Conceitos e Formas de Representação de uma Função

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 3 27/09/2021

Função

Definição

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f\colon A \to B$ é uma *lei* ou regra que a *cada* elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado *domínio de f* e é denotado por $D(f)$. B é chamado de *contradomínio* ou *campo de valores de f*.

Escrevemos:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

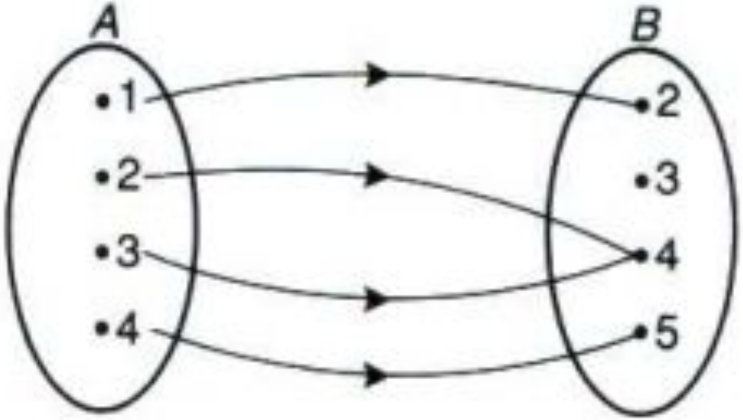
ou

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \\ x &\to y = f(x). \end{aligned}$$

Exemplos

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.

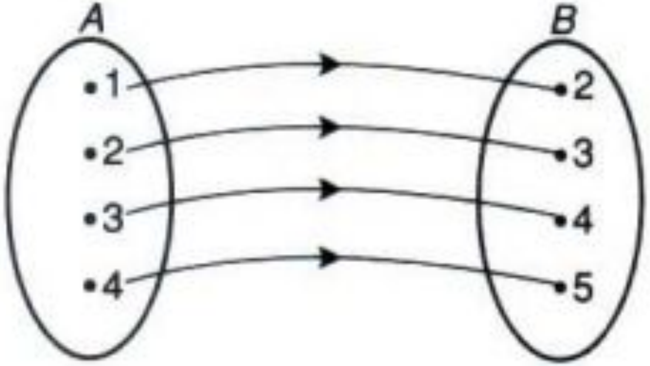


Função

(ii) $g: A \to B$

$$x \to x + 1$$

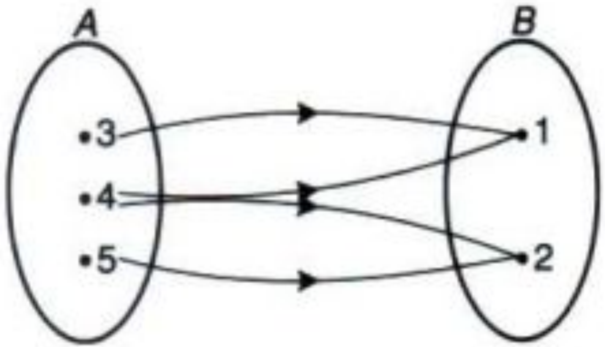
é uma função de A em B. Podemos representar g em diagrama.



Contra-Exemplos

Sejam $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2\}$.

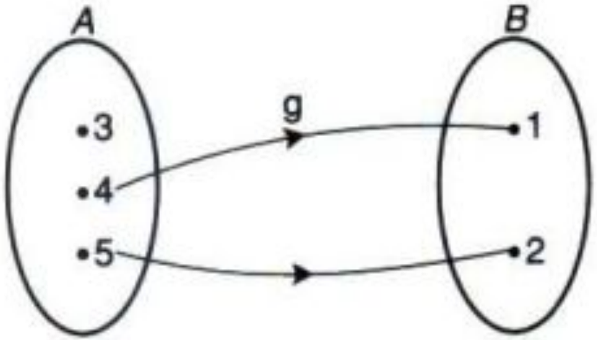
(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama a seguir *não* é uma função de A em B, pois o elemento $4 \in A$ tem dois correspondentes em B.



