Integral Indefinida

- **Integral de uma função potência** $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
  - Seja, por exemplo, f(x) = x^4.
  - Uma primitiva de f(x) é $F(x) = \frac{x^5}{5}$ pois F'(x) = x^4.
  - Logo:
  - Portanto, uma primitiva da função f(x) = x^n, com n ≠ -1, é a função

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Integral Indefinida

- **Caso especial de Integral de uma função potência**
  - Seja, por exemplo, **f(x) = x^{-1} = 1/x**.
  - Uma primitiva de **f(x) = 1/x** é a função **F(x) = ln|x|**, portanto:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Integral Indefinida

- **Integral de função exponencial**

$$\int e^x dx = e^x + C$$

- **Integrais de funções trigonométricas**

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec x . tgx . dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{cossec}^2 x . dx = \cot gx + C$$

$$\int \sec^2 x dx = tgx + C$$

$$\int \operatorname{cossec} x . \cot gx . dx = \operatorname{cossec} x + C$$

Integral Indefinida

- **Propriedades**
  - **Integral da soma**

  - Exemplo

$$\int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (x^2 + x + 4)dx = \underbrace{\int x^2 dx}_{\frac{x^3}{3}} + \underbrace{\int x dx}_{\frac{x^2}{2}} + \underbrace{\int 4dx}_{4x} + \mathrm{c}$$

Integral Indefinida

- **Propriedades**
  - **Integral da diferença**

$$\int [f(x) - g(x)].dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

  - Exemplo

$$\int (x^4 - x^2)dx = \int x^4 dx - \int x^2 dx$$

$$\frac{x^5}{5} \quad - \quad \frac{x^3}{3} \quad + \quad c$$

Fórmulas de Integração Básica

$$\int dx = \int 1dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1,\ n \text{ racional}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot g\, x + c$$

$$\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \cos ec\, x \cot g\, x\, dx = -\cos ec\, x + c$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} arc\sec \frac{x}{a} + c$$

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + c \quad a > 0, a \neq -1$$

Integral Indefinida

Técnicas de Integração (Primitivação)

OBJETIVO: Apresentar técnicas para determinar a função $F(x)$ – conhecida como primitiva – tal que $F'(x) = f(x)$ ou:

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

As principais técnicas de primitivação, envolvendo FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL são:

– INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEL

– INTEGRAÇÃO POR PARTES

– INTEGRAÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

– INTEGRAÇÃO UTILIZANDO SUBSTITUIÇÕES (POR MEIO DE IDENTIDADES) TRIGONOMÉTRICAS

Integral Indefinida

Passo 1

Considere u = g(x), onde g(x) é parte do integrando, em geral "a função interna" da função composta f(g(x))

Passo 2

Calcule du = g'(x).dx

Passo 3

Use a substituição u = g(x) e du = g'(x).dx p/ converter a integral em uma outra envolvendo apenas u.

Passo 4

Calcule a integral resultante

Passo 5

Substitua u por g(x) p/ obter a solução final como uma função de x

Integral Indefinida

EXEMPLO 01

Calcular $\int (x^2+1)^{50}\, 2x\, dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja $\mathbf{u = x^2 + 1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = 2x$

Logo: $\mathbf{2x\, dx = du}$

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int (u)^{50}\, du$$

$$\int (u)^{50}\, du = \frac{u^{51}}{51} + C = \boxed{\frac{(x^2+1)^{51}}{51} + C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 02

Calcular $\int \mathrm{sen}(x+9)\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = x + 9** $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = 1$

Logo: **dx = du**

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int \mathrm{sen}(u)\,du$$

$$\int \mathrm{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C = \boxed{-\cos(x+9) + C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 03

Calcular $\int \text{sen}^2(x)\cos(x)dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = sen(x)** $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx} = \cos(x)$

Logo: **cos(x) dx = du**

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int u^2\,du$$

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \boxed{\frac{\text{sen}^3(x)}{3} + C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 04

Calcular $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u =** $\sqrt{x}$

Então $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Logo: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ **= du**

Antes da substituição, a função dada será escrita de outra forma.

