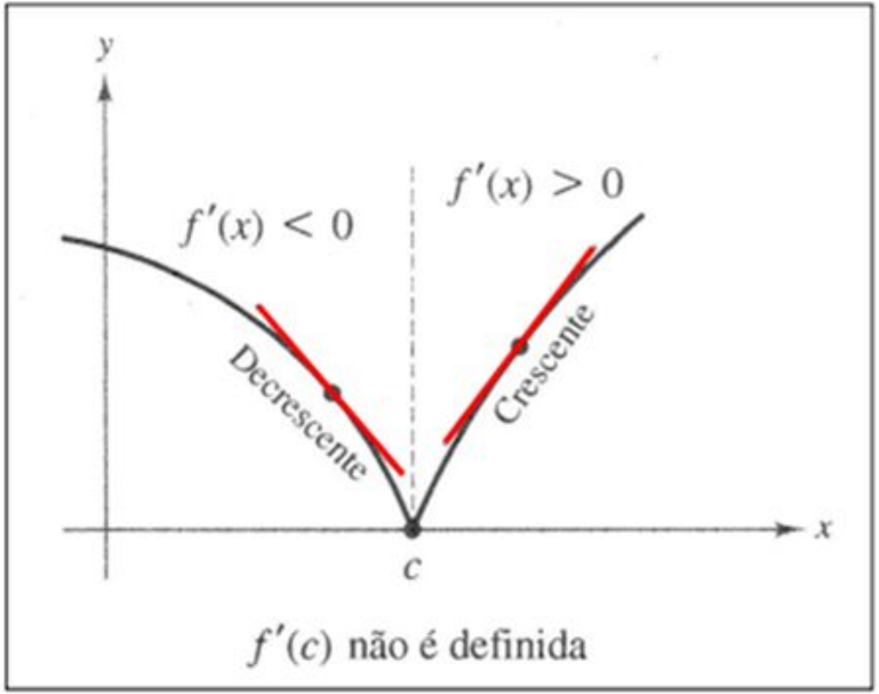
Representação gráfica de várias derivadas de uma função



Funções Crescentes e Decrescentes

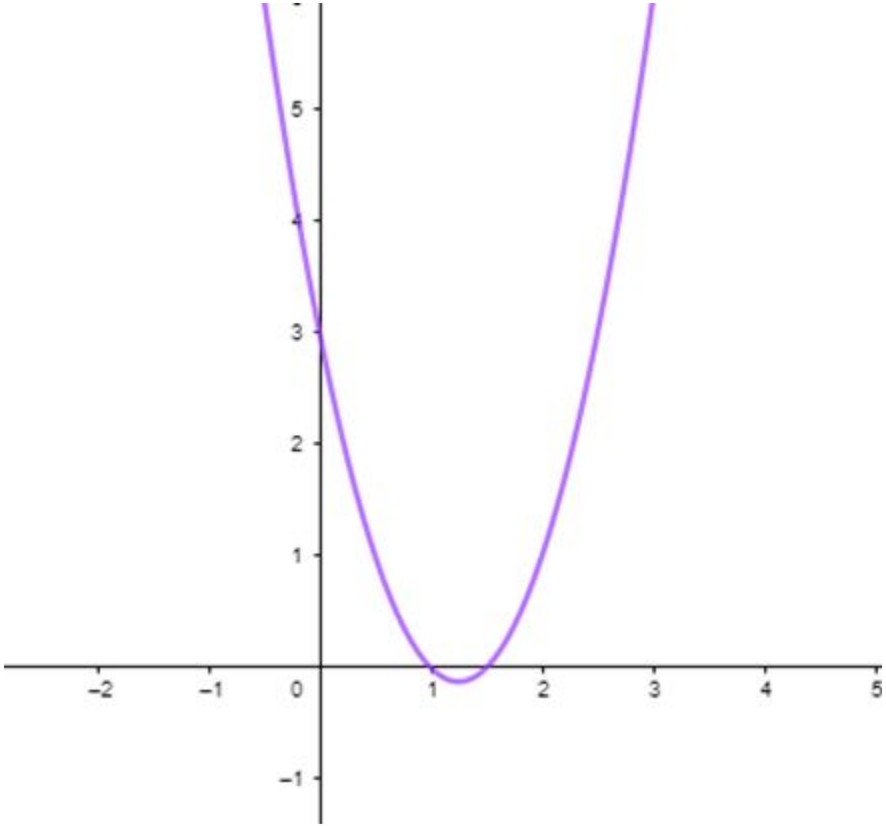
Ponto crítico→$f'(c)$=0 *ou* $f'(c)$ = indefinido





