Conceitos e Formas de Representação de uma Função

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 1 13/09/2021

Números

Os primeiros números conhecidos foram os *Números Contáveis*, ou seja, o conjunto dos *Números Naturais*, representado por $\mathbb{N}$, isto é:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

As operações com os números naturais foram responsáveis pela criação dos números negativos, assim:

$$x + a = b \Rightarrow \; x = b - a,$$

onde a e b são números naturais.

Estes números, juntamente com os números naturais formam o conjunto dos *Números Inteiros*, representado por $\mathbb{Z}$, isto é:

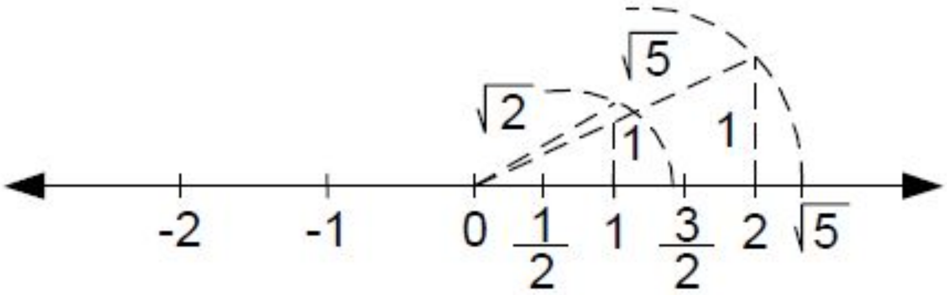
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

A resolução de equações do tipo

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a},$$

com a e b números inteiros onde a não é nulo, pode levar ao surgimento de números não inteiros. Desta forma, os números da forma $\frac{b}{a}$ com a e b números inteiros e $a \neq 0$ formam um conjunto de números, denominado *Números Racionais*, representado por $\mathbb{Q}$. E os números (frações) decimais infinitos não periódicos são denominados *Números Irracionais*, representados por $\Im$. São exemplos de números irracionais: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Observando a reta numerada, vemos que a todos os pontos foram atribuídos números. Temos, então que, a reunião dos números racionais com os números irracionais se denomina conjunto dos *Números Reais*, representado por $\mathbb{R}$.



Como o cálculo envolve números reais, vejamos algumas definições e propriedades fundamentais destes números, embora não tenhamos interesse em mostrar como estas propriedades são tiradas dos axiomas e teoremas.

Definição 2: $\begin{array}{l} \textit{Soma: } \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\,(a+b) \in \mathbb{R} \\ \textit{Produto: } \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\,(a.b) \in \mathbb{R} \end{array}$, satisfazendo as propriedades:

1. **Comutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a+b=b+a \\ a.b=b.a \end{cases}$;

2. **Associativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a.(b.c)=a.(b.c) \end{cases}$;

3. **Existência de elemento neutro:** $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R} \ / \ a + 0 = 0 + a = a \\ \forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R} \ / \ a.1 = 1.a = a \end{cases}$;

4. **Elemento oposto:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists - a \in \mathbb{R} \ / \ a + (-a) = (-a) + a = 0$;

5. **Elemento inverso:** $\forall a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $\exists \ a^{-1} \in \mathbb{R} \ / \ a.\left(a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right).a = 1$;

6. **Distributiva**: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a.(b + c) = a.b + a.c$.

Definição 2: *Subtração*: $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (a - b) \in \mathbb{R}$.

Definição 3: *Divisão*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, $\exists \ \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

Desigualdades

Axioma de Ordem: No conjunto dos números reais, existe um subconjunto, $\mathbb{R}_+$, dito reais positivos, tais que:

1. se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações é verdadeira: $a = 0$, a é positivo ou $-a$ é positivo;
2. a soma e o produto de reais positivos é um número real positivo;

Definição 4: O número real a é *negativo* se, e somente se, $-a$ é positivo.

Definição 5: *Desigualdade Estrita*
Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos por:

i. $a < b$ se, e somente se, $b - a$ é positivo;
ii. $a > b$ se, e somente se, $a - b$ é positivo.

Definição 6: *Desigualdade Não Estrita*
Os símbolos $\leq$ (menor ou igual) e $\geq$ (maior ou igual) são definidos por:

i. $a \leq b$ se, e somente se, $a < b$ ou $a = b$;
ii. $a \geq b$ se, e somente se, $a > b$ ou $a = b$.

