Conceitos e Formas de Representação de uma Função - Operações com Intervalos

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 2 20/09/2021

Operações com intervalos

1º) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto.

2º) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$ é intervalo fechado.

3º) $\left[\frac{2}{5}, 7\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leqslant x < 7\right\}$ é intervalo fechado à esquerda.

4º) $\left]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leqslant \sqrt{2}\right\}$ é intervalo fechado à direita.

Operações com intervalos

a) $]-\infty\ , a[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

que também podemos indicar por $(-\infty, a[$ ou $-\infty$ — a.

b) $]-\infty\ , a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

que também podemos indicar por $(-\infty, a]$ ou $-\infty \dashv a$.

c) $]a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

que também podemos indicar por $]a, +\infty)$ ou a — $+\infty$.

d) $[a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

que também podemos indicar por $[a, +\infty)$ ou $a \vdash +\infty$.

e) $]-\infty, +\infty[\ = \mathbb{R}$

que também podemos indicar por $(-\infty, +\infty)$ ou $-\infty$ — $+\infty$.

Operações com intervalos

Representação gráfica

Os intervalos têm uma representação geométrica sobre a reta real como a que segue:

$]a, b[$

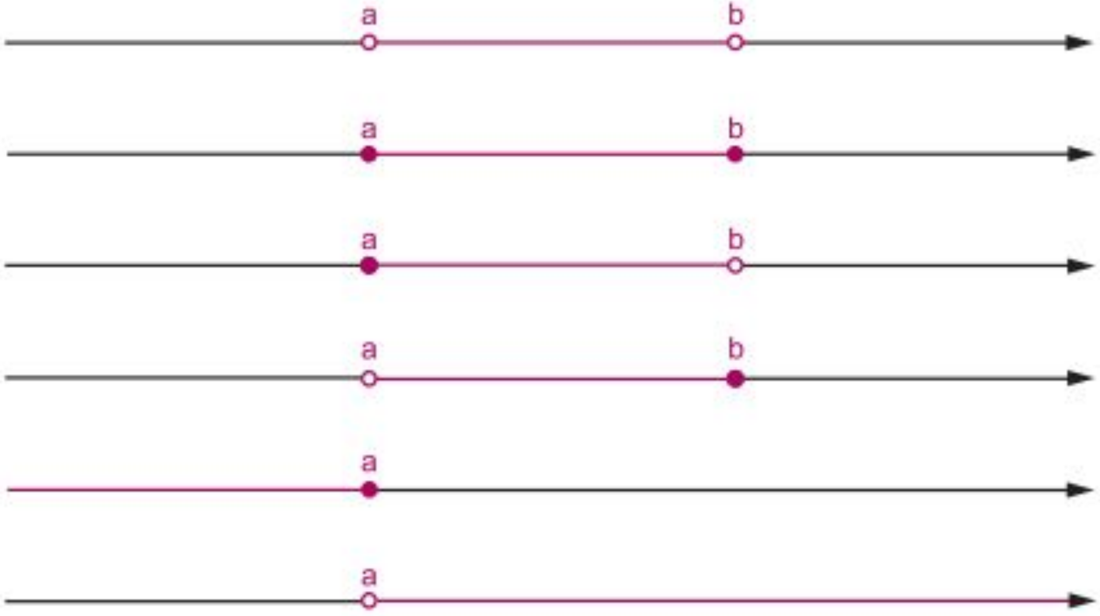
$[a, b]$

$[a, b[$

$]a, b]$

$]-\infty, a]$

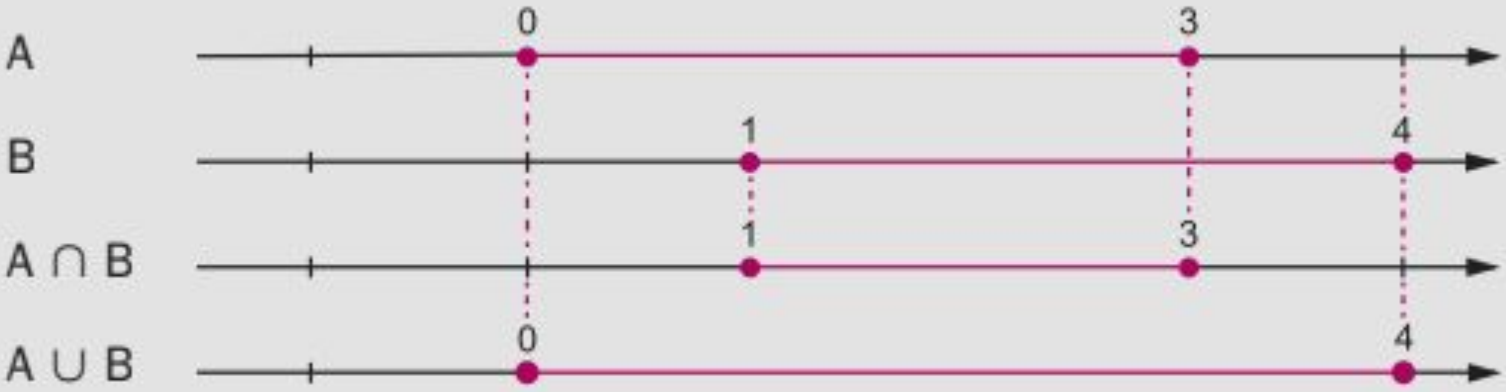
$]a, +\infty[$



Operações com intervalos

Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = [0, 3]$ e $B = [1, 4]$.

