1. Introdução à funções de várias variáveis (FVV).

1.1 Curvas e Superfície de Nível

Curvas de Superfície de Nível

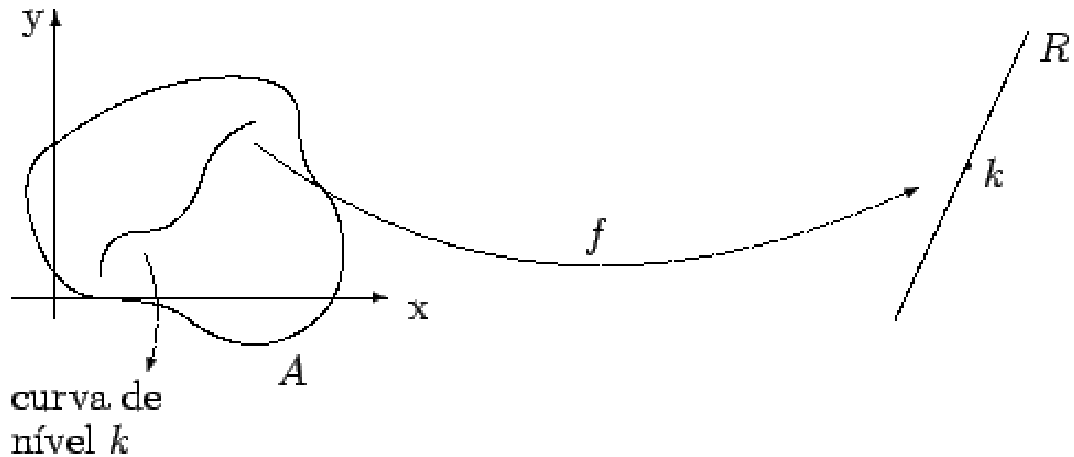
Existe uma outra técnica gráfica, útil, para descrever o comportamento de uma função de duas variáveis.

O método consiste em descobrir no plano ***xy*** os gráficos das equações ***f(x, y) = k*** para diferentes valores de ***k***. Os gráficos obtidos desta maneira são chamados as **curvas de nível** da função ***f***.

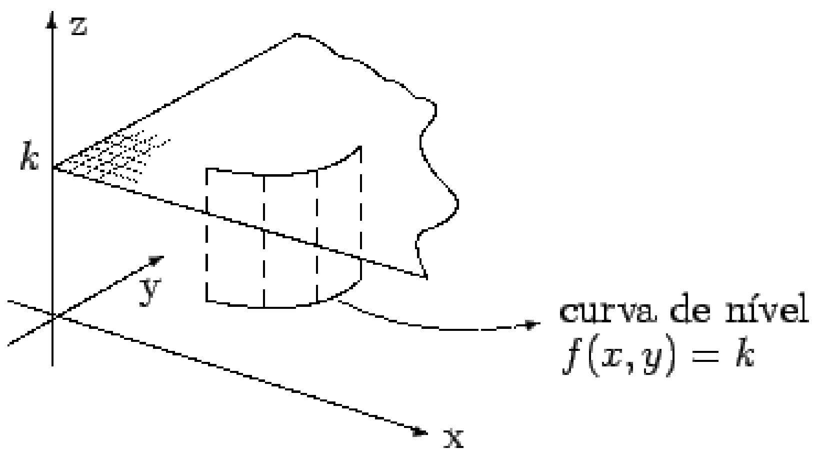
$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Curvas de Superfície de Nível

Curva de nível $k : \{(x, y) \in A$ tal que $f(x, y) = k\}$



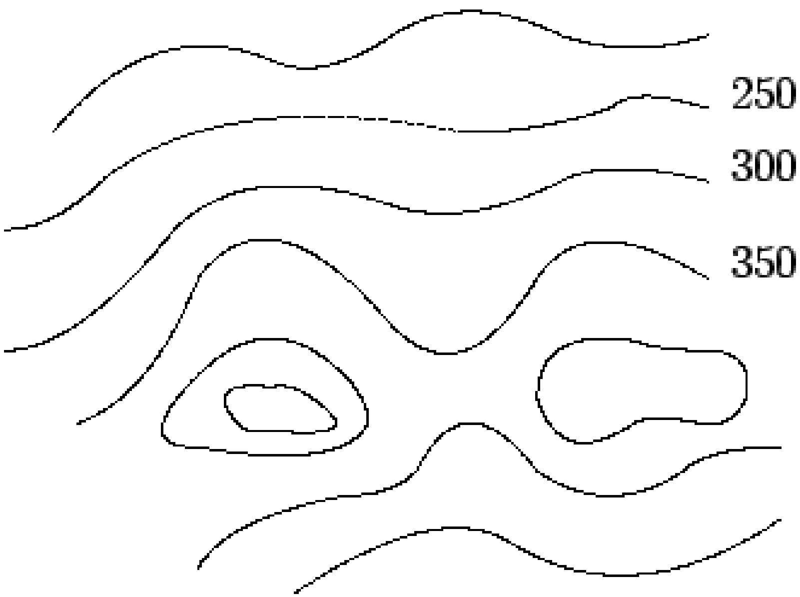
ou



Exemplo

1. ***z = f(x,y) =*** altura em relação ao nível do mar (definida em uma pequena porção aproximadamente plana).

Nossas curvas de nível correspondem às **linhas de contorno** topográfico.

