Definição de Limites de uma função

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

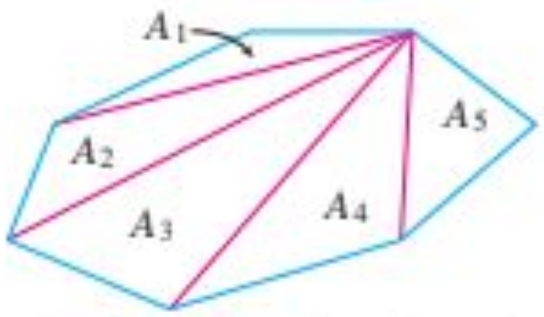
INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 18/10/2021

Introdução à Limite

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quando foram encontradas áreas usando o chamado “método da exaustão”. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura abaixo e, em seguida, somando as áreas obtidas.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \text{-}A_5$$

Introdução à Limite

Em matemática, o conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor.

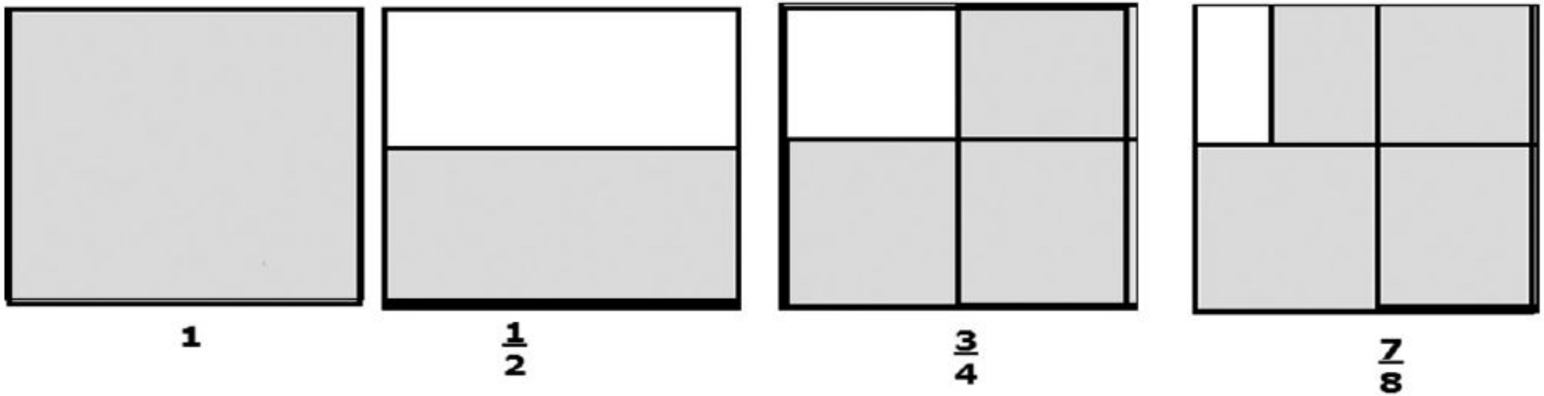
Limites

O conceito moderno de Limites foi desenvolvido na Europa a partir do século XVIII a XIX. Muito utilizado para resolução de problemas envolvendo Cálculo Diferencial, com aplicação em várias áreas de conhecimento, como Física, Engenharia, Astronomia e Biologia, entre outras. Por muitos anos, o conceito de Limites foi relacionado à ideia de infinito envolvendo a representação numérica com grandes valores, ou o contrário, com valores muito pequenos. Vamos iniciar nossos estudos com uma noção intuitiva de limites!

Introdução à Limite

Noção intuitiva de limites

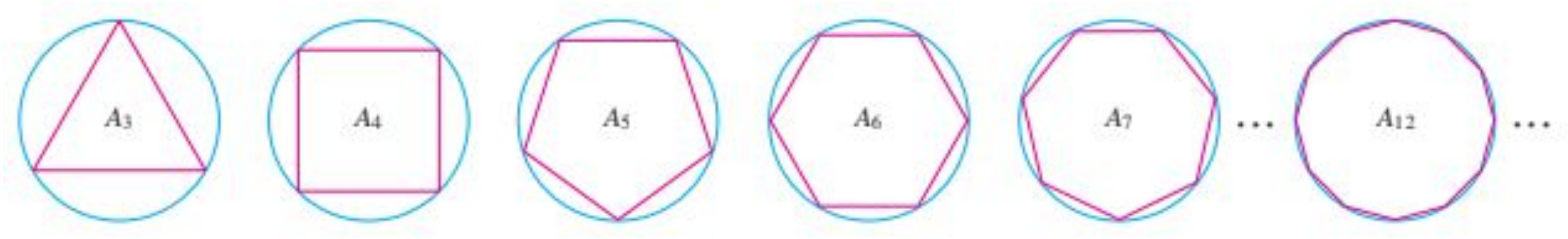
Vamos considerar a divisão de uma área de um quadrado igual a 4 cm², para apresentar a noção intuitiva sobre Limites.



