Maximizando a Derivada Direcional
Plano Tangente
Reta Normal

Interpretação do Vetor Gradiente

Sabemos que o produto escalar de dois vetores **a** e **b** satisfaz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

em que θ é o angulo entre **a** e **b**. Assim, podemos escrever

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{=1} \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta.$$

O valor máximo de $\cos\theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$.

Teorema

O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f$ de uma função diferenciável é $\|\nabla f\|$ e ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que ∇f.

Em outras palavras, a maior taxa de variação de $f(\mathbf{x})$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente.

Em $\mathbb{R}^2$...

Considere uma função f de duas variáveis x e y e uma curva de nível dada pelo conjunto dos pontos

$$\{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : f(x(t), y(t)) = k\}.$$

Se $P = (x(t_0), y(t_0))$, então pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

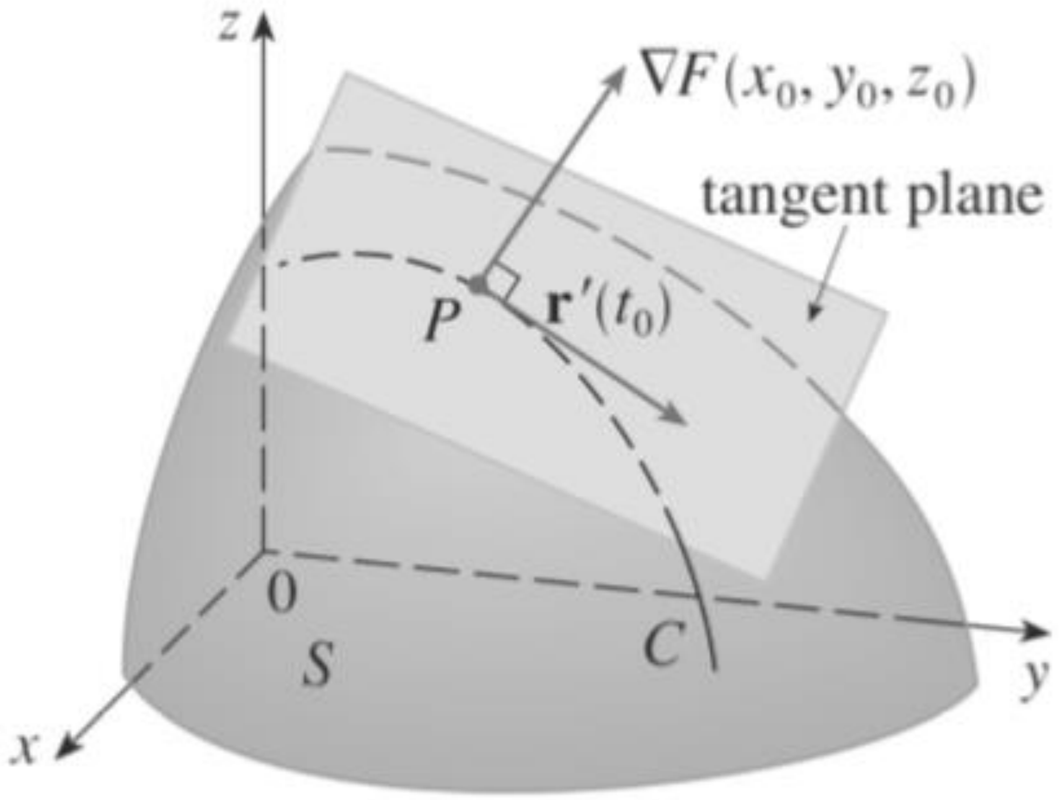
em que $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ e $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ é o vetor tangente a curva de nível em P.

Conclusão:

O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular à reta tangente à curva de nível de $f(x, y) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0)$.

Em $\mathbb{R}^3$...

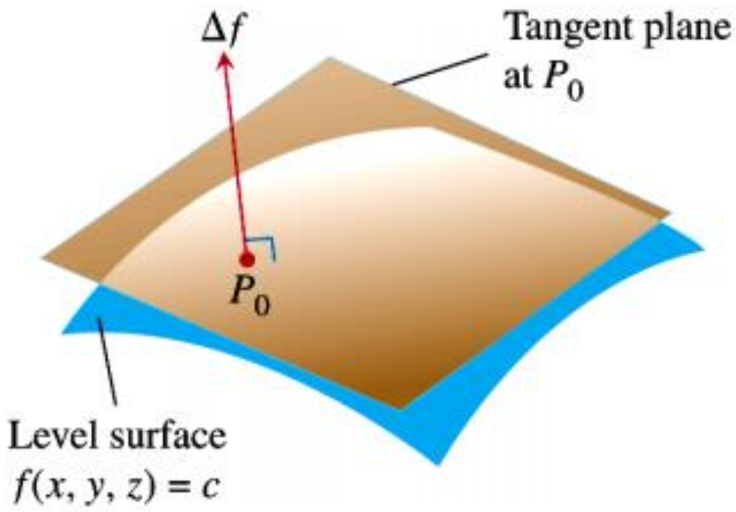
O vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento, é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de $F(x, y, z) = k$ que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$.



Planos Tangentes e Retas Normais

O plano tangente à superfície $F(x, y, z) = k$ em $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dado por todos os vetores que partem de (x_0, y_0, z_0) e são ortogonais ao gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, ou seja, a equação do plano tangente é:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$



$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

Por exemplo, vamos determinar o plano tangente ao gráfico da função

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$

Vamos considerar a superfície de nível 0 igualando-se f(x, y, z) a 0, ou seja:

$f(x, y, z) = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

$\nabla f(x, y, z) = <2x, 2y, 2z>$

Aplicando-se o vetor ao ponto (1, 1, 1), obtemos o vetor $\nabla f(x, y, z) = <2, 2, 2>$.

$\pi: 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0.$

Plano Tangente a uma Superfície $z = f(x, y)$

Ideia: Plano tangente no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $onde$ $z_0 = f(x_0, y_0)$

Podemos escrever $z = f(x, y) \Longleftrightarrow f(x, y) - z = 0.$

Assim temos uma superfície de nível para a função $F(x, y, z) = f(x, y) - z.$

Então podemos obter o plano tangente à superfície no ponto P_0 da seguinte forma:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - z) \;=\; f_x - 0 \;=\; f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) - z) \;=\; f_y - 0 \;=\; f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y) - z) \;=\; 0 - 1 \;=\; -1$$

A fórmula $F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Exemplo : Encontre o plano tangente à superfície $z = x\cos y - y\,e^{x}$ no ponto $(0,0)$.

$$z = xcosy - ye^{x} \rightarrow F(x,y,z) = xcosy - ye^{x} - z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = cosy - ye^{x} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0{,}0{,}0) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xseny - e^{x} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0{,}0{,}0) = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0{,}0{,}0) = -1$$

Equação do plano tangente:

$$1(x-0) - 1(y-0) + (-1)(z-0) = 0$$

$$x - y - z = 0$$

Reta Normal

A **reta normal** à superfície em P_0 é a reta que passa por P_0 e tem $\nabla f(P_0)$ como vetor direção.

$$\begin{cases} x = x_0 + f_x(P)t \\ y = y_0 + f_y(P)t \\ z = z_0 + f_z(P)t \end{cases}$$

EXEMPLO Determine as equações do plano tangente e reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUÇÃO O elipsóide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 - 1t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - \dfrac{2}{3}t \end{cases}$$