INTEGRAL INDEFINIDA

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Integral Indefinida

Técnicas de Integração

- **Integração por partes**:

  No Cálculo 1, quando calculávamos a ***derivada do produto*** de duas funções aplicávamos uma regra: chamávamos uma das funções de u, a outra função de v e sua derivada era dada por $u'v + uv'$.

- Exemplo: Seja $f(x) = e^x \,.\, senx$. Chamamos $u = e^x$, $v = senx$ e

$$f'(x) = e^x \,.\, senx + e^x \,.\, cosx$$

- A integração por partes irá se aplicar a esses casos em que a função é constituída por um produto e também nos casos em que uma das funções pode ser derivada repetidamente e a outra pode ser integrada repetidamente.

Integral Indefinida

- **Técnicas de Integração**
  - Integração por partes:

Assim, considere $f(x)$ e $g(x)$ duas funções deriváveis. A regra do produto nos diz que:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

  - Ou, dito de outra maneira:

$$[u.v]' = u'.v + uv'$$

Integral Indefinida

- Em termos de integrais indefinidas, a equação se torna:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx = \int \left[f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right]dx$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx = \int \underline{f'(x).g(x)\,dx} + \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx - \int \underline{f'(x).g(x)\,dx} = \int f(x).g'(x)\,dx$$

Integral Indefinida

- Em termos de integrais indefinidas, a equação se torna:

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u'.v + u.v'$$

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int (u'.v + u.v')\,dx$$

$$\int \frac{d}{dx}(u.v)\,dx = \int \underline{u'.v\,dx} + \int u.v'\,dx$$

$$\int \frac{d}{dx}(u.v)\,dx - \int \underline{u'.v\,dx} = \int u.v'\,dx$$

Integral Indefinida

- Rearranjando os termos, temos:

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

$$\int u.v'\,dx = u.v - \int u'.v\,dx,$$ que é a fórmula da integração por partes.

- Essa fórmula é mais facilmente lembrada na forma diferencial. Sejam:
  - $u = f(x) \longrightarrow du = f'(x)dx$;
  - $v = g(x) \longrightarrow dv = g'(x)dx$.
- Usando a regra de substituição, a fórmula acima pode ser simplificada para:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Integral Indefinida

- **Exemplo 1:**
  - Usando o método da integração por partes, determine:

$$\int x.\cos x dx$$

- Solução
  - Usamos a fórmula simplificada da integração por partes, fazendo:
    - *u = x, du = dx;*
    - *v = senx, dv = cosxdx.*
  - Então:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x.\cos x \, dx = x.senx - \int senx \, dx$$

$$\int x.\cos x \, dx = x.senx + \cos x + c$$

Integral Indefinida

- Observações
  - O objetivo da integração por partes é passar de uma integral que não sabemos como calcular para uma integral $\int udv$ que podemos calcular $\int vdu$
  - Geralmente, escolhemos $\boldsymbol{dv}$ primeiro sendo a parte do integrando, incluindo $\boldsymbol{dx}$, que sabemos integrar de maneira imediata; $\boldsymbol{u}$ é a parte restante.
  - Lembre-se de que a integração por partes nem sempre funciona.

Integral Indefinida

EXEMPLO 02

Calcular $\int x e^{x}\, dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR PARTES

A integral dada deve ser escrita na forma $\int u\, dv$.

Seja, portanto:

$\boxed{u = x}$ $\boxed{dv = e^{x} dx}$

$$\int \boxed{x}\, \boxed{e^{x}\, dx}$$

Então:

$$du = dx$$

$$\int dv = \int e^{x} dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{x} dx = e^{x}$$

Deste modo:

$$\int x e^{x} dx = \boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du} = x e^{x} - \int e^{x}\, dx = \boxed{x e^{x} - e^{x} + C}$$

a constante C pode ser
incluída apenas no final.

Integral Indefinida

EXEMPLO 03

Calcular $\int x^2 e^{-x}\, dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Seja:

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = e^{-x}dx$$

Assim:

$$du = 2x\, dx$$

$$\int dv = \int e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

Portanto:

$$\int x^2 e^{-x}dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -x^2 e^{-x} - \int (-e^{-x})\, 2xdx$$

Integral Indefinida

ou:

$$\boxed{\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x\, e^{-x}\, dx} \qquad (1)$$

A última integral é semelhante à original, com a exceção de que x^2 foi substituído por x.

Outra integração por partes aplicada a

$$\int x\, e^{-x}\, dx$$

completará o problema.

Seja:

$$u = x \qquad\qquad dv = e^{-x} dx$$

Integral Indefinida

Assim:

$$du = dx$$

$$\int dv = \int e^{-x} dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

Portanto:

$$\int x e^{-x} dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -xe^{-x} - \int (-e^{-x})\, dx$$

ou:

$$\int x e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + C_1} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta:

Integral Indefinida

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} \, dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right]$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2C_1$$

Portanto:

$$\boxed{\int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C}$$

Fórmulas de Integração Básica

$$\int dx = \int 1dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1,\ n \text{ racional}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot g\, x + c$$

$$\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \cos ec\, x \cot g\, x\, dx = -\cos ec\, x + c$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} arc \sec \frac{x}{a} + c$$

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + c \quad a > 0, a \neq -1$$

Integral Indefinida

- **Bibliografia utilizada:**

  - Flemming, D. M. & Gonçalves, M. B. *Cálculo A*. Person Education. São Paulo, 1992.
  - Abdounur, O. J. & Hariki, S. Matemática Aplicada. Saraiva. São Paulo, 2006.
  - Stewart, J. *Cálculo. Volume I*. Thomson. São Paulo, 2006.
  - Priestley, W. M. *Calculus: An Historical Approach*. Springer-Verlag. New York, 1979.
  - Eves, H. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Dover, 1990.