# Notas de Algebra Linear

Eduardo Hernandez, Michelle Pierri

# Sumário

# Capítulo 1

# Espaços Vetoriais

Neste capítulo introduziremos o conceito mais importante da teoria de algebra linear, o conceito de espaço vetorial. No que segue desta apostilha, $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.

**Definição 1.1.** *Seja $V$ é um conjunto não vazio e suponha que existem duas operações definidas em $V$, uma operação somma (denotada $+$) que a cada par de elementos $u, v \in V$ associa un único elemento de $V$ denotado por $u + v$, e uma operação chamada de multiplicação por escalar que a cada $u \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ associa un único elemento de $V$ denotado por $\lambda \cdot u$. Dizemos que o triple $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial se as seguintes condições são satisfeitas:*

$P_1$ *$u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$, (propriedade comutativa)*

$P_2$ *$u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in V$, (propriedade associativa)*

$P_3$ *existe um elemento $0 \in V$ tal que $0 + u = u$ para todo $u \in V$,*

$P_4$ *para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0$,*

$P_5$ *$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ para todo $u \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$P_6$ *$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ para todo $u \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$P_7$ *$\lambda(u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ para todo $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$P_8$ *$1 \cdot u = u$ para todo $u \in V$.*

**Observação 1.2.** Os elementos de um espaço vetorial (independentemente da natureza do conjunto $V$) são chamados de vetores e os números reais que aparecem na multiplicação $\lambda \cdot u$ são chamados escalares.

A seguir apresentamos alguns exemplos de espaçõs vetorias.

**Exemplo 1.3.** Um exemplo obvio de espaço vetorial é o conjunto $\mathbb{R}$ munido com as operações $+$ e $\cdot$ usuais.

**Exemplo 1.4. O espaço $\mathbb{R}^n$**

Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto formado por todas as $n$-uplas ordenadas de números reais. Lembre que uma $n$-upla de números reais é uma ordenação de números reais da forma

$(x_1, \ldots, x_n)$. No conjunto $\mathbb{R}^n$ definimos a soma de $n$-uplas e a multiplicação escalar por

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Deixamos como exercicio mostrar que $\mathbb{R}^n$ munido com as operações anterioresi é um espaço vetorial.

**Exemplo 1.5. O espaço de polinomios de grau menor o igual a $n$.**

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a $n$. Lembre que um polinômio com coeficientes reais é uma função $f$ da forma $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ onde cada $a_i$ é um número real.

Em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definimos as operações soma e multiplicação por escalar na forma

- **Soma:** Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ definimos $(p+q)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$
- **Multiplicação por escalar:** $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\lambda \cdot p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$

**Exercício 1.6.** Mostrar que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ munido com as operações anteriores é um espaço vetorial.

**Exemplo 1.7. Espaços de funções**

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e denotemos por $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ o conjunto formado por todas as funções $f$ definidas de $A$ em $\mathbb{R}$. No conjunto $\mathcal{F}(A; \mathbb{R})$ consideramos as seguintes operações:

- **Soma:** Se $f, g \in F(A; \mathbb{R})$ á função soma $f + g : A \to \mathbb{R}$ é dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- **Multiplicação por escalar:** Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in F(A; \mathbb{R})$ a função $\lambda \cdot f$ é dada por $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$.

**Exercício 1.8.** Mostrar que $F(A; \mathbb{R})$ munido com as operações anteriores é um espaço vetorial.

**Exemplo 1.9. O espaço das matrizes de ordem $n \times m$.**

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Lembremos que uma matriz de ordem $n \times m$ é uma ordenação de numeros reais $a_{i,j}$ da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

formada por $n$-filas e $m$-colunas. Para simplificar, no que segue uma matriz como a anterior será representada na forma $A = (a_{i,j})_{n,m}$.

