Relações de recorrência

Estruturas de Dados

Bruno Prado

Departamento de Computação / UFS

Introdução

- Implementação iterativa do algoritmo de fatorial
  - Complexidade de tempo

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fatorial iterativo
uint64_t fatorial(uint32_t n) {
    uint64_t r = 1;
    for(uint32_t i = 2; i <= n; i++)
        r = r * i;
    return r;
}
```

Introdução

- Implementação iterativa do algoritmo de fatorial
  - Complexidade de tempo

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fatorial iterativo
uint64_t fatorial(uint32_t n) {
    uint64_t r = 1;
    for(uint32_t i = 2; i <= n; i++)
        r = r * i;
    return r;
}
```

$$fatorial(n) = c_1 \times (n - 1) + c_2 = \Theta(n)$$

Introdução

- Implementação recursiva do algoritmo de fatorial
  - Complexidade de tempo

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fatorial recursivo
uint64_t fatorial(uint32_t n) {
    if(n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

Introdução

- Implementação recursiva do algoritmo de fatorial
  - Complexidade de tempo

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fatorial recursivo
uint64_t fatorial(uint32_t n) {
    if(n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

$$fatorial(n) = ???$$

Relações de recorrência

- O que é uma relação recorrente?
  - É uma função recursiva que define uma sequência

Relações de recorrência

- O que é uma relação recorrente?
  - É uma função recursiva que define uma sequência
- O que é uma função recursiva?
  - É uma função descrita em seus próprios termos
  - Composta por duas partes
    - Caso base
    - Recorrência

Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de fatorial
  - Caso base ($n = 0$)

```
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fatorial recursivo
uint64_t fatorial(uint32_t n) {
    if(n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

$$\updownarrow$$

$$fatorial(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ fatorial(n-1) + 1 & n > 0 \end{cases}$$

Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de fatorial
  - Recorrência ($n > 0$)

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fatorial recursivo
uint64_t fatorial(uint32_t n) {
    if(n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

$$\updownarrow$$

$$fatorial(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ fatorial(n-1) + 1 & n > 0 \end{cases}$$

Relações de recorrência

- Como resolver estas relações de recorrência?
  - Método de substituição
  - Método de árvore de recursão
  - Método mestre

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - $T(n) = fatorial(n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ T(n-1) + 1 & n > 0 \end{cases}$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Encontrar um padrão nas substituições

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Encontrar um padrão nas substituições

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+1 \\ &= [T(n-2)+1]+1 \end{aligned}$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Encontrar um padrão nas substituições

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + 1 \\
&= [T(n-2) + 1] + 1 \\
&= [T(n-3) + 1] + 2
\end{aligned}
$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Encontrar um padrão nas substituições

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+1 \\
&= [T(n-2)+1]+1 \\
&= [T(n-3)+1]+2 \\
&= [T(n-4)+1]+3
\end{aligned}
$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Encontrar um padrão nas substituições

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + 1 \\
&= [T(n-2) + 1] + 1 \\
&= [T(n-3) + 1] + 2 \\
&= [T(n-4) + 1] + 3 \\
&\;\;\vdots \quad \vdots \\
&= T(n-k) + k
\end{aligned}
$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Aplicar o caso base para encontrar o valor de k

$$T(n) = T(n-k) + k$$

$$T(n-k) = 1 \rightarrow n-k = 0 \rightarrow k = n$$

Relações de recorrência

- Método de substituição
  - Aplicar o caso base para encontrar o valor de k

$$T(n) = T(n-k) + k$$

$$T(n-k) = 1 \rightarrow n - k = 0 \rightarrow k = n$$

  - Substituindo na equação

$$\begin{aligned} T(n) &= T(0) + n \\ &= 1 + n \\ &= O(n) \end{aligned}$$

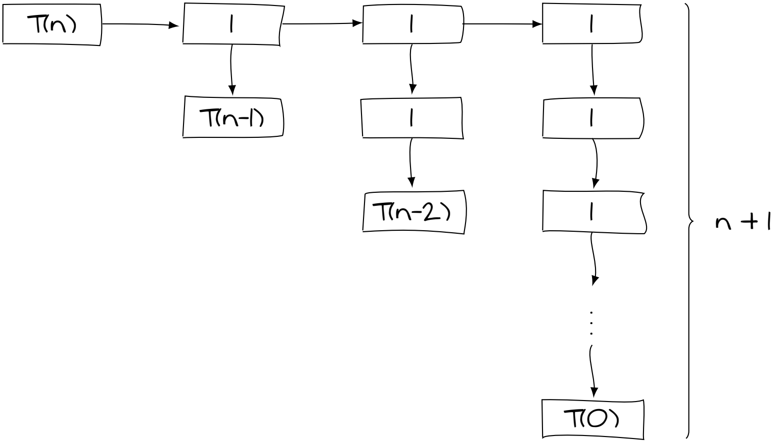
Relações de recorrência

- Método de árvore de recursão
  - $T(n) = fatorial(n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ T(n-1) + 1 & n > 0 \end{cases}$$

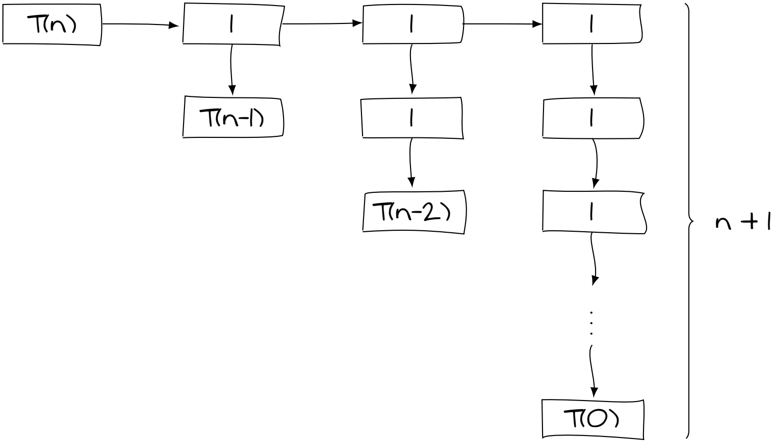
Relações de recorrência

- Método de árvore de recursão
  - Solução gráfica



Relações de recorrência

- Método de árvore de recursão
  - Solução gráfica



$$T(n) = n + 1 = O(n)$$

Relações de recorrência

- Método mestre
  - Resolução de relações de recorrência no formato $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$
  - $a \geq 1$, número de subproblemas
  - $b > 1$, tamanho de cada subproblema
  - $f(n)$ assintoticamente positiva, custo de combinar soluções

Relações de recorrência

- Método mestre
  - Caso 1: $f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon})$, com $\epsilon > 0$
  - Regra: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  - Exemplo: $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$
    - $a = 4$ $(a \geq 1)$
    - $b = 2$ $(b > 1)$
    - $f(n) = n$ $(n \to \infty,\ f(n) > 0)$

$$
\begin{aligned}
f(n) = n &= O(n^{\log_b a-\epsilon}) \\
1 &= \log_b a - \epsilon \\
\epsilon &= \log_2 4 - 1 \\
\epsilon &= 1
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Relações de recorrência

- Método mestre
  - Caso 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  - Regra: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
  - Exemplo: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$
    - $a = 2 \ (a \geq 1)$
    - $b = 2 \ (b > 1)$
    - $f(n) = n \ (n \to \infty, \ f(n) > 0)$

$$\begin{aligned} f(n) = n &= \Theta(n^{\log_b a}) \\ 1 &= \log_b a \\ 1 &= \log_2 2 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 2} \log n) = \Theta(n \log n)$$

Relações de recorrência

- Método mestre
  - Caso 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, com $\epsilon > 0$, $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$, $c < 1$ e n suficientemente grande
  - Regra: $T(n) = \Theta(f(n))$
  - Exemplo: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$
    - $a = 2\ (a \geq 1)$
    - $b = 2\ (b > 1)$
    - $f(n) = n^2\ (n \to \infty,\ f(n) > 0)$

$$
\begin{aligned}
f(n) = n^2 &= \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}) \\
2 &= \log_b a + \epsilon \\
\epsilon &= 2 - \log_2 2 \\
\epsilon &= 1
\end{aligned}
$$

Relações de recorrência

- Método mestre
  - Caso 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, com $\epsilon > 0$, $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$, $c < 1$ e n suficientemente grande
  - Regra: $T(n) = \Theta(f(n))$
  - Exemplo: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$
    - $a = 2$ $(a \geq 1)$
    - $b = 2$ $(b > 1)$
    - $f(n) = n^2$ $(n \to \infty,\ f(n) > 0)$

$$af(\frac{n}{b}) \leq cf(n) \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2}{2} \leq cn^2$$

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$$

Relações de recorrência

- Método mestre
  - É preciso memorizar os casos
  - Não resolve todas as recorrências, como no cálculo do fatorial e da sequência de Fibonacci

Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Caso base ($n \leq 1$)

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fibonacci recursivo
uint64_t fibonacci(uint32_t n) {
    if(n <= 1)
        return n;
    else
        return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
}
```

$$\updownarrow$$

$$fibonacci(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Recorrência ($n > 1$)