Funções Crescentes e Decrescentes

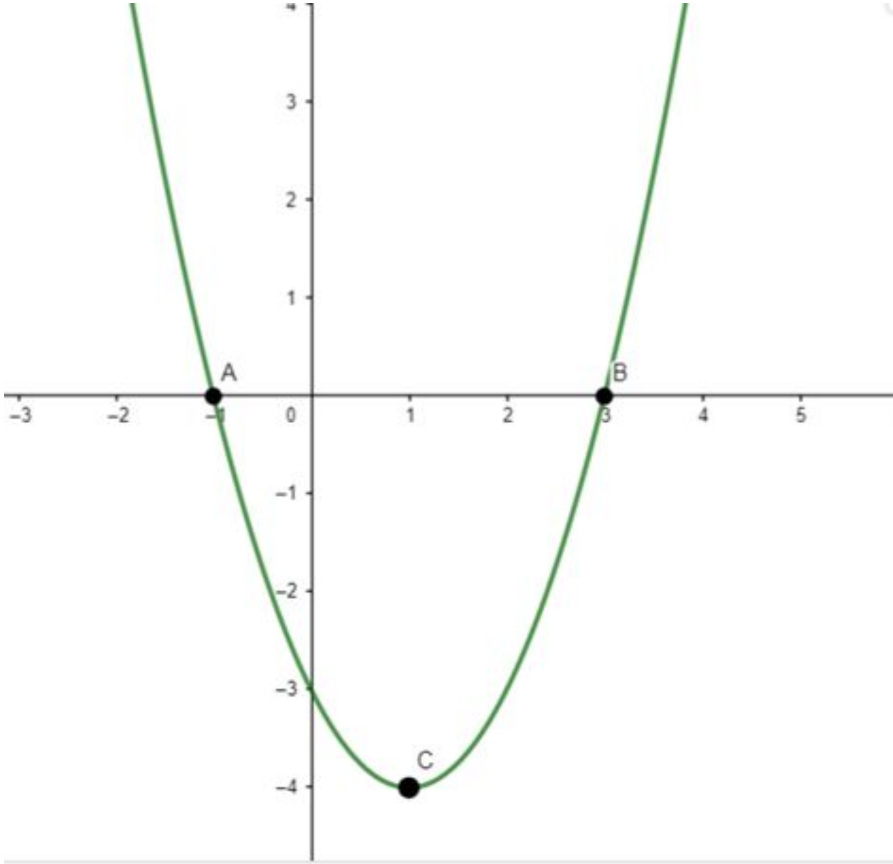
$f(x)=2x^2-5x+3$



- $f(x)=x^3 + 4$

Funções Crescentes e Decrescentes

$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Máximos e mínimos de uma função

Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.

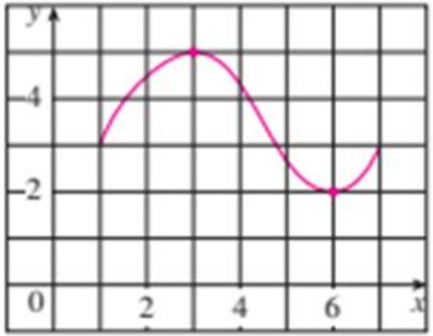


Figura 1

- Vemos que o ponto mais alto no gráfico da função f mostrado na Figura 1 é o ponto (3, 5).
- Em outras palavras, o maior valor de f é f (3) = 5. Da mesma forma, o menor valor é f (6) = 2.
- Dizemos que f (3) = 5 é o máximo absoluto de f e f (6) = 2 é o mínimo absoluto. Em geral, usamos a seguinte definição.

