Limites Fundamentais

Bacharelado em Ciência da Computação
Cálculo Diferencial e Integral I - 2ª fase

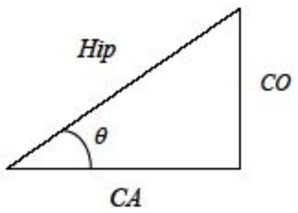
INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Videira

Professora: Joelma Kominkiewicz Scolaro

Aula 08/11/2021

Limites Notáveis

Funções trigonométricas:



1. **Seno:** $\text{sen}(\theta) = \dfrac{CO}{Hip}$;
2. **Cosseno:** $\cos(\theta) = \dfrac{CA}{Hip}$;
3. **Tangente:** $\text{tg}(\theta) = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Limites Notáveis:

1. $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 1$;
2. $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u} = 0$;
3. $\displaystyle\lim_{u \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e$;
4. $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{a^{u} - 1}{u} = \ln a$.

Limites Notáveis

1. $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1;$
2. $\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta);$
3. $1+\operatorname{cotg}^2(\theta) = \operatorname{cossec}^2(\theta);$
4. $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \operatorname{sen}(b)\cos(a);$
5. $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b);$
6. $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta);$
7. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta);$
8. $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta);$
9. $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta);$

Limite fundamental exponencial

O número e tem grande importância em diversos ramos das ciências, pois está presente em vários fenômenos naturais, por exemplo: Crescimento populacional, crescimento de populações de bactérias, desintegração radioativa (datação por carbono), circuitos elétricos, etc. Na área de economia, é aplicado no cálculo de juros.

Foi o Matemático Inglês Jonh Napier (1550-1617) o responsável pelo desenvolvimento da teoria logarítmica utilizando o número e como base. O número e é irracional, ou seja, não pode ser escrito sob forma de fração, e vale aproximadamente: A notação e é uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler.

$$\boxed{e \cong 2{,}7182818}$$

Limite fundamental exponencial

Como o número e é encontrado em diversos fenômenos naturais, a função exponencial f(x) = e^x é considerada uma das funções mais importantes da matemática, merecendo atenção especial de cientistas de diferentes áreas do conhecimento humano. Não apenas na matemática, mas em diversos ramos da ciência,o número e é a base natural utilizada para a descrição de fenômenos naturais como crescimento de populações (tanto de pessoas como de animais), decaimento radiativo, física do calor, circuitos elétricos, etc. Desse modo, a função exponencial ex e o logaritmo natural lnx estão entre as funções de maior importância na matemática, mesmo sendo o número e um número racional e transcendente (não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes reais).

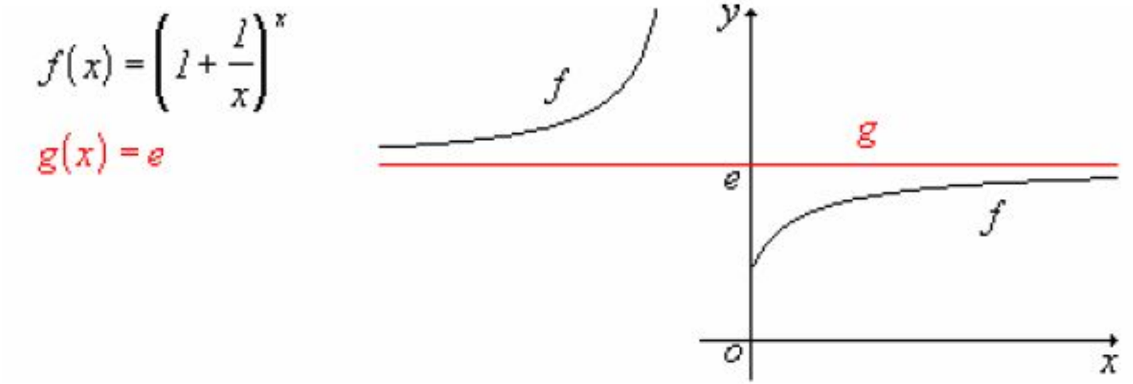
Proposição: $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Tabela

x	$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
100	2,7048..
1000	2,7169..
100.000	2,7182..
$\vdots$	$\vdots$
$x \to +\infty$	$f(x) \to e$

Faça uma tabela para $x \to -\infty$.

