Cálculo 2

Noção de Derivadas Parciais

Derivadas de Funções de 2 Variáveis

A definição de derivada parcial de uma função de 2 variáveis é a mesma que a de funções de uma variável. A única diferença aqui é que , como se tem duas variáveis , uma delas deve ser mantida fixa enquanto se dá acréscimos para a outra. Assim, seja a função f(x,y), sua derivada em relação a x é

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$ incremento da função

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$ taxa de variação da função

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) \quad \text{Derivada parcial em x}}$$

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) \quad \text{Derivada parcial em y}}$$

Significado matemático

1) Derivada parcial em x:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

2) Derivada parcial em y:

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Nomenclatura

- Seja $z = f(x,y)$, então a derivada parcial de z em relação a x escreve-se:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Símbolo de derivadas parciais: Pronuncia-se "Derronde"....é uma corruptela do francês "de rond" que quer dizer "dê redondo". Isto se deveu ao fato de os franceses na época da Revolução Francesa, adotarem esta forma especial de escreverem a letra D.

Nota histórica

A notação $\partial u/\partial x$ foi usada pela primeira vez por Adrien Marie Legendre em 1786 em sua obra *"Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations"*. Na página 8 está escrito:

> *Pour éviter toute ambiguité, je représenterai par $\partial u/\partial x$ le coefficient de x dans la différence de u, & par du/dx la différence complète de u divisée par dx.*

Legendre abandonou o símbolo e ele foi reintroduzido por Carl Gustav Jacob Jacobi, em 1841, em seu artigo *"De determinantibus Functionalibus"*:

O símbolo ∂ é algumas vezes chamado de delta de Jacobi e ele corresponde à letra "d" do alfabeto russo.

A Técnica de Derivadas Parciais

A derivada parcial em relação a "x" , considera y como constante, enquanto que a derivada parcial em relação na "y" considera x como constante.

$f_x = \partial f / \partial x \rightarrow y=\text{constante}$

$f_y = \partial f / \partial y \rightarrow x=\text{constante}$

Ex.1- Derivar a função $f(x,y) = 3x^3y^2$

$f_x = \partial (3x^3y^2) / \partial x$ $\qquad$ $f_y = \partial (3x^3y^2) / \partial y$

Ex.2 - Derivar a função $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f_x = \partial (x^2 + y^2) / \partial x$ $\qquad$ $f_y = \partial (x^2 + y^2) / \partial y$

A Técnica de Derivadas Parciais

Ex.3 - Derivar a função $f(x,y) = x / (x^2 + y^2)$

Ex.4 – Calcular a inclinação da reta tangente à interseção da superfície $z = 4x^2y - xy^3$, com o plano $y=2$ no ponto $(3,2,48)$.
Solução: Para derivar em relação a x, mantém y constante.

Derivadas Parciais de Funções de Várias Variáveis

Ex.5

As derivadas parciais têm a mesma definição já vista para 2 variáveis e são representadas da mesma forma.

Exemplos:

1) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2x$

2) $f(x,y,z,t) = \ln(2x + 3y - z^2 + t^2)$

A Técnica de Derivadas Parciais

Ex. 6 – Calcular a inclinação da tangente à interseção da superfície $z = x^3 + y^2 + 2xy$, com plano $y = 1$ no ponto $(1,1,4)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y$$

$$\tan\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(5) = 78{,}69^\circ$$

Ex. 7 – Achar as derivadas parciais da função $f(x,y) = (x^2 + y^3).\operatorname{sen}x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (u.v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.v + u.\frac{\partial v}{\partial x} = 2x.\operatorname{sen}x + (x^2 + y^3).\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (u.v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.v + u.\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2.\operatorname{sen}x + (x^2 + y^3).0 = 3y^2.\operatorname{sen}x$$

Exemplos

1) $Se\ f(x,y,z) = -3x^2y^2z^{-3} + 4x^{-2}y^2z + 6xy^3$,
$determine\ f_1(x,y,z)\ e\ f_3(x,y,z)$