Se dividirmos a figura com 4 cm² e colorirmos a metade, obteremos a fração 1/2 , depois se colorirmos a metade da metade que sobrou,obteremos ¾ certo? Se novamente pintarmos a metade da metade que sobrou, se continuarmos nesta sequência, a área colorida vai tendendo ao valor total de 4 cm². Ou seja, a resultante vai tendendo a 4, assim concluímos que o Limite desse desenvolvimento é representado quanto ao número de momentos que tendem ao infinito.

Introdução à Limite

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e, então, aumentar o número de lados deles. A Figura abaixo ilustra esse procedimento no caso especial de um círculo, com polígonos regulares inscritos.

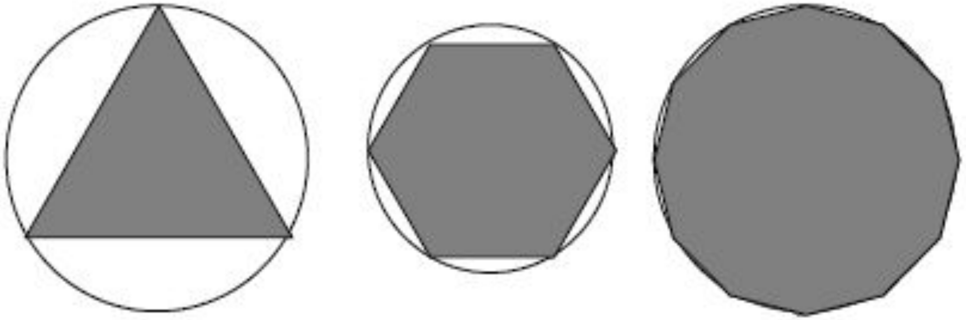


Seja An a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que An ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos, então, que a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos inscritos e escrevemos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Introdução à Limite

A idéia de uma variável aproximando-se de um valor limite aparece de forma clara quando se procura estabelecer a fórmula que representa a área de um círculo. Assim, considerando a área de um polígono regular de *n* lados inscrito no círculo, vemos que a medida que *n* cresce a área do polígono se aproxima da área do círculo.

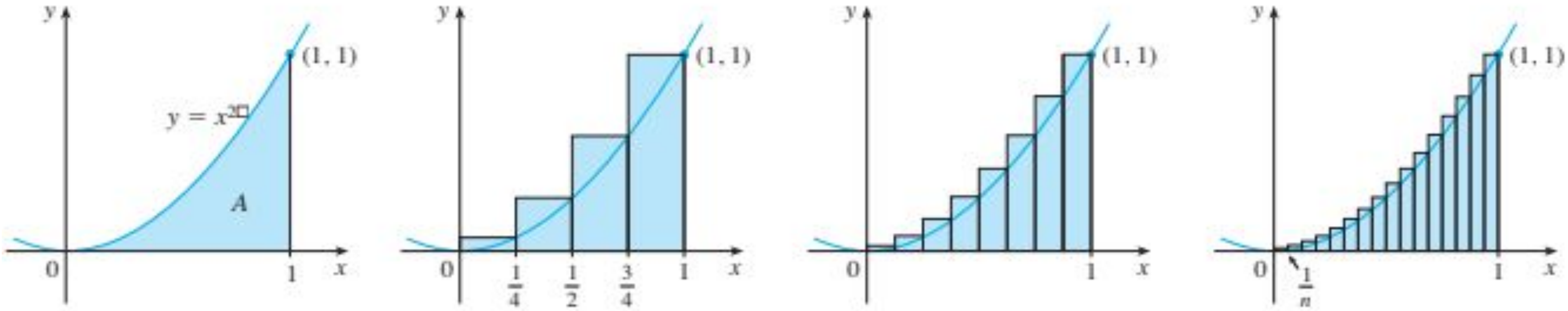


Fazendo *n* cresc ... um limite e este é definido como a área do círculo. Neste exemplo, observamos geometricamente a ideia de limite.

Introdução à Limite

Os gregos, porém, não usaram explicitamente limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usa o método da exaustão para demonstrar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$

Usaremos uma ideia semelhante para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura abaixo. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos fazer decrescer a largura dos retângulos e, então, calcular A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.



Introdução à Limite

Vamos construir a noção de limite trabalhando com o conjunto dos R. Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$;
2. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right\}$;
3. $\{1, 0, -1, -2, -3, \cdots\}$;
4. $\{1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \cdots\}$.

