Limites

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

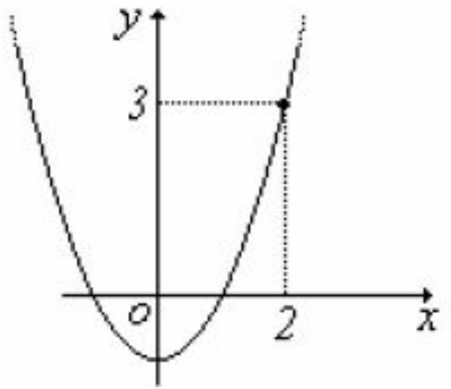
Aula 25/10/2021

Limites

Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Esta função está definida para todo $x \in \Re$, isto é, qualquer que seja o número real c, o valor $f(c)$ está bem definido.

Se $x = 2$ então $f(2) = 2^2 - 1 = 3$. Dizemos que a *imagem* de $x = 2$ é o valor $f(2) = 3$.

Graficamente:



Limites

Considere agora uma outra função $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Esta função está definida $\forall x \in \Re - \{1\}$. Isto significa que não podemos estabelecer uma imagem quando x assume o valor 1.

$$g(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}\,???$$

$\dfrac{0}{0}$ simboliza uma **indeterminação matemática**.

A princípio o estudo do limite visa estabelecer o comportamento de uma função numa *vizinhança* de um ponto (que pode ou não pertencer ao seu domínio). No caso da função f, qualquer valor atribuído a x determina uma única imagem, sem problema algum. Mas na função g, existe o ponto $x=1$ que gera a indeterminação.

Tabelas de aproximações

As tabelas de aproximações são utilizadas para aproximar o valor da imagem de uma função (se existir) quando a variável x se aproxima de um determinado ponto.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém **menores** do que 1: (tabela A)

x	0	$0,5$	$0,75$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$g(x)$	1	$1,5$	$1,75$	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém **maiores** do que 1: (tabela B)

x	2	$1,5$	$1,25$	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$
$g(x)$	3	$2,5$	$2,25$	$2,1$	$2,01$	$2,001$	$2,0001$

Observemos que podemos tornar $g(x)$ tão próximo de $\boldsymbol{2}$ quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1. De outra forma, dizemos:

"O limite da função $g(x)$ quando x se aproxima de (tende a) 1 é igual a 2".

Simbolicamente escrevemos: $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ ou $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Limites

Os dois tipos de aproximações que vemos nas tabelas A e B são chamados de **limites laterais**.

Quando x tende a 1 por valores **menores** do que 1 (tabela A), dizemos que x tende a 1 **pela esquerda**, e denotamos simbolicamente por $x \to 1^-$. Temos então que:

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2}$$

> <u>Obs</u>: O sinal negativo no expoente do nº 1 simboliza apenas que x se aproxima do número 1 pela esquerda.

Quando x tende a 1 por valores **maiores** do que 1 (tabela B), dizemos que x tende a 1 **pela direita**, e denotamos simbolicamente por $x \to 1^+$. Temos então que:

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2}$$

> <u>Obs</u>: O sinal positivo no expoente do nº 1 simboliza apenas que x se aproxima do número 1 pela direita.

Limites

- Se a função g se aproximasse de valores **distintos** à medida que x se aproximasse lateralmente de 1, pela esquerda e pela direita, então diríamos que o limite da função g **não existiria neste ponto**, simbolicamente $\nexists \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

- O limite da função $g(x)$ quando x se aproxima de 1, **somente existe** se os limites laterais **são iguais**. Simbolicamente:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2 \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 2\,.$$

Sempre que nos depararmos com uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, deveremos **simplificar*** a expressão da função envolvida. Logo após, calculamos o limite da função substituindo, na expressão já simplificada, o valor de x.

