Fatorial e Conjuntos

fatorial

Quando queremos dispor de uma lista com n objetos, cada um sendo usado uma vez caímos na equação:

$$(n)_n \rightarrow {}_nP_n \rightarrow n!$$

$$1! = 0! = 1$$

Notação de produto

Outra maneira de escreve n!:

Letra pi (π) maiscúla

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad = 1.2.3 \ldots . n$$

Outras situações que envolvem o produto

$$\prod_{k=1}^{5} (2k + 3) \quad = 5.7.9.11.13 = 45045$$

Ou mais simples:

$$\prod_{k=1}^{4} 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

Exercícios sobre Fatorial (Página 54)

1. Há seis livros em francês diferentes, oito livros em russo diferentes e cinco livros em espanhol diferentes.

a) De quantas maneiras diferentes podemos dispô-los em uma estante?

$(6+8+5)! = 19!$ $= 121.645.100.408.832.000$

b) De quantas maneiras diferentes podemos dispô-los em uma estante se os livros de mesma língua devem ficar todos juntos?

$6!.8!.5!.3! = 20.901.888.000$

2. Calcule $\frac{100!}{98!}$ sem calcular diretamente 100! e 98!.

$$\frac{100!}{98!} = \frac{100.99.98!}{98!} = 9900$$

3. Ordene os inteiros seguintes, do menor para o maior: 2^{100}, 100^2, 100^{100}, $100!$, 10^{10}.

100^2, 10^{10}, 2^{100}, $100!$, 100^{100}

4. Calcule os seguintes produtos:

a) $\prod_{k=1}^{4}(2k+1)$

$3.5.7.9 = 945$

b) $\prod_{k=-3}^{4}(k)$

$(-3).(-2).(-1).0.1.2.3.4 = 0$

c) $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{K+1}{k}\right)$, em que n é um inteiro positivo.

$$2.\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{4}{3}\right).\left(\frac{5}{4}\right)\ldots.\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = (n+1)$$

d) $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$, em que n é um inteiro positivo

$$1.\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{4}\right)\ldots.\left(\frac{1}{n}\right) \cong 0$$

Conjuntos I – introdução e subconjuntos.

- Um conjunto é uma coleção de objetos, sem repetição e não ordenada.
- Um objeto não pode figurar "mais de uma vez" em um conjunto.
- Cardinalidade de A é denota por $|A|$. a cardinalidade do conjunto A é 3 e representado por $|A| = 3$
- O conjunto vazio é desprovido de elemento, pode ser denotado por { }, mas é preferível utilizarmos o símbolo especial . $\emptyset$
- A cardinalidade de um conjunto vazio é 0

Representação de um conjunto:

- Direta: consiste em listar, entre chaves, os elementos do conjunto, como em {3,4,9}, utilizada para pequenos conjuntos.

- Variável de referência e condições:

{variável de referência: condições}

Por exemplo, $\{x: x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\} = \mathbb{N}$

Ou

{variável de referência ∈ conjunto: condições}

Por exemplo: $\{x \in \mathbb{Z}: 2|x\}$ → conjunto dos inteiros pares

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais se eles têm exatamente os mesmos elementos.

Exemplos:

1) $E = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é } par\}$

$F = \{z \in \mathbb{Z} : z = a + b, com\ a\ e\ b\ ímpares\}$

Logo: $E = F$

2) **A = {x; x é inteiro positivo e x < 4}**

B = {2, 3, 1}

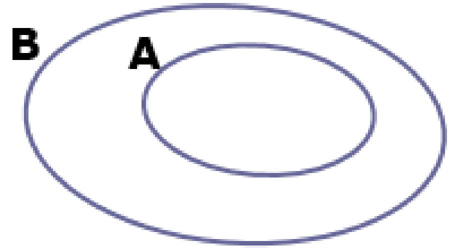
A = {1, 2, 3} = B.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Se } x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{Se } x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Subconjuntos

- Se **todo elemento** de um conjunto **A** é também **elemento** de um conjunto **B**, dizemos que:

  - ✓ **A está contido em B (símbolo: $A \subseteq B$);**
  - ✓ **B contém A (símbolo: $B \supseteq A$);**
  - ✓ **A é subconjunto de B;**
  - ✓ **A é parte de B.**



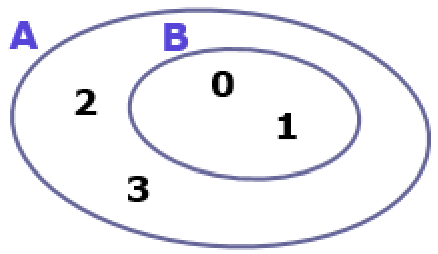
Exemplo

- $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 4\}$
- $B = \{x \in \mathbb{Z}: x(x - 1) = 0\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 1\}$

Podemos afirmar que B é um subconjunto de A ($B \subseteq A$).



