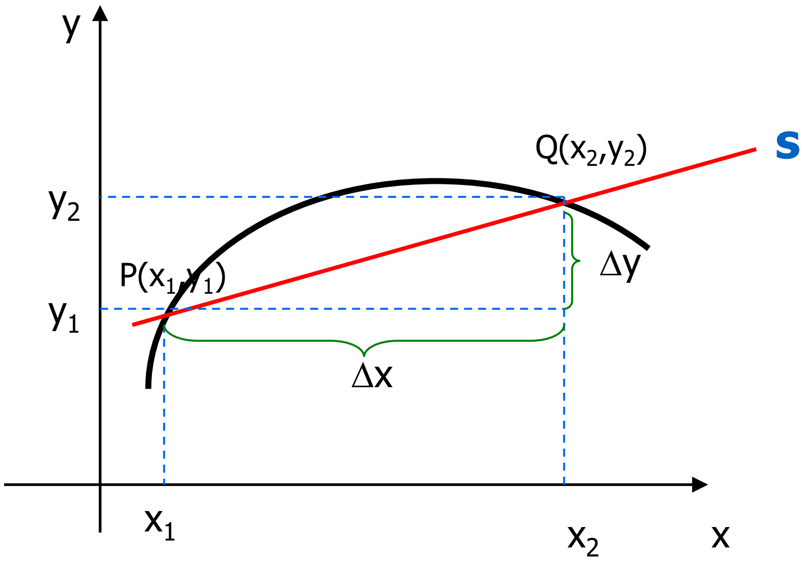
Cálculo 2

1 Integral Indefinida

Conceitos e Propriedades

Derivada e Antiderivada

Derivada e Antiderivada



O coeficiente angular da reta s é dado por:

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Derivada e Antiderivada

A reta Tangente

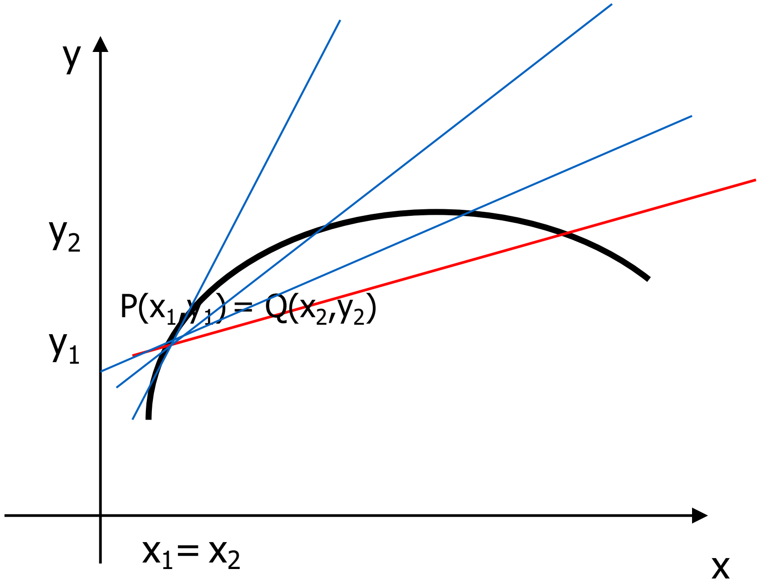
Mantenha P fixo e faça Q se mover no sentido anti-horário sobre a curva em direção a P.

Perceba que a inclinação da reta s irá variar.

A medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante tende para um valor limite.

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P.

Derivada e Antiderivada



Derivada e Antiderivada

Derivada

Diferenciar uma função é obter sua derivada. Por exemplo:

Obtemos 1 derivando x;

Obtemos x derivando ;

Obtemos x^2 derivando ;

Obtemos x^3 derivando ;

Em geral,

Obtemos x^n derivando

$$\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x^4}{4}$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Derivada e Antiderivada

Derivada

Dada a tabela abaixo:

x	y	$\frac{dy}{dx}$
x	**f(x)**	**?**

Derivar uma função implica em encontrar a função que preenche a terceira coluna a partir da segunda.