Limites

Determine $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, onde $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Observe que $g(1) = \dfrac{0}{0}$ que é uma **indeterminação matemática!** Quando a variável x está cada vez mais próxima de 1, a função g está cada vez mais próxima de quanto? Devemos então simplificar a expressão da função g e depois fazer a substituição direta.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1), \forall x \neq 1$$ Então:

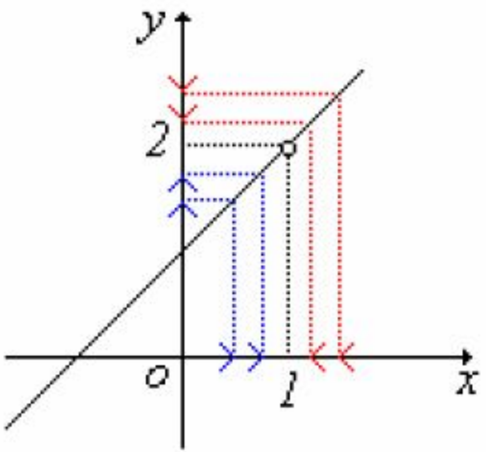
$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Limites

Vale lembrar que a expressão $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ significa que a função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ está tão próxima de 2 assim como x está suficientemente próximo de 1, porém **diferente** de 1. Graficamente podemos verificar isso:

Gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\forall x \neq 1$.



$$\begin{cases} x \to 1^- \Rightarrow y \to 2 \\ x \to 1^+ \Rightarrow y \to 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Limites

Determine $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ (observe a indeterminação matemática $\dfrac{0}{0}$).

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4}$$

Determine $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{3x^2 - 12}$ (observe a indeterminação matemática $\dfrac{0}{0}$).

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^3 - 2^3)}{3(x^2 - 4)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{3(x + 2)} = \frac{12}{12} = 1$$

Limites

Seja f uma função definida num intervalo $I \subset \Re$ contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é $L \in \Re$, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se, e somente se, os **limites laterais** à esquerda e à direita de a ***são iguais*** à L, isto é, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$. Caso contrário, dizemos que o limite não existe, em símbolo $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.

Limites

Diz-se que o limite da função f(x) quando x tende a "a" é igual ao número real L se, e somente se, os números reais f(x) para os infinitos valores de x permanecem próximos a L, sempre que x estiver muito próximo de "a".

Indica-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Ao definir limite, chegou-se à expressão $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Sejam as funções f(x) e g(x), definidas em certo domínio D, tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

A seguir estão descritas algumas propriedades que auxiliam à obtenção de b.

Propriedades dos Limites

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, e k é um número real qualquer, então:

a) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$

b) $\lim_{x\to a} k.f(x) = k.\lim_{x\to a} f(x).$

c) $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$

e) $\lim_{x\to a} k = k$.

Limites

1) Limite de uma constante.

O limite de uma constante é a própria constante.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Exemplo: $\lim_{x \to 2} 3 = 3$.

2) Limite da soma.

O limite da soma de duas funções é a soma dos limites dessas funções.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} [x^3 + 3x^2] = \lim_{x \to 1} x^3 + \lim_{x \to 1} 3x^2 = 1 + 3 = 4$$

3) Limite da diferença.

O limite da diferença de duas funções é a diferença dos limites dessas funções.

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} [x^3 - 7x^2] = \lim_{x \to 0} x^3 - \lim_{x \to 0} 7x^2 = 0 - 0 = 0$$

4) Limite do produto

O limite do produto de duas funções é o produto dos limites dessas funções.

$$\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = L . M$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3} 4x^2 = \lim_{x \to 3} 4 . \lim_{x \to 3} x^2 = 4.9 = 36$$

Limites

5) Limite do quociente

O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções, desde que o denominador seja diferente de zero.