As desigualdades definidas acima, satisfazem as propriedades:

1. $a > 0$ se, e somentes se, a é positivo;

2. $a < 0$ se, e somentes se, a é negativo;

3. $a > 0$ se, e somentes se, $-a$ é negativo;

4. $a < 0$ se, e somentes se, $-a$ é positivo;

5. *Transitiva:* Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;

6. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}^*$, então $a + c < b + c$;
7. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
8. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$, então $a.c < b.c$;
9. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}_-^*$, então $a.c > b.c$;
10. Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $a.c < b.d$;
11. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$;
12. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c > b + c$;
13. Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$;
14. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$, então $a.c > b.c$;
15. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}_-^*$, então $a.c < b.c$;
16. Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $a.c > b.d$;
17. Se $a < b$, com ambos positivos ou negativos, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Definição 7:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$
$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$
$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$
$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

Intervalos

Definição 8: *Intervalos* são conjuntos infinitos de números reais. Geometricamente, correspondem a segmentos de reta sobre um eixo coordenado. Por exemplo, se $a < b$, então o *intervalo aberto* de a a b, denotado por (a, b), é o segmento de reta que se estende de a até b, excluindo-se os extremos; e o *intervalo fechado* de a até b, denotado por $[a, b]$, é o segmento de reta que se estende de a até b, incluindo-se os extremos. Estes intervalos podem ser expressos na notação de conjuntos como

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\};$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}.$$

Um intervalo pode incluir um extremo, mas não outro. Estes intervalos são chamados *semi-abertos* (ou, algumas vezes, *semi-fechados*). Além disso, é possível um intervalo estender-se indefinidamente em uma ou em outra direção, escrevemos $+\infty$ no lugar do extremo direito, e para indicar que o intervalo se estende indefinidamente na direção negativa, escrevemos $-\infty$, no lugar do extremo esquerdo. Os intervalos que se estendem entre dois números reais são chamados de *intervalos finitos*, enquanto que os que se estendem indefinidamente em uma ou em ambas as direções são chamados de *intervalos infinitos*.

Notação de Intervalo	Notação de Conjuntos	Classificação
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$	Finito; aberto
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$	Finito; fechado
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$	Finito; semi-aberto
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$	Finito; semi-aberto
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b\}$	Infinito; fechado
$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}$	Infinito; aberto
$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$	Infinito; fechado
$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$	Infinito; aberto
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	Infinito; aberto e fechado

Exemplo 2: Determinar os valores de x que satisfazem a desigualdades:

. $x^2 - 3x \leq 10;$

Solução:

Subtraindo-se 10 em ambos os lados, obtém-se a inequação:

$$x^2 - 3x - 10 \leq 0. \qquad (1)$$

As raízes da equação $x^2 - 3x - 10 = 0$ são -2 e 5.

Estas raízes dividem o eixo coordenado em três intervalos abertos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 5)$ e $(5, +\infty)$.

Analisando os sinais de $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$ em cada intervalo, temos que:

Intervalo	Ponto de teste	Sinal $(x + 2)(x - 5)$ no ponto de teste
$(-\infty, -2)$	-3	$(-)(-) = +$
$(-2, 5)$	0	$(+)(-) = -$
$(5, +\infty)$	6	$(+)(+) = +$

Portanto, a solução da desigualdade (1) é $S = [-2, 5]$.

2. $2x - 5 < \frac{1}{x-1}$ $\qquad\qquad (*)$

Solução:

Condição de existência de solução: $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1.$

Observe que $x - 1$ pode ser positivo ou negativo. Assim, temos 2 casos a serem analisados:

1° ***Caso:*** Para $x - 1 < 0$, ou seja, $x < 1$, temos que:

Multiplicando $(*)$ por $x - 1$, temos que:

$2x - 5 < \frac{1}{x-1} \;\Rightarrow\; (2x-5)(x-1) > 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 7x + 4 > 0.$ $\qquad (**)$

Resolvendo a equação $2x^2 - 7x + 4 = 0$ conclui-se $\frac{7+\sqrt{17}}{4} = 2.780\,8$ e $\frac{7-\sqrt{17}}{4} = 0.719\,22$ são suas raízes

Analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$ e $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, obtém-se que a solução da desigualdade $(**)$ é $I_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

Dessa forma, neste intervalo, a solução é $S_1 = I_1 \cap (-\infty, 1) \;\Rightarrow\; S_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$.

2° ***Caso:*** Para $x - 1 > 0$, temos que:

Multiplicando $(*)$ por $x-1$, temos que:
$2x - 5 < \frac{1}{x-1} \;\Rightarrow\; (2x-5)(x-1) < 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 7x + 4 < 0.$
A solução dessa desigualdade é $I_2 = \left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Logo, neste intervalo a solução é $S_2 = I_2 \cap (1, +\infty) \;\Rightarrow\; S_2 = \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \;\Rightarrow\; S = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.