Máximos e mínimos de uma função

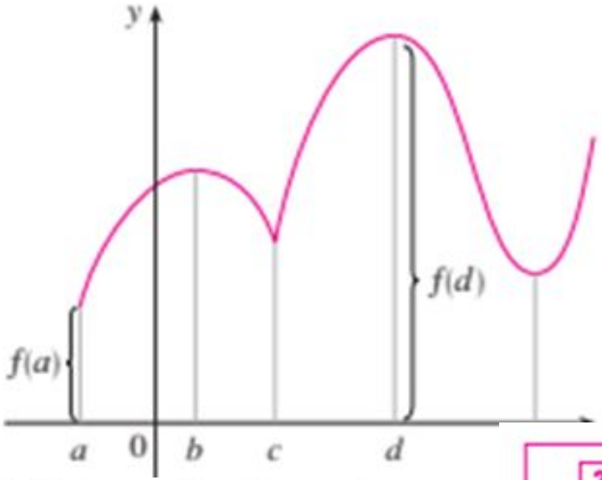
1 **Definição** Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D.

Obs.
Um máximo ou mínimo absoluto às vezes é chamado de máximo ou mínimo global.
Os valores máximos e mínimos de f são chamados de valores extremos de f.

Máximos e mínimos de uma função

A **Figura 2** mostra um gráfico de uma função f com máximo absoluto em d e mínimo absoluto em a. Observe que (d, f (d)) é o ponto mais alto no gráfico e (a, f (a)) é o menor ponto.



Mínimo absoluto $f(a)$, máximo absoluto $f(d)$, mínimos locais $f(c)$, $f(e)$, máximos locais $f(b)$, $f(d)$

Na figura 2, se considerarmos apenas os valores de x próximos b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c), então f (b) é o maior destes valores de f (x) e é chamado de valor máximo local de f. Da mesma forma, f (c) é chamado de valor mínimo local de f, pois $f(c) \leq f(x)$ para x próximo de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f também tem um mínimo local em e . Em geral, temos a seguinte definição.

2 **Definição** O número $f(c)$ é um

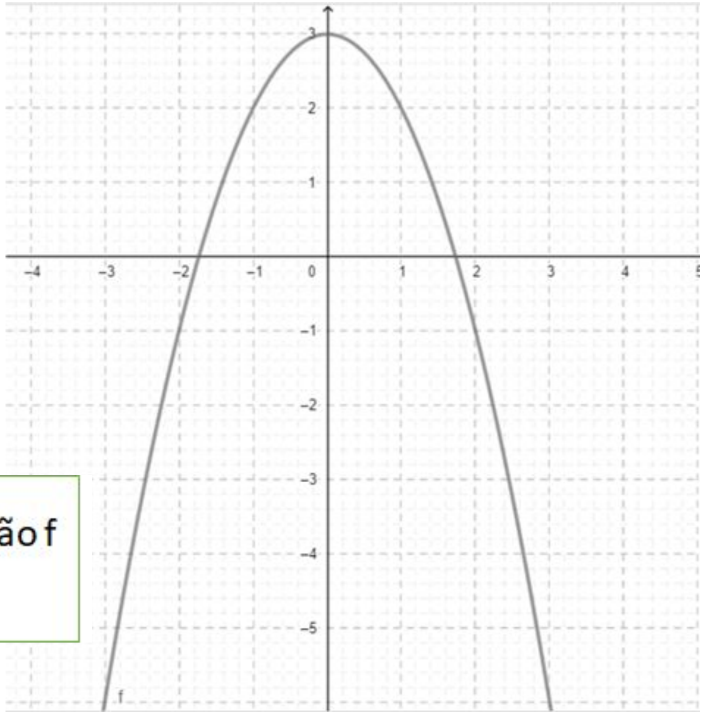
- valor **máximo local** de f se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x está próximo de c.
- valor **mínimo local** de f se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x está próximo de c.

Máximos e mínimos de uma função

- Ex: Considerando o intervalo [1, 3), a função $y= 5x$ tem 5 como número mínimo absoluto. E não possui máximo absoluto neste intervalo

Máximos e mínimos de uma função

- Ex: Considerando o intervalo (-2, 3), podemos dizer que $f(x)= -x^2 + 3$ tem um máximo absoluto igual a 3. Se considerarmos o intervalo [-2, 3] teremos um mínimo absoluto igual a -6.



