Relações

Relações

Relação é um conjunto de pares ordenados

Como por exemplo: R={(1, 2), (1, 3), (3, 0)} ,

Podemos escrever $(1,2) \in R$, $(1,3) \in R$, $(0,3) \in R$, $(5,6) \notin R$,

Exemplo prático 1:

Seja A um conjunto de estudantes de uma escola e B, o conjunto de disciplinas. Seja R a relação que consiste naqueles pares (a, b), no qual *a* é um aluno matriculado na disciplina *b*. Os conjuntos são A = { Ana, Bruno, Carlos } e B = { Física, Química }. A relação é dada a seguir

R = {(Ana, Física), (Bruno, Física), (Carlos, Química)}

Observe que o par (Carlos, Física) não está em *R*.

Exemplo prático 2:

Dados o seguinte conjunto de municípios A = { Videira, Fraiburgo, Curitiba, Florianópolis, Porto Alegre} e B = {Santa Catarina, Paraná, Rio Grande do Sul}. Defina a relação *R*, especificando que (a, b) pertence a *R* se a cidade *a* estiver no estado *b*.

Exemplo prático 3:

Dados os conjuntos A = { 1, 2, 3, 4} e B = { 4, 6, 9 }. Qual é o conjunto de pares ordenados que atendem a seguintes especificação:

$$\mathrm{R} \;=\; \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \text{ sendo que a} \in \mathrm{A} \text{ e b} \in \mathrm{B}\text{:}\;\; \mathrm{a}|\mathrm{b}\}$$

Respostas:

$$\mathrm{R} \;=\; \{(1,4),(1,6),(1,9),(2,4),(2,6),(3,6),(3,9),(4,4)\}$$

Nesse caso, podemos dizer que $1\,R\,4$, $1\,R\,6$, $1\,R\,9$, $2\,R\,4$, $2\,R\,6$, $3\,R\,6$, $3\,R\,9$, $4\,R\,4$. Ainda que $2 \not R 9$ ou $3 \not R 4$

Em outras palavras, os símbolos $x\,R\,y$ significam $(x, y) \in R$

Relação inversa

Seja R uma relação, a inversa de R, denotada por R^{-1}, é a relação formada invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados de R.

Simbolicamente: $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$

Seja $R = \{(1,5),\ (2,6),\ (3,7),\ (3,8)\}$

Então $R^{-1} = \{(5,1),\ (6,2),\ (7,3),\ (8,3)\}$

Propriedades de relações

Seja R uma relação definida em um conjunto A.

- Se, para todo $x \in A$, temos $x\ R\ x$, dizemos que R é reflexiva.
- Se, para todo $x \in A$, temos $x \not R\ x$, dizemos que R é antirreflexiva.
- Se, para todo $x,\ y \in A$, temos $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$, dizemos que R é simétrica.
- Se, para todo $x,\ y \in A$, temos $(x\ R\ y\ \land\ y\ R\ x) \Rightarrow x = y$, dizemos que R é antissimétrica.
- Se, para todo $x,\ y,\ z \in A$, temos $(x\ R\ y\ \land\ y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z$, dizemos que R é transitiva.

Os termos simétrico e antissimétrico não são opostos, pois uma relação pode ter ambas as propriedades ou não ter nenhuma delas.

Uma relação não pode ser tanto simétrica quanto antissimétrica se ela contiver alguma par na forma (a, b), com a $a \neq b$

EXEMPLO 4:

Considere as seguintes relações em { 1, 2, 3, 4}:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $R_5 = \{(3,4)\}$

Quais são reflexivas?

Quais são antirreflexivas?

Quais são simétricos?

Quais são antissimétricos?

Quais são transitivos?

Quais são reflexivas?

- Se, para todo $x \in A$, temos $x\ R\ x$, dizemos que R é reflexiva.

R_3 e R_5 pois ambas contem todos os pares na forma (a, a), ou seja (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Quais são antirreflexivas?

- Se, para todo $x \in A$, temos $x\ \not R\ x$, dizemos que R é antirreflexiva.

$R_4\ e\ R_6$

Quais são simétricos?