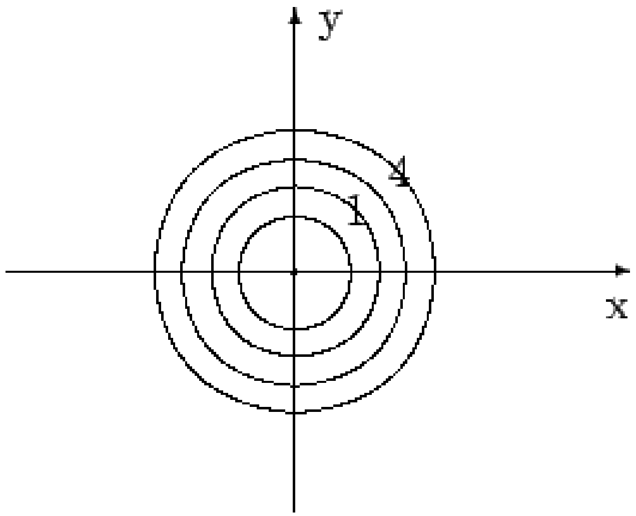


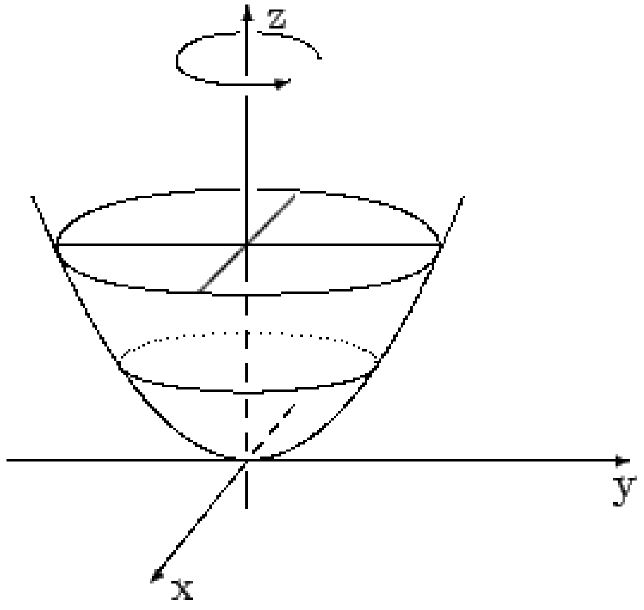
Exemplo

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

As curvas de nível são os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$.

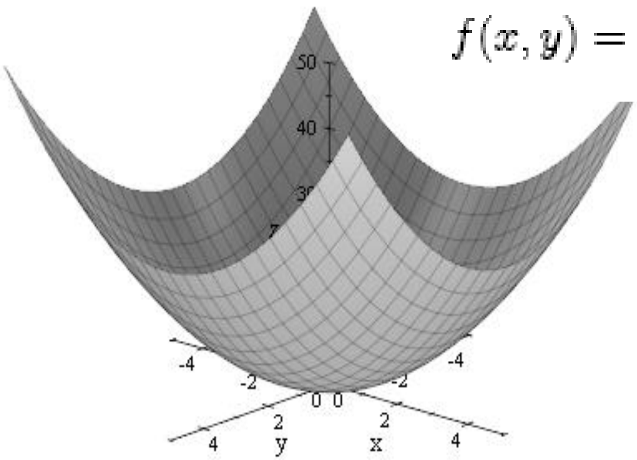


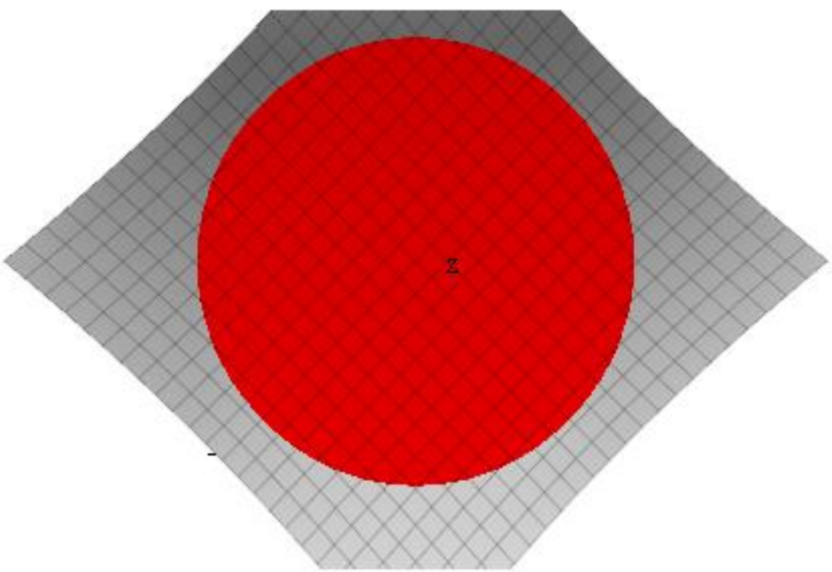


Exemplos:

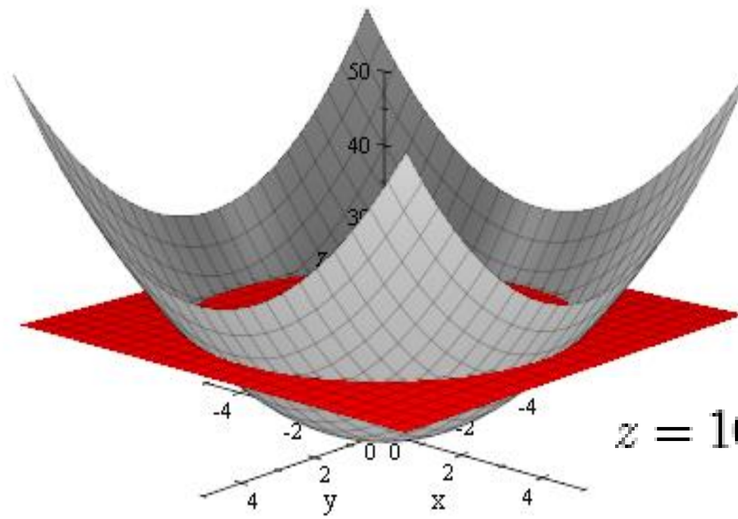
Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$





$$z = x^2 + y^2$$



$$z = 16$$

Exemplos:

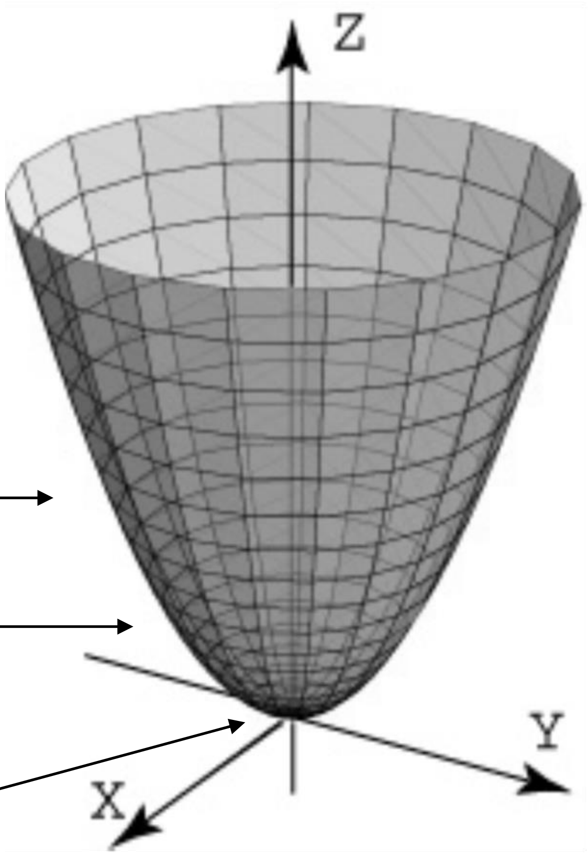
Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