Observe que, na sucessão (1) os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um limite; em (2), os termos estão se aproximando de 1, ou seja, 1 é seu limite; em (3), os termos da sucessão decresce indefinidamente sem atingir um limite; e, em (4), os termos estão oscilando, não havendo um limite.

Introdução à Limite

Na sucessão (1), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um limite. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar, na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão tendem para o infinito ou que o limite da sucessão é infinito.

Denota-se $x \to +\infty$

Na sucessão (2) os termos crescem, mas não ilimitadamente, os números aproximam-se cada vez mais do valor 1. Sem nunca atingir esse valor. Dizemos que

$x \to 1$

De maneira análoga, dizemos que na sucessão (3)

$x \to -\infty$

Em (4) os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite.

Limite de uma Variável

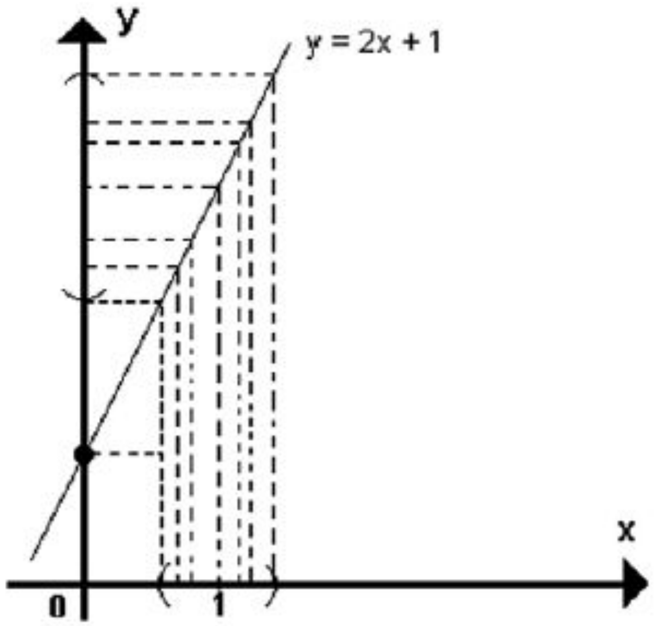
Vamos aplicar a noção intuitiva envolvendo uma função linear.

Seja a função f(x) = 2x + 1, vamos atribuir valores para x que se aproximem de 1 por valores menores que 1 (esquerda) e por valores maiores que 1 (direita).

x	$y = 2x + 1$
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98

x	$y = 2x + 1$
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

Limite de uma Variável



Notamos que à medida que x se aproxima de 1, y se aproxima de 3,

ou seja, quando x tende para 1 (x→1), y tende para 3 (y →3), ou seja:

$$\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$$

Observamos que quando x tende para 1, y tende para 3 e o limite da função é 3. Esse é o estudo do comportamento de f enquanto x ->1, x não precisa assumir o valor 1. Se f(x) tende para 3 (f(x) →3), dizemos que o limite de f quando x→1 é 3. Podem ocorrer alguns casos em que para x = 1 o valor de f(1) não seja 3.

Limite de uma Variável

Determine $\lim_{x \to 3} 2x - 1$

Quando $x \to 3^-$:

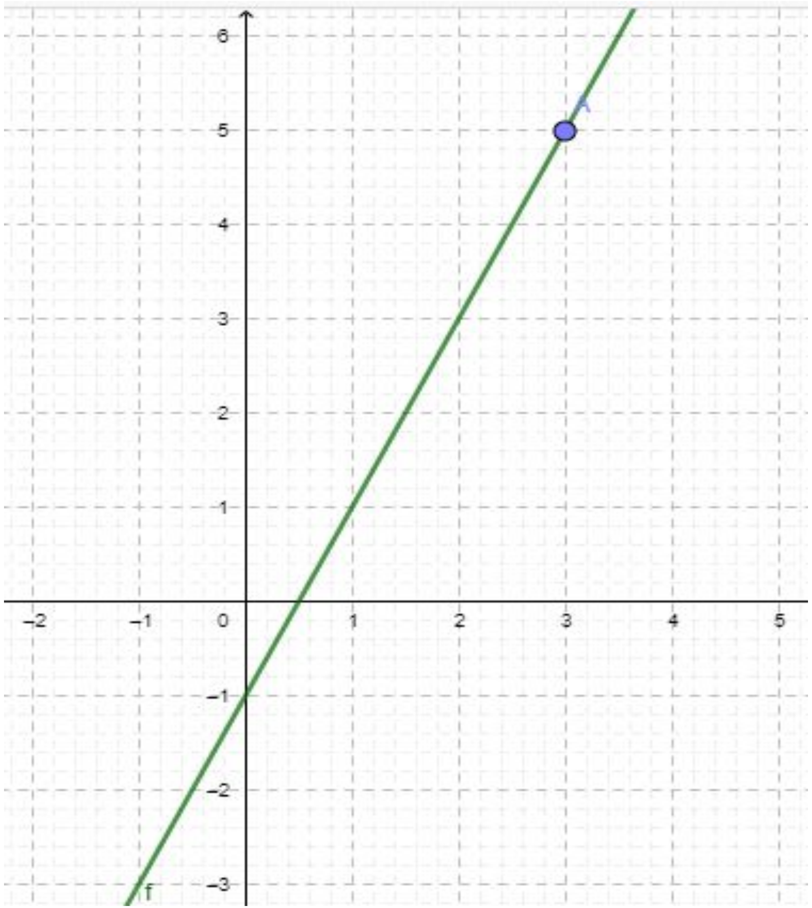
x	2	2,5	2,9	2,95	$\cdots$	2,99	$\cdots$	2,999	$\cdots$
$f(x)$	3	4	4,8	4,9	$\cdots$	4,98	$\cdots$	4,998	$\cdots$