Definimos $M(n,m)$ como sendo o conjunto formado por todas a matrizes de ordem $n \times m$. Nesta apostilha sempre assumiremos que $M(n,m)$ é munido das seguintes operações:

- **Soma:** Se $A = (a_{i,j})_{n,m}$ e $B = (b_{i,j})_{n,m}$ a $A + B$ é dada por $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{n,m}$,
- **Multiplicação por escalar:** Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{i,j})_{n,m}$, a matriz $\lambda A$ é dada por $\lambda A = \lambda \cdot (a_{i,j})_{n,m} = (\lambda a_{i,j})_{n,m}$.

**Exercício 1.10.** Mostrar que com as operações anteriores $M(n,m)$ é um espaço vetorial.

**Exemplo 1.11. Um exemplo abstrato**
Os exemplos anteriores envolvem conjuntos e operações que ja conhecemos. O seguinte exemplo é mais abstrato e por isso o estudaremos com maior atenção.

No conjunto $V = (0, \infty)$ definimos a soma entre dois números $x$ e $y$ de $V$ por $x \boxplus y = xy$ (aqui $xy$ é o produto usual entre $x$ e $y$) e o produto escalar de $x$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\lambda \boxdot x = x^\lambda$. Com essas operações temos que $V$ é um espaço vetorial. De fato, note que

$P_1$ se $x, y \in V$ temos que $x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x$ para todo $x, y \in V$,

$P_2$ $x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \boxplus y)z = (x \boxplus y) \boxplus z$ para todo $x, y, z \in V$,

$P_3$ se $x \in V$ temos que $1 \boxplus x = 1x = x$. Logo, o vetor 0 em $P_3$ é o número 1,

$P_4$ se $x \in V$ então $\frac{1}{x} \in V$, de onde segue que $P_4$ é satisfeita com $-x = \frac{1}{x}$,

$P_5$ $\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) = \lambda \boxdot x^\mu = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \boxdot x$ para todo $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$P_6$ $(\lambda + \mu) \boxdot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda \boxplus x^\mu = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\mu \boxdot x)$ para todo $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$P_7$ $\lambda \boxdot (x \boxplus y) = \lambda \boxdot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$ para todo $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$P_8$ $1 \boxdot x = x^1 = x$ para todo $x \in V$.

**Exemplo 1.12.** Seja $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = x, z = w^2\}$ com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$. Como $(0,0,1,1) \in V$ e $-1(0,0,1,1) = (0,0,-1,-1) \notin V$, segue que $V$ não é um espaço vetorial.

Um dos aspectos mais interessantes de qualquer teoria matemática é que ela é desenvolvida a partir de um conjunto de propriedades básicas. Em particular, notamos que todos os resultados e aplicações da algebra linear são obtidos a partir dos axiomas $P_1$-$P_8$. No próximo resultado vemos como é possivel obter novas propriedades a partir desses axiomas.

**Proposição 1.13.** *Se $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial, então as seguintes propriedades são verificadas.*

1. *O elemento* $0$ *da propriedade* $P_3$ *é único,*
2. *para cada* $u \in V$ *o vetor* $-u$ *da propriedade* $P_4$ *é único,*
3. *se* $0$ *é o vetor em* $P_3$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *então* $\lambda 0 = 0$*,*
4. *se* $0$ *é o número real zero e* $u \in V$ *então* $0u = 0$*,*
5. *se* $\lambda u = 0$ *então* $\lambda = 0$ *ou* $u = 0$*,*
6. *se* $u$ *então* $-1 \cdot u = -u$*,*
7. *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$ *então* $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u)$*,*
8. *se* $u \in V$ *então* $-(-u) = u$*,*
9. *se* $u + w = v + w$ *então* $u = v$*,*
10. *se* $u, v \in V$ *então existe um único* $w \in V$ *tal que* $u + w = v$*.*

**Prova:** Mostramos somente as seis primeiras propriedades, a prova das outras é deixada como exercicio.

1. Suponha que $0' \in V$ tambem satisfaz a propriedade $P_3$. Então, por $P_3$ e $P_1$ temos que $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$.

2. Suponha que $v \in V$ é tal que $u + v = 0$. Usando $P_1$, $P_2$ e $P_3$ vemos que $v = v + 0 = v + (u + -u) = (v + u) + -u = (u + v) + -u = 0 + -u = -u$. Isto prova que existe un único vetor que verifica a propriedade $P_4$.

