Derivada da função inversa

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

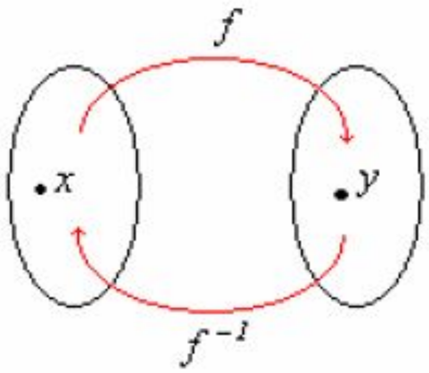
Aula 15 31/01/2022

Derivada da função inversa

Se uma função $y = f(x)$ admite uma função inversa $x = f^{-1}(y)$, então a função inversa tem derivada dada por

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0}.$$

Sabemos que $f^{-1} o f(x) = x$. Aplicando a regra da cadeia, obtemos que $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, daí $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, desde que $f'(x) \neq 0$.



Derivada da função inversa

Desta forma, precisamos apenas conhecer $f'(1)$, que é facilmente calculado.

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2.$$

Daí,

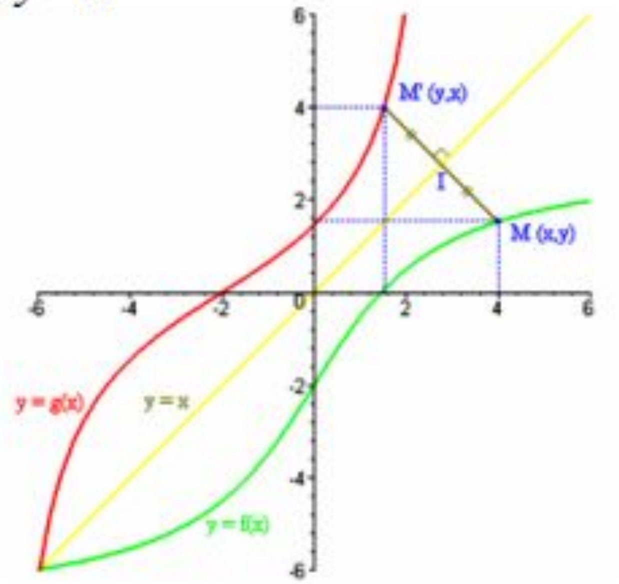
$$f'(1) = 22.$$

Portanto

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{22}.$$

Derivada da função inversa

A função inversa *g(x)* de uma função real de variável real *f(x)* obtem-se de *f(x)* por uma simetria em realção a reta *y=x*.



Derivada da função inversa

Seja $y = f(x) = 5x^3$. Calcule a derivada $\left(f^{-1}\right)'(40)$ invertendo a função e usando a

$\Rightarrow$ *Invertendo a função:*

$$y = f(x) = 5x^3 \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y}{5}} = \left(\frac{y}{5}\right)^{1/3}. \quad \text{Assim } \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{5}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\text{Logo } \left(f^{-1}\right)'(40) = \frac{1}{3}\left(\frac{40}{5}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}(8)^{-2/3} = \frac{1}{15(8)^{2/3}} = \frac{1}{60}.$$

Derivada da função inversa

Para determinarmos um relação entre as derivadas de f e f^{-1}, suponha que ambas as funções são diferenciáveis, e seja

$$y = f^{-1}(x). \qquad (\#)$$

Reescrevendo esta equação como

$$x = f(y),$$

e diferenciando implicitamente com relação a x, resulta que
$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(y)) \quad \Rightarrow \quad 1 = f'(y)\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}.$

A partir de (#) obtemos a seguinte fórmula que relaciona a derivada de f^{-1} com a derivada de f.

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Derivada da função inversa

Seja $y = f(x) = 5x^3$. Calcule a derivada $(f^{-1})'(40)$ invertendo a função e usando a

$\Rightarrow$ *Usando a regra da derivada da inversa:*

Se $y = 40$ e $y = f(x) = 5x^3$, então $x = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Como $f'(x) = 15x^2$, obtemos

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(40) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{15(2)^2} = \frac{1}{60}.$$

Derivada da função inversa

. Obtenha o valor da derivada da inversa da função $f(x) = x^3 + x$ no ponto $x_0 = 1$.

Solução

$$y = x^3 + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

para $x_0 = 1$, temos $\left[\frac{dx}{dy}\right]_{x_0 = 1} = \frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4}$

Derivada da função inversa

(ii) Seja $y = 8x^3$. Sua inversa é $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$.

