Derivadas da função composta e regra da cadeia

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 17/01/2022

Função Composta

A função composta, também chamada de função de função, é um tipo de função matemática que combina duas ou mais variáveis.

Dada uma função f ($f: A \to B$) e uma função g ($g: B \to C$), a função composta de g com f é representada por gof. Já a função composta de f com g é representada por fog.

Determine o $gof(x)$ e $fog(x)$ das funções $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = 5x$.

$$gof(x) = g[f(x)] = g(2x+2) = 5(2x+2) = 10x + 10$$

$$fog(x) = f[g(x)] = f(5x) = 2(5x) + 2 = 10x + 2$$

Função Composta e Regra da Cadeia

Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = gof(x) = g(f(x))$ tem derivada dada por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)} \quad \text{ou} \quad \boxed{gof'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}.$$

As três formas acima são equivalentes, mudam apenas as notações.

Função Composta e Regra da Cadeia

Vamos explicitar o caso especial da Regra da Cadeia, onde a função de fora f é uma função potência. Se $y = [g(x)]^n$, então podemos escrever $y = f(u) = u^n$, onde $u = g(x)$. Usando a Regra da Cadeia e, em seguida, a Regra da Potência, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

Função Composta e Regra da Cadeia

EXEMPLO 1 Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUÇÃO 1 (usando a Equação 2): No início desta seção expressamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Uma vez que

A Regra da Cadeia pode ser escrita na notação linha

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 2x$$

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Função Composta e Regra da Cadeia

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, na notação de Leibniz:

3 $\quad \dfrac{dy}{} \qquad \dfrac{dy}{}\dfrac{du}{}$

OBSERVAÇÃO Ao usarmos a Regra da Cadeia, trabalharemos de fora para dentro. A Fórmula 2 diz que *derivamos a função f de fora* [*na função de dentro g(x)*] *e, então, que multiplicamos pela derivada da função de dentro*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\\text{na função}\\\text{de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{da função}\\\text{de dentro}}}$$

SOLUÇÃO 2 (usan ... $= \sqrt{u}$, então

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Função Composta e Regra da Cadeia

a) $y = (3x + 1)^3$

Função Composta e Regra da Cadeia

OBSERVAÇÃO Ao usarmos a Regra da Cadeia, trabalharemos de fora para dentro. A Fórmula 2 diz que *derivamos a função f de fora* [*na função de dentro* $g(x)$] *e, então, que multiplicamos pela derivada da função de dentro*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

Função Composta e Regra da Cadeia

b) $y = (5x + 10)^2$

c) $y = (3x^2 - 5x + 2)^6$

Função Composta e Regra da Cadeia

EXEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ e (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a) Se $y = \operatorname{sen}(x^2)$, então a função de fora é a função seno e a função de dentro é a função quadrática, logo, a Regra da Cadeia dá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{função}\\ \text{de fora}}}\ \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}}\ \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

Função Composta e Regra da Cadeia

(b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. Aqui, a função de fora é a função quadrática, e a função de dentro é a função seno. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\substack{\text{função}\\ \text{de dentro}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

A resposta pode ser deixada como $2 \operatorname{sen} x \cos x$ ou escrita como $\operatorname{sen} 2x$ (pela identidade trigonométrica conhecida como fórmula do ângulo duplo).

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2) $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
3) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$
4) $\text{sen}^2 nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2nx$
5) $\cos^2 nx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2nx$
6) $2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} x = 1 - \cos x$
7) $2\cos^2 \frac{1}{2} x = 1 + \cos x$
8) $\text{sen } 2x = 2\,\text{sen } x \cdot \cos x$
9) $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\text{sen } 2x$
10) $\text{cosec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1$
11) $\text{tg } 2x = \frac{2\,\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$
12) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
13) $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$
14) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
15) $\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$
16) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$
17) $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$
18) $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$
19) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
20) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
21) $\text{sen } x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\text{sen }(x - y) + \text{sen }(x + y)]$
22) $\text{sen } x \cdot \text{sen } y = \frac{1}{2}[\cos (x - y) - \cos (x + y)]$
23) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos (x - y) + \cos (x + y)]$
24) $1 \pm \text{sen } x = 1 \pm \cos(\pi / 2 - x)$

Derivada de uma função exponencial

Proposição: Se $f(x) = a^x$, $(a > 0 \;\; e \;\; a \neq 1)$, então $f'(x) = a^x \, ln(a)$.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$ex: f(x) = 6^x$

