Equações Diferenciais Parciais

Alunos: Ariel, Caio, Guilherme, Henrique e Layssa
Orientadora: Jussara de Matos Moreira
Universidade Federal de Minas Gerais

13 de maio de 2025

Seção 1.2 - Equações Lineares de Primeira Ordem

1 Introdução

Nessa seção, serão analisadas equações diferenciais da forma

$$aux + buy = 0 \tag{1}$$

onde $a, b =$ constantes $\neq 0$.

2 Método Geométrico

A equação (1) define o vetor direção

$$\vec{V} = (a, b) = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}.$$

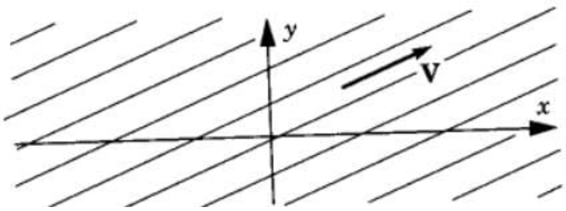

Figura 1: Linhas características associadas ao campo de direção $\vec{V} = (a, b)$.

A solução geral da equação é dada por

$$u(x, y) = f(bx - ay), \tag{2}$$

onde f é uma função arbitrária de uma única variável real.

3 Método Coordenado

Realiza-se uma mudança de variáveis para

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= bx - ay \end{aligned} \tag{3}$$

Substitui-se as derivadas de x e y pelas derivadas de x' e y'. Chega-se à conclusão de que a solução é

$$u = f(y') = f(bx - ay)$$

Exemplo 1: Resolvendo $4ux - 3uy = 0$, $u(0, y) = y^3$.

4 Equação de Coeficiente Variável

A equação

$$ux + yuy = 0 \tag{4}$$

é linear e homogênea, mas tem uma variável como coeficiente. Sua derivada direcional em $(1, y)$ é igual a zero.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1} \tag{5}$$

$$y = Ce^x \tag{6}$$

Onde (6) é a curva característica de (4). Segue-se que a solução geral é

$$u(x, y) = f(e^{-x}y) \tag{7}$$

onde f é uma função arbitrária de única variável.

Exemplo 2: Resolvendo $ux + 2xy^2uy = 0$

5 Conclusão

Com base nos exemplos, percebe-se que as soluções das EDP dependem de funções arbitrárias ao invés de constantes arbitrárias. São necessárias condições auxiliares para resolver com precisão.

Seção 1.6 - Classificação de EDP's de Segunda Ordem

6 Forma Geral das Cônicas

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\psi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Onde A, B, C, D, E e F são funções que dependem de x e y.

Classificamos essa função como *hiperbólica, parabólica ou elíptica*, analisando o sinal do discriminante:

$$\Delta = B^2 - AC$$

E então, temos os seguintes casos:

- Se $\Delta < 0$, classificamos a equação como elíptica.
- Se $\Delta > 0$, classificamos a equação como hiperbólica.
- Se $\Delta = 0$, classificamos a equação como parabólica.

7 EDP's de Segunda Ordem Lineares

Seja a equação:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + e_y + fu = g$$

Onde os coeficientes são funções que dependem de x e y, classificamos a equação a partir dos coeficientes com derivadas de segunda ordem, ou seja:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \ldots = g$$

Análogo às cônicas, classificamos a equação como *hiperbólica, parabólica ou elíptica.* Para isso, utilizamos o discriminante da equação:

$$\Delta = b^2 - ac$$

Novamente, temos os seguintes casos:

- Se $\Delta < 0$, classificamos a equação como elíptica.
- Se $\Delta > 0$, classificamos a equação como hiperbólica.
- Se $\Delta = 0$, classificamos a equação como parabólica.

8 Soluções de EDP's por Mudança de Variáveis

Considere a equação:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$$

Temos $a = 1, b = 3, c = 9$, ou seja, $\Delta = 3^2 - 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow$ a equação é **parabólica**. Isso significa que podemos fazer uma mudança de variáveis, obtendo uma nova equação na forma quadrática.