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x+3}{x+4}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x+3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x+4)} = \frac{2+3}{2+4} = \frac{5}{6}$$

Limites

6) Limite de uma potência

O limite de uma potência enésima de uma função é igual à potência enésima do limite.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 3)^2 = \left(\lim_{x \to 1} (x^2 + 3) \right)^2 = (1 + 3)^2 = 16$$

Limites

7) Limite da raiz

O limite da raiz enésima de uma função é igual à raiz enésima do limite dessa função.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.$$

Obs.: L > 0 e n é um número natural ou se L≤ 0 e n é um natural ímpar.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{3x^4} = \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} 3x^4} = \sqrt[5]{48}$$

Limites

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);$$

Seja $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = 4$, encontre:

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x);$$

$$\lim_{x \to 3}[3 \cdot f(x) + 2 \cdot g(x)] =$$

Limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to a} g(x)\right];$$

Seja $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = 4$, encontre:

Limites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{ desde que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0;$$

Seja $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = 4$, encontre:

Limites

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n;$$

Seja $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = 4$, encontre:

Limites

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \text{, se } \lim_{x \to a} f(x) > 0, n \text{ é um inteiro positivo.}$$

Se $\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$, n é um inteiro positivo ímpar;

Seja $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = 4$, encontre:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{f(x) \cdot g(x)} =$$

Limites

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|;$$

Seja $\lim_{x\to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x\to 3} g(x) = 4$, encontre:

$$\lim_{x\to 3} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| =$$

Limites

Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6}{2x + 4}$ usando as propriedades.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6}{2x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x^2 - 2)}{2(x + 2)} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 2}{\lim\limits_{x \to 2} x + 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{4}.$$

Obteríamos este resultado substituindo diretamente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6}{2x + 4} = \frac{3.2^2 - 6}{2(2) + 4} = \frac{12 - 6}{4 + 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Limites de funções Polinomiais

(a) $\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 \\
&= 39.
\end{aligned}$$

Limites de funções Polinomiais podem ser obtidos pelo método da substituição

$$\lim_{t \to 2}(4t^2 + 5t - 7) =$$

$$\lim_{x \to -2}(x^3 + 4x^2 - 3) =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{-x^3 + 2x}{x - 1} =$$

$$\lim_{y \to 3} \sqrt[3]{\frac{y^2+5y+3}{y^2-1}} =$$

Limites Infinitos

Quando resolvemos um limite e não encontramos como resposta valores numéricos, mas sim infinito (+ ∞ ou − ∞), dizemos então que o limite é infinito.

Calcule $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

quando fazemos a substituição de x por -1 na expressão $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, encontramos $\dfrac{0}{-2} = 0$.

Esta não é uma situação especial. Sempre que na substituição de x ocorrer $\dfrac{0}{k}$, $k \neq 0$, o resultado do limite será sempre zero, naturalmente.

E se na substituição do valor de x ocorrer $\dfrac{k}{0}$, $k \neq 0$?

Limites Infinitos

. Estude o seguinte limite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.

Devemos analisar os limites laterais. Vamos recorrer às tabelas de aproximações:

Aproximação do zero pela direita (notação $x \to 0^+$)

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)=1/x$	1	10	100	1000	10.000

Cada vez que tomamos x suficientemente próximo de zero (pela direita), $f(x) = 1/x$ **cresce indefinidamente**. Simbolizamos esta situação assim:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

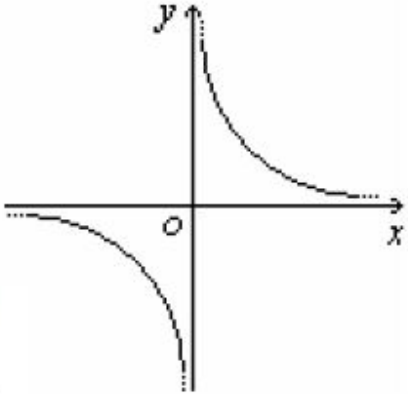
Limites Infinitos

Aproximação do zero pela esquerda (notação $x \to 0^-$)

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$f(x)=1/x$	-1	-10	-100	-1000	-10.000

Cada vez que tomamos x suficientemente próximo de zero (pela esquerda), $f(x) = 1/x$ **decresce indefinidamente**. Simbolizamos esta situação assim:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Como os limites laterais são distintos, então $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Limites Infinitos

Se no cálculo de um limite ocorrer uma situação do tipo $\frac{k}{0}$, $k \neq 0$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{0^+} = +\infty, k > 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{k}{0^+} = -\infty, k < 0. \\ \\ \dfrac{k}{0^-} = -\infty, k > 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{k}{0^-} = +\infty, k < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Desta tabela podemos perceber que $\frac{k}{\pm\infty} = 0$. Se o denominador tende ao infinito com o numerador constante, a razão se aproxima de zero. Como veremos agora.

