Derivadas Trigonométricas

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 14 24/01/2022

Derivadas Trigonométricas

Proposição

a) $y = sen(x) \Rightarrow y' = cos(x).$

b) $y = cos(x) \Rightarrow y' = -sen(x).$

c) $y = tg(x) \Rightarrow y' = sec^2(x).$

d) $y = cot\,g(x) \Rightarrow y' = -cos\,ec^2(x).$

e) $y = sec(x) \Rightarrow y' = sec(x)tg(x).$

f) $y = cos\,ec(x) \Rightarrow y' = -cos\,ec(x)cot\,g(x).$

$$y'\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Lembrete

$a)\ y = tg(x) \rightarrow \dfrac{senx}{cosx}$

b) $y = cotg(x) = \dfrac{cosx}{senx}$

$c)\ y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$d)\ y = \cos\sec x = \dfrac{1}{sen\,x}$

Obs. $sen^2x + cos^2x = 1$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

Proposição

$$y' = sen\, u = cos\, u\, .\, u'$$

$$y' = \cos u = -sen\, u\, .\, u'$$

$$y' = tg\, u = sec^2 u\, .\, u'$$

$$y' = cotg\, u = -\cos sec^2 u\, .\, u'$$

$$y' = \sec u = \sec u\, .\, tg\, u\, .\, u'$$

$$y' = \cos \sec u = -\cos \sec u\, .\, cotg\, u\, .\, u'$$

Derivadas Trigonométricas

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2) $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
3) $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
4) $\operatorname{sen}^2 nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2nx$
5) $\cos^2 nx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2nx$
6) $2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = 1 - \cos x$
7) $2\cos^2 \frac{1}{2}x = 1 + \cos x$
8) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
9) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
10) $\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{cotg}^2 x + 1$
11) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
12) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
13) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$
14) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
15) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$
16) $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
17) $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$
18) $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
19) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
20) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
21) $\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]$
22) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
23) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
24) $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos(\pi/2 - x)$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

Derivar $F(x) = \cos 2x$.

Fazendo $y = f(x) = 2x$ e $z = g(y) = \cos y$, temos:

$y' = f'(x) = 2$ e $z' = g'(y) = -\text{sen } y$; portanto, vem:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (-\text{sen } y) \cdot 2 = -2 \cdot \text{sen } 2x$

Derivar $F(x) = \text{sen}^3 x$.

Fazendo $y = f(x) = \text{sen } x$ e $z = g(y) = y^3$, temos:

$y' = f'(x) = \cos x$ e $z' = g'(y) = 3y^2$; portanto, vem:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (3y^2) \cdot \cos x = 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

Derivar $F(x) = e^{7x^2 - 2x}$.

Fazendo $y = 7x^2 - 2x$ e $z = g(y) = e^y$, temos:

$y' = f'(x) = 14x - 2$ e $z' = g'(y) = e^y$; portanto, vem:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot (14x - 2) = (14x - 2) \cdot e^{7x^2 - 2x}$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

Calcule a derivada das funções compostas :

a) $y = sen(3x^2)$

Usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\begin{cases} y = sen(u) \\ u = 3x^2 \end{cases} \qquad y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = cos(u) \cdot 6x = 6x\,cos(3x^2).$$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

b) $y = cos^3(x)$

Usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\begin{cases} y = u^3 \\ u = cos(x) \end{cases} \qquad y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = 3u^2 \cdot [-sen(x)] = -3\,sen(x)cos^2(x).$$

c) $y = tg\left(\sqrt{x}\right) \cdot e^{5x}$

Usando a regra da derivada do produto $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ e a regra da cadeia, obtemos:

$$y' = sec^2\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{5x} + tg\left(\sqrt{x}\right)e^{5x} \cdot (5).$$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

Calcule a derivada das funções compostas :

$y = \text{sen}\,(x^2).$

$y = \text{sen}\, u,\ u = x^2.$

$y' = (\cos u)u'$

$= [\cos(x^2)] \cdot 2x$

$= 2x\cos(x^2).$

$y = \cos(1/x).$

$y = \cos u,\ u = (1/x).$

$y' = (-\text{sen}\, u) \cdot u'$

$= [-\text{sen}\,(1/x)] \cdot -1/x^2$

$= \dfrac{1}{x^2}\,\text{sen}\,(1/x).$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

$$y = 3\,\text{tg}\sqrt{x} + \text{cotg}\,3x.$$

$$y' = (3\,\text{tg}\sqrt{x})' + (\text{cotg}\,3x)'$$

$$= 3 \cdot \sec^2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' + (-\text{cosec}^2\,3x) \cdot (3x)'$$

$$= 3\sec^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\text{cosec}^2\,3x)3.$$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

$$y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{cotg} x}.$$

$$y' = \frac{(1 + \operatorname{cotg} x)(\cos x)' - \cos x(1 + \operatorname{cotg} x)'}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{cotg} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x(-\operatorname{cosec}^2 x)}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{cotg} x + \cos x \operatorname{cosec}^2 x}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}.$$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

$$y = \sec(x^2 + 3x + 7).$$

$$y = \sec u, u = x^2 + 3x + 7.$$

$$y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$$

$$= [\sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7)] \cdot (2x + 3)$$

$$= (2x + 3) \sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7)].$$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

$$y = \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

$$y = \operatorname{cosec} u,\ u = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'$$

$$= \left[-\operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}\operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Derivadas Funções Trigonométricas Compostas

- Fórmula da Potência Simples $y = u^n$
- Fórmula da Potência Composta $y = n \, . \, u^{n-1} \, . \, u'$

$$Sendo\ y = sen^3(x), determine\ y'$$

Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

- Calcule as derivadas das funções trigonométricas compostas

$y = sen(4x)$

$y = \cos(3x^2 + 5)$

Derivadas Sucessivas

Em algumas aplicações precisamos derivar uma função mais de uma vez. Se uma função $y = f(x)$ for derivável, isto é, existe $f'(x)$, podemos pensar na derivada de $f'(x)$ e assim sucessivamente.