Quando $x \to 3^+$:

x	4	3,5	3,1	3,05	$\cdots$	3,01	$\cdots$	3,001	$\cdots$
$f(x)$	7	6	5,2	5,1	$\cdots$	5,02	$\cdots$	5,002	$\cdots$

Limite de uma Variável

Determine $\lim_{x \to 3} 2x - 1$



Limite de uma Variável

Como a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ se comporta próximo de $x = 1$?

Quando $x \to 1^+$:

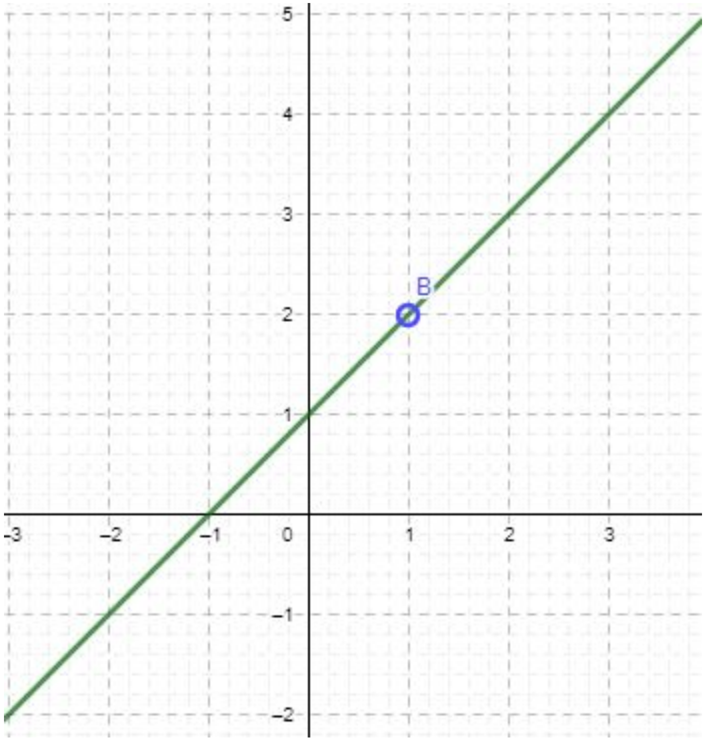
x	2	1,5	1,1	1,01	$\cdots$	1,001	$\cdots$	1,000001	$\cdots$
$f(x)$	3	2,5	2,1	2,01	$\cdots$	2,001	$\cdots$	2,000001	$\cdots$

Quando $x \to 1^-$:

x	0	0,5	0,9	0,99	$\cdots$	0,999	$\cdots$	0,999999	$\cdots$
$f(x)$	1	1,5	1,9	1,99	$\cdots$	1,999	$\cdots$	1,999999	$\cdots$

Limite de uma Variável

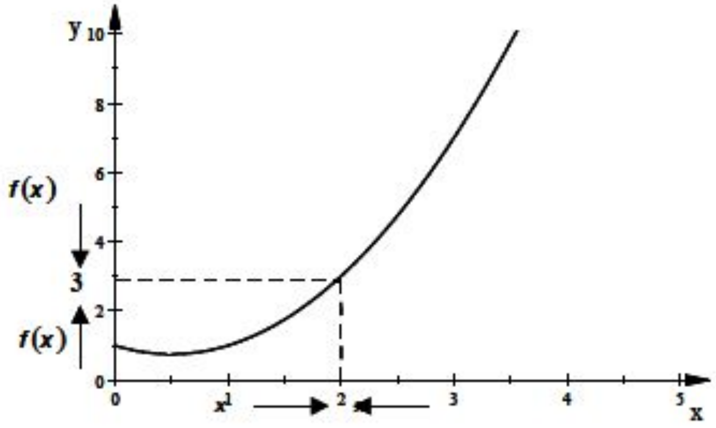
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



Limite de uma Variável

O uso básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor.