Como $y' = 24x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, temos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{24x^2} = \frac{1}{24\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}.$$

Derivada da função inversa

1. **Derivada da função Arco Seno:** Seja $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \arcsin x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostração: *Sabemos a função arco seno é a inversa da função seno, ou seja,*

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y.$$

   Como $(\sin y)'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. *Assim,*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Portanto,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. **Derivada da função Arco Cosseno:** Seja $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por $f(x) = \arccos x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>*Demostração*</u>: *Sabemos a função arco cosseno é a inversa da função cosseno, ou seja,*

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y.$$

Como $(\cos y)'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in (0, \pi)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$. *Assim,*

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Portanto,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. **Derivada da função Arco Tangente:** Seja $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por $f(x) = \text{arctg}(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável e $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Demostração: Sabemos a função arco tangente é a inversa da função tangente, ou seja,

$$y = \text{arctg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{tg}(y).$$

Como $(\text{tg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\text{tg}(y))'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\sec^2 y = \text{tg}^2(y) + 1$. *Assim,*

$$y' = \frac{1}{\text{tg}^2(y) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Portanto,

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. **Derivada da função Arco Cotangente:** Seja $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ definida por $f(x) = \text{arccotg}(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável e $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

<u>*Demostração*</u>*: Sabemos a função arco cotangente é a inversa da função cotangente, ou seja,*

$$y = \text{arccotg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cotg}(y).$$

Como $(\text{cotg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in (0, \pi)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\text{cotg}(y))'} = -\frac{1}{\text{cossec}^2 y}.$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\text{cossec}^2 y = \text{cotg}^2(y) + 1$. *Assim,*

$$y' = -\frac{1}{\text{cotg}^2(y) + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Portanto,

$$y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

4. **Derivada da função Arco Cotangente:** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ definida por $f(x) = \text{arccotg}(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável e $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

<u>*Demostração*</u>: *Sabemos a função arco cotangente é a inversa da função cotangente, ou seja,*

$$y = \text{arccotg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cotg}(y).$$

Como $(\text{cotg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in (0, \pi)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\text{cotg}(y))'} = -\frac{1}{\text{cossec}^2 y}.$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\text{cossec}^2 y = \text{cotg}^2(y) + 1$. *Assim,*

$$y' = -\frac{1}{\text{cotg}^2(y) + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Portanto,

$$y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. **Derivada da função Arco Secante:** Seja $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$, definida para $|x| \geq 1$. Então, $y = f(x)$ é derivável para $|x| > 1$ e $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Demostração: *Sabemos a função arco secante é a inversa da função secante, ou seja,*

$$y = \operatorname{arcsec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sec(y) = \frac{1}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pela regra da cadeia, nos pontos em que existe a primeira derivada, temos que:

$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$

Portanto,

$$y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

6. **Derivada da função Arco Cossecante:** Seja $f(x) =$arccossec(x), definida para $|x| \geq 1$. Então, $y = f(x)$ é derivável para $|x| > 1$ e $y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

Demostração: Sabemos a função arco cossecante é a inversa da função cossecante, ou seja,

$$y = \text{arccossec}\,(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cossec}\,(y) = \frac{1}{\sin y} \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pela regra da cadeia, nos pontos em que existe a primeira derivada, temos que:

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$

Portanto,

$$y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Para funções compostas, usando a regra da cadeia, temos que:

1. Se $y = \arcsin u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
2. Se $y = \arccos u$, então $y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
3. Se $y =$arctg(u), então $y' = \frac{u'}{1+u^2}$;
4. Se $y =$arccotg(u), então $y' = -\frac{u'}{1+u^2}$;
5. Se $y = \text{arcsec}\,(u)$, então $y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$;
6. Se $y =$arccossec(u), então $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$.

(i) $y = \text{arc sen}\,(x+1)$.

$y = \text{arc sen}\, u,\ u = x + 1.$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}.$$

Derivada da função inversa

Consequência

1. Derivada da função logarítmica

Sabemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial:

$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$

Já vimos que:

$x = a^y \Rightarrow x' = a^y \cdot \ell n\, a$

Empregando a regra ora deduzida, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \cdot \ell n\, a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ell n\, a} = \frac{1}{x \cdot \ell n\, a}$$

Derivada da função inversa

Em resumo:

$$\boxed{y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ell n\, a}}$$

No caso particular em que $a = e$, temos:

$$\boxed{y = \ell n\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}}$$

Derivada da função inversa

2. Derivada da função potência com expoente real

Dada a função $y = x^{\alpha}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, temos:

$$y = x^{\alpha} = (e^{\ell n\, x})^{\alpha} \cdot {}^{\ell n\, x}$$

Aplicando a regra de derivação da função logarítmica, obtemos:

$$y' = e^{\alpha \cdot \ell n\, x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot x^{-1} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Em resumo, fica generalizada para qualquer α real a seguinte regra:

$$\boxed{y = x^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$$

Derivada da função inversa

Determine a derivada das funções.

$f(x) = \arcsin\left[\ln\left(x^2 - 1\right)\right];$

Solução: Definindo $u = \ln\left(x^2 - 1\right)$. Então, $u' = \frac{2x}{x^2-1}$.

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln(x^2-1))^2}}\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{1-\ln^2(x^2-1)}}.$$