(ii) $g: A \to B$

$x \to x - 3$

não é uma função de A em B, pois o elemento $3 \in A$ não tem correspondente em B. Podemos ver isto facilmente representando g em diagrama.



Definição

Seja $f: A \to B$.

(i) Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de *valor* da função f no ponto x ou de imagem de x por f.

(ii) O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado *conjunto imagem de* f e é denotado por Im (f).

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = Z$ (conjunto dos inteiros) e $f: A \to B$ definida pela regra que a cada elemento de A faz corresponder o seu dobro.

Então: – a regra que define f é $y = 2x$;

– a imagem do elemento 1 é 2, de 2 é 4 etc.;

– o domíno de f, $D(f) = A$;

– a imagem de f, $\mathrm{Im}(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to x^2.$$

Então, $D(f) = \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty).$$

Quando trabalhamos com subconjuntos de $\mathbb{R}$, é usual caracterizar a função apenas pela *fórmula* ou *regra* que a define. Neste caso, entende-se que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais para os quais a função está definida.

Determinar o domínio e a imagem das funções abaixo:

(i) $f(x) = 1/x$.

Esta função só não é definida para $x = 0$. Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

(ii) $f(x) = \sqrt{x}$.

Para $x < 0$, $f(x)$ não está definida. Então, $D(f) = [0, +\infty)$ e $Im(f) = [0, +\infty)$.

(iii) $f(x) = -\sqrt{x - 1}$.

$f(x)$ não está definida para $x < 1$. $D(f) = [1, \infty)$ e $Im(f) = (-\infty, 0]$.

(iv) $f(x) = |x|$.

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, + \infty)$.

Gráficos

Definição Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domíno de f.

O gráfico da função $f(x) = x^2$ consiste em todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y = x^2$. Em outras palavras, é a coleção de todos os pares (x, x^2) do plano xy. A Figura 2.1 nos mostra o gráfico desta função, onde salientamos alguns pontos, de acordo com a tabela.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

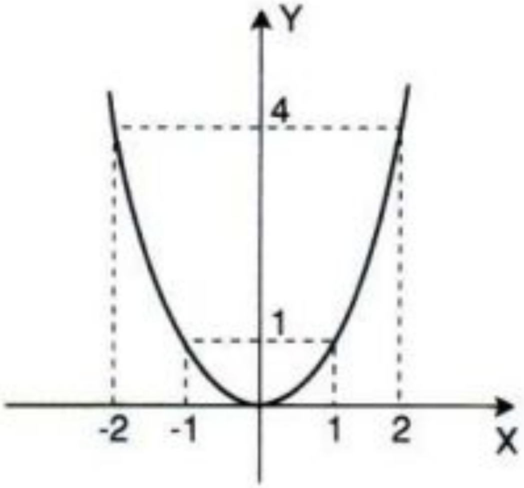


Figura 2.1

Consideremos a função $f(x) = x$. Os pontos de seu gráfico são os pares $(x, x) \in \mathbb{R}^2$. A Figura 2.2 mostra este gráfico.

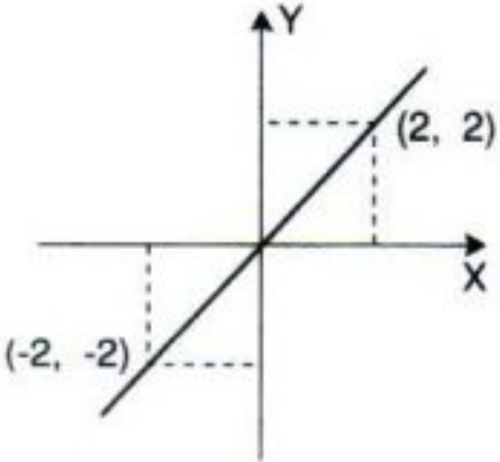


Figura 2.2

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 2, & \text{se} \quad -2 < x \leq 2 \\ 4, & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

O gráfico de f pode ser visto na Figura 2.3.