$$z = x^2 + y^2$$

$z = 9$

$z = 4$

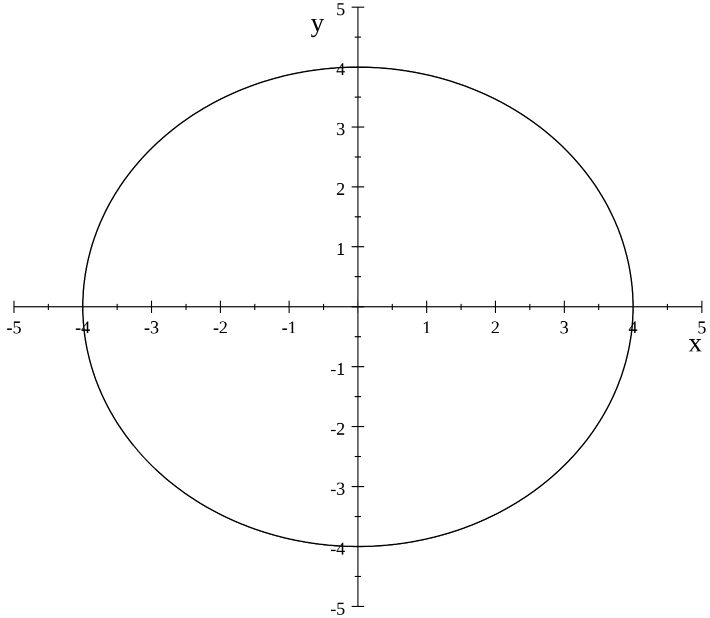
$z = 2$

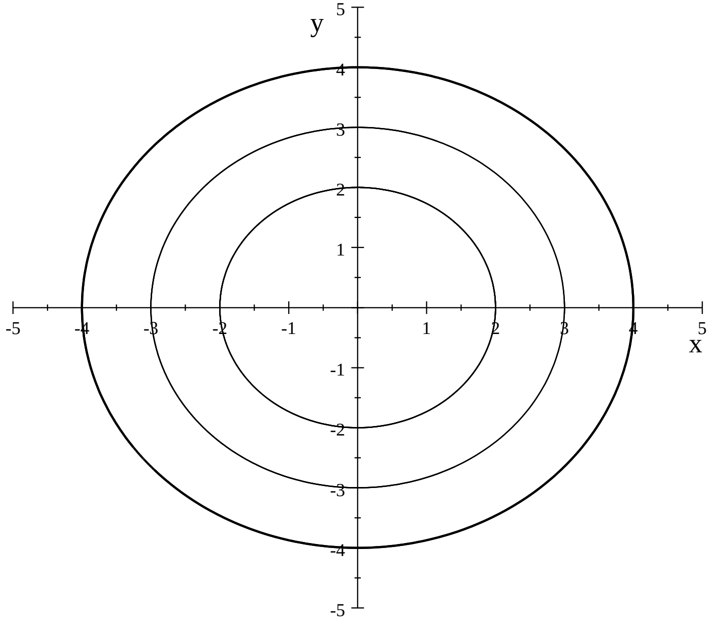


$z = 0$

Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

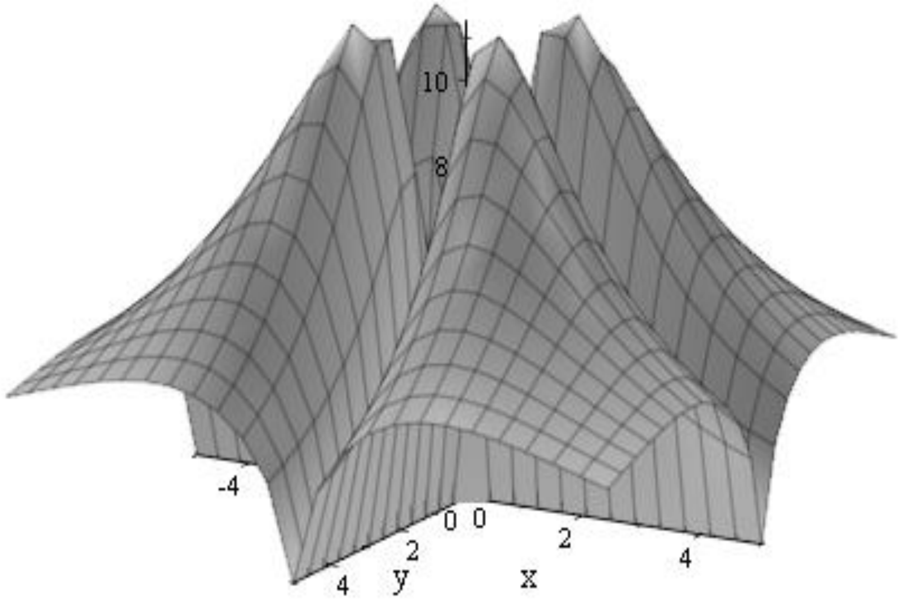




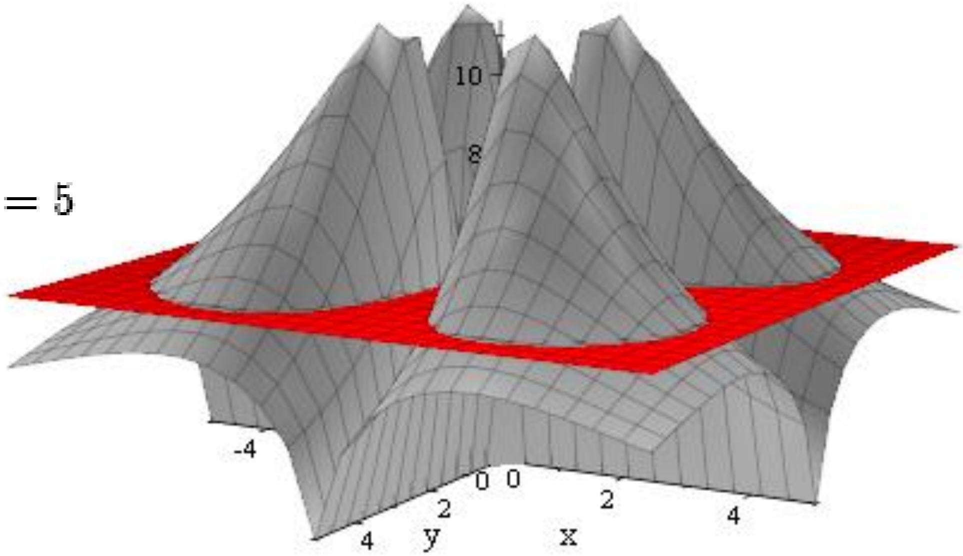
Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