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fibonacci recursivo
uint64_t fibonacci(uint32_t n) {
    if(n <= 1)
        return n;
    else
        return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
}
```

$$\updownarrow$$

$$fibonacci(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Método da substituição

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) \\
&= 2T(n-2) + T(n-3) \\
&= 3T(n-3) + 2T(n-4) \\
&= 5T(n-4) + 3T(n-5) \\
&= 8T(n-5) + 5T(n-6) \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= r^{n-1}T(n-1) + r^{n-2}T(n-2)
\end{aligned}
$$

Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Método da substituição

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) \\
&= 2T(n-2) + T(n-3) \\
&= 3T(n-3) + 2T(n-4) \\
&= 5T(n-4) + 3T(n-5) \\
&= 8T(n-5) + 5T(n-6) \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= r^{n-1}T(n-1) + r^{n-2}T(n-2)
\end{aligned}
$$

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Recorrência de segunda ordem com raízes distintas

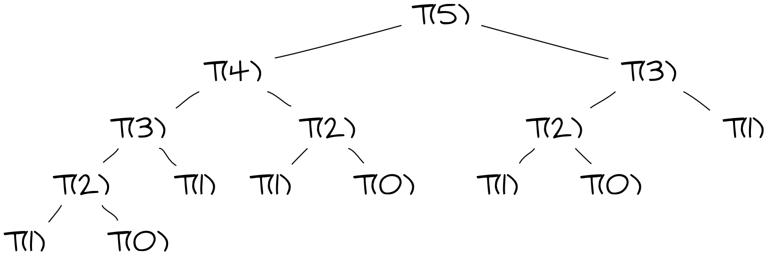
Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Raízes distintas

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n \\
T(0) &= \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \\
T(1) &= \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\
T(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
T(n) &\approx \frac{1}{\sqrt{5}}(1,6)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(0,6)^n = O(1,6^n)
\end{aligned}
$$

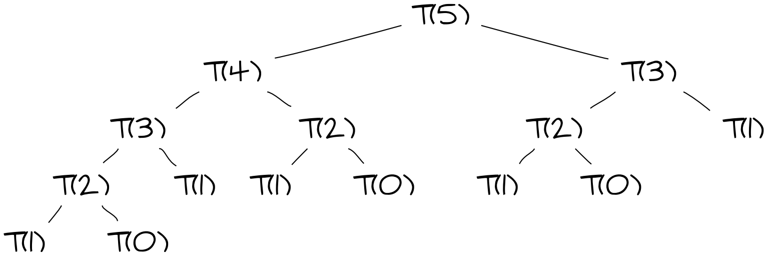
Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Método da árvore de recursão



Relações de recorrência

- Implementação recursiva do algoritmo de Fibonacci
  - Método da árvore de recursão



Árvore com altura n e em cada nó existem 2 filhos
Complexidade é $O(2^n)$

Relações de recorrência

- Implementação iterativa do algoritmo de Fibonacci

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fibonacci iterativo
uint64_t fibonacci(uint32_t n) {
    uint64_t r = n, tn2 = 0, tn1 = 1;
    for(uint32_t i = 1; i < n; i++) {
        r = tn2 + tn1;
        tn2 = tn1;
        tn1 = r;
    }
    return r;
}
```

Relações de recorrência

- Implementação iterativa do algoritmo de Fibonacci

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Fibonacci iterativo
uint64_t fibonacci(uint32_t n) {
    uint64_t r = n, tn2 = 0, tn1 = 1;
    for(uint32_t i = 1; i < n; i++) {
        r = tn2 + tn1;
        tn2 = tn1;
        tn1 = r;
    }
    return r;
}
```

$$fibonacci(n) = c_1 \times 3 + c_2 \times (n-1) = \Theta(n)$$

Exemplo

- Identifique qual dos algoritmos já visto possui a seguinte recorrência
- Resolva a recorrência para determinar a complexidade

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-1) + n & n > 1 \end{cases}$$

Exemplo

- Método da substituição
  - Série aritmética

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= T(1) + \ldots + (n-2) + (n-1) + n
\end{aligned}$$

Exemplo

- Método da substituição
  - Série aritmética

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= T(1) + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Método da substituição
  - Série aritmética

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= T(1) + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2+n}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Método da substituição
  - Série aritmética

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+n \\
&= T(n-2)+(n-1)+n \\
&= T(n-3)+(n-2)+(n-1)+n \\
\vdots &\quad \vdots \\
&= T(1)+\ldots+(n-2)+(n-1)+n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2+n}{2} \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

Exercícios

- Resolva as seguintes recorrências para determinar as complexidades
  - $T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(\frac{n}{2}) + 1 & n > 1 \end{cases}$
  - $T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + n^2 & n > 1 \end{cases}$