Solução



então $A \cap B = [1, 3]$ e $A \cup B = [0, 4]$.

Operações com intervalos

Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$, calcule $A \cup B$.

Operações com intervalos

Sejam $A = (-\infty; 2]$ e $B = [0; +\infty)$ intervalos de números reais. Determine $A \cap B$.

Valor Absoluto

Definição 9: O *valor absoluto* ou *módulo* de um número real x é representado e definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Vemos que o valor absoluto de um número real é sempre não negativo. Geometricamente, o valor absoluto de um número real x é sua distância do ponto de origem, independentemente de sua direção.

Exemplo 1: $|7-4| = |3| = 3$ *e* $|4-7| = |-3| = 3$.
Vemos que $|7-4| = |4-7|$ é a distância entre 4 e 7 sem a preocupação com qual dos números é maior.

Propriedades do Valor Absoluto

Sejam x e y dois números reais.

1. $|x| \geq 0$;

2. $|x| \geq x$;

3. $|-x| = |x|$;

A demonstração da cada uma das propriedades acima, decorre diretamente da definição.

4. $|x|^2 = x^2$e $|x| = \sqrt{x^2}$;

<u>*Demonstração:*</u>

(a) *Se* $x \geq 0$, *então da definição vem que,* $|-x| = |x|$ *que verifica a proposição;*

(b) *Se* $x < 0$, *então da definição vem que,* $|-x| = |x|$ *e* $(-x)^2 = x^2$, *de onde* $|x|^2 = x^2$*e, por conseguinte,* $|x| = \sqrt{x^2}$.

5. $|xy| = |x| \,.\, |y|$;

<u>*Demonstração:*</u>

Pela propriedade 4, temos que: $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x| \,.\, |y|$.

6. **Desigualdade triangular:** $|x+y| \leq |x|+|y|$;

<u>*Demonstração:*</u>

Pela propriedade 4, temos que:

$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \leq x^2+2|xy|+y^2$

$\Rightarrow |x+y|^2 \leq |x|^2+2|xy|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2$

$\Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$.

7. $|x|-|y| \leq |x-y|$;

<u>*Demonstração:*</u>

Fazendo $x = x+y-y$ *e da propriedade* 6, *segue que:*

$$|x| = |x+y-y| \leq |x-y|+|y|.$$

Somando $-|y|$ *a ambos os lados, temos que:*

$$|x|-|y| \leq |x-y|.$$

8. $|x| - |y| \leq |x+y|$;

Demonstração:

Fazendo $x = x + y - y$ *e da propriedade* f *vem que*

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y| .$$

Somando $-|y|$ *a ambos os lados, temos que:*

$$|x| - |y| \leq |x+y| .$$

9. $|x-y| \leq |x| + |y|$;

Demonstração:

Observe que:

$$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| \leq |x| + |y| .$$

10. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$.

Demonstração:

Note que:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x.\frac{1}{y}\right| = |x| \, . \, \left|\frac{1}{y}\right| = |x| \, . \, \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

11. Seja a um número real positivo, então:

(a) $|x| < a$ se, e somente se, $-a < x < a$;

(b) $|x| \leq a$ se, e somente se, $-a \leq x \leq a$

(c) $|x| > a$ se, e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;

(d) $|x| \geq a$ se, e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Demonstração: Somente do caso (a)

Inicalmente, provaremos que $|x| < a$ se $-a < x < a$:

i. Se $x > 0 \Rightarrow \; |x| = x$, uma vez que $x < a$ teremos $|x| < a$;
ii. Se $x < 0 \Rightarrow \; |x| = -x$, uma vez que , mas $x < a$ teremos $-x < a$, mas $|-x| = x$, então $|x| < a$.

Portanto $|x| < a$ se $-a < x < a$.