- Se, para todo $x,\ y \in A$, temos $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$, dizemos que R é simétrica.

R_2 pois (b, a) pertence a relação assim com (a, b). Veja tanto (2, 1) quanto (1, 2) estão na relação. Ainda tem o (1, 1)

R_3 pois tanto (2, 1) e (1, 2) e ainda (1, 4) e (4, 1) estão na relação

Quais são antissimétricos?

- Se, para todo $x,\ y \in A$, temos $(x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ x\ ) \Rightarrow x = y$, dizemos que R é antissimétrica.

$R_4, R_5\ e\ R_6$

Quais são transitivos?

- Se, para todo $x, \ y, \ z \in A$, temos $(x \, R \, y \land y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$, dizemos que R é transitiva.

R_4 e R_6

R_1 não é transitiva porque (3, 4) e (4, 1) pertencem a R_1, mas (3,1) não.

R_2 não é transitiva porque (2, 1) e (1, 2) pertecem, mas (2,2) não

R_3 não é transitiva porque (4, 1) e (1, 2) pertecem, mas (4, 2) não

R_5 não é transitiva porque (1,2) e (2,3) pertencem, mas (1,3) não

Relações de Equivalência

Relação de equivalência

Seja R uma relação em um conjunto A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplos:

a) Em qualquer conjunto A, $xRy \leftrightarrow x = y$

b) Em $\mathbb{N}$, $xRy \leftrightarrow x + y$ é par

Congruência módulo n

Seja n um inteiro positivo. Dizemos que os inteiros x e y são congruentes módulo n e escrevemos

$$x \equiv y(mód.n)$$

Se $n|(x-y)$

Em outras palavras, $x \equiv y(mód.n)$ se e somente se x e y diferem por um múltiplo de n.

Exemplo

$3 \equiv 13(mód.5)$ porque 3 – 13 = -10 (múltiplo de 5)

$4 \equiv 4(mód.5)$ porque 4 – 4 = 0 (múltiplo de 5)

$16 \not\equiv 3(mód.5)$ porque 16 – 3 = 13 (não é múltiplo de 5)

Casos especiais

O caso mais simples ocorre quando n = 1, nesse caso temos $x \equiv y$ se e somente se o inteiro x-y é divisível por 1, o que todos são.

Outro caso é quando o n = 2. Dois números são congruentes mód. 2 se sua diferença for divisível por 2 (se for número par).

$3 \equiv 15(mód.2)$ $0 \equiv -14(mód.2)$

Mas

$3 \not\equiv 12(mód.2)$ $-1 \not\equiv 0(mód.2)$

Note que dois números são congruentes módulo 2 se e somente se ambos são pares ou ambos são impares.

Classes de equivalência

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e seja $a \in A$. A classe de equivalência de a, denotada por [a], é o conjunto de todos os elementos de *A* relacionados com *a* (pela R); isto é:

$$[a] = \{x \in A : x\ R\ a\}$$

Em outras palavras, se *R* for uma relação de equivalência em um conjunto *A*, a classe de equivalência do elemento *a* é

$$[a] = \{x : (a, x) \in R\}$$

Exemplo:

Consideremos a relação de equivalência congruência mód. 2. O que é [1]? Por definição,

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1(mód. 2)\ \}$$

O resultado é o conjunto de números *x* de forma que 2 | (x -1), isto é, x - 1 = 2k. o conjunto [1] é o conjunto de números ímpares.

Exemplo

Quais são as classes de equivalência de 0 e 1 na congruência mód. 4?

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0(\text{mód}.4)\}$, portanto [0] = { ..., -8, -4, 0, 4, 8, ...}

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1(\text{mód}.4)\}$, portanto [1] = { ..., -7, -3, 1, 5, 9, ...}

Alguns autores representa essa expressão na forma

$[1]_4$ e $[0]_4$

Exemplo

Dada a relação $R = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ em $\{ 1, 2, 3, 4\}$, ache $[2]$.

$[2] = \{ 1, 2 \}$ pois $(2,1)$ e $(2,2) \in R$

ATIVIDADE