$$f(x,y) = 50\frac{\ln(|xy|+1)}{x^2+y^2+1}$$

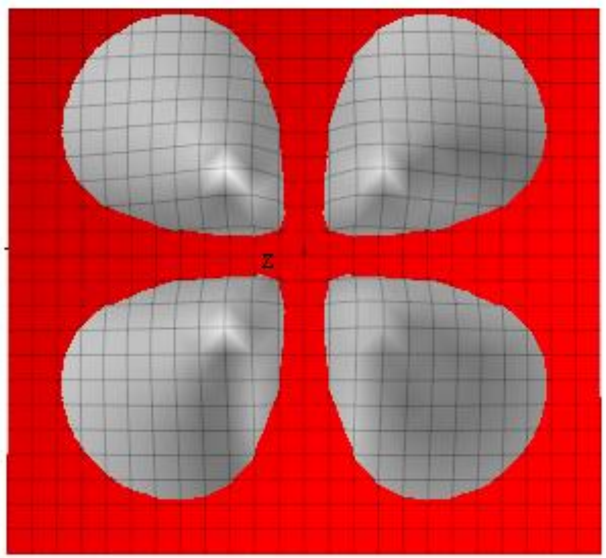


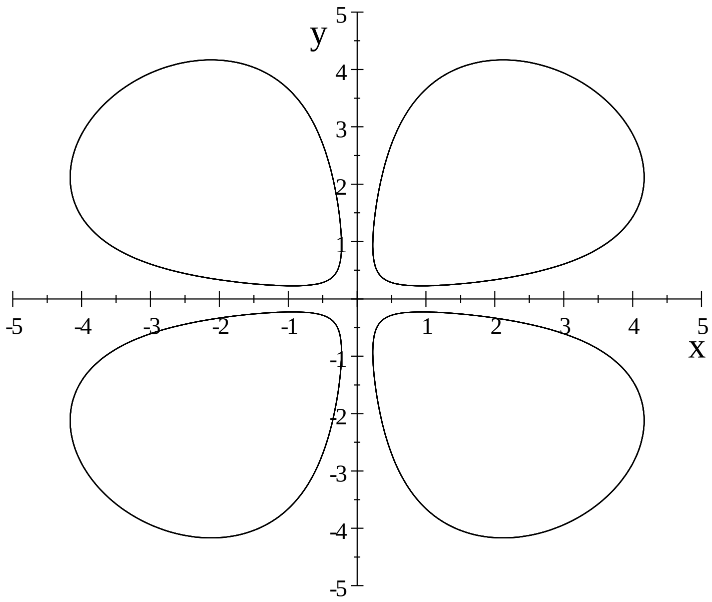
$z = 5$

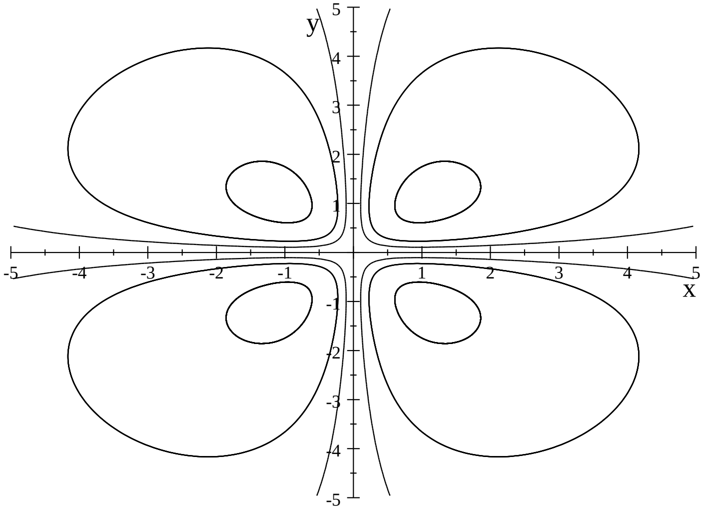


Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível





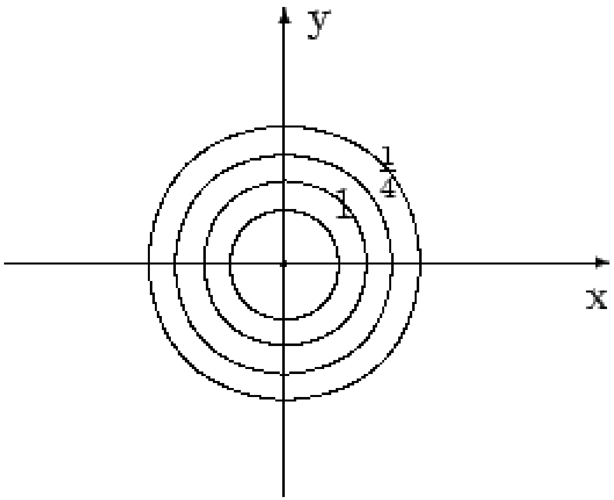


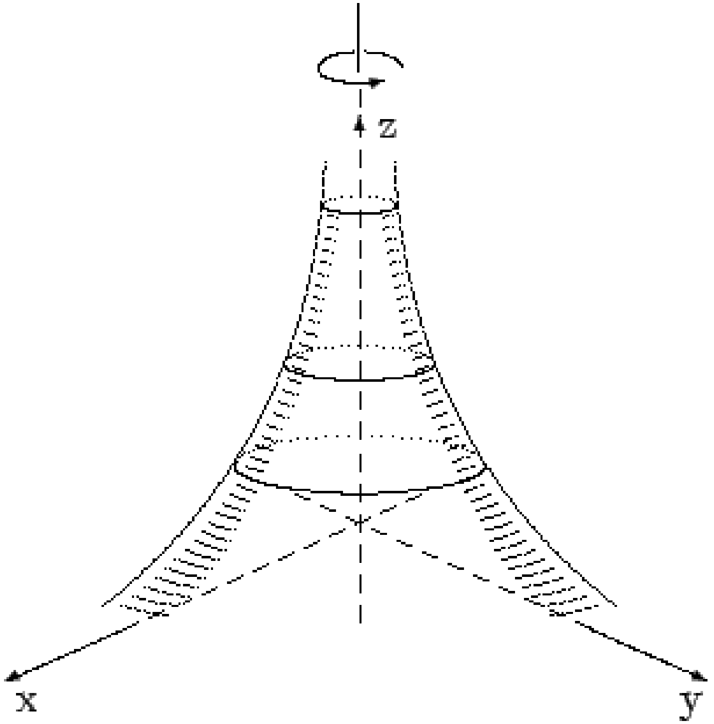
Exemplo

3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Curvas de nível: $x^2 + y^2 = c$