Significa, portanto, aplicar a definição de Fermat ou as regras de derivação aprendidas na disciplina de Cálculo I.

Derivada e Antiderivada

Antiderivada

Dada a tabela abaixo:

x	y	$\frac{dy}{dx}$
x	?	f(x)

Nosso interesse agora na disciplina de Cálculo II é o inverso:Trata-se de como preencher a segunda coluna a partir da terceira.

Esta é a operação do cálculo integral, definida por Leibniz em 1696.

Derivada e Antiderivada

Antiderivada

A operação do Cálculo integral consiste no problema de determinar uma antiderivada para uma função. Assim, sabemos que:

x é a antiderivada de 1;

$\dfrac{x^2}{2}$ é a antiderivada de x;

$\dfrac{x^3}{3}$ é a antiderivada de x^2;

$\dfrac{x^4}{4}$ é a antiderivada de x^3;

Em geral:

$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ é a antiderivada de x^n.

Derivada e Antiderivada

Antiderivada

Sabendo disso, é possível encontrar antiderivadas de muitas funções cuja regra envolve potências. Assim:

Uma antiderivada de -32 é $-32x$;

Uma antiderivada de $-32x$ é $-16x^2$;

Uma antiderivada de $64 - 32x$ é $64x - 16x^2$;

Uma antiderivada de $1 + 4x - 9x^2$ é $x + 2x^2 - 3x^3$.

Dizemos "uma" em vez de "a" antiderivada porque há geralmente mais de uma antiderivada para uma dada função.

Encontrando uma, pode-se facilmente encontrar outra acrescentando uma constante a que já existe.

Derivada e Antiderivada

Exemplo 1

Se F é uma antiderivada de f, então F' = f e F + C também pois a derivada de uma constante é zero. Assim:

$-32x$;

$-32x - 7$;

$-32x + \pi$;

$-32x + C$;

São todas antiderivadas de -32.

<u>A menos que se especifique</u>, com alguma informação adicional, exatamente que antiderivada se quer determinar, não podemos falar <u>*da*</u> antiderivada, mas <u>*de uma*</u> antiderivada.

Derivada e Antiderivada

Exemplo 2

Considere a função $f(x) = -32$ com domínio $0 \leq x$. Encontre:

a) *Uma* antiderivada F de f;

b) *A* antiderivada F de f que assume o valor 64 quando x é igual a 0;

c) *A* antiderivada F de f que assume o valor -40 quando x é igual a 5;

Solução

a) Qualquer função da forma $-32x + C$ será uma antiderivada de f, pois C pode ser qualquer constante (inclusive 0).

b) Para responder *b)*, devemos lembrar da tabela e do que consiste a operação de encontrar a antiderivada

x	**F(x)**	**f(x)**
0	**64**	
x	**?**	**-32**

Derivada e Antiderivada

Neste item a 1.ª linha da tabela nos dá informação suficiente para saber que a antiderivada é única. Pelo item a) sabemos que:

$$F(x) = -32x + C;$$

E, pela primeira linha da tabela devemos ter:

$$F(0) = 64;$$

Substituindo na equação geral, temos:

$$F(0) = -32.(0) + C;$$

$$F(0) = C \rightarrow C = 64;$$

Portanto, a antiderivada F de f que assume o valor 64 quando x = 0 é $F(x) = -32x + 64$.

c) Fazer o item *c)* como exercício.

Derivada e Antiderivada

Princípio Fundamental do Cálculo Integral

Sejam *A* e *F* funções contínuas definidas num mesmo domínio e assuma que a derivada de *A* em relação a *t* é igual a derivada de *F* em relação a *t*, ou seja:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

Então, *A(t) = F(t) + C*, para qualquer *C* constante.

Derivada e Antiderivada

Aplicações

Apesar de abstrato o Princípio Fundamental do Cálculo Integral tem aplicações práticas. Ela é útil sempre que queremos saber a taxa de variação de uma certa quantidade e a própria quantidade. Um exemplo disso é fornecido no estudo dos *corpos em queda livre*.

Os corpos em queda livre se referem ao movimento vertical de objetos próximos a superfície da Terra. A gravidade é a única força a agir no corpo e a resistência do ar é ignorada.