Integral Indefinida

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{1}\,\frac{2}{2\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

$$\int 2e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^{u}\,du$$

outra maneira de chegar aqui sem manipular a função dada é fazendo:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2du$$

$$\int 2e^{u}\,du = 2\int e^{u}\,du = 2e^{u} + C = \boxed{2e^{\sqrt{x}} + C}$$

Ou seja: $\boxed{\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C}$

Integral Indefinida

EXEMPLO 05

Calcular $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja **u = x – 1**

Logo: **dx = du**

Se u = x – 1

Então $x = u + 1$

$x^2 = (u+1)^2$

$x^2 = u^2 + 2u + 1$

Assim, a integral dada pode ser escrita como:

Integral Indefinida

$$\int (u^2 + 2u + 1)\sqrt{u}\ du$$

ou:

$$\int (u^2 + 2u + 1)\,u^{\frac{1}{2}}\ du = \int \left(u^2 u^{\frac{1}{2}} + 2u\,u^{\frac{1}{2}} + 1u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

Portanto:

$$\int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 2\,\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

Integral Indefinida

Finalmente:

$$\int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Escrevendo em termos de x:

$$\boxed{\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C}$$

Integral Indefinida

- **Técnicas de Integração**
  - Método da Substituição: A chave do método da substituição é dividir a função em partes e depois encontrar uma parte da função cuja derivada também faça parte dela.
- Exemplo

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

  - Podemos dividir a equação acima em duas partes:
    - **sen x.dx** e
    - **cos x.**
  - Repare que a derivada do **cos x** é **-sen x**, portanto,

    a derivada do cosseno faz parte da função.

Integral Indefinida

- Passos:
  - Procure na função pela parte cuja derivada esteja na função. Se você estiver em dúvida, tente usar a que está no denominador ou alguma expressão que esteja sendo elevada a uma potência;
  - Chame-a de "**u**" e tome sua derivada com relação ao diferencial (**dx**, **dy**, **dt**, etc.). **Acrescentando esse diferencial**;
  - Use as expressões "**u**" e "**du**" para **substituir** as partes da integral original;
  - A sua nova integral será mais fácil de ser calculada, mas não esqueça de, ao final, desfazer a substituição.

Integral Indefinida

Exemplo 06:

Use o método de substituição para encontrar a integral: $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

Solução

- Devemos escolher parte da função cuja derivada esteja na função, como a derivada de **sen x = cos x** e a derivada do **cos x = -sen x**, e, ambas estão na função, na dúvida... selecionamos a parte que está no denominador, isto é, **cos x**.
- Chamamos **u = cos x**;
- Agora derivamos u com relação a "**x**", portanto: ***du = -sen x.dx***;
- Como na função original a função seno é positiva, basta multiplicar ambos os lados por **–1** para que ela fique positiva;

$$-du = \operatorname{sen} x.dx$$

Integral Indefinida

- Solução
  - Basta re-escrever a integral original com as expressões "**u**" e "**du**";
  - Integral original: $\int \frac{\operatorname{sen} x.dx}{\cos x}$
  - Nova integral: $\int \frac{-du}{u}$
  - Que também pode ser re-escrito como: $-\int \frac{du}{u}$

Integral Indefinida

- Solução
  - Basta calcular: $-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$
  - O passo final é desfazer a substituição de **u** pelo o valor da original:

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + C$$

Integral Indefinida

Exemplo 07

- Use o método de substituição para encontrar a integral:

Solução

$$\int \cos(3x).dx$$

- Chamamos **u = 3x**;
- Agora derivamos u com relação a "**x**", portanto: ***du = 3.dx***;
- Basta re-escrever a integral original com as expressões "**u**" e "**du**";
- Note que **3.dx** não está na equação original, apenas **dx**. Para ficar apenas com **dx**, fazemos:

$$\frac{du}{3} = dx$$

Integral Indefinida

Solução

- Basta re-escrever a integral original com as expressões "**u**" e "**du**";