Exemplo: Examinemos o comportamento da função f (x) = x² - x + 1, quando x se



Representando f na forma tabular, temos que:

x	$1,99$	$1,995$	$1,999$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2,001$	$2,005$	$2,05$
$f(x)$	$2,8525$	$2,9701$	$2,985025$	$\cdots$		$\cdots$	$3,003001$	$3,015025$	$3,1525$

Limite de uma Variável

Observando a tabela e o gráfico é fácil constatar que o limite de $x^2 - x + 1$ quando x tende a 2 é 3 por qualquer um dos lados de 2, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$.

Note que, na análise precedente estivemos preocupados com os valores de f próximos do ponto $x = 2$ e não com o valor de f em $x = 2$.

Informalmente, temos que se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos quanto quisermos de b, fazendo x suficientemente próximo de a (não igual a a), então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ ou } f(x) \to b \text{ se } x \to a.$$

Observação: No exemplo anterior, a função $f(x)$ estava definida em $x = 2$ (ponto de interesse), mas quando falamos em limite nos interessa saber o comportamento da função na vizinhança de um certo a, não necessita que a função f esteja definida no ponto a ser analisado. Observe isso, no exemplo a seguir.

Limite de uma Variável

Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

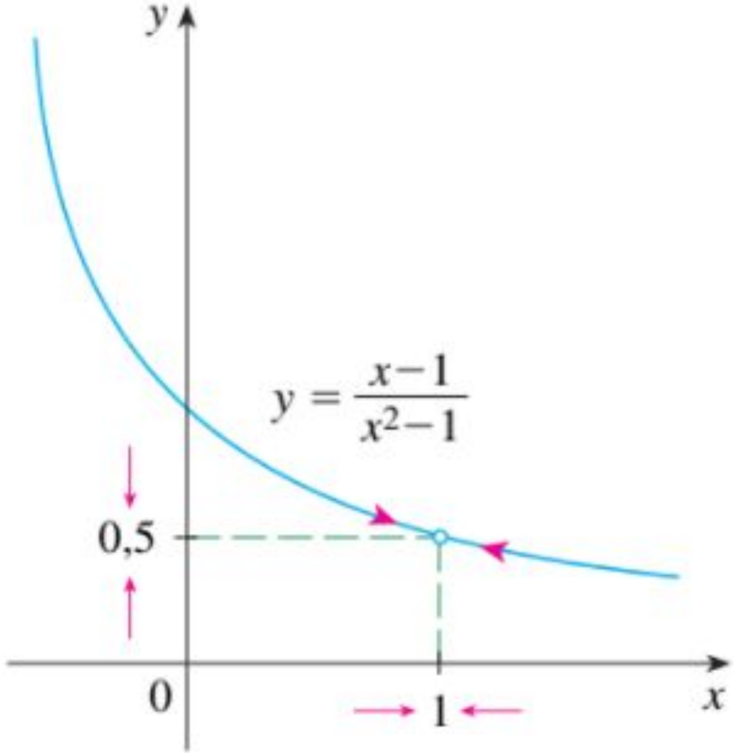
SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ não está definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não são iguais a a.

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Limite de uma Variável

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0{,}5$$



Limite de uma Variável

Estime o valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 1{,}0$	0,16228
$\pm 0{,}5$	0,16553
$\pm 0{,}1$	0,16662
$\pm 0{,}05$	0,16666
$\pm 0{,}01$	0,16667

Limite de uma Variável

À medida que t tende a 0, os valores da função parecem tender a 0,1666666 . . . e, assim, podemos conjecturar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

Limites de uma função

1 **Definição** Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Limite de uma função

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a. Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$.