Considere que a velocidade de um corpo em queda livre sob o efeito da aceleração da gravidade aumente a cada segundo. Então, o efeito da gravidade é definido pela equação:

$$\frac{dv}{dt} = 10$$

Derivada e Antiderivada

- Essa equação fornece a taxa de aumento da velocidade. Se quisermos saber o valor da velocidade, o princípio fundamental do cálculo nos diz que:

$$v = 10t + C$$

- Para alguma constante C.
- Se tivéssemos informações adicionais poderíamos determinar o valor de C. Por exemplo, se fosse fornecido que a velocidade inicial era de 20 m/s, então :

$$v = 10t + 20$$

- Se, por outro lado, soubéssemos que a velocidade é de 86 m/s quando t = 5s, então:

$$v = 10t + 36$$

Derivada e Antiderivada

Exemplo 3

Uma pedra é arremessada para cima a partir do solo com uma velocidade inicial de 20 m/s. Considere a pedra como um corpo em queda livre e responda:

a) Qual é a altura máxima alcançada pela pedra?

b) Onde está a pedra 3 segundos após o lançamento?

c) Quando e com que velocidade ela atingirá o solo?

Solução

Sabemos que a velocidade v é dada por v = -10t +20.

Mas, a velocidade de subida é igual a variação da altura pelo tempo, portanto:

$$\frac{dh}{dt} = -10t + 20$$

Derivada e Antiderivada

Entretanto, pelo princípio fundamental:

$$h = -5t^2 + 20t + C$$

Para alguma constante C. Mas quanto vale C ?

Uma vez que a pedra foi arremessada do solo, sabemos que, nesta situação a altura h = 0. Como t, neste instante, também é 0, então:

Logo,

$$0 = -5.(0)^2 + 20.(0) + C \longrightarrow C = 0$$

$$h = -5t^2 + 20t$$

Derivada e Antiderivada

a) Quando a pedra atinge sua altura máxima, a velocidade é zero, ou seja:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \longrightarrow -10t + 20 = 0$$

Portanto a pedra atinge sua altura máxima quando o tempo é aproximadamente t=2s.

Basta substituir o valor do tempo na equação da altura:

$$h = -5t^2 + 20t$$

$$h = -5(2)^2 + 20(2)$$

$$h = -5.(4) + 20.(2)$$

$$h = 20m/s$$

Derivada e Antiderivada

b) Após t = 3s a pedra está a uma altura de:

$$h = -5t^2 + 20t$$
$$h = -5.(3)^2 + 20.(3)$$
$$h = -5.(9) + 20.(3)$$
$$h = 15m$$

E continua a cair atingindo o solo aproximadamente quando t = 4s.

c) A pedra atinge o solo com velocidade aproximada de 20 m/s.

Derivada e Antiderivada

Usando antiderivadas para calcular distâncias

O método para calcular corpos em queda livre não se aplica a objetos automotores como motocicletas, carros ou projéteis;

Contudo, as antiderivadas podem ser úteis quando se deseja converter as leituras do velocímetro em distância percorrida.

Derivada e Antiderivada

Exemplo 5

Um foguete atravessa o firmamento numa jornada diretamente além da Terra. Num certo dia à tarde o navegador lê o velocímetro do foguete como função do tempo, e conclui que ele é dado por:

$f(t) = 100t^3 - 400t^2 + 800t$, onde t é o tempo em horas. Se a função f fornece a velocidade em km/h, encontre a distância percorrida pelo foguete:

a) Entre o início da tarde e após duas horas;

b) Entre 1 (uma) e 4 horas da tarde.