Exemplo

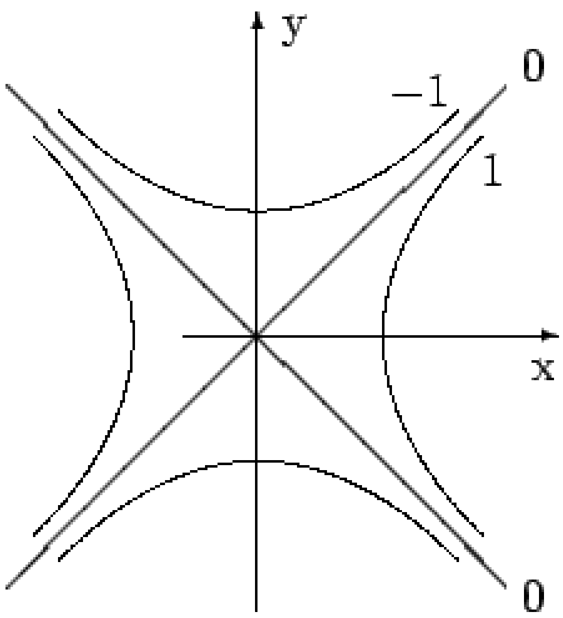
4. $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

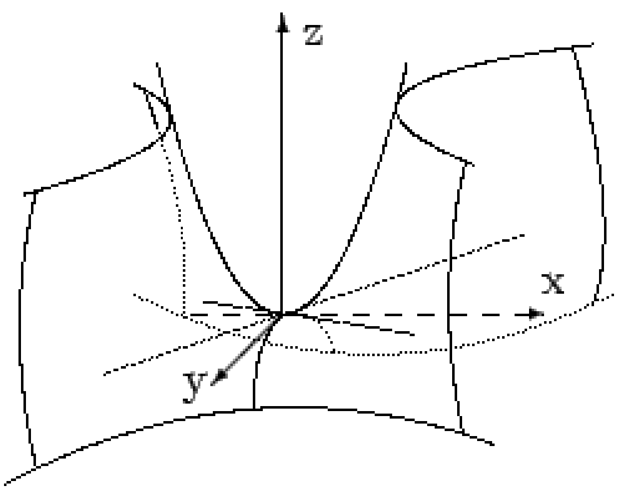
Curvas de nível:

$x^2 - y^2 = c$

$c = 0 \rightarrow |x| = |y|$

$c \neq 0$ - hipérboles





Curvas de Superfície de Nível

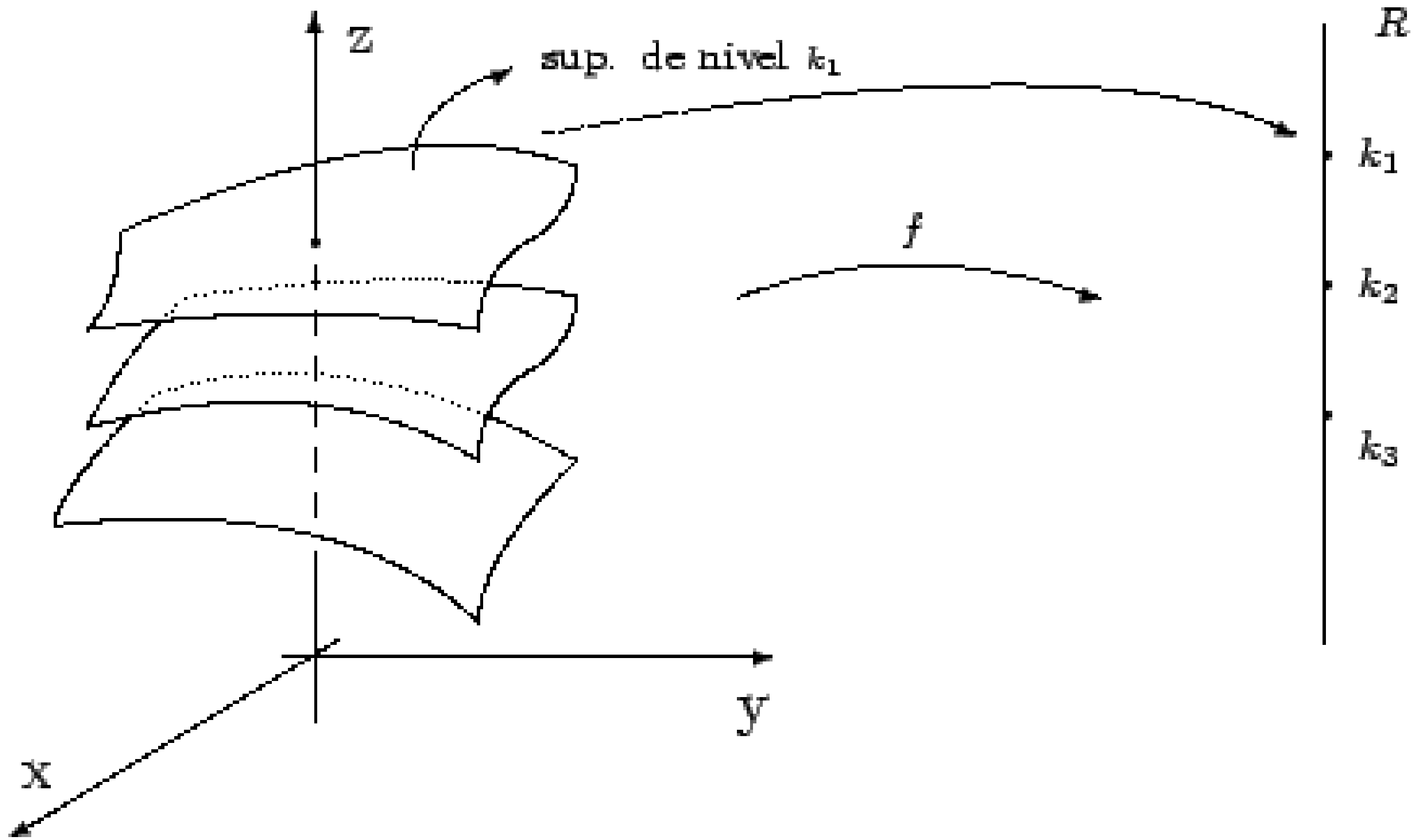
Se **f** é uma função de três variáveis **x**, **y**, **z** então, por definição, as **superfícies de nível** de **f** são os gráficos de **f(x, y, z) = k**, para diferentes valores de **k**.

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Superfícies de nível $k : \{(x, y, z) \in A$ tal que $f(x, y, z) = k\}$.