3. Por $P_3$ e $P_7$ temos que $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$. Usando isto, vemos que

$$\begin{aligned}
\lambda 0 &= \lambda 0 + \lambda 0, \quad / + \; -(\lambda 0) \\
\lambda 0 + -(\lambda 0) &= (\lambda 0 + \lambda 0) + -(\lambda 0) \\
0 &= (\lambda 0 + \lambda 0) + -(\lambda 0) \quad \text{por } P_3 \\
0 &= \lambda 0 + (\lambda 0 + -(\lambda 0)) \quad \text{por } P_2 \\
0 &= \lambda 0 + 0 \quad \text{por } P_4 \\
0 &= \lambda 0, \quad \text{por } P_3,
\end{aligned}$$

   o que prova a propriedade.

4. Note que $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. Logo, somando $-(0u)$ ao ambos lados desta igualdade vemos que

$$\begin{aligned}
0u &= (0u + 0u) + -(0u) \\
0 &= 0u + (0u + -(0u)) \quad \text{por } P_2 \\
0 &= 0u + 0 \quad \text{por } P_4 \\
0 &= 0u \quad \text{por } P_3.
\end{aligned}$$

5. Suponha que $\lambda u = 0$ e que $\lambda \neq 0$. Por $P_8$, $P_5$ e propriedade em (3), vemos que $u = 1u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0 = 0$. ■

6. Como $0 = 0 \cdot u = (-1 \cdot u + 1 \cdot u) = -1u + u$, de (2) segue que $-u = -1 \cdot u$.

## 1.1 Exercícios

1. Verifique que o conjunto $V$ com as operações indicadas é um espaço vetorial.

   (a) O conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais de $M(2,2)$.

   (b) O conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & 3a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais de $M(2,2)$.

   (c) O conjunto $V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0 \right\}$ com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

   (d) O conjunto $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ com as operações do espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

   (e) O conjunto $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ com as operações do espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

   (f) O conjunto $V = \mathbb{R}^2$ munido das operações $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1)$ e $\alpha \cdot (x, y) = (3\alpha x, -\alpha x.)$

   (g) O conjunto $V = \mathbb{R}^2$ com as operações $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.

   (h) O conjunto $V = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = x, z = w^2 \right\}$ com as operações de $\mathbb{R}^4$.

   (i) $V = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ com as operações $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$, $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y^\alpha)$.

   (j) Seja $\omega \in \mathbb{R}$ e $F_\omega = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$ é $\omega$ periodica$\}$ (lembre que uma função $f \in \mathbb{R}$ é $\omega$ periodica $f(s + \omega) = f(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.) Com as operações do espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, o conjunto $F_\omega$ é um espaço vetorial .?

2. Suponha que $(U, \diamond, \circ)$ e $(W, \oplus, \odot)$ são espaços vetoriais. No espaço produto $U \times W = \{(x, y) : x \in U, y \in W\}$ definimos as operações $(u, v) + (w, z) = (u \diamond w, v \oplus z)$ e $\lambda(u, v) = (\lambda \circ u, \lambda \odot v)$. Com as operações anteriores $U \times W$ é um espaço vetorial?

**Observação 1.14.** Para simplificar as notações, no que segue desta apostilha $V$ será um espaço vetorial e as operações soma e multiplicação por escalar serão denotadas por $u + v$ e $\alpha u$ respectivamente.

Introduzimos agora o conceito de subespaço vetorial.

**Definição 1.15.** *Seja $W \subset V$. Dizemos que $W$ é um subespaço vetorial de $V$, se $W$ munido das operações soma e multiplicação escalar de $V$ é um espaço vetorial.*

**Observação 1.16.** É conveniente lembrar a seguinte frase da definição de espaço vetorial: " Uma operação somma (denotada +) que a cada par de elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ **associa um único elemento de** $V$ denotado por $u + v$, e uma multiplicação por escalar que a cada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ **associa un único elemento de** $V$ denotado por $\lambda u$. " Logo, para que $W \subset V$ seja um subespaço vetorial de $V$ é necessario que $u + v \in W$ e $\lambda u \in W$ para todo $u, v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Como veremos no próximo resultado, estas propriedades caracterizam o conceito de subespaço vetorial.