$f(x) = 2^x$

Derivada de uma função exponencial composta

Proposição

Se $y = a^u, (a > 0 \; e \; a \neq 1)$ *no qual* u *é uma função derivavel de* x,

$$então,\ y' = a^u . \ln(a) . u'$$

Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Seja $y = 2^{4x^3}$, determine a sua derivada.

$$y = 3^{2x^2 + 3x - 1}$$

Derivada de uma função exponencial

Proposição

Se $y = e^x$, $então\ y' = e^x$

Função exatamente igual a sua derivada

A função exponencial $y = e^x$ tem a propriedade de ser a sua **própria derivada**.

Seja $y = 3e^x$, determine $\frac{dy}{dx}$

Caso particular: Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x\, ln(e) = e^x$, onde e é o número neperiano.

Derivada de uma função exponencial

Proposição

Se $y = e^u$ e u é uma função derivável de x, então $y' = e^u \cdot u'$

Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$. determine $\frac{dy}{dx}$

SOLUÇÃO Aqui a função de dentro é $g(x) = \operatorname{sen} x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$. Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Seja $y = 3e^{sen\,x}$, determine $\frac{dy}{dx}$

Derivada de uma função logarítmica

Proposição

Se $y = log_a x, (a > 0 \; e \; a \neq 0), então \; y' = \frac{1}{x} log_a e$

Propriedade inversão da base com o logarítmando

$$log_a^b = \frac{1}{log_b^a}$$

$$y' = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{log_e a} \quad ou \; y' = \frac{1}{x.lna}$$

Caso particular: Se $f(x) = ln(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x\,ln(e)} = \frac{1}{x}$.

Quando temos um logarítmo na base e temos um logarítmo natural.

$Seja \; y = log_3 x, determine \; a \; sua \; derivada.$

Derivada de uma função logarítmica

Proposição

$$Se\ y = log_a u\ e\ u\ \text{é}\ uma\ função\ derivável\ de\ x, e\ u\ > 0,$$

$$então\ y = \frac{1}{u}\ .log_a e\ .u'$$

$$y' = \frac{1}{u} . \frac{1}{log_e a} .u' \quad \rightarrow y' = \frac{u'}{u. \ln{(a)}}$$

Derivada de uma função logarítmica

$$Seja\ f(x) = log_2 3x^4, determine\ f'(x)$$

$$y' = \frac{1}{u}\,.log_a e\,.u'$$

$$y' = \frac{1}{u}\,.\frac{1}{log_e a}\,.u' \rightarrow y' = \frac{u'}{u.\ln(a)}$$

Derivada de uma função logarítmica

Proposição

$$Se\ y = \ln(x)\,, x > 0, então\ y' = \frac{1}{x}$$

$$y = log_a x \ \rightarrow y' = \frac{1}{x}.log_a e$$

$$y = log_e x \ \rightarrow y' = \frac{1}{x}\,.log_e e \ \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

Sendo $y = ln5$, *calcule a sua derivada.*

Derivada de uma função logarítmica

Preposição

$Se\ y = \ln u\ e\ \ u\ é\ uma\ função\ derivável\ de\ x, e\ u > 0,$

$$y' = \frac{1}{u}\ .u'$$

$Seja\ y = \ln(5x^3)\ , determine\ y'.$

Derivada de uma função logarítmica

$$y = log_a\, u \;\rightarrow y' = \frac{u'}{u\,.\ln{(a)}}$$

$ex:$

$y = \ log_2 3x$

$y = \ log_4 5x$

Derivada de uma função logarítmica

$$y = log_3\,(x^2 + 3x + 4) \rightarrow Função\ Composta$$

Tabela de Funções Deriváveis

(1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(2) $y = x \Rightarrow y' = 1$

(3) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

(4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(5) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

(6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \ + \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

(7) $y = u^{\alpha}, 0 \neq \alpha \in Q \Rightarrow y' = \alpha\, u^{\alpha - 1} \cdot u'.$

(8) $y = a^u (a > 0,\ a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

(9) $y = e^u \quad \Rightarrow \quad y' = e^u \cdot u'$

(10) $y = \log_a u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$

(11) $y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{u}$

(12) $y = u^v \quad \Rightarrow \quad y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v', u > 0.$