Em aplicações, por exemplo, se **f(x, y, z)** é a temperatura no ponto **(x, y, z)** então as superfícies de nível são chamadas **superfícies isotermas**. Se **f(x, y, z)** representa potencial elas são chamadas **superfícies equipotenciais**.

Curvas de Superfície de Nível



Exemplo

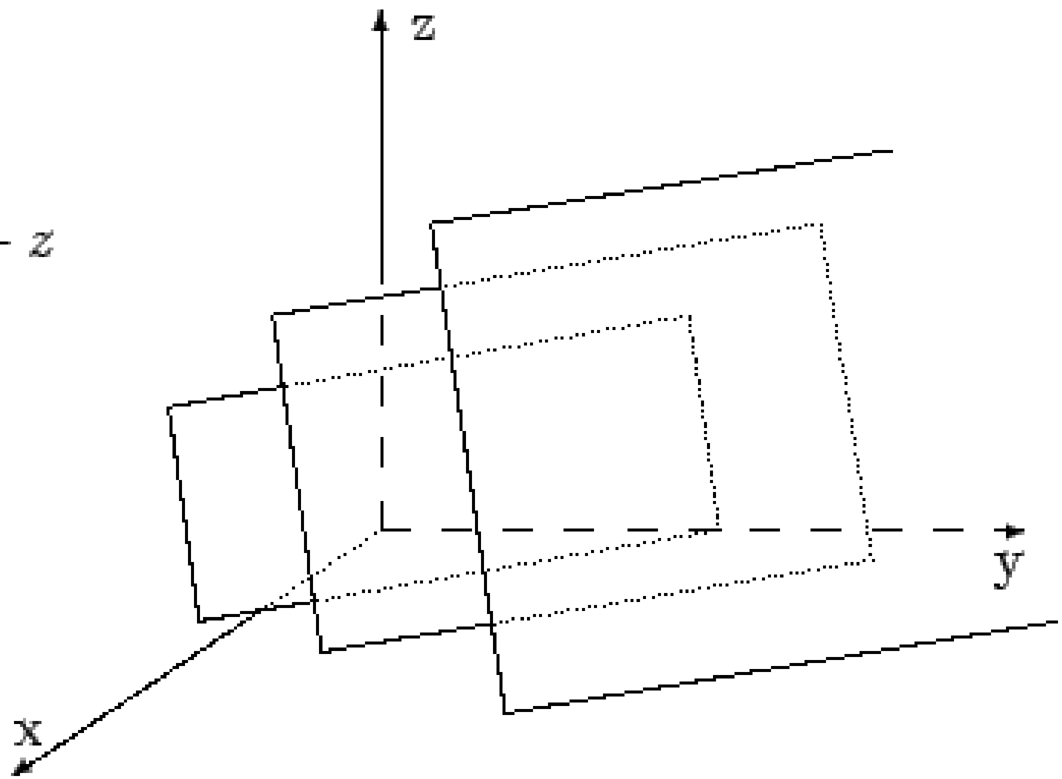
(1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y, z) = 2x + y + z$

superfícies de nível

$2x + y + z = k$

planos paralelos



Exemplo

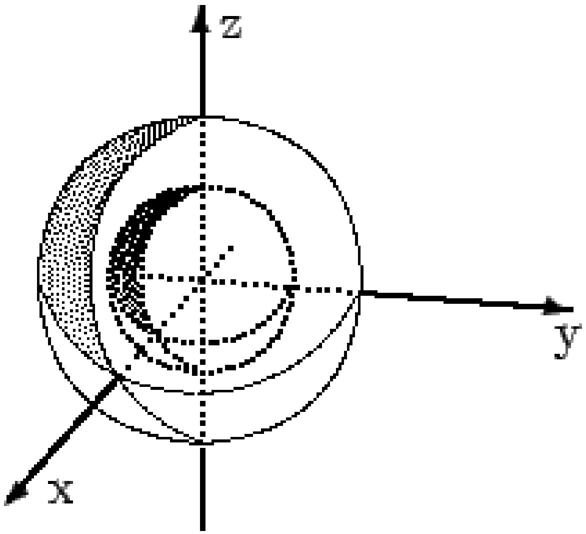
(2) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