**Proposição 1.17.** *Um conjunto* $W \subset V$ *é um subespaço vetorial de* $V \Leftrightarrow u+\lambda v \in W$ *para todo* $u, v \in W$ *e todo* $\lambda \in W$.

**Prova:** Se $W$ é um subespaço vetorial de $V$, da definição de subespaço vetorial (veja também a observação 1.16) segue diretamente que $u + \lambda v \in W$ para todo $u, v \in W$ e todo $\lambda \in W$.

Suponha agora que $u + \lambda v \in W$ para todo $u, v \in W$ e todo $\lambda \in W$. Para provar que $W$ é um espaço vetorial temos que mostrar que as propriedades $P_1$-$P_8$ são verificadas. As propriedades $P_1, P_2, P_5, P_6, P_7$ e $P_8$ são trivialmente satisfeitas pois elas são válidas em relação a $V$. Assim, resta mostrar que $P_3$ e $P_4$ são satisfeitas.

Seja $u \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Da Proposição 1.13 sabemos que $-u = -1u$. Logo, $0 = u + -u = u + -1u \in W$ o que implica que a condição $P_3$ é satisfeita. Usando agora que $0 \in W$ e que $-u = -1u$ temos que $-u = 0 + -1u \in W$ o que prova que $P_4$ é tambem válida. Segue do anterior que $W$ é um subespaço vetorial de $V$. Isto completa a prova. ∎

Vejamos alguns examplos de sub-espacos vetoriais.

**Exemplo 1.18.** Obviamente os conjuntos $\{0\}$ e $V$ são subespaços de $V$. Estes subespaços são chamados de subespaços vetoriais triviais de $V$.

**Exemplo 1.19.** O conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ é um subsepaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Sejam $u = (x, y, z)$, $v = (x_1, y_1, z_1)$ vetores em $S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ temos que provar que $u+\lambda v = (x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1)$ pertence a $S$. Da definição de $S$ segue que $x + y + z = 0$ e que $x_1 + y_1 + z_1 = 0$. Logo, $x + \lambda x_1 + y + \lambda y_1 + z + \lambda z_1 = x + y + z + \lambda(x_1 + y_1 + z_1) = 0$, o que mostra que $u + \lambda v \in S$. Por tanto, $S$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

**Exemplo 1.20.** Seja $P_n^*(\mathbb{R})$ o subconjunto de $P_n(\mathbb{R})$ definido por $P_n^* = \{p \in P_n : p(0) = 0\}$. Para mostrar que $P_n^*(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $P_n(\mathbb{R})$ usaremos a Proposição 1.17.

Sejam $f, g \in P_n^*(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Provar $f + \alpha g \in P_n^*(\mathbb{R})$ é equivalente a mostrar que $(f + \lambda g)(0) = 0$. Note agora que $(f + \lambda g)(0) = f(0) + (\lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = 0 + \lambda 0 = 0$.

**Exemplo 1.21.** Seja $A \in M(n, n)$ uma matriz quadrada de ordem $n$ e $W = \{X \in M(n, 1) : AX = 0\}$. O conjunto $W$ com as operações de $M(n, 1)$ é um subespaço vetorial de $M(n, 1)$.

Sejam $X, Y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $X + \lambda Y \in W$ temos que provar que $A(X + \lambda Y) = 0$. Note agora que da definição de $W$, temos que $AX = 0$ e $AY = 0$, de onde segue que

$$A(X + \lambda Y) = AX + A(\lambda Y) = AX + \lambda AY = O + \lambda O = O.$$

Isto prova que $W$ é um subespaço vetorial de $M(n, 1)$.

**Exemplo 1.22.** Seja $S_n^*(\mathbb{R})$ o subconjunto de $P_n(\mathbb{R})$ dado por

$$S_n^*(\mathbb{R}) = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_j x^j \in P_n(\mathbb{R}) : a_j = 0 \text{ se } j \text{ é par}\}.$$

Deixamos como exercicio mostrar que $S_n^*(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $P_n(\mathbb{R})$.