Derivada em relação a x Derivada em relação a z

$$f_1(x,y,z) = -6xy^2z^{-3} - 8x^{-3}y^2z + 6y^3$$

$$f_3(x,y,z) = 9x^2y^2z^{-4} + 4x^{-2}y^2$$

Diferencial Total de uma função de 2 ou mais variáveis

A condição para que uma função seja diferenciável é que suas derivadas parciais existam. Assim, dada a função z = f(x,y) , sua diferencial total é :

$$d\,z = \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\,dx + \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\,dy$$

Ex.1 diferenciar a função $z = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$

$\dfrac{\partial\, f}{\partial\, x} =$ e $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, y} =$

assim, a diferencial da função é

$$df = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)\,dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)\,dy$$

Diferencial Total de uma função de 2 ou mais variáveis

A função de várias variáveis é diferenciável se suas derivadas parciais forem contínuas. A diferencial de uma função $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de n variáveis é:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

Ex.2-Calcule a diferencial da função $F(x,y,z) = 2x+3xy-2zy$

$F_x =$ $\quad$ $F_y =$ $\quad$ $F_z =$

$dF = (2+3y)\,dx + (3x-2z)dy - 2ydz$

Derivada Total

1) $Se\ f(x,y,z) = sen(2x^2y) + tg(x^3z^2) + \cot(y^3z^3)$,
determine $f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) + f_3(x,y,z)$.

$$f_1(x,y,z) = \cos(2x^2y)4xy + \sec^2(x^3z^2)3x^2z^2$$

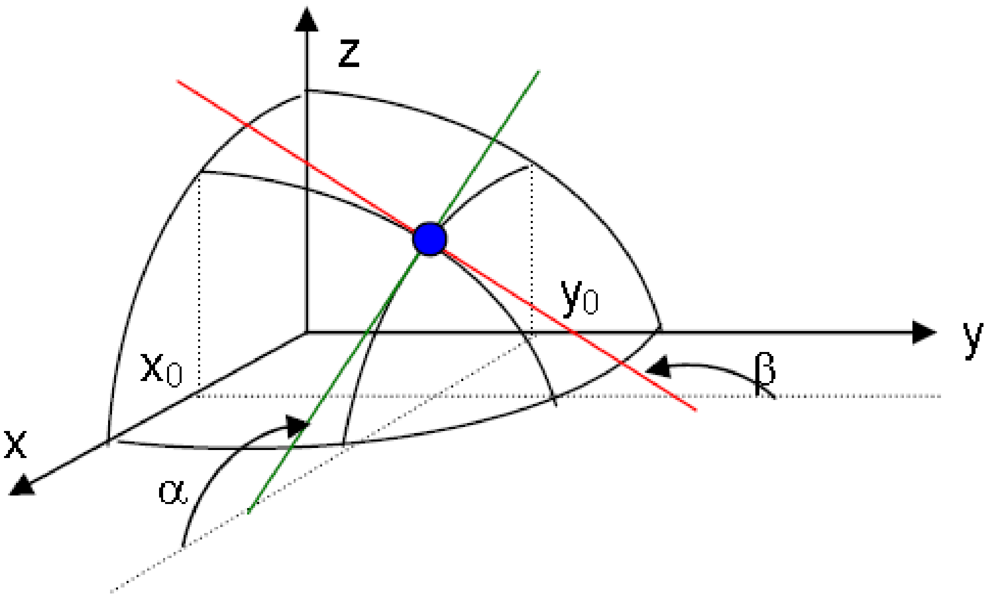
$$f_2(x,y,z) = \cos(2x^2y)2x^2 - \cos ec^2(y^3z^3)3y^2z^3$$

$$f_3(x,y,z) = \sec^2(x^3z^2)2x^3z - \cos ec^2(y^3z^3)3y^3z^2$$

A derivada total é a soma das derivadas parciais.