Agora, mostraremos que $|x| < a$ *somente se* $-a < x < a$*:*

i. Se $x \geq 0$*, como* $|x| = a$*, teremos* $x < a$*, como* $a > 0$ *e* $-a < 0$*, então* $-a < 0 < x < a$ *de onde vem que* $-a < x < a$*.*

ii.Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ *, como* $|x| < a$ *teremos que* $-x < a$ *e com* $-x > 0$*, então* $-a < 0 < -x < a$ *ou* $-a < -x < a$*, de onde vem que* $-a < x < a$*.*

Portanto, $|x| < a$ *se, e somente se,* $-a < x < a$*.*

Observação 1: A demonstração dos casos (b), (c) e (d) é análoga.

(i) $|5x - 3| = 7$.

Esta equação é verdadeira quando $5x - 3 = 7$ ou $5x - 3 = -7$, ou seja, $x = 2$ ou $x = -4/5$. Portanto, as duas soluções da equação dada são:

$x = 2$ e $x = -4/5$

(ii) $|7x - 1| = |2x + 5|$.

Esta equação será satisfeita se:

Caso 1: $7x - 1 = 2x + 5$

$$7x - 2x = 5 + 1$$

$$5x = 6$$

$$x = 6/5$$

Caso 2: $7x - 1 = -(2x + 5)$

$$7x - 1 = -2x - 5$$

$$7x + 2x = -5 + 1$$

$$9x = -4$$

$$x = -4/9.$$

Portanto, a solução final é $x = 6/5$ e $x = -4/9$.

$$|9x + 7| = -7$$

Esta equação não tem solução, pois o valor absoluto de um número nunca pode ser negativo.

$$|7x - 2| < 4.$$

$$-4 < 7x - 2 < 4$$

$$-4 + 2 < 7x - 2 + 2 < 4 + 2$$

$$-2 < 7x < 6$$

$$-\frac{2}{7} < x < \frac{6}{7}.$$

Portanto, $x \in (-2/7, 6/7)$.

$$\left|\frac{7-2x}{4+x}\right| \le 2,\ x \ne -4.$$

$$\frac{|7-2x|}{|4+x|} \le 2.$$

$$|7-2x| \le 2|4+x|.$$

$$49 - 28x + 4x^2 \le 4(16 + 8x + x^2)$$

$$49 - 28x + 4x^2 \le 64 + 32x + 4x^2$$

$$49 - 28x + 4x^2 - 64 - 32x - 4x^2 \le 0$$

$$-60x - 15 \le 0$$

$$-60x \le 15$$

$$60x \ge -15$$

$$x \ge -15/60$$

$$x \ge -1/4 \text{ ou } x \in [-1/4, +\infty).$$

Exemplo 2: Resolva a equação $|x-3|^2 - 4\,|x-3| = 12$.

Definindo $u = |x-3|$, temos que a equação acima pode ser escrita como

$$u^2 - 4u - 12 = 0 \qquad (1)$$

As raízes da equação (1) são -2 e 6.

$\star$ Para $u = -2$, segue que: $|x-3| = -2$. *Absurdo!!!!*
Por propriedade de módulo $|x| \geq 0$.

$\star$ Para $u = 6$, segue que: $|x-3| = 6 \qquad (2)$
Pela definição de módulo, temos que

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x \geq 3 \\ -(x-3), & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

1º Caso: Se $x \geq 3$, temos que:
$x - 3 = 6 \Longrightarrow x = 9$
Como $9 \in [3, +\infty)$, segue que uma solução é $S_1 = \{9\}$.

2º Caso: Se $x < 3$, temos que:
$-x + 3 = 6 \Longrightarrow x = -3$
Como $-3 \in (-\infty, 3]$, segue que uma solução é $S_2 = \{-3\}$.
Portanto, a solução é $S = \{-3, 9\}$.

Exemplo 3: Determine todos os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$|x-5| < |x+1|.$$

Solução 1:

Elevando ao quadrado ambos os lados e usando a propriedade 4, temos que:

$|x-5|^2 < |x+1|^2 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 < (x+1)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 10x + 25 < x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow \; 12x > 24$, ou seja, $x > 2$.

Solução 2:

Pela definição de módulo, temos que:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, \text{ se } x \geq 5 \\ -x+5, \text{ se } x < 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

1° *Caso:* Se $x < -1$, temos que:

$|x-5| < |x+1| \; \Rightarrow \; -x+5 < -x-1 \; \Rightarrow \; 5 < 1.$ *Absurdo!!!*

Logo, não há solução para $x < -1$, isto é, $S_0 = \{\}$.

2° *Caso*: Se $-1 \leq x < 5$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \Rightarrow -x+5 < x+1 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow x < 2.$
Logo, a solução neste intervalo é $S_1 = (2,5)$.

3° *Caso*: Se $x \geq 5$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \Rightarrow x-5 < x+1 \Rightarrow 5 < 1.$
Como a desigualdade é satisfeita para qualquer $x \geq 5$, temos que a solução é todo $x \in (5,+\infty)$, ou seja, $S_2 = (5,+\infty)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 = (2,+\infty)$.