## 1.2 Exercicios

1. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_j x_j = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$. O conjunto $S$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. ?

2. Resolver o exercicio anterior usando o Exemplo 1.21.

3. O conjunto das matrizes simétricas de ordem $n \times n$ é um subespaço vetorial de $M(n, n)$. Lembre que uma matriz $A = (a_{i,j})_{n,n}$ é simétrica se $a_{i,j} = a_{j,i}$ para todo $i, j$.

4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$. O conjunto $P_m(\mathbb{R})$ é um subespaço de $P_n(\mathbb{R})$ ?

### 1.2.1 Interseção e Soma de Subespaços vetoriais

Nesta seção veremos que a interseção e a soma de subespaços vetorias é um subespaço vetorial. Para começar, estudemos o caso da interseção.

**Proposição 1.23.** *Se $U$ e $W$ são sub-espaços vetoriais de $V$ então o conjunto $U \cap W = \{x \in V : x \in U, x \in W\}$ é sub-espaço vetorial de $V$.*

**Prova:** Para mostrar o resultado usamos a Proposição 1.17. Sejam $u, v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $u, v \in U$ e $U$ é um espaço vetorial temos que $u + \lambda v \in U$. Mais ainda, como $u, v \in W$ e $W$ é um espaço vetorial também temos que $u + \lambda v \in W$. Agora, pela Proposição 1.17 segue que $U \cap W$ é sub-espaço vetorial de $V$.

**Definição 1.24.** *Sejam $U$ e $W$ subconjuntos de $V$. O conjunto $U + W$ definido por $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ é chamado soma de $U$ e $W$. A soma $U + W$ é chamada direta se $U \cap W = \{0\}$. Se a soma $U + W$ é direta, usaremos a notação $U \oplus W$ em lugar de $U + W$.*

**Proposição 1.25.** *Suponha que $U, W$ são sub-espaçõs vetoriais de $V$. Então,*

1. *$U + W$ é um subespaço vetorial de $V$,*

2. *$U + W$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contém $U \cup W$, ou seja, se $Q$ é um subespaço vetorial de $V$ que contém $U \cup W$ então $U + W \subset Q$.*

3. *A soma $U + W$ é direta $\Leftrightarrow$ para cada $v \in U + W$ existe um único $u \in U$ e um único $w \in W$ tais que $v = u + w$.*

**Prova:** Para começar, mostremos que $U + W$ é um subespaço vetorial de $V$. Sejam $u, v \in U + W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $u \in U + W$, existem vetores $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$ tais que $u = u_1 + w_1$. Similarmente, como $v \in U + W$ existem vetores $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$ tais que $v = u_2 + w_2$. Como $U$ e $W$ são subespaços vetoriais de $V$ segue que $u_1 + u_2 \in U$ e que $\lambda(w_1 + w_2) \in W$. Usando isto, vemos que

$$u + \lambda v = u_1 + \lambda w_1 + u_2 + \lambda w_2 = u_1 + u_2 + \lambda(w_1 + w_2) \in U + W,$$

de onde concluimos que $U + W$ é um subespaço vetorial de $V$.

Provaremos agora a segunda propriedade. Se $u \in U$ então $u = u + 0 \in U + W$ de onde segue que $U \subset U + W$. Da mesma forma podemos provar que $W \subset U + W$. Assim, obtemos que $U \cup W \subset U + W$.

Suponha agora que $Q$ é um subespaço vetorial de $V$ tal que $U \cup W \subset Q$. Se $u \in U$ e $w \in W$ então $u \in Q$ e $w \in Q$, o que implica que $u + w \in Q$ pois $Q$ é subespaço vetorial de $V$. Agora da definição de $U + W$ segue que $U + W = \{u + w : u \in U,\, w \in W\} \subset Q$.