Gráfico:



Limite fundamental exponencial

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$g(x) = e$$

Exemplos:

a. $$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-7x} = \left[\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-7} = e^{-7}$$

b. $$\underbrace{\lim_{x \to -\infty}\left(1-\frac{5}{2x}\right)^{x} = \lim_{u \to +\infty}\left(1-\frac{1}{-u}\right)^{-\frac{5u}{2}}} = \left[\lim_{u \to +\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{-\frac{5}{2}} = e^{-\frac{5}{2}}$$

Limite fundamental exponencial

Note que, nos dois casos, uma substituição direta leva à indeterminação 1^{∞}. Para resolver a letra b, introduzimos um artifício chamado mudança de variável ao fazer convenientemente $x = -\frac{5u}{2}$ (por que achamos que assim resolveríamos). Como x e u tem sinais opostos, mudamos o sinal do limite $-\infty \mapsto +\infty$. Se a mudança escolhida não levar a uma solução, analise novamente o problema e tente outra.

Limite fundamental exponencial

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$g(x) = e$$

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^5 = \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^5 = e^5$.

Limite fundamental exponencial

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$g(x) = e$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x}$.

b) Neste caso, usaremos uma mudança de variável...

Faça $x = -3t$. Se $x \to -\infty$ então $t \to +\infty$.

Logo, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{-3t}\right)^{4(-3t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-12t} = \left[\lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-12} = e^{-12}$.

Limite fundamental exponencial

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$g(x) = e$$

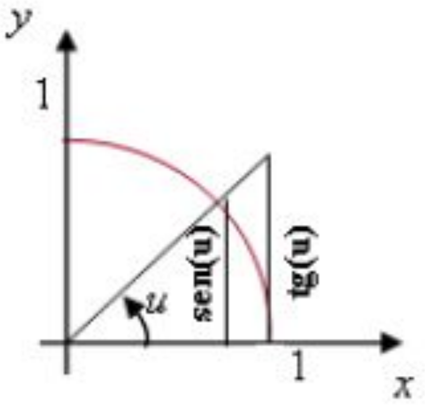
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x} =$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x}$.

Limite fundamental trigonométrico

Proposição 1: $\lim_{u \to 0} \frac{\text{sen }(u)}{u} = 1$

Demonstração:



Limite fundamental trigonométrico

Do gráfico, teremos que:

$\text{sen}\,(u) < u < tg(u) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,u < u < \frac{\text{sen}(u)}{\cos(u)}.$

Sabemos que $\text{sen}(u) > 0$ *e* $\cos(u) > 0$ *para* $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Assim, dividindo tudo por* $\text{sen}(u)$, *obtém-se que:*

$1 < \frac{u}{\text{sen}(u)} < \frac{1}{\cos(u)}.$

Por propriedades de desigualdades não estrita, temos que:

$1 > \frac{\text{sen}\,(u)}{u} > \cos(u)\,.$

Tomando o limite para $u \to 0$, *segue que:*

$\lim_{u\to 0} 1 < \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u)}{u} < \lim_{u\to 0} \cos(u) \quad \Rightarrow \quad 1 < \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u)}{u} < 1.$

Pela propriedade do confronto, obtemos que:

$\lim \frac{\text{sen}\,(u)}{u} = 1.$

Limite fundamental trigonométrico

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} = \frac{0}{0}$.

<u>**Solução:**</u> Multiplicando e dividindo por $\frac{1}{x}$, temos que:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}.\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen } ax}{x}}{\frac{\text{sen } bx}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\text{sen } ax}{ax}}{\frac{b\text{sen } bx}{bx}}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\text{sen } ax}{ax}}{\frac{b\text{sen } bx}{bx}} = \frac{a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen } ax}{ax}}{b\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen } bx}{bx}} = \frac{a}{b}.$$

Limite fundamental trigonométrico

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}\,(x)}{x} = \frac{0}{0}$.

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}\,(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x.\text{cossec}\,(3x) \right) = 0.\infty$.

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$\lim_{x \to 0} \left(x.\text{cossec}\,(3x) \right) = \lim_{x \to 0} \left(x. \frac{1}{\text{sen}\,(3x)} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{3\text{sen}\,(3x)} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\text{sen}\,(3x)} = \frac{1}{3}.$$

Limite fundamental trigonométrico

Proposição 2: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$

Demonstração:

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, *para* $\theta = \frac{x}{2}$, *temos que:*

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} . \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1 * 0 = 0.$$

Limite fundamental trigonométrico

O limite fundamental trigonométrico trata de um limite cuja indeterminação é do tipo $\frac{0}{0}$ envolvendo a função trigonométrica $y = sen(x)$. Este limite é muito importante, pois com ele resolveremos outros problemas.

O limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$

O limite fundamental trigonométrico recai novamente na forma indeterminada $\frac{0}{0}$. A demonstração deste resultado é longa e novamente foge do enfoque deste curso. Porém, com poucos pontos

em uma tabela de aproximações já podemos fazer uma conjectura (idéia não comprovada, hipótese) sobre o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$. [redacted]

Limite fundamental trigonométrico

Proposição: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$

A função $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ é par, isto é, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \neq 0$, pois

$$f(-x) = \frac{sen(-x)}{-x} = \frac{-sen(x)}{-x} = \frac{sen(x)}{x} = f(x).$$

Se $x \to 0^+$ ou $x \to 0^-$, $f(x)$ apresenta o mesmo valor numérico.

Limite fundamental trigonométrico

x	$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$
0,5	0,958851077
0,25	0,989615837
0,1	0,9983341664683
10^{-2}	0,9999833334167
10^{-3}	0,9999998333333
10^{-4}	0,9999999983333
10^{-5}	0,9999999999833
10^{-10}	0,9999999999999

Limite fundamental trigonométrico

Note que o limite lateral à esquerda é o mesmo, pois trocando

x por $-x$ na função $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ obtemos:

$$f(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\text{sen}(x)}{-x} = \frac{\text{sen}(x)}{x} = f(x)$$

Assim, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

Limite fundamental trigonométrico

Exemplos:

a. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{5}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}=5\cdot\underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}}_{1}=5$$

Atenção

Aqui, novamente, usamos a troca de variáveis. Fazendo $5x=u$, quando $x\to 0$, $u\to 0$ e a expressão recai no limite fundamental trigonométrico.

b. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(7x)}{\operatorname{sen}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7x}{7x}\operatorname{sen}(7x)}{\frac{6x}{6x}\operatorname{sen}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x\,\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x}}{6x\,\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}}=\frac{7}{6}\cdot\frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x}}^{1}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}}_{1}}=\frac{7}{6}$$

Limite fundamental trigonométrico

c. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2\frac{1}{\cos^2(x)}\right] = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\right)}_{1} = 1$$

d. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}}_{\frac{0}{2}} = 1.0 = 0$$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(2x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(5x)}{sen(3x)}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos(x)-1}{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)}{x}$.

Soluções:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(2x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \dfrac{sen(2x)}{2x} = 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(2x)}{2x} = \ ...$

Faça $2x = t$. Se $x \to 0$ então $t \to 0$. Logo:

$... = 2 \cdot \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sen(t)}{t} = 2(1) = 2$.

De uma forma geral, $\forall k \in \Re^*$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(kx)}{kx} = 1$. Vamos usar este resultado agora:

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(5x)}{sen(3x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{sen(5x)}{5x} \cdot 5x}{\dfrac{sen(3x)}{3x} \cdot 3x} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(5x)}{5x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(3x)}{3x}} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{1}{1} = \dfrac{5}{3}$.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{cos(x)-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)-1}{x} \cdot \frac{cos(x)+1}{cos(x)+1} = \lim_{x \to 0} \frac{cos^2(x)-1}{x[cos(x)+1]} = \lim_{x \to 0} \frac{-sen^2(x)}{x[cos(x)+1]} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{-sen(x)}{cos(x)+1} = 1\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0$.

d) $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x\,cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{1}{cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos(x)} = 1\left(\frac{1}{1}\right) = 1$.

Limite fundamental Logarítmos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1} = \frac{0}{0}$.

<u>**Solução:**</u> Multiplicando e dividindo por $\frac{1}{x}$, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{e^{5x}-1}{x}} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x}}{5\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x}} = \frac{2\ln e}{5\ln e} = \frac{2}{5}.$$

Limite fundamental Logarítmos

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7^x-49}{x-2}=\frac{0}{0}$.

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{7^x-49}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{7^x-7^2}{x-2}=7^2\lim_{x\to 2}\frac{7^{x-2}-1}{x-2}.$$

Definindo $u=x-2$. Se $x\to 2$, então $u\to 0$.

$$L=49\lim_{u\to 0}\frac{7^u-1}{u}=49\ln 7.$$