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

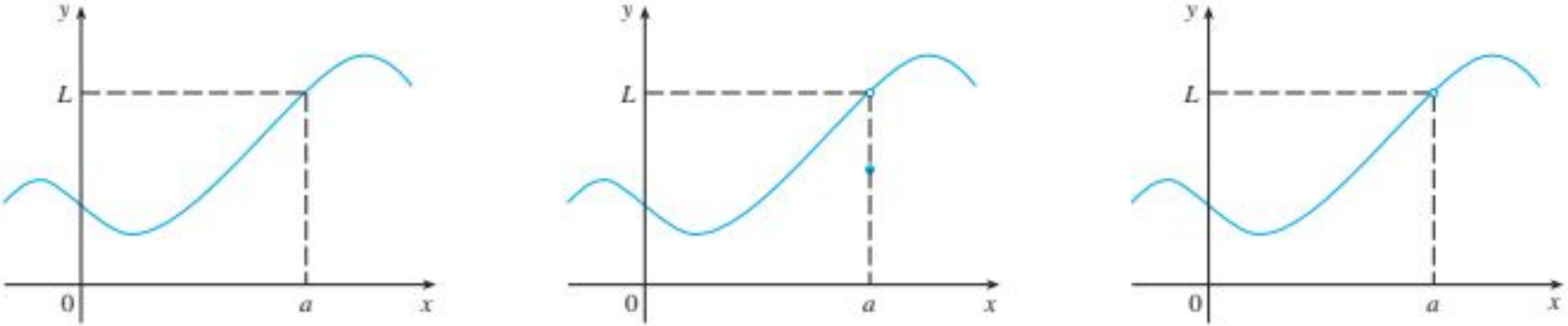
é

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a$$

que geralmente é lida como "$f(x)$ tende a L quando x tende a a".

Observe a frase "mas $x \neq a$" na definição de limite. Isso significa que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a, nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de a*.

Limites de uma função



(a) (b) (c)

Limites Laterais

$\boxed{2}$ **Definição** Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

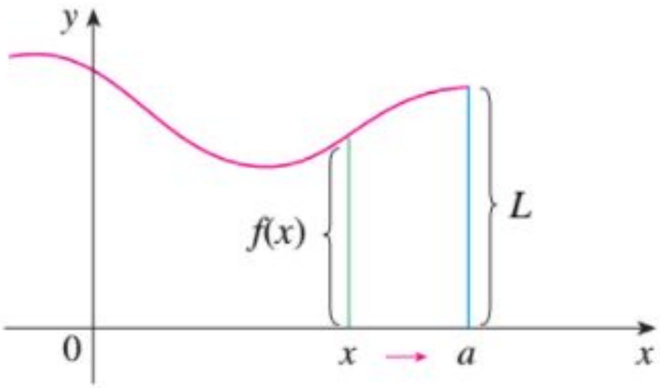
e dizemos que o **limite à esquerda** de ***f* (*x*) quando *x* tende a *a*** [ou o **limite d e*f* (*x*) quando *x* tende a *a* pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Perceba que a Definição 2 difere da Definição 1 somente por necessitarmos que x seja menor que a. De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a, obtemos "o **limite à direita de *f* (*x*) quando *x* tende a *a*** é igual a L" e escrevemos

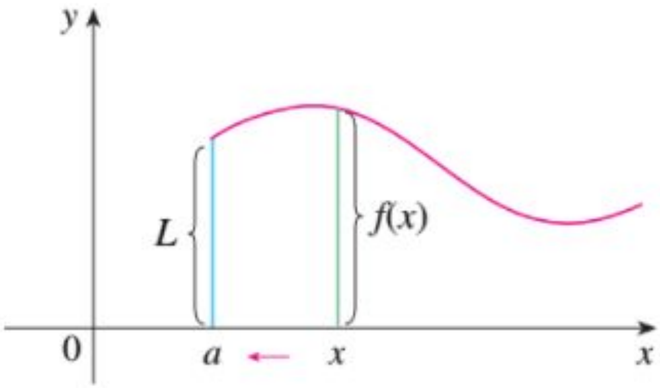
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Limites Laterais

Dessa forma, o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



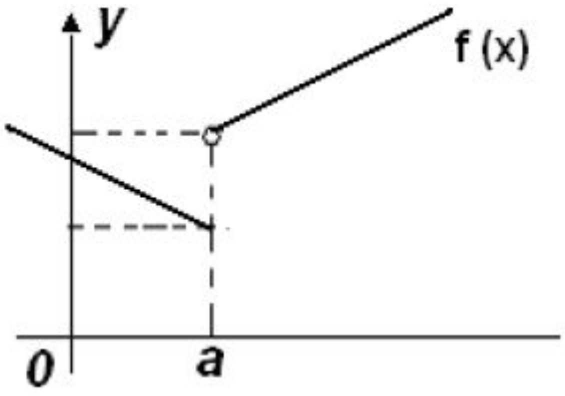
(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

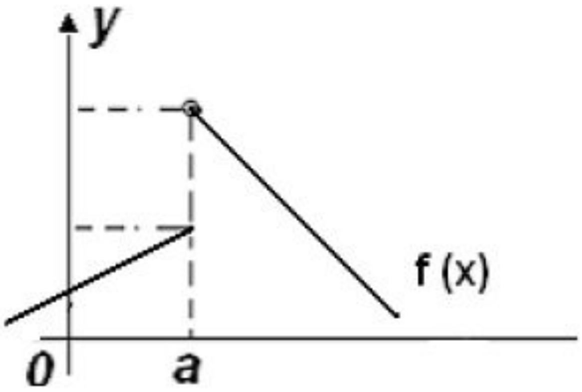
Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limites Laterais