Para finalizar, mostremos a propriedade (3). Suponha que a soma $U + W$ é direta. Se $z \in U + W$ existem vetores $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$ tais que $z = u_1 + w_1$. Suponha agora que $z = u_2 + w_2$ com $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$. Nessas condições

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \text{ o que implica que } \; u_1 - u_2 = w_2 - w_1. \tag{1.26}$$

Como $u_1 - u_2 \in U$ e $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in W$, segue que $u_1 - u_2 \in U \cap W = \{0\}$ o que implica que $u_1 - u_2 = 0$ e $u_1 = u_2$. Mais ainda, como $0 = u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ obtemos que $w_1 = w_2$. Isto prova que a representação de $z$ como soma de vetores de $U$ e $W$ é única.

Suponha agora que para cada $v \in U + W$ existe um único $u \in U$ e um único $w \in W$ tais que $v = u + w$. Se $z \in U \bigcap W$ então $z = 0 + z$ e $z = z + 0$ de onde inferimos que $z = 0$ (pela hipotese, $z$ pode ser escrito em uma única maneira). Como $z$ é arbitrario do anterior temos que $U \bigcap W = \{0\}$ e que a soma $U + W$ é direta. A prova está completa. ■

**Exemplo 1.27.** Sejam $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$. Vejamos que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

É simple mostrar que $U, W$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ (deixamos isto como exercicio!). Para mostrar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, temos que provar que $\mathbb{R}^3 = U + W$ e que $U \bigcap W = \{0\}$.

Suponha que $z = (z_1, z_2, z_3) \in U \cap W$. Da definição de $W$ segue que $z_1 = z_2 = 0$ e da definição de $U$ vemos que $z_3 = z_1 + z_2 + z_3 = 0$, o que prova que $z = 0$ e que $U \cap W = \{0\}$.

Para completar a prova, emos que provar que todo vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito na forma $u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$. Seja $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Como $(x, y, -x-y) \in U$, $(0, 0, z + x + y) \in W$ e $z = (x, y, -x - y) + (0, 0, z + x + y)$ segue que $z \in U + W$. Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

O conceito de soma direta pode ser generalizado.

**Definição 1.28.** *Sejam $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos do espaço $V$. A soma dos conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ é o conjunto definido por*

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n : u_j \in U_j, j = 1, \ldots, n\}.$$

**Definição 1.29.** *Sejam $U_1, \ldots, U_n$ subespaços vetoriais de de $V$. Dizemos que a soma $U_1 + \cdots + U_n$ é direta se $U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} \cdots + U_n) = \{0\}$ para todo $j \in \{1, \ldots n\}$. No que segue, usaremos a notação $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n = \oplus_{i=1}^{n} U_i$ para indicar que a soma $U_1 + \cdots + U_n$ é direta.*

Procedendo como na prova da Proposição 1.25, podemos mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 1.30.** *Se $U_1, \ldots, U_n$ são subespaços vetoriais de $V$ então*

1. *$U_1 + \cdots + U_n$ é um subespaço vetorial de $V$,*

2. *$U_1+\cdots+U_n$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contém o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$,*

3. *$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \Leftrightarrow$ para cada $v \in U_1 + \cdots + U_n$ e todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe um único vetor $u_j \in U_j$ tal que $v = u_1 + \cdots + u_n$.*

**Prova:** Exercicio.

**Exemplo 1.31.** Vejamos que $P_n(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços vetoriais $U_i = \{ax^i : \ a \in \mathbb{R}\}$.

Se $f \in P_n(\mathbb{R})$ então $f$ é da forma $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ de onde segue que $f \in U_1 + \cdots + U_n$ pois $a_ix^i \in U_i$ para cada $i$. Isto prova que $P_n(\mathbb{R}) \subset U_1 + \cdots + U_n$ e que $P_n(\mathbb{R}) = U_1 + \cdots + U_n$ pois $U_1 + \cdots + U_n \subset P_n(\mathbb{R})$.