Colocando as coordenadas (x, y) em termos de β e γ:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = (\partial_x + 3\partial_y)^2 u = 0$$

$$\partial_\beta = \partial_x + 3\partial_y \Rightarrow (\partial_x + 3\partial_y)^2 u$$

$$u_{\beta\beta} = 0$$

Repare que o sinal do discriminante não muda, ou seja, $\Delta = 0$.

Assumimos $x = \beta$ e $y = 3\beta + \gamma$.
Integrando $u_{\beta\beta}$:

$$f(\gamma) + xg(\gamma) = u(\beta, \gamma)$$

Mas $y = 3\beta + \gamma$ e $x = \beta$, logo:

$$\gamma = y - 3x$$

$f(y - 3x) + xg(y - 3x) = u(x, y)$, onde f e g são funções arbitrárias.

Seção 2.1 - Análise da Equação da Onda para PVI

Resumo

A equação da onda é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que descreve a propagação de perturbações, como vibrações em uma corda ou ondas sonoras. Neste texto, estudamos sua forma unidimensional, fazendo uma análise dedutiva de sua solução geral pelo método das coordenadas características, visando sua aplicação em problemas de valor inicial.

9 Introdução

A equação da onda é um modelo fundamental em física matemática para descrever a propagação de distúrbios em meios contínuos. Em uma dimensão espacial, a equação é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{8}$$

onde $u(x,t)$ representa o deslocamento da onda no ponto x e no tempo t, e c é a velocidade de propagação da onda.

10 Mudança de Variáveis na Equação da Onda

Para esta parte, usaremos como referência o trabalho de **strauss**, que realiza uma abordagem analítica baseada em mudança de variáveis características, método proposto originalmente por **dalembert** em 1747. Queremos reescrever a equação da onda usando novas variáveis:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct \tag{9}$$

Nosso objetivo é reescrever as derivadas parciais ∂_t e ∂_x em termos de ∂_ξ e ∂_η, usando a regra da cadeia.

Derivadas parciais usando a regra da cadeia

Como $u = u(x,t) = u(\xi, \eta)$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{11}$$

Das definições de ξ e η de (9):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

Substituindo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial \xi} - c\frac{\partial u}{\partial \eta} \Rightarrow \boxed{\partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta} \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \Rightarrow \boxed{\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta} \tag{13}$$

Agora, podemos utilizar os valores das novas variáveis em relação às antigas coordenadas, de forma a substituir na equação principal (8). Para isso, iremos fatorar o operador da equação da onda:

$$\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x) \tag{14}$$

Calculando cada termo:

$$\partial_t + c\partial_x = (c\partial_\xi - c\partial_\eta) + c(\partial_\xi + \partial_\eta) = 2c\partial_\xi$$

$$\partial_t - c\partial_x = (c\partial_\xi - c\partial_\eta) - c(\partial_\xi + \partial_\eta) = -2c\partial_\eta$$

Portanto:

$$\boxed{\partial_t + c\partial_x = 2c\partial_\xi, \quad \partial_t - c\partial_x = -2c\partial_\eta} \tag{15}$$

Em Resumo

Operador original	**Em termos de** ξ, η
∂_t	$c\partial_\xi - c\partial_\eta$
∂_x	$\partial_\xi + \partial_\eta$
$\partial_t + c\partial_x$	$2c\partial_\xi$
$\partial_t - c\partial_x$	$-2c\partial_\eta$

Tendo os resultados anteriores, podemos substituir as expressões dos operadores diferenciais na equação original da onda. Reescrevendo a equação (8):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{16}$$

Utilizando as transformações deduzidas anteriormente:

$$\partial_t + c\partial_x = 2c\partial_\xi, \quad \partial_t - c\partial_x = -2c\partial_\eta,$$

obtemos:

$$\left(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\right) u = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = (2c\partial_\xi)(-2c\partial_\eta)u = -4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \tag{17}$$

Portanto, a equação da onda em coordenadas características assume a forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{18}$$

A solução geral dessa equação é uma função separável da forma, que é obtida por meio da integração em (18):

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \tag{19}$$

em que f e g são funções arbitrárias de classe C^2, a serem determinadas pelas condições iniciais.