Derivada e Antiderivada

Solução

A leitura do velocímetro é a taxa de variação instantânea da distância em função do tempo. Sabendo que s é a distância da Terra, temos que:

$$\frac{ds}{dt} = f(t)$$

Se dispusermos os dados numa tabela, teremos:

$$\frac{ds}{dt} = 100t^3 - 400t^2 + 800t$$

Derivada e Antiderivada

t tempo	**s** distância	**v** $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ velocidade
0	?	
1	?	
2	?	
4	?	
t	F(t)	f(t)

Conhecemos a expressão f(t), precisamos encontrar sua antiderivada F(t), que é:

$$F(t) = \frac{100t^4}{4} - \frac{400t^3}{3} + \frac{800t^2}{2} + C$$

Derivada e Antiderivada

Precisamos agora determinar o valor de C;

Contudo, substituindo o valor de t por 0, 1, 2 e 4 na expressão F, podemos facilmente responder o que se pede no item a):

a) A distância percorrida entre t = 0 e t = 2 é igual a:

(posição para t=2) menos (posição para t=0)

s = F(2) – F(0)

Calculemos então $F(t)=\frac{100t^4}{4}-\frac{400t^3}{3}+\frac{800t^2}{2}+C$ quando t=2:

$$F(2)=\frac{100(2)^4}{4}-\frac{400(2)^3}{3}+\frac{800(2)^2}{2}+C$$

$$F(2)=\frac{100.16}{4}-\frac{400.8}{3}+\frac{800.4}{2}+C$$

$$F(2)=400-1066{,}66+1600+C$$

$$F(2)=933{,}33+C$$

Derivada e Antiderivada

Agora vamos calcular $F(t) = \frac{100t^4}{4} - \frac{400t^3}{3} + \frac{800t^2}{2} + C$ quando t=0:

$$F(0) = \frac{100(0)^4}{4} - \frac{400(0)^3}{3} + \frac{800(0)^2}{2} + C$$
$$F(0) = 0 - 0 + 0 + C$$
$$F(0) = C$$

Fazendo $s = F(2) - F(0)$ temos:

$$s = 933{,}33 + C - C$$
$$s = 933{,}33km$$

Derivada e Antiderivada

b) A distância percorrida entre t = 1 e t = 4 é igual a:

$$s = F(4) - F(1)$$

$$F(4) = \frac{100(4)^4}{4} - \frac{400(4)^3}{3} + \frac{800(4)^2}{2} + C$$

$$F(4) = \frac{100.256}{4} - \frac{400.64}{3} + \frac{800.16}{2} + C$$

$$F(4) = 6.400 - 8533,33 + 6.400 + C$$

$$F(4) = 4266,67 + C$$

$$F(1) = \frac{100(1)^4}{4} - \frac{400(1)^3}{3} + \frac{800(1)^2}{2} + C$$

$$F(1) = \frac{100.1}{4} - \frac{400.1}{3} + \frac{800.1}{2} + C$$

$$F(1) = 25 - 133,33 + 400 + C$$

$$F(1) = 291,67 + C$$

$$s = F(4) - F(1)$$

$$s = 4266,67 + C - 291,67 - C$$

$$s = 3975\,km$$

Integral Indefinida

- **Antiderivação e Integração**
  - Antiderivação é uma operação que consiste em encontrar uma função F(x), cuja derivada F'(x) é uma função conhecida f(x). Se a função F(x) existir, ela é chamada antiderivada de f(x).

- Exemplo
  - Seja $f(x) = x^2$. Uma antiderivada de f(x) é: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

    Pois $F'(x) = x^2$.

  - Costuma-se chamar a operação de antiderivação também por integração e a **antiderivada** de **integral**.

Integral Indefinida

- **Antiderivação e Integração**
  - Todas as integrais indefinidas devem ter o complemento ***"+C"*** em sua solução pois muitas funções têm a mesma derivada.
  - A integral indefinida é aquela para a qual não foi definida um intervalo de valores, portanto, ela é uma função ou família de funções;
  - A integral definida é aquela definida dentro de um certo intervalo e calculada neste intervalo, portanto, ela é um número.

Integral Indefinida

- **Integral Indefinida**
  - A operação que envolve uma integral indefinida consiste em achar sua primitiva, ou seja, é a mesma operação que consiste em achar uma antiderivada. O que muda então?