Para completar a prova usamos o item (3) da Proposição 1.30. Suponha que $f \in P_n(\mathbb{R})$ é tal que $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ e $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots b_nx^n$. Do anterior, temos que $H(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como $a_0 - b_0 = H(0) = 0$ segue que $a_0 = b_0$, de onde temos que $H(x) = (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $x[(a_1 - b_1) + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1}] = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o que implica que $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1} = 0$ para todo $x \neq 0$.

Se $(a_1 - b_1) > 0$ (resp. $(a_1 - b_1) < 0$) então podemos escolher $x$ suficientemente pequeno de modo que $(a_1 - b_1) > [(a_2 - b_2)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1}]$ (resp. $(a_1 - b_1) < [(a_2 - b_2)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1}]$) o que é absurdo pois neste caso $(a_1 - b_1) - [(a_2 - b_2)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1}] \neq 0$. Assim, única possibilidade é ter que $a_1 - b_1 = 0$.

Segundo o anterior, $H(x) = (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ de onde segue que $x^2[(a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-2}] = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-2} = 0$ para cada $x \neq 0$. Argumentando mostramos que $a_2 - b_2 = 0$.

Para completar a prova, temos que mostrar a representação $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ é única. Suponha que $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots b_nx^n$. Do anterior, temos que $H(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Continuando o processo anterior, podemos mostrar que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ o que prova que a representação de $f$ é única. Isto completa a prova que $P_n(\mathbb{R}) = U_1 + \cdots + U_n$.

## 1.3 Exercícios

**Ex. 1.32.** Nos seguintes casos estude se $W$ é um subespaço vetorial de $V$.

1. $V = M(2,2)$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{R} \right\}$.

2. $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x, x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(0) = p(1)\}$.

4. Sejam $V = M(n,n)$, $B \in M(n,n)$ e $W$ o subconjunto de $V$ dado por $W = \{A \in M_n : BA = 0\}$.

5. Sejam $V = M(n, 1)$, $A \in M(n, n)$ uma matriz dada e $W$ o subconjunto de $V$ definido por $W = \{X \in V : \ AX = 0\}$.

6. $V = M(n, n)$ e $W = \{A \in M(n, n) : A^T = A\}$ onde $A^T$ denota a matriz transposta de $T$. Note que $A^T = (a_{j,i})_{n,m}$ quando $A = (a_{i,j})_{n,n}$. )

7. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,

8. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$,

9. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 0\}$,

10. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\}$,

11. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \in \mathbb{Q}\}$, ($\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais)

12. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}\}$, ($\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números enteiros)

13. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \text{ é irracional}\}$,

14. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3z = 0\}$,

15. $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in P_3(\mathbb{R}) : f \text{ tem grau maior que } 2\}$,

16. $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in P_3(\mathbb{R}) : f(0) = 2f(1)\}$,

17. $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in P_3(\mathbb{R}) : f(t) > 0, \forall\, t \ \in \mathbb{R}\}$,

18. $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in P_3(\mathbb{R}) : f(1) > 0\}$.

**Ex. 1.33.** Achar 100001 subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$. Quantos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}$ existem ?

**Ex. 1.34.** Estudar as seguintes afirmações (se você considera que a afirmação é verdadeira prove ela e se acha que é falsa invente um contraexemplo):

1. Se $W_1$ e $W_2$ são susbespaços vetoriais de $V$ então $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de $V$.

2. Suponha que $W_1$ e $W_2$ são subespaços de $V$. Então $W_1 \cup W_2$ é subespaço de $V \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

3. Se $W_1$ e $W_2$ são susbespaços vetoriais de $V$ então o conjunto $\{w_1 - \alpha w_2 : w_i \in W_i, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $V$.

4. Se $W_1$ e $W_2$ são susbespaços vetoriais de $V$ então o conjunto $W_1 \times W_2 = \{(w_1, w_2) : w_1 \in W_1, w_1 \in W_1\}$ é um subespaço vetorial de $V \times V$. (Note que $V \times V$ é um espaço vetorial quando munido das operações $(v_1, v_2) + (v_3, v_4) = (v_1 + v_3, v_2 + v_4)$ e $\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$).