superfícies de nível

$x^2 + y^2 + z^2 = k \geq 0$

Superfícies esféricas de centro na origem



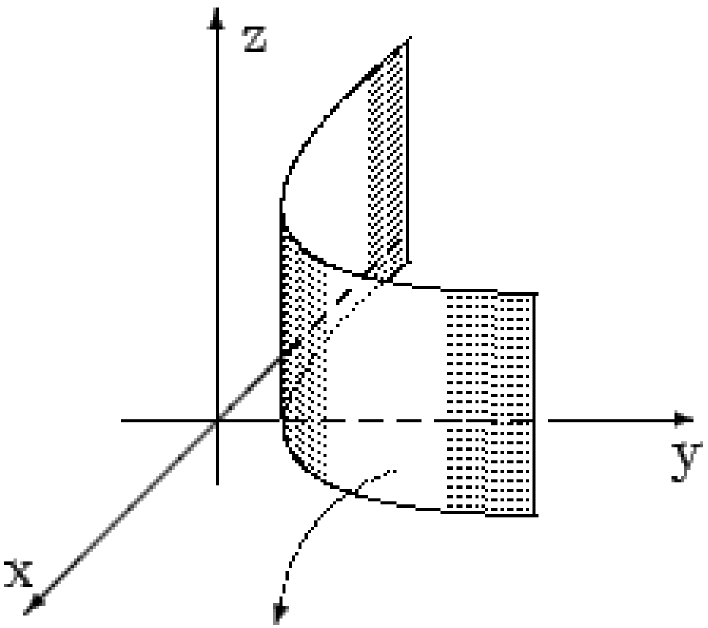
Exemplo

(3) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y, z) = \frac{y}{e^x}$$

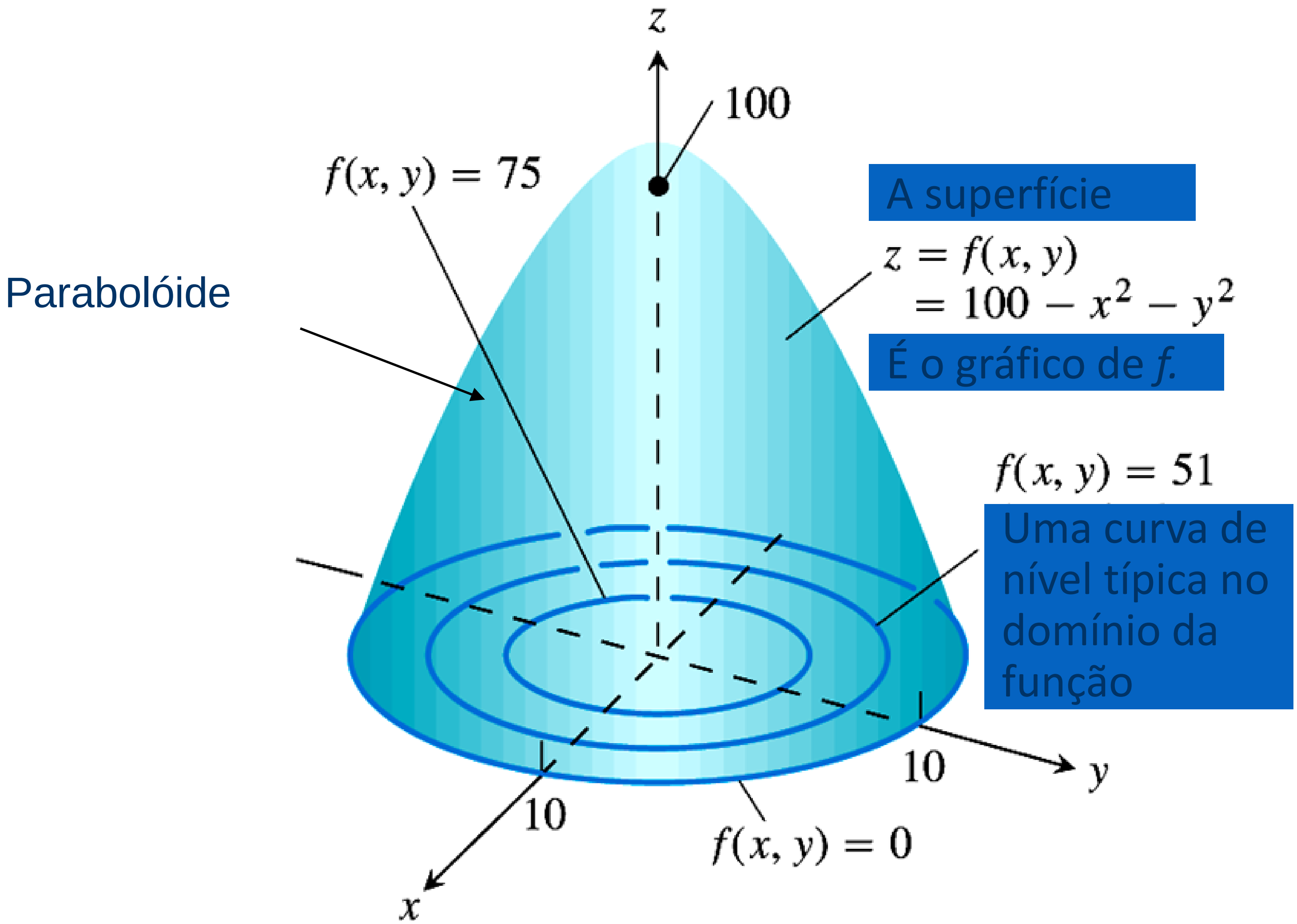
superfícies de nível

$$y = ke^x$$



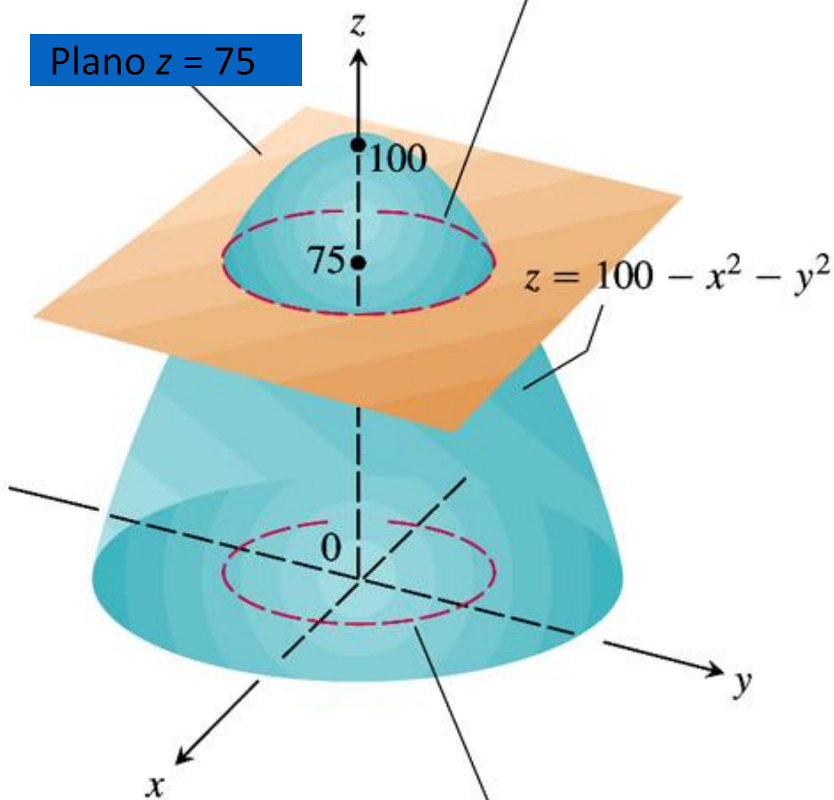
$S : h(x, y, z) \equiv 1$

Curvas de Superfície de Nível



Curvas de Nível X Curvas de Contorno

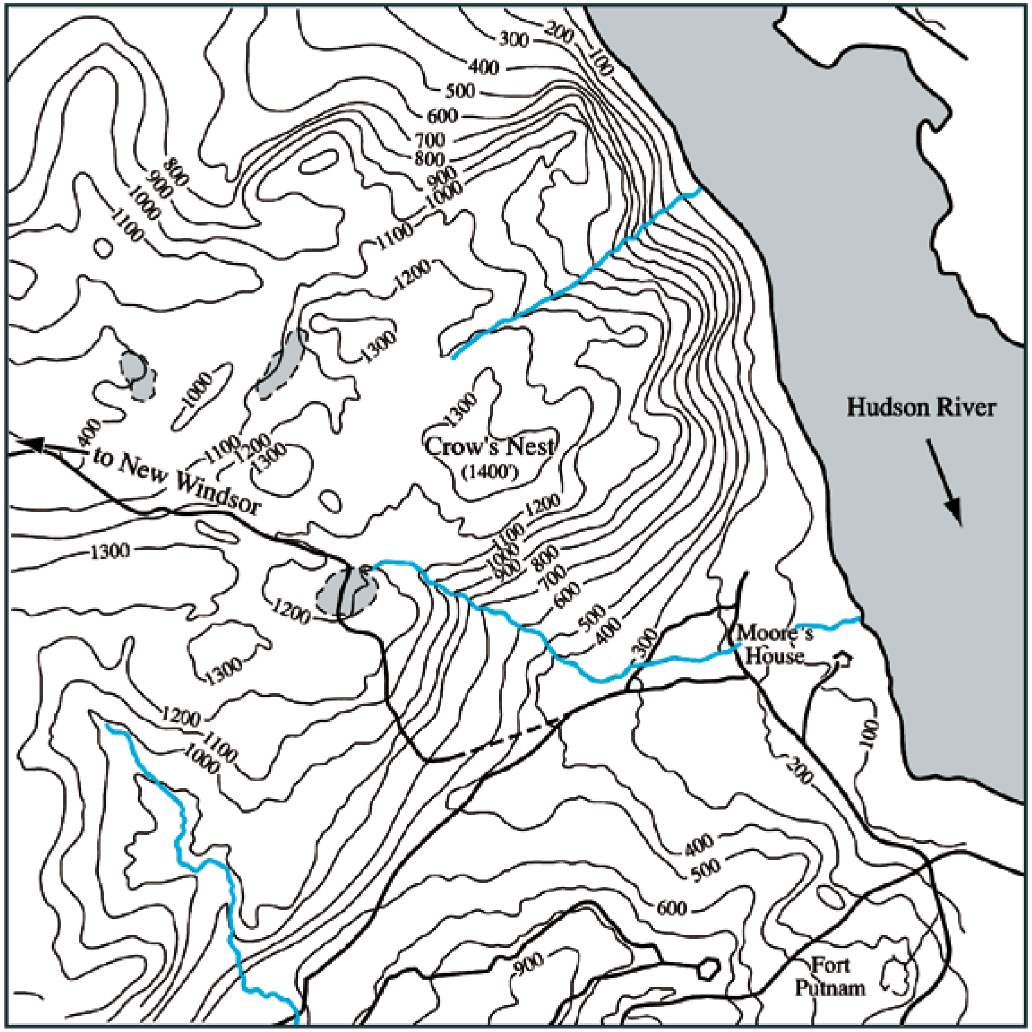
A curva de contorno $f(x,y) = 100 – x^2 + y^2 = 75$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no plano $z = 75$.