    A notação!
  - Para denotar a integral de uma função passaremos a utilizar a seguinte notação:

    Seja $f(x) = x^2$. Uma primitiva de f é: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

    Pois $F'(x) = f(x)$. Assim, a nova notação estabelece que:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Integral Indefinida

- Exemplo
  - A integral de $f(x) = x^2$ é: $$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$
  - A integral de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é: $$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$
  - A integral de $f(x) = e^x$ é: $$\int e^x dx = e^x + C$$
  - A integral de $f(x) = \cos x$ é: $$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

Integral Indefinida

- Outro Exemplo

  - A função $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$ é uma primitiva da função f(x) = cos2x, pois $$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$$
  - Fazendo, $$F'(x) = \frac{1}{2}.2\cos 2x + 0 = \cos 2x = f(x)$$
  - Não é uma tarefa muito fácil encontrar a primitiva de certas funções, mas existem métodos para isto e iremos aprender alguns deles.

Integral Indefinida

- **Definição simbólica**
  - Se **F(x)** é uma primitiva de **f(x)**, a expressão **F(x) + C** é chamada **integral indefinida** da função **f(x)** e é representada pela expressão:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

  - O símbolo "**dx**" que aparece na fórmula serve para identificar a variável sobre a qual se processa a integração.

Integral Indefinida

- Exemplo

$$\int \underline{x^2}\, dx$$

  - Significa que a operação de integração incide sobre a variável "**x**".

$$\int x^2 \underline{.y^3}\, dy$$

  - Significa que a operação de integração incide sobre a variável "**y**".

Integral Indefinida

- **Integral de uma função constante**
    - Uma primitiva de uma função constante **f(x) = k**, é a função linear **F(x) = k.x**, pois **F'(x) = (k.x)' = k**.

      Logo:

$$\int k.dx = k.x + C$$

- Exemplo

$$\int 5.dx = 5.x + C$$

Integral Indefinida

- **Integral de uma função potência** $\int x^n.dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
    - Seja, por exemplo, $f(x) = x^4$.
    - Uma primitiva de f(x) é $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ pois $F'(x) = x^4$.
    - Logo:
    - Portanto, uma primitiva da função $f(x) = x^n$, com $n \neq -1$, é a função

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Integral Indefinida

- **Caso especial de Integral de uma função potência**
  - Seja, por exemplo, **f(x) = x^{-1} = 1/x**.
  - Uma primitiva de **f(x) = 1/x** é a função **F(x) = ln|x|**, portanto:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Integral Indefinida

- **Integral de função exponencial**

$$\int e^x dx = e^x + C$$

- **Integrais de funções trigonométricas**

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec x.tgx.dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{cossec}^2 x.dx = \cot gx + C$$

$$\int \sec^2 x dx = tgx + C$$

$$\int \operatorname{cossec} x.\cot gx.dx = \operatorname{cossec} x + C$$

Integral Indefinida

- **Propriedades**
  - **Integral da soma**

  - Exemplo

$$\int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (x^2 + x + 4)dx = \int \underbrace{x^2 dx}_{\frac{x^3}{3}} + \int \underbrace{xdx}_{\frac{x^2}{2}} + \int \underbrace{4dx}_{4x}$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

Integral Indefinida

- **Propriedades**
  - **Integral da diferença**

$$\int [f(x) - g(x)].dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

  - Exemplo

$$\int (x^4 - x^2)dx = \int \underbrace{x^4 dx}_{\frac{x^5}{5}} - \int \underbrace{x^2 dx}_{\frac{x^3}{3}}$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + c$$

Fórmulas de Integração Básica

$$\int dx = \int 1dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1,\ n \text{ racional}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot g\, x + c$$

$$\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \cos ec\, x \cot g\, x\, dx = -\cos ec\, x + c$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} arc \sec \frac{x}{a} + c$$

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + c \quad a > 0, a \neq -1$$

Integral Indefinida

- **Bibliografia utilizada:**

  - Flemming, D. M. & Gonçalves, M. B. *Cálculo A*. Person Education. São Paulo, 1992.
  - Abdounur, O. J. & Hariki, S. Matemática Aplicada. Saraiva. São Paulo, 2006.
  - Stewart, J. *Cálculo. Volume I*. Thomson. São Paulo, 2006.
  - Priestley, W. M. *Calculus: An Historical Approach*. Springer-Verlag. New York, 1979.
  - Eves, H. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Dover, 1990.