Interpretação Geométrica da Derivada Parcial

Nas funções de uma variável, a derivada mede a inclinação da reta tangente à curva no ponto dado. Nas funções do tipo f(x,y) de duas variáveis, a derivada em relação a x, mede a inclinação da reta tangente à superfície, no ponto dado (x_0, y_0, z_0) e numa seção paralela ao eixo x, com y constante, e numa seção paralela a y e com x constante.



Assim,

$\tan\alpha = f_x(x_0, y_0) = \partial f / \partial x$

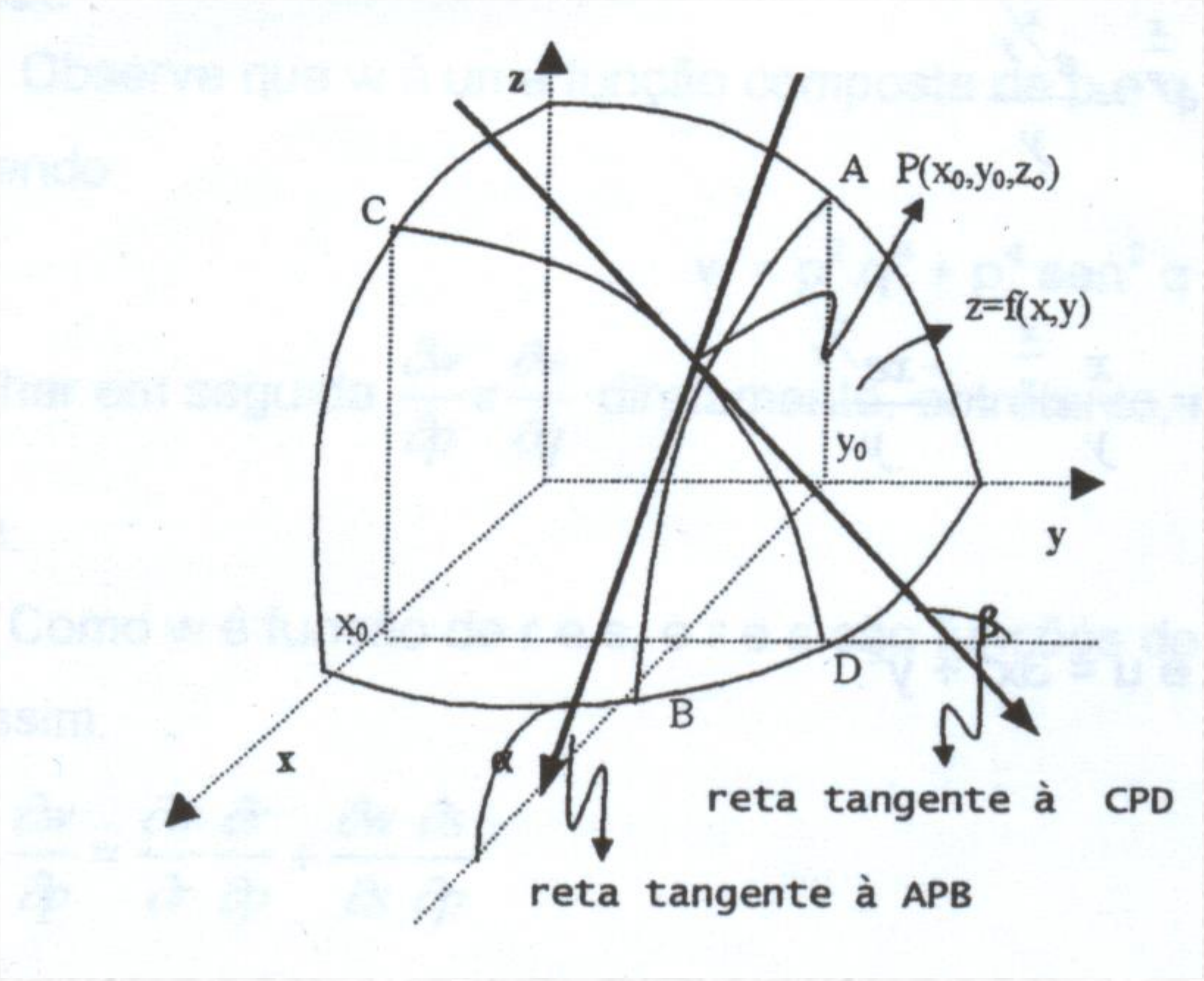
$\tan\beta = f_y(x_0, y_0) = \partial f / \partial y$