Diferença entre ∈ e ⊆

Sejam x e $\{x\}$

x se refere a um elemento de um conjunto

$\{x\}$ significa o conjunto cujo único elemento é x

Correto: $x \in \{x\}$

Incorreto: $x = \{x\}$ ou $x \subseteq \{x\}$

Ou seja:

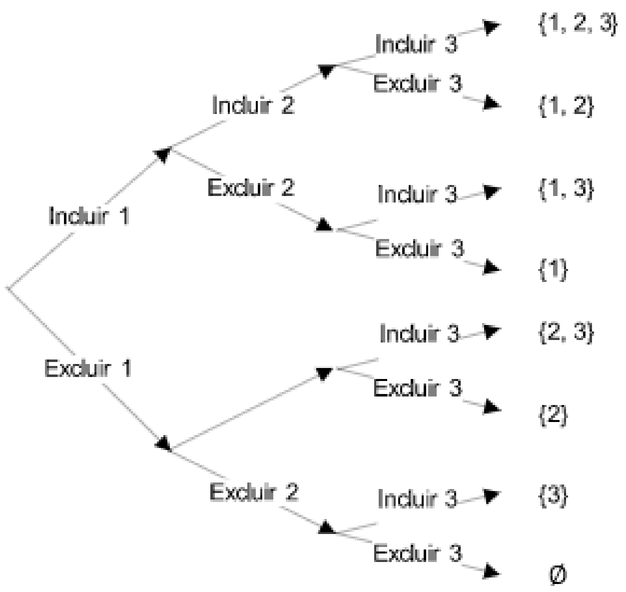
Seja x um elemento e seja A um conjunto, então $x \in A \leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

Contagem de subconjuntos

Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{1 ,2, 3\}$?

N. de elementos	Subconjuntos	Quant.
0		1
1	{1}, {2}, {3}	3
2	{1,2}, {1,3}, {2, 3}	3
3	{1 ,2, 3}	1
	Total	**8**

Outra maneira de se analisar esse problema:



Seja A um conjunto finito. O número de subconjuntos de A é e $2^{|A|}$

Conjunto potência

(**conjunto potência**) – seja A um conjunto. O conjunto potência de A é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

Por exemplo, o conjunto potência de {1, 2, 3} é o conjunto

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

O conjunto potência de A se denota por 2^A.

Exercícios.

Página 63 – do 9.1 até 9.3

9.1. Escreva os seguintes conjuntos relacionando seus elementos entre chaves.

a) $\{x \in \mathbb{N}: x \leq 10 \ e \ 3|x\}$ = {0, 3, 6, 9}
b) $\{x \in \mathbb{Z}: x \text{ é } primo \ e \ 2|x\}$= {-2,2}
c) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 4\}$= {-2,2}
d) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 5\}$ $= \emptyset$
e) $2^{\emptyset}$ $= \{\emptyset\}$
f) $\{x \in \mathbb{Z}: 10|x \ e \ x|100\}$ = {10, 20, 50, 100}
g) $\{X: X \subseteq \{1,2,3,4,5\} \ e \ |X| \leq 1\}$ =∅,{1},{2},{3},{4},{5}

9.2. Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos:

a) $\{ x \in \mathbb{Z}: |x| \leq 10\}$ $=\{-10,-9,-8,\ldots,8,9,10\} \rightarrow$ $cardinalidade$ é 21

b) $\{ x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x^2 \leq 2\}$ $=\{-1,1\} \rightarrow$ $cardinalidade$ é 2

c) $\{x \in \mathbb{Z}: x \in \emptyset\}$ $\nexists$

d) $\{x \in \mathbb{Z}: \emptyset \in x\}$ $\nexists$

e) $\{x \in \mathbb{Z}: \emptyset \subseteq \{x\}\}$ 1

f) $2^{\{1,2,3\}}$ 8

g) $\{x \in 2^{\{1,2,3,4\}}: |x| = 1\}$ $=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\} \rightarrow$ $cardinalidade$ é 4

h) $\{\{1,2\}, \{3,4,5\}\}$ 2

9.3. Complete cada expressão a seguir escrevendo $\in$ ou $\subseteq$:

a) 2 _____ $\{1,2,3\}$

b) $\{2\}$ _____ $\{1,2,3\}$

c) $\{2\}$ _____ $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

d) $\emptyset$______$\{1,2,3\}$

e) $\mathbb{N}$______$\mathbb{Z}$

f) $\{2\}$_____ $\mathbb{Z}$

g) $\{2\}$_____$2^{\mathbb{Z}}$