Nem sempre uma função tem limites iguais quando se aproxima pela *direita* ou pela *esquerda* de um número real a. Vamos analisar agora, funções que estão definidas em intervalos onde existem pontos nos quais o gráfico da função dá um salto. Assim,

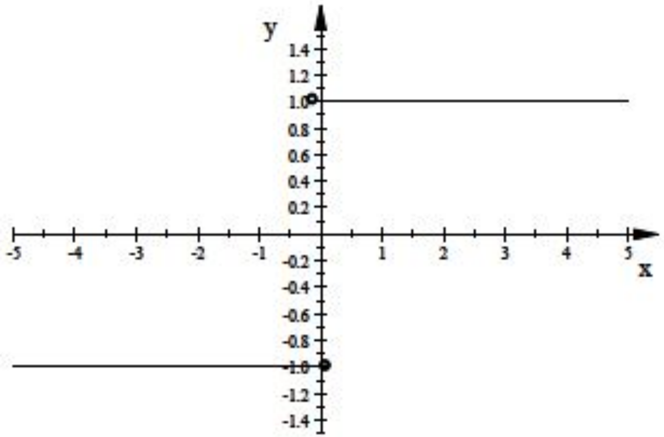




Isto pode ser observado no próximo exemplo.

Se $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Note que: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0; \\ -1, \text{ se } x < 0. \end{cases}$

Graficamente,



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Com esta notação, o índice superior $+$ indica um *limite à direita* e o índice superior $-$ indica um *limite à esquerda*.

Definição 2: Se a função $f(x)$ tende a b_1, finito ou não, quando x tende a a por valores inferiores ao a, então dizemos que b_1 é o *limite à esquerda* de $f(x)$ no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1.$$

Definição 3: Se a função $f(x)$ tende a b_2, finito ou não, quando x tende a a por valores superiores ao a, então dizemos que b_2 é o *limite à direita* de $f(x)$ no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2.$$

Estes limites laterais podem ser:

i. iguais, isto é, $b_1 = b_2$;

ii. diferentes, isto é, $b_1 \neq b_2$;

iii. pode existir um e outro não;

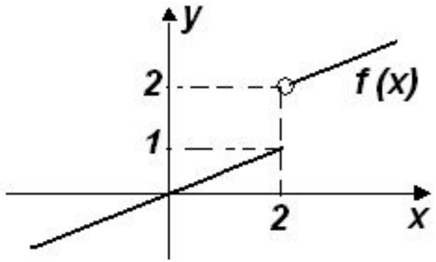
iv. ambos não existirem.

Exemplo 4: Determine o limite (limite bilateral) das funções abaixo

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } x \leq 2; \\ \frac{x}{2} + 1, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

   Solução:

   O gráfico de f é:



Graficamente, os limites laterais são:

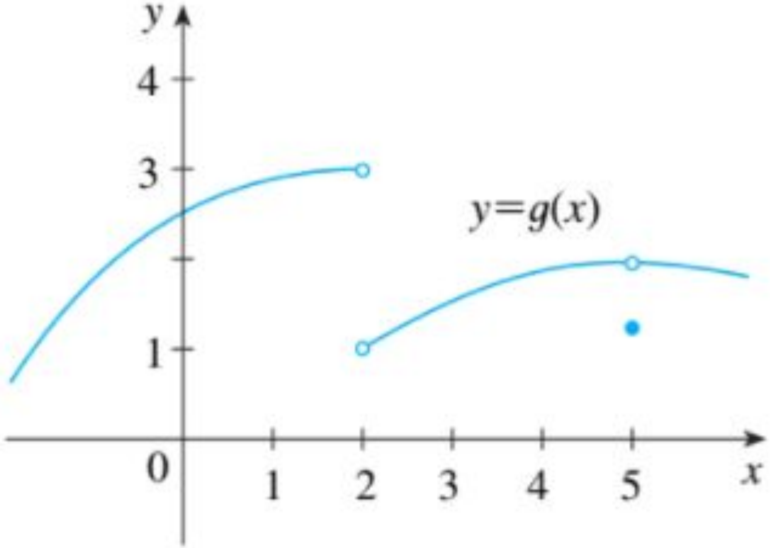
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{x}{2}\right) = 1;$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, então não existe o $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (limite bilateral).