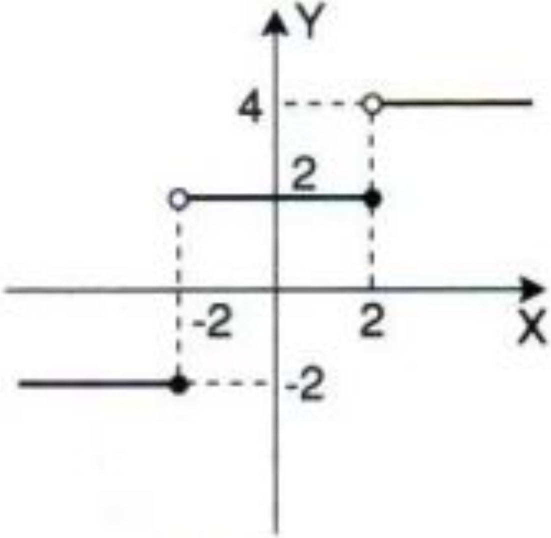


Figura 2.3

Seja $f(x) = |x|$. Quando $x \geq 0$, sabemos que $f(x) = x$. Quando $x < 0$, $f(x) = -x$. O gráfico de $|x|$ pode ser visto na Figura 2.4.

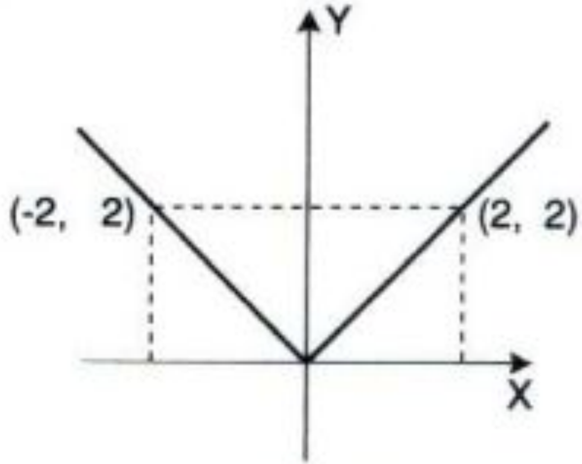


Figura 2.4

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Então, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. A Figura 2.5 mostra o gráfico de $f(x) = 1/x$.

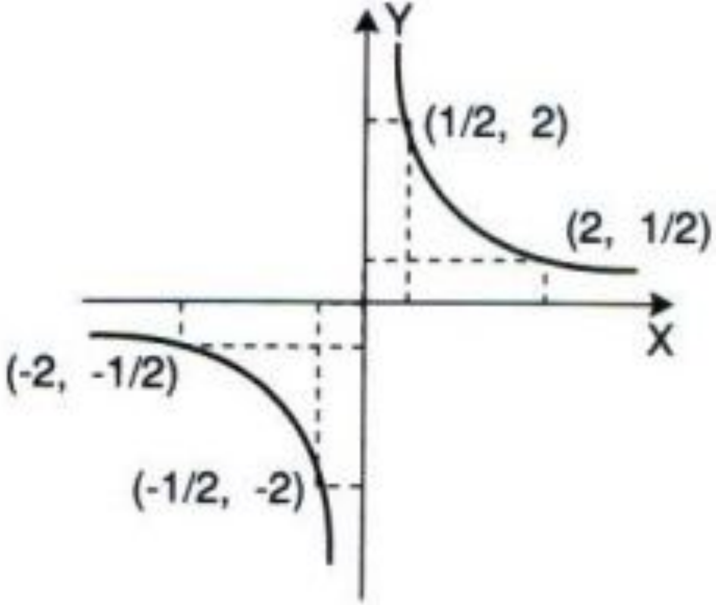


Figura 2.5

Neste exemplo vamos ilustrar como os gráficos podem nos dar informações importantes sobre situações práticas.

O gráfico da Figura 2.6 representa a quantidade diária q de peças produzidas numa linha de montagem, em função do número de operários n, que trabalham nessa linha. O que podemos concluir a partir da análise desse gráfico?