Definimos e denotamos as derivadas sucessivas de uma função $y = f(x)$ de acordo com a tabela abaixo:

Derivadas Sucessivas

Como lê-se:	Notação:
1ª derivada ou derivada de *1ª* ordem	$f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$
2ª derivada ou derivada de *2ª* ordem	$f''(x)$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$
3ª derivada ou derivada de *3ª* ordem	$f'''(x)$ ou $\frac{d^3y}{dx^3}$
4ª derivada ou derivada de *4ª* ordem	$f^{(4)}(x)$ ou $\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$
nª derivada ou derivada de *nª* ordem	$f^{(n)}(x)$ ou $\frac{d^ny}{dx^n}$

Derivadas Sucessivas

Justificativa para as notações:

- $f''(x) = [f'(x)]'$, $f'''(x) = [f''(x)]'$, a partir da quarta derivada usamos o cardinal.
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$, e assim sucessivamente.

Derivadas Sucessivas

a) Se $f(x) = x^4 + 2x - 1$, então:

$f'(x) = 4x^3 + 2$

$f''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = 24x$

$f^{(4)}(x) = 24$

$f^{(5)}(x) = 0$

...

$f^{(n)}(x) = 0$, para todo $n \geq 5$.

b) Se $f(x) = e^{2x}$, então:

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x}$

$f^{(4)}(x) = 16e^{2x}$

...

$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

Derivadas Sucessivas

c) Se $f(x) = sen(x)$, então:

$$f'(x) = cos(x)$$
$$f''(x) = -sen(x)$$
$$f'''(x) = -cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = sen(x)$$

...

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} cos(x), & n = 1,5,9,\ldots \\ -sen(x), & n = 2,6,10,\ldots \\ -cos(x), & n = 3,7,11,\ldots \\ sen(x), & n = 4,8,12,\ldots \end{cases}$$

Derivadas Sucessivas

c) Se $f(x) = sen(x)$, então:

$$f'(x) = cos(x)$$
$$f''(x) = -sen(x)$$
$$f'''(x) = -cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = sen(x)$$

...

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} cos(x), & n = 1,5,9,\ldots \\ -sen(x), & n = 2,6,10,\ldots \\ -cos(x), & n = 3,7,11,\ldots \\ sen(x), & n = 4,8,12,\ldots \end{cases}$$

$y = \text{sen } x$;

<u>**Solução:**</u> Temos que:

$$y' = \cos x = \text{sen}\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = -\text{sen } x = \text{sen}\left(x + 2\tfrac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = -\cos x = \text{sen}\left(x + 3\tfrac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(4)} = \text{sen } x = \text{sen}\left(x + 4\tfrac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)} = \text{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Derivadas Sucessivas

- Encontre a 27ª derivada do cos x.

SOLUÇÃO Algumas das primeiras derivadas de $f(x) = \cos x$ são as seguintes:

$$f'(x) = -\text{sen } x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \text{sen } x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\text{sen } x$$

Vemos que as derivadas sucessivas ocorrem em um ciclo de comprimento 4 e, em particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ sempre que n for um múltiplo de 4. Portanto,

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

e, derivando mais três vezes, temos

$$f^{(27)}(x) = \text{sen } x$$

Derivadas Sucessivas

$y = a^{2x}$, para $a > 0$ e $a \neq 1$;

Solução: Temos que:

$y' = 2\ln a . a^{2x}$;

$y'' = (2\ln a)^2 . a^{2x}$;

$y''' = (2\ln a)^3 . a^{2x}$;

$y^{(4)} = (2\ln a)^4 . a^{2x}$;

$\vdots$

$y^{(n)} = (2\ln a)^n . a^{2x}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$y = \ln(3x+1)$;

Solução: Temos que:

$y' = \frac{3}{3x+1}$;

$y'' = -\frac{3.3}{(3x+1)^2}$;

$y''' = \frac{3.3.2.3}{(3x+1)^3}$;

$y^{(4)} = -\frac{3.3.2.3.3.3}{(3x+1)^4}$;

$\vdots \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} 3^n (n-1)!}{(3x+1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Derivadas Sucessivas

$y = \frac{1}{x+a}$.

Solução: Observe que, $y = (x+a)^{-1}$. Assim, temos que:

$y' = -(x+a)^{-2}$;

$y'' = 2(x+a)^{-3}$;

$y''' = -2.3.(x+a)^{-4}$;

$y^{(4)} = 2.3.4.(x+a)^{-5}$;

$\vdots$

$$y^{(n)} = (-1)^n (x+a)^{-(n+1)} n! = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Derivadas Sucessivas

Determine todas as derivadas da função:

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 12x + 400$$

Derivadas Sucessivas

- Obtenha a terceira derivada da função $y = sen(x^2)$