11 Problema de Valor Inicial

O problema de valor inicial consiste em encontrar uma função $u(x,t)$ que satisfaça a equação da onda dadas as seguintes condições:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \tag{21}$$

Queremos descobrir a solução para $u(x,t)$, isto é, a altura da onda no ponto x, no instante t, com base nos dados iniciais $\varphi(x)$ e $\psi(x)$— respectivamente a posição e a velocidade iniciais.

11.1 Solução Geral

A solução geral da equação da onda unidimensional é dada pela utilizando o método de "D'Alembert":

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds. \tag{22}$$

Essa solução representa a superposição de duas ondas viajando em direções opostas e uma contribuição da condição inicial da derivada temporal.

11.2 Solução pelo Método de D'Alembert

A equação da onda unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

A solução geral dessa equação é da forma:

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{24}$$

onde f e g são funções a determinar pelas condições iniciais.

Consideramos as condições iniciais:

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{26}$$

Aplicando as condições iniciais no instante $t = 0$, temos:

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \tag{27}$$

$$cf'(x) - cg'(x) = \psi(x). \tag{28}$$

Somando e subtraindo as equações acima, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{c}\right), \tag{29}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) - \frac{\psi(x)}{c}\right). \tag{30}$$

Integrando, temos:

$$f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\sigma)\,d\sigma + C_1, \tag{31}$$

$$g(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\sigma)\,d\sigma + C_2. \tag{32}$$

Somando $f(s) + g(s)$, obtemos:

$$\varphi(s) = f(s) + g(s) = \varphi(s) + C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0. \tag{33}$$

Substituindo na solução geral:

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(s)\,ds + C_1 \tag{35}$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(s)\,ds + C_2 \tag{36}$$

Como $C_1 + C_2 = 0$, temos:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds. \tag{37}$$

Chegamos então na solução para o problema de valor inicial de referência da equação da onda com domínio espacial infinito utilizando o método de **D'Alembert**.

Cone de Dependência e a Integral na Fórmula de D'Alembert

A equação da onda unidimensional, (8),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

possui, sob condições iniciais $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ solução explícita (37).

A integral com limites $x - ct$ e $x + ct$ aparece porque, fisicamente, a equação da onda propaga perturbações com velocidade c. Assim, o ponto (x,t) só pode ser influenciado por valores de ψ definidos no intervalo $[x - ct, x + ct]$.

Esse intervalo corresponde ao **cone de dependência**, que representa o conjunto de pontos cujas perturbações podem alcançar (x,t) até o instante t, delimitado pelas características:

$$x = x_0 \pm ct,$$

que representam o caminho de propagação na equação da onda.

12 Exemplo

Sejam as condições iniciais:

$$\varphi(x) = \sin(x), \quad \psi(x) = 0,$$

então a solução da equação da onda é:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin(x + ct) + \frac{1}{2}\sin(x - ct),$$

que representa uma onda estacionária.

13 Conclusão

A equação da onda é essencial para modelar fenômenos físicos envolvendo propagação de distúrbios em meios contínuos. Por meio de métodos analíticos, como a fórmula de D'Alembert, é possível descrever com precisão o comportamento de sistemas oscilatórios. Embora, nesta seção, consideremos condições ideais — como um domínio espacial infinito, ausência de atrito e interferências externas —, a equação ainda revela propriedades físicas fundamentais associadas à dinâmica oscilatória, oferecendo uma base teórica valiosa para a compreensão de sistemas reais.