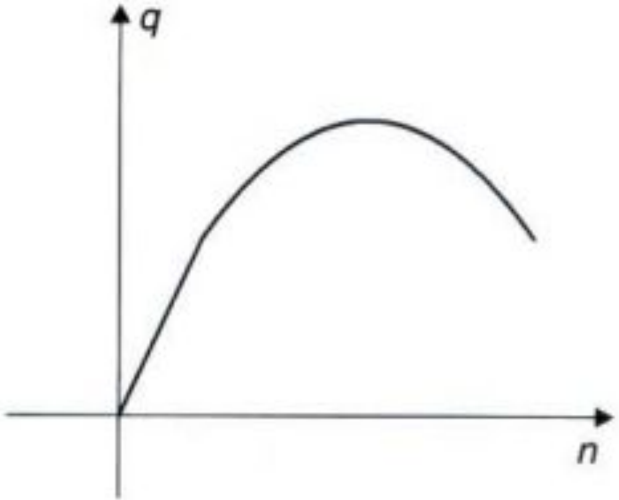


Figura 2.6

Na Figura 2.7 representamos o mesmo gráfico onde assinalamos dois pontos importantes para a análise. Podemos observar que entre 0 e n_1 o acréscimo no número de operários acarretará um acréscimo proporcional na produtividade. Entre n_1 e n_2, o acréscimo da produtividade vai se tornando menos significativo, sendo nulo no ponto n_2.

A partir de n_2 o acréscimo no número de operários implicará uma diminuição na produtividade.

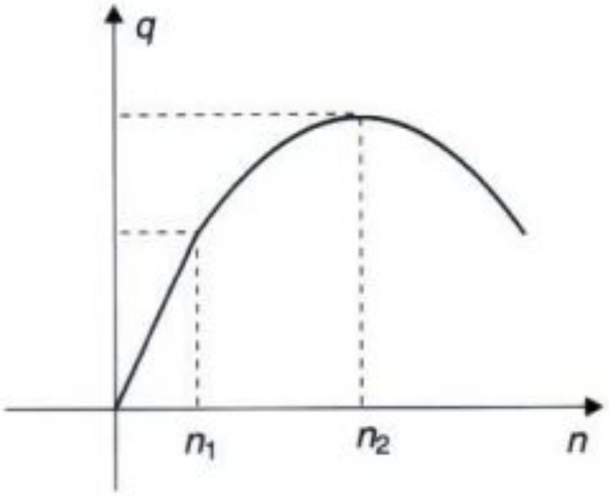


Figura 2.7

Podemos nos perguntar se, dada a curva c no plano xy, ela sempre representa o gráfico de uma função. A resposta é não. Sabemos que, se f é uma função, um ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Assim a curva c só representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical corta a curva no máximo em um ponto.

Na Figura 2.8 a curva c_1 representa o gráfico de uma função, enquanto a curva c_2 não representa.

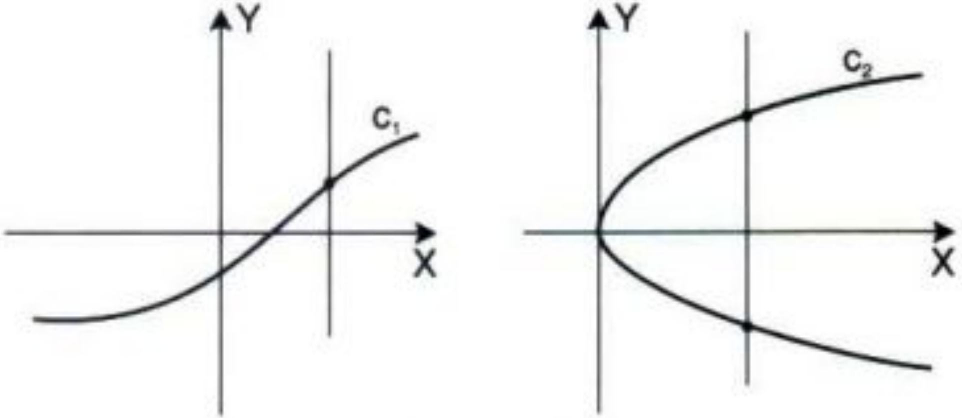


Figura 2.8

Operações

Assim como podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números, também podemos produzir novas funções através de operações. Essas operações são definidas como segue:

Definição Dadas as funções f e g, sua soma $f + g$, diferença $f - g$, produto $f \cdot g$ e quociente f/g, são definidas por:

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x);$

(ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x);$

(iii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$

(iv) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

O domínio das funções $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ é a intersecção dos domínios de f e g. O domíno de f/g é a intersecção dos domínios f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

Exemplo Sejam $f(x) = \sqrt{5 - x}$ e $g(x) = \sqrt{x - 3}$. Então,

$$(f + g)(x) = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3};$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{5 - x} - \sqrt{x - 3};$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{5 - x} \cdot \sqrt{x - 3} \text{ e}$$

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\sqrt{x - 3}}.$$

Como $D(f) = (-\infty, 5]$ e $D(g) = [3, +\infty)$, então o domínio $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ é $[3, 5]$. O domínio de f/g é $(3, 5]$. O ponto 3 foi excluído porque $g(x) = 0$ quando $x = 3$.

O domínio das funções $f \pm g$ e $f.g$ é a interseção dos domínios de f e g. O domínio de $\frac{f}{g}$ é a interseção dos domínios f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

Exemplo 8: Sejam $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Determine as funções $f \pm g$, $f.g$ e $\frac{f}{g}$ e seus domínios.

Solução: Pela definição acima, temos que:

$(f \pm g)(x) = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

$(f.g)(x) = (2x - 1)\sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

Como $Df = \mathbb{R}$ e $Dg = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, então o domínio de $f \pm g$ e $f.g$ é $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. O domínio de $\frac{f}{g}$ é $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Operações com Funções

01- Seja $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = X - 1$

a) encontre o domínio e a fórmula da funções resultantes. $f + g$; $f.g$ e o f/g.

02- Considere as seguintes funções: $f(x) = \sqrt{4 - x}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Defina o domínio das seguintes funções:

a) $(f+g)(x)$
b) $(f-g)(x)$
c) $(f.g)(x)$
d) $(f/g)(x)$

Definição Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g_0 f$, é definida por $(g_0 f)(x) = g(f(x))$.

O domínio de $g_0 f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

Simbolicamente,

$D(g_0 f) = \{x \in D(f) / f(x) \in D(g)\}$.

O diagrama pode ser visualizado na Figura 2.9.

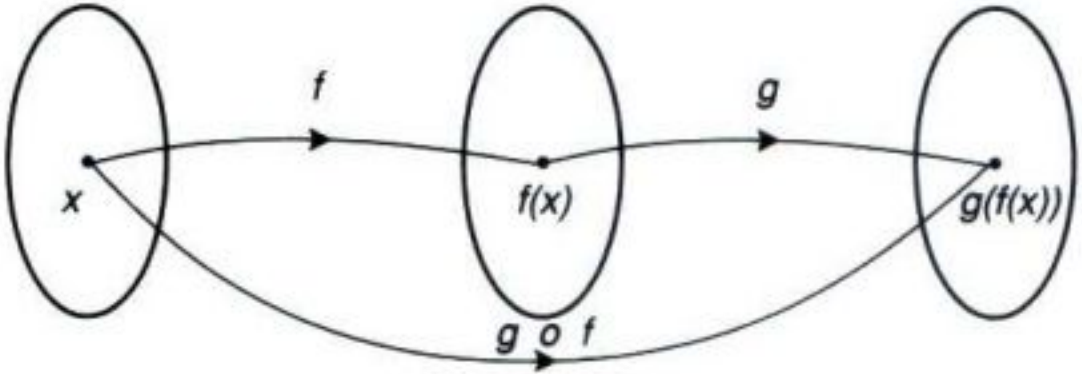


Figura 2.9

Exemplo 9: Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre a função $f_1(x) = (g \circ f)(x)$ e $f_2(x) = (f \circ g)(x)$.

<u>**Solução:**</u> Pela definição de função composta, temos que:

$f_1(x) = (g \circ f)(x) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}$;

$f_2(x) = (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = x + 3$.

Note que, $g \circ f \neq f \circ g$.

Sejam $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontrar: *a)* $g_0 f$; *b)* $f_0 g$; *c)* $f_0 f$ e *d)* $g_0 g$.

a) $(g_0 f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = \sqrt{2x - 3}$.