- Integral original: $\int \cos(3x).dx$

- Nova integral: $\int \cos u.\frac{du}{3}$

- Que também pode ser re-escrita: $\frac{1}{3}\int \cos u.du$

Integral Indefinida

Solução

- Calculando $\frac{1}{3}\int \cos u.du$, temos: $\frac{1}{3}\int \cos u.du = \frac{1}{3}.\mathrm{sen}\, u + C$
- Substituindo u pelo seu valor original, teremos:

$$\frac{1}{3}\int \cos u.du = \frac{1}{3}.\mathrm{sen}\, 3x + C$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 08

INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS QUADRÁTICAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SEN(X) E COS(X)

Sejam as **identidades trigonométricas**:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\boxed{\int \cos 2x\,dx}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^{0+1}}{0+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]$$

$$\int \cos 2x\,dx$$

$$u = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = dx$$

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Integral Indefinida

Da mesma forma, e utilizando a outra identidade trigonométrica:

$$\int \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

A integral

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \; dx$$

pode ser resolvida fazendo:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \; dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \; dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) dx$$

Integral Indefinida

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\boxed{\int \cos^2 2x\,dx}$$

$$\int \cos^2 2x\,dx$$

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = dx$$

$$\int \cos^2 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\right] = \frac{u}{4}+\frac{\operatorname{sen} 2u}{8} = \frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}4x}{8}\right]$$

$$\boxed{= \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen}4x}{32} + C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 09

Determinar $\int (x+2)\,\mathrm{sen}(x^2+4x-6)\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja $u = x^2 + 4x - 6$

Então:

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4$$

$$du = (2x+4)\,dx = 2\,(x+2)\,dx$$

Integral Indefinida

Mas:

$$\int \boxed{(x+2)}\,\mathrm{sen}(x^2+4x-6)\,\boxed{dx}$$

Logo, seja: $\dfrac{du}{2} = (x+2)\,dx$

Assim,

$$\int (x+2)\,\mathrm{sen}(x^2+4x-6)\,dx = \int \mathrm{sen}(u)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}(u)\,du$$

Sabe-se que:

$$\boxed{\int \mathrm{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C}$$

TABELA

Integral Indefinida

Então:

$$\int (x+2)\,\text{sen}(x^2+4x-6)\,dx = \frac{1}{2}(-\cos(u)+C)$$

Portanto:

$$\boxed{\int (x+2)\,\text{sen}(x^2+4x-6)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+C}$$

Integral Indefinida

EXEMPLO 10

Determinar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Solução

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja $u = x^2 + x + 1$

Então:

$$\frac{du}{dx} = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad du = (2x+1)\,dx$$

Na integral original, fazer:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Integral Indefinida

Mas:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\underset{1}{\boxed{\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx}}-\underset{2}{\boxed{\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx}}$$

1 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

ver detalhes na página **anterior**

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]=u^{\frac{1}{2}}=\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\sqrt{x^2+x+1}+C}$$

Integral Indefinida

2 TABELA

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right| + C$$

A segunda integral a ser resolvida está (ou pode ser colocada) na forma acima:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du$$

onde:

$$u = x + \frac{1}{2} \qquad du = dx \qquad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Integral Indefinida

Portanto:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left| x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right| + C$$

Então, finalmente:

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left| x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right| + C}$$

Fórmulas de Integração Básica

$$\int dx = \int 1dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1,\ n \text{ racional}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot g\, x + c$$

$$\int \sec x\, tg\, x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \cos ec\, x \cot g\, x\, dx = -\cos ec\, x + c$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} arc\sec \frac{x}{a} + c$$

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + c \quad a > 0, a \neq -1$$