Limites Infinitos

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Obs.: A prova de (ii) é análoga.

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

II- O Teorema de Limite, a seguir, trata do limite de uma função racional para a qual o limite do denominador é 0 e o limite do numerador é uma constante não-nula.

Limites no Infinito

Estamos interessados agora em estabelecer o comportamento de uma função quando a variável x cresce indefinidamente ($x \to +\infty$) ou quando ela decresce indefinidamente ($x \to -\infty$). Em algumas situações, a função se aproxima de um valor numérico (figura 1), noutros pode também crescer indefinidamente (figura 2) ou decresce indefinidamente (figura 3).

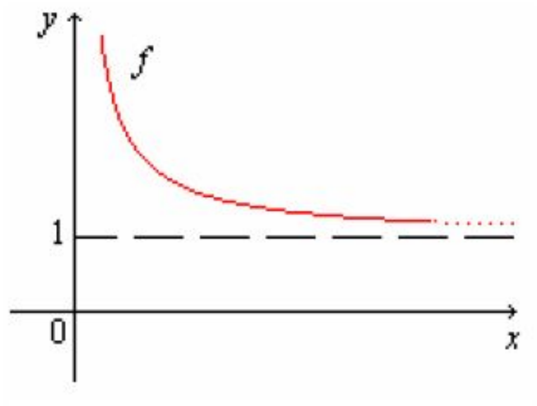


Figura 1

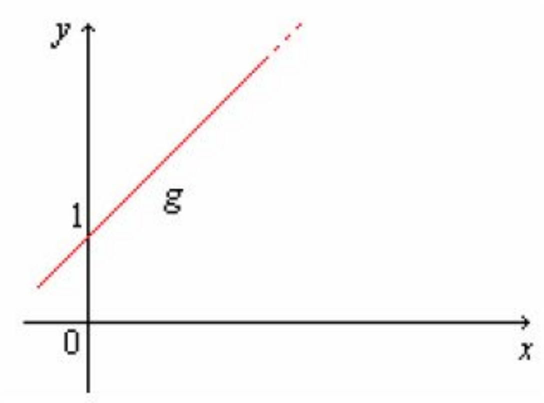


Figura 2

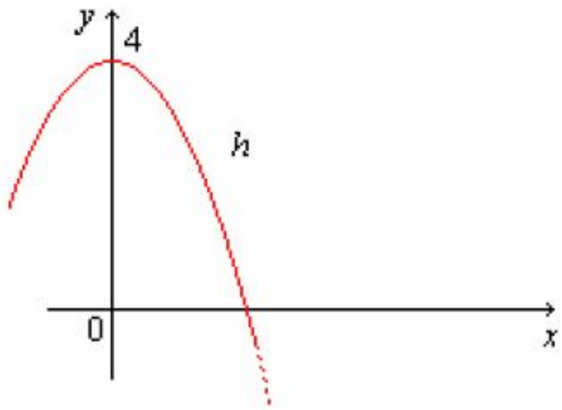


Figura 3

Limites no infinito

Na figura 1: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$, na figura 2: $\lim_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$ e na figura 3: $\lim_{x \to +\infty} (-x^2 + 4) = -\infty$.