O domínio de f é $D(f) = (-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $D(g) = [0, +\infty)$. Assim, o domínio de $g_0 f$ é o conjunto de todos os números reais x, tais que $f(x) \in [0, +\infty)$, isto é, todos os números reais tais que $2x - 3 \geq 0$. Logo, $D(g_0 f) = [3/2, +\infty)$.

b) $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$ e

$$D(f_0 g) = \{x \in D(g) = [0, +\infty)/g(x) \in D(f) = (-\infty, +\infty)\} = [0, +\infty).$$

c) $(f_0 f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 3)$

$$= 2(2x - 3) - 3$$

$$= 4x - 9.$$

$$D(f_0 f) = (-\infty, +\infty).$$

d) $(g_0 g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}.$

$$D(g_0 g) = [0, +\infty).$$

Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

b) Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.

c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$

Solução

a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da lei de *f*, trocando-se *x* por g(x):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de g, trocando-se *x* por f(x):

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$:

$$(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0$$

Calculemos $g \circ f$ para $x = 2$:

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11$$

c) O problema em questão resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja:

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \;\Rightarrow\; 4(x^2 - x - 6) = 0 \;\Rightarrow\; x = 3 \;\text{ ou }\; x = -2$$

. Sejam as funções reais *f* e *g* definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

b) Calcule $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$.

c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$

Sejam $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2, & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

e $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 2x, & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$

Determinar $f_0 g$.

Se $x < 0$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1^2 = 1$.

Se $0 \leq x \leq 1$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(2x)$.

Para $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, temos $0 \leq 2x \leq 1$. Logo, neste caso, $(f_0 g)(x) = (2x^2) = 4x^2$.

Para $\dfrac{1}{2} < x \leq 1$ temos $2x > 1$. Assim, para este caso, $(f_0 g)(x) = 0$. Se $x > 1$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1$.

$$\text{Logo } (f_0 g)(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 4x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{se} \quad 1/2 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

O domínio de $f_0 g$ é $D(f_0 g) = (-\infty, +\infty)$.

O gráfico de $f_0 g$ pode ser visto na Figura 2.10.

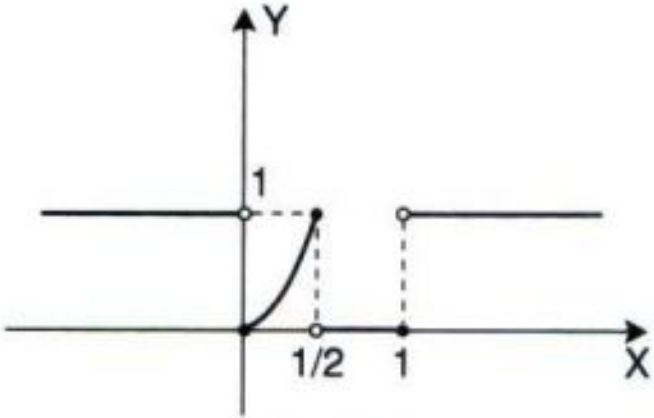
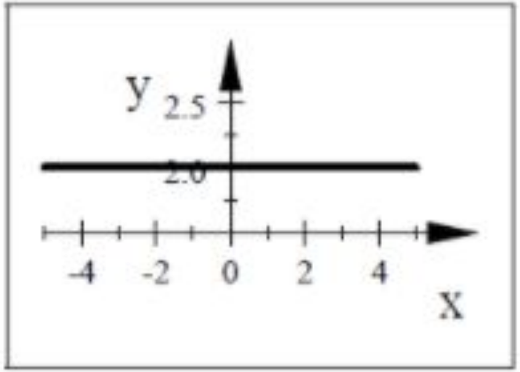


Figura 2.10

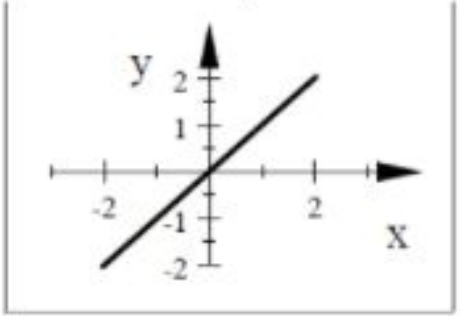
Funções Especiais

1. **Função constante:** $f : \mathbb{R} \to \{k\}$ definida por $f(x) = k$. Associa a qualquer número real x um mesmo número real k. Graficamente, é uma reta paralela ao eixo das abscissas. Se $k = 2$, o gráfico é

