Cálculo 2

Integral por Decomposição de Frações Parciais

Integral Indefinida

EXEMPLO 01

Determinar $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS: Frações impróprias

O primeiro passo é realizar uma divisão no integrando e fazer aparecer frações próprias.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 9x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x^3 - x^2 \\ \cline{3-3}
- & \underline{9x^3 - 9x^2 \qquad\qquad} & 9 \\
 & 9x^2 - 3x + 1 &
\end{array}
$$

$$\frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2} = 9 + \boxed{\frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2}}$$

fração própria

Integral Indefinida

$$\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx = \int 9 + \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)}\,dx$$

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

$$\frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$x^2(x-1)\frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)} = x^2(x-1)\frac{A}{x} + x^2(x-1)\frac{B}{x^2} + x^2(x-1)\frac{C}{(x-1)}$$

$$9x^2 - 3x + 1 = (A + C)x^2 + (-A + B)x - B$$

Integral Indefinida

$$\begin{cases} A + C = 9 \\ -A + B = -3 \\ -B = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 2 \qquad B = -1 \qquad C = 7$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^2(x-1)}\,dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{(x-1)} \right) dx$$

$$= \int 9\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{7}{(x-1)}\,dx$$

$$\boxed{= 9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x-1| + C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 02

Determinar $\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS: Fatores lineares não repetidos

$$\frac{1}{x^3+x^2-2x}=\frac{1}{x(x^2+x-2)}=\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por **x (x–1)(x+2)** e rearranjando resulta:

$$1=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$$

Integral Indefinida

Portanto:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-C=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2} \qquad B=\frac{1}{3} \qquad C=\frac{1}{6}$$

E, finalmente:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{6(x+2)}$$

Logo:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}dx=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln|x+2|+C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 03

Determinar $$\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx$$

Solução

INTEGRAÇÃO UTILIZANDO DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS: Frações próprias

O integrando é uma fração própria, uma vez que o numerador possui grau 4 e o denominador possui grau 5.

Pela regra do **fator linear**, o fator (x + 2) no denominador introduz o termo:

$$\frac{A}{x+2}$$

Integral Indefinida

Pela regra do **fator (quadrático) repetido,** o fator $(x^2 + 3)^2$ presente no denominador introduz os termos:

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}$$

Assim, a decomposição em frações parciais do integrando é:

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}$$

Multiplicar os dois lados da equação por $(x + 2)(x^2 + 3)^2$

$$(x + 2)(x^2 + 3)^2 \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} = (x + 2)(x^2 + 3)^2 \frac{A}{x + 2} +$$

$$(x + 2)(x^2 + 3)^2 \frac{Bx + C}{x^2 + 3} + (x + 2)(x^2 + 3)^2 \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}$$

Integral Indefinida

que resulta:

$$3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 = (x^2 + 3)^2 A + (x + 2)(x^2 + 3)(Bx + C) +$$
$$(x + 2)(Dx + E)$$

Expandindo o lado direito e reagrupando termos semelhantes resulta:

$$\begin{aligned} 3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 = {} & (A + B)\, x^4 + (2B + C)\, x^3 + \\ & (6A + 3B + 2C + D)\, x^2 + \\ & (6B + 3C + 2D + E)\, x + \\ & (6C + 9A + 2E) \end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes correspondentes de cada lado, obtém-se um sistema de cinco equações algébricas lineares em 5 incógnitas:

Integral Indefinida

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2B + C = 4 \\ 6A + 3B + 2C + D = 16 \\ 6B + 3C + 2D + E = 20 \\ 9A + 6C + 2E = 9 \end{cases}$$

A solução deste sistema resulta:

$A = 1 \qquad B = 2 \qquad C = 0 \qquad D = 4 \qquad E = 0$

Portanto:

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

Integral Indefinida

Logo:

$$\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{4x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + 4\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$$u = x+2$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x+2| + C$$

$$u = x^2+3$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x^2+3| + C$$

Integral Indefinida

$$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + 4\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx = \int x\,(x^2+3)^{-2}\,dx$$

$$u = x^2+3 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$\int (x^2+3)^{-2}\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right] = -\frac{1}{2u} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2(x^2+3)} + C$$

E, finalmente:

$$\boxed{\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx = \ln|x+2| + \ln|x^2+3| - \frac{2}{x^2+3} + C}$$

Fórmulas de Integração Básica

$$\int dx = \int 1 dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1,\ n \text{ racional}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot g\, x + c$$

$$\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \cos ec\, x\, cotg\, x\, dx = -\cos ec\, x + c$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} arc \sec \frac{x}{a} + c$$

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a} \right) a^x + c \quad a > 0, a \neq -1$$

Integral Indefinida

- **Bibliografia utilizada:**

  - Flemming, D. M. & Gonçalves, M. B. *Cálculo A*. Person Education. São Paulo, 1992.
  - Abdounur, O. J. & Hariki, S. Matemática Aplicada. Saraiva. São Paulo, 2006.
  - Stewart, J. *Cálculo. Volume I*. Thomson. São Paulo, 2006.
  - Priestley, W. M. *Calculus: An Historical Approach*. Springer-Verlag. New York, 1979.
  - Eves, H. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Dover, 1990.