Limites Laterais

O gráfico de uma função t é apresentado na Figura abaixo. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:



(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

Limites Laterais

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de $\boxed{3}$ que $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

Limites Laterais

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de $\boxed{3}$, temos

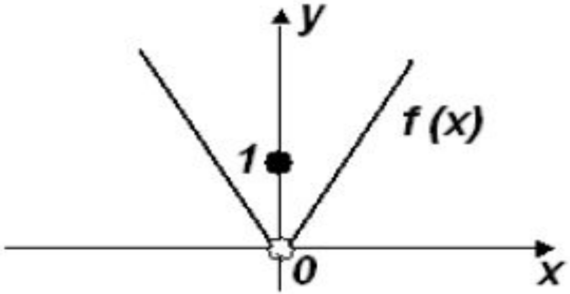
$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x \text{, se } x > 0; \\ 1\text{, se } x = 0; \\ -x\text{, se } x < 0; \end{cases}$$

<u>**Solução:**</u>

O gráfico de f é:



Graficamente, os limites laterais são:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0;$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, então existe o limite bilateral e $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

$$f(x) = \begin{cases} 6x+7\,, \text{ se } x \leq -2; \\ 4-x, \text{ se } x > -2. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (6x+7) = -5;$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (4-x) = 6.$$

Solução:

Graficamente, os limites laterais são:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (6x+7) = -5;$$

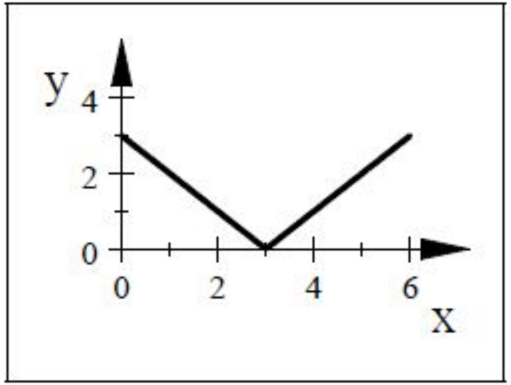
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (4-x) = 6.$$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$, então limite bilateral não existe.

$f(x) = |x - 3|$.

Solução:

O gráfico de f é:



$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Graficamente, os limites laterais são:

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x + 3) = 0;$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ se } x > 2; \\ 1, \text{ se } x = 2; \\ \frac{1}{x-2}, \text{ se } x < 2. \end{cases}$$

Solução:

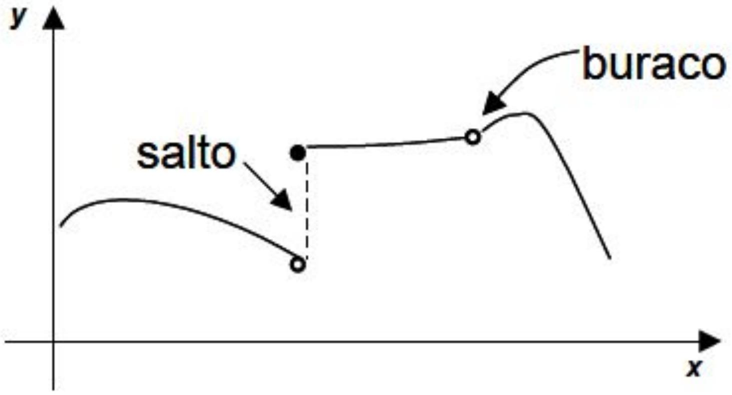
Graficamente, os limites laterais são:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1.$$

Conclusão, como o $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, então não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Observação: Intuitivamente, dizemos que uma curva é *contínua* quando não apresenta *quebras* ou *buracos*. Estas quebras ou buracos são chamados de descontinuidades.



Limite de uma Função Polinomial

Uma das consequências das propriedades L é a regra para obter o limite de uma função polinomial.

Calcule os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}$

Solução

a) Pelo teorema da função polinomial (T), vem:

$$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$$

b) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3} \overset{(L_7)}{=} \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x - 3)}{\lim\limits_{x \to -1} (4x - 3)} \overset{(T)}{=} \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Limite de uma Função Polinomial

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2$

d) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 \overset{(L_6)}{=} \left(\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 \overset{(L_7)}{=}$

$= \left(\frac{\lim_{x \to 1} (2x^2 - x + 1)}{\lim_{x \to 1} (3x - 2)}\right)^2 \overset{(T)}{=} 2^2 = 4$

d) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} \overset{(L_8)}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} \overset{(L_7)}{=}$

$= \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \to -2} (x^2 + 4x + 3)}} \overset{(T)}{=} \sqrt[3]{-8} = -2$

Expressões Indeterminadas

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\times\infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ e } 1^\infty$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-2x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-2x+1)}{(x-2)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-2}(x^2-2x+1)}{\lim_{x\to-2}(x-2)}=-\frac{9}{4}$$

a) $\lim\limits_{x \to 2} (4x + 3)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (6x^2 - 4x)$

c) $$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \right)$$