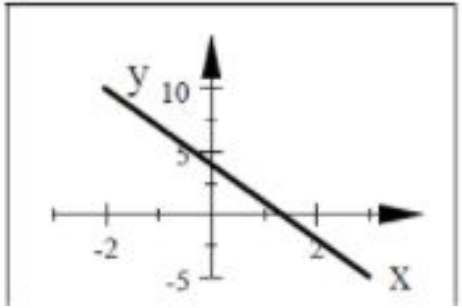


2. **Função Identidade:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. O gráfico é a reta bissetriz do primeiro e do terceiro quadrante.

Funções Especiais

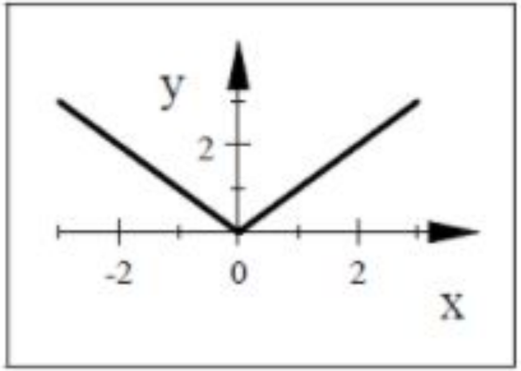


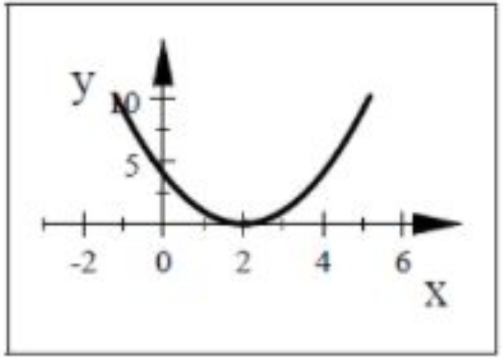
3. **Função Afim:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, onde a e b constantes e $a \neq 0$ são, respectivamente, o *coeficiente angular* e o *coeficiente linear*. O gráfico é uma reta. Se $a > 0$, a reta é crescente; se $a < 0$, a reta é decrescente; e se $b = 0$, a reta passa pela origem do sistema cartesiano. Exemplo: $f(x) = -3x + 4$.



Funções Especiais

4. **Função Módulo:** $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = |x|$.

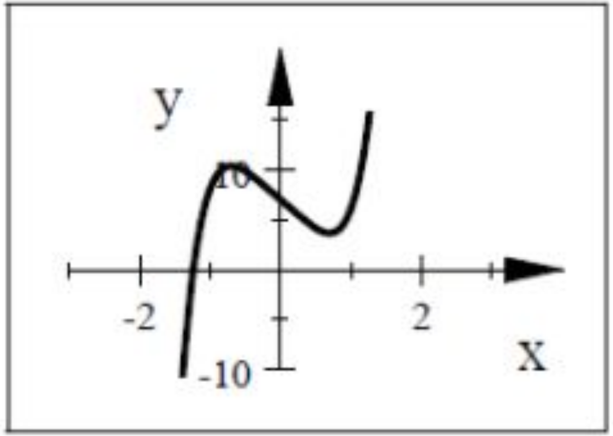




5. **Função Quadrática:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c constantes e $a \neq 0$. O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y. Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima. Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Funções Especiais

6. **Função polinomial:** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, com a_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, constantes reais, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e n é o grau do polinômio. As funções constante, identidade, lineares e quadráticas são exemplos de funções polinomiais. Exemplo: $f(x) = 5x^5 - 6x + 7$.



Funções Especiais

7. **Função Racional:** função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $q(x) \neq 0$. O domínio da função racional é o conjunto dos reais excluindo todos os x tais que $q(x) \neq 0$. Exemplo: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.