A tabela abaixo apresenta situações de soma e produto de infinitos que usaremos com freqüencia.

$$\begin{cases} (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty \\ (\mp\infty) \cdot (\pm\infty) = -\infty \\ (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty \\ (\pm\infty) - (\pm\infty) = ? \quad \text{indeterminação!} \end{cases}$$

e se $k \in \Re^*$, então $\begin{cases} (\pm\infty) \cdot k = \pm\infty, \text{se } k > 0 \\ (\pm\infty) \cdot k = \mp\infty, \text{se } k < 0 \\ (\pm\infty) + k = \pm\infty \\ (\pm\infty) - k = \pm\infty \end{cases}$.

Vale ressaltar ainda que, se n é um ***natural não nulo***, então:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, n \text{ par.} \\ -\infty, n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Expressões indeterminadas

Vimos que $\frac{0}{0}$ é uma expressão de **indeterminação matemática**. Também são:

$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 1^{∞}, 0^{0} e ∞^{0}.

Limites no Infinito- numerador e denominador de mesmo grau

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{x + 8}$. Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

dividir o numerador e o denominador por x e depois aplicar as propriedades de limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 5/x}{1 + 8/x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - 5/x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 8/x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} 5/x}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} 8/x}$$

$$= \frac{2 - 5 \cdot 0}{1 + 8 \cdot 0}$$

$$= 2.$$

Limites no Infinito-numerador e denominador de mesmo grau

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+1}{3x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2\left(1+\frac{1}{6x^2}\right)}{3x^2\left(1+\frac{1}{3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\left(1+\frac{1}{6x^2}\right)}{3\left(1+\frac{1}{3x}\right)}=$$

$$\frac{6}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{6x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)}=\frac{6}{3}\cdot\frac{(1+0)}{(1+0)}=2$$

nas três situações analisadas as indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ produziram **respostas**

Limites no Infinito- grau do numerador menor que do denominador

Encontrar $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2}$. temos uma indeterminação do tipo ∞/∞.

dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}}{4 - 2/x^5} = \frac{2 \lim_{x \to -\infty} 1/x^2 - 3 \lim_{x \to -\infty} 1/x^4 + 5 \lim_{x \to -\infty} 1/x^5}{\lim_{x \to -\infty} 4 - 2 \lim_{x \to -\infty} 1/x^5)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} (2/x^2 - 3/x^4 + 5/x^5}{\lim_{x \to -\infty} (4 - 2/x^5)} = \frac{2{,}0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0}{4 - 2 \cdot 0} = 0.$$

Limites no Infinito- grau do numerador menor que o grau do denominador

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{(1+0)}{+\infty(1+0)}=\frac{1}{+\infty}=0\,.$$

Limites no Infinito - grau do numerador maior que o grau do denominador

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{5x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{5x^2\left(1+\frac{3}{5x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{5\left(1+\frac{3}{5x^2}\right)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}5\left(1+\frac{3}{5x^2}\right)}=\frac{+\infty(1+0)}{5(1+0)}=\frac{+\infty}{5}=+\infty$$

Limites no Infinito

A indeterminação do tipo ∞ - ∞

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x^3 = \lim_{x \to +\infty} -x^3\left(-\frac{1}{x}+1\right) = -\infty(0+1) = -\infty(1) = -\infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} x + 5x^2 + 7 = \lim_{x \to -\infty} 5x^2\left(\frac{1}{5x}+1+\frac{7}{5x^2}\right) = +\infty(0+1+0) = +\infty(1) = +\infty .$$

Limites no Infinito

A indeterminação do tipo $\mathbf{0} \times \infty$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^3}\left(x^2 + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 2}{x^3} = \ldots$

Transformamos a indeterminação $\mathbf{0} \times \infty$ em ∞ / ∞ .

$$\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 2}{x^3} = \ldots = 0 \, .$$

Limites no Infinito

A indeterminação do tipo $0 \times \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \ldots$$

Transformamos a indeterminação $\mathbf{0} \times \infty$ em ∞ / ∞.

$$\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3\sqrt{x} = 3(+\infty) = +\infty$$

Limites no Infinito

Revisando: Limites Envolvendo Infinitos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$