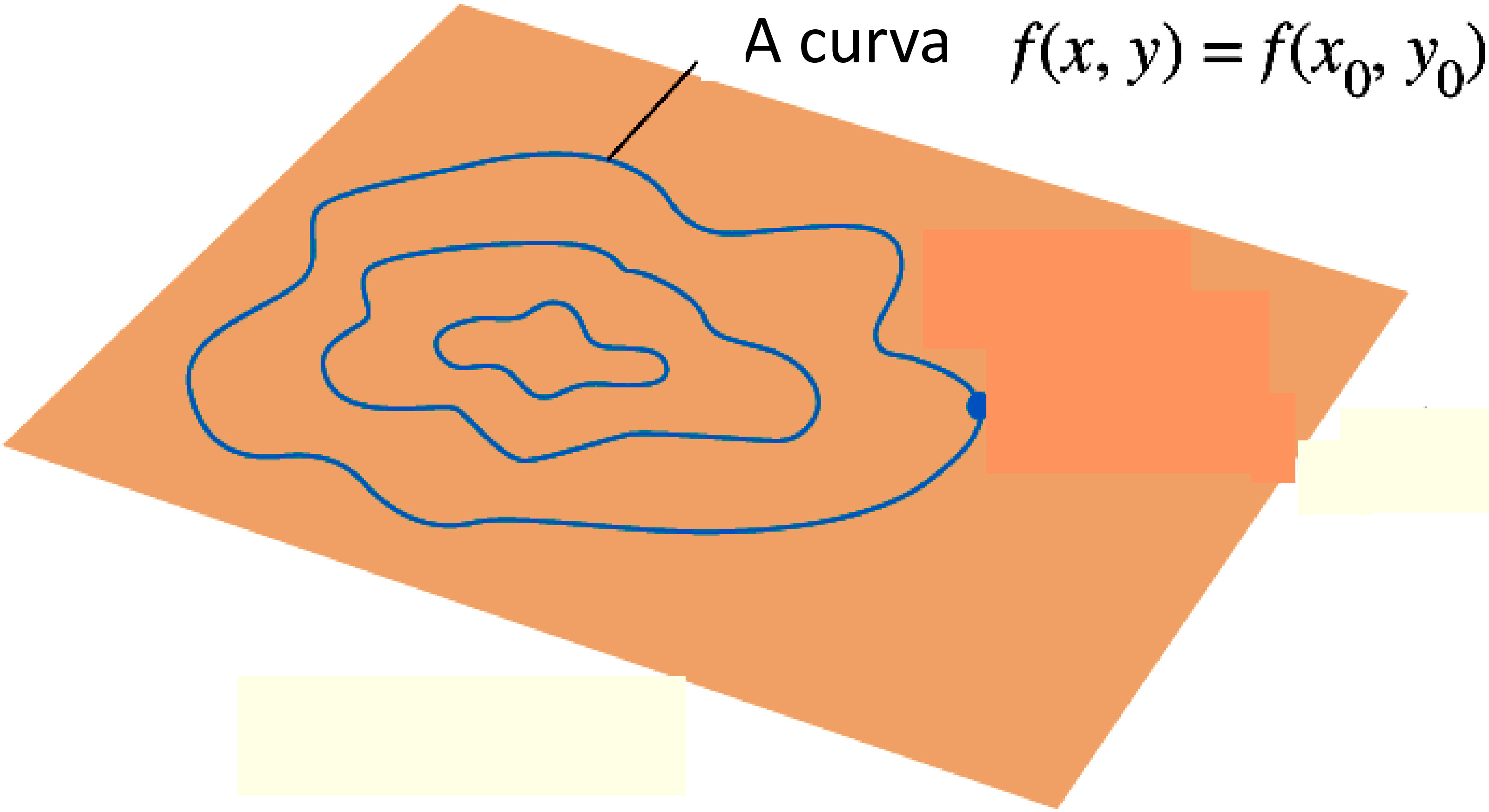
A curva de nível $f(x,y) = 100 – x^2 + y^2 = 75$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no plano xy.

Traço: é a curva definida pelo encontro da superfície f(x,y) com os planos xy, xz e yz.

Curvas de Nível



Curvas de Nível



Exercícios

1) Seja f(x, y) uma função com domínio dado por $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ e $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 9\}$. Esboçar o gráfico da função. Determine **s** curvas de nível par $z = 4$, $z = 6$ e $z = 8$.

2) Para as mesmas cotas anteriores, determinar as curvas de nível da função $z = xy$.