Significado geométrico

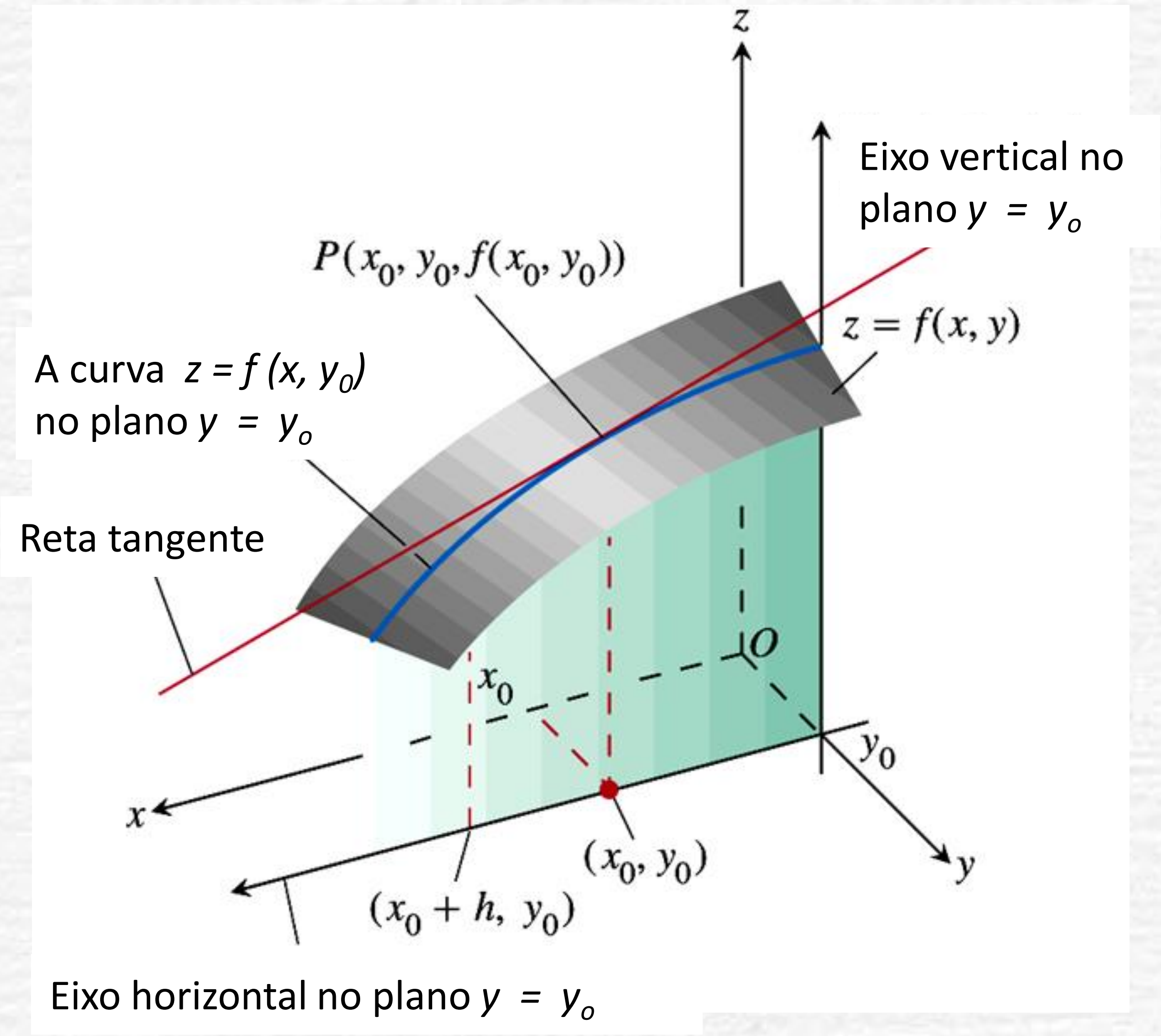
Derivada parcial em x, significa a inclinação da reta que toca a superfície $z = f(x_o,y_o)$, em ponto desta superfície e de um plano vertical paralelo aos eixos z e x, de abscissa y_o. A reta pertence a este plano.