Proposição: Se f é uma função contínua num domínio [a, b], então f assume mínimo e máximo absolutos em [a, b]

Máximos e mínimos de uma função

Dada a função

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

Roteiro para determinar os valores extremos

1º Passo: Determinar o campo de definição de f;

2º Passo: Encontrar a primeira derivada;

3º Passo: Determinar os pontos críticos;

4º Passo: Analisar o sinal de $f'(x)$;

5º Passo: Aplicar o teste da primeira derivada.

Velocidade e aceleração

Interpretação cinemática da derivada

Vamos agora interpretar a derivada do ponto de vista da cinemática, que estuda o movimento dos corpos. Veremos que a *velocidade* e a *aceleração* de um corpo podem ser determinadas através das derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, quando conhecemos a função horária do movimento do corpo.

Velocidade. Considere um corpo que se move em linha reta e seja $s = s(t)$ a sua função horária, isto é, o espaço percorrido em função do tempo. O deslocamento do corpo no intervalo de tempo t e $t + \Delta t$ é definido por $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

A *velocidade média* do corpo neste intervalo de tempo é definida por $\boxed{v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}}$.

Velocidade e aceleração

A velocidade média do corpo não dá uma informação precisa sobre a velocidade em cada instante do movimento no intervalo de tempo t e $t+\Delta t$. Para obtermos a *velocidade instantânea* do corpo no instante t, precisamos calcular a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, isto é, fazendo $\Delta t \to 0$.

A *velocidade instantânea* do corpo no instante t é definida por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t). \text{ Assim, } \boxed{v(t) = s'(t)}.$$

A velocidade instantânea $v(t)$ é a primeira derivada da função horária $s(t)$.

Velocidade e aceleração

Aceleração. De forma análoga ao conceito de velocidade vem o de aceleração:

A *aceleração média* do corpo no intervalo de tempo t e $t+\Delta t$ é definida por

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}}\,.$$

A *aceleração instantânea* do corpo no instante t é definida por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'(t). \text{ Assim, } \boxed{a(t) = v'(t)}.$$

Como $v(t) = s'(t)$ podemos escrever a aceleração instantânea como a segunda derivada dos espaço em relação ao tempo. Assim $\boxed{a(t) = s''(t)}$.

Velocidade e aceleração

a) Suponha que um corpo em movimento retilíneo tenha função horária definida por $s(t) = 12t - 2t^2$ e no instante $t = 0$ ele inicia o movimento. Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos. Determine:

i) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[1,3]$;
ii) a velocidade do corpo no instante $t = 1$;
iii) a aceleração média do corpo no intervalo de tempo $[1,3]$;
iv) a aceleração do corpo no instante $t = 1$.

Velocidade e aceleração

Solução:

i) $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{s(3) - s(1)}{3-1} = \dfrac{18-10}{2} = \dfrac{8}{2} = 4m/s$.

ii) $v(t) = s'(t) = 12 - 4t \quad \therefore \quad v(1) = 12 - 4 = 8m/s$.

iii) $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \dfrac{v(3) - v(1)}{3-1} = \dfrac{0-8}{2} = -4m/s^2$.

iv) $a(t) = s''(t) = -4 \quad \therefore \quad a(3) = -4m/s^2$.

Velocidade e aceleração

b) Uma partícula em movimento retilíneo tem a função horária dada por $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$.
Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos. Determine:

i) Em que instante a partícula pára, isto é, tem velocidade nula?
ii) Determine a aceleração da partícula no instante $t = 4{,}5s$.

Velocidade e aceleração

Solução:

i) $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 42t + 60 \quad \Rightarrow \quad v(t) = 6\left(t^2 - 7 + 10\right) = 6(t-2)(t-5).$

$v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6(t-2)(t-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2s$ ou $t = 5s$. Assim a partícula tem velocidade nula nos instantes $t = 2s$ e $t = 5s$.

ii) $a(t) = s''(t) = 12t - 42 \quad \therefore \quad a(4{,}5) = 12(4{,}5) - 42 = 12m/s^2.$