Derivada parcial em y, significa a inclinação da reta que toca a superfície $z = f(x_o,y_o)$, em ponto desta superfície e de um plano vertical paralelo aos eixos z e y, de ordenada x_o. A reta pertence a este plano.

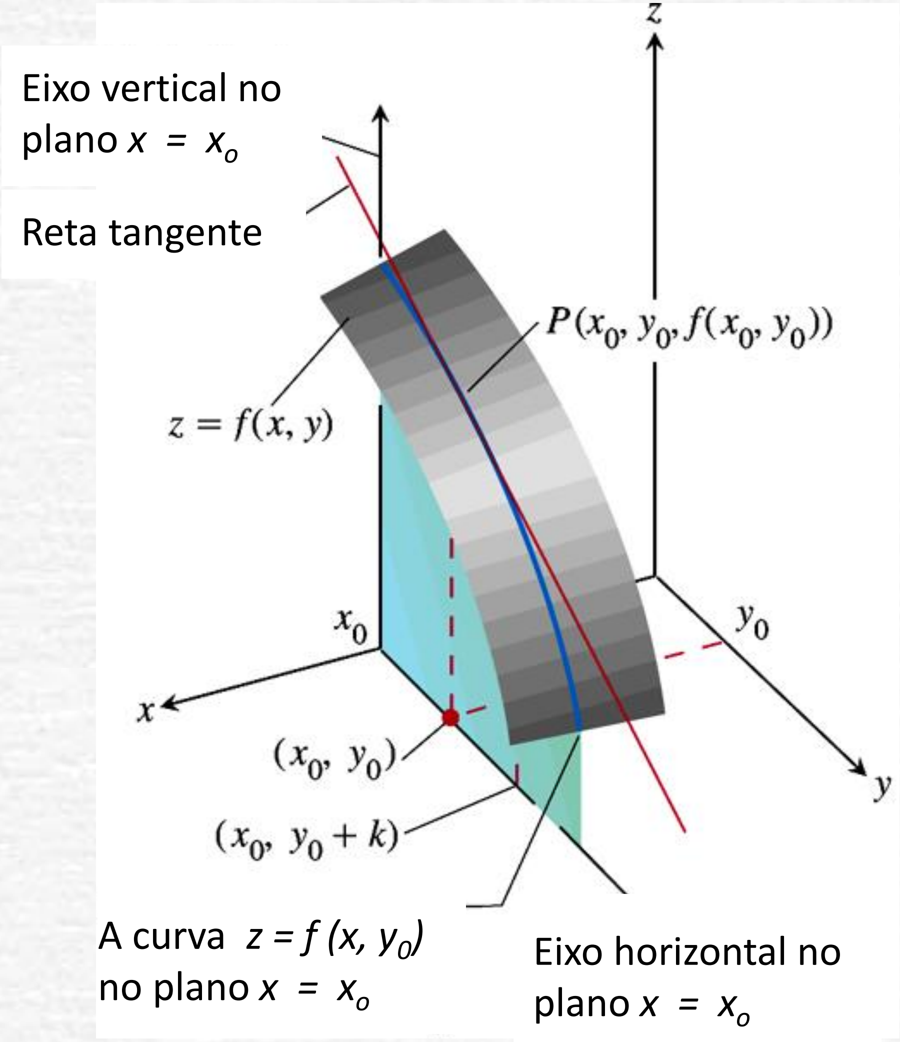
Significado geométrico



Significado geométrico



Significado geométrico



Significado geométrico