5. Se $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ então $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

**Ex. 1.35.** Nos seguintes casos, achar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$ de $V$.

1. $V=\mathbb{R}^2$, $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ e $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y\}$ onde $\alpha$ é um número real não nulo.

2. $V=M((2,2)$, $U=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$ e $W=\left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d\end{pmatrix} : c,d\in\mathbb{R}\right\}$.

3. Se $V=\mathbb{R}^2$, $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\}$ e $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=0\}$ então $V=U\oplus W$.

4. Se $V$ é o espaço $V=M(3,3)$, $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d\end{pmatrix} : \quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ e $W=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0\end{pmatrix} ; \quad e,f,g,h,i\in\mathbb{R}\right\}$ então $V=U\oplus W$.

**Ex. 1.36.** Nos seguintes casos, achar um subespaço $W$ de $V$ de modo que $V=U\oplus W$.

1. $V=\mathbb{R}^3$ e $U=\{(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$.

2. $V=M(3,3)$ e $U=\{A\in M(3,3) : A^T=A\}$.

3. $V=M(2,1)$ e $U=\{X\in M(2,1) : AX=0\}$ sendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**Ex. 1.37.** Suponha que $U$ e $W$ são subespaços vetoriais do espaço $V$. Provar que:

1. $U\subset W \Rightarrow U+W=W$

2. $U\subset W \Rightarrow U\cap W=U$

3. $U+W=U \Rightarrow U\supset W$

4. $U\cap W=U \Rightarrow U\subset W$

### 1.3.1 Subespaços gerados

Nesta seção veremos como obter um subespaço vetorial de $V$ a partir de un subconjunto de $V$. Para começar introduzimos o conceito de combinação linear de vetores.

**Definição 1.38.** *Seja $A=\{u_1,\ldots,u_n\}\subset V$. Uma expressao da forma $u=\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, com $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ números reais, é chamada combinação linear dos vetores $u_1,\ldots,u_n$, ou combinação linear dos vetores em $A$.*

**Exemplo 1.39.** Seja $A\subset P_n(\mathbb{R})$ o conjunto definido por $A=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$. Os vetores $1+x$, $1+x^2$, $1+2x+3x^2$ são combinações lineares dos vetores em $A$. Mais ainda, todo vetor de $P_n(\mathbb{R})$ (equivalentemente, todo polinômio de grau $n$) é combinação linear dos vetores em $A$.

**Exemplo 1.40.** Seja $A$ o subconjunto de $P_3(\mathbb{R})$ dado por $A=\{1,1+x,1+x+x^2\}$. Mostre que o polinômio $p(x)=1+x^2$ é combinação linear dos vetores em $A$.

**Exemplo 1.41.** Seja $n \in \mathbb{N}$. Nesta apostilha, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ usaremos a notação $e_i$ para o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por $e_i = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ onde $x_j = 0$ se $j \neq i$ e $x_i = 1$ (ou seja, $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$).

É fazil ver que $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, de modo que todo vetor de $\mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vetores $e_1, \ldots, e_n$. Observamos que os vetores $e_1, \ldots, e_n$ são chamados de vetores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 1.42.** Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $p \in \{1, \ldots, m\}$. Nesta apostilha, $A_{p,k} = (a_{i,j})_{n,m}$ é a matriz de $M(n, m)$ tal que $a_{i,j} = 0$ quando $(i, j) \neq (k, p)$ e $a_{k,p} = 1$, ou seja,

$$A_{k,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots 1 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots 0 \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

onde o número 1 aparece no lugar $(k, p)$. É fazil ver que toda matriz de $M(n, m)$ é combinação linear das matrizes em $\{A_{i,j} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$. Mais ainda, se $A = (a_{i,j})_{n,m}$ então $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i,j} a_{i,j} A_{i,j}$.

**Definição 1.43.** Seja $S \subset V$ não vazio. Definimos o conjunto $[S]$ como sendo o subconjunto de $V$ formado por todas as combinações lineares dos elementos de $S$, ou seja, $[S] = \{v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s i : \alpha_i \in \mathbb{R}, s_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$.

**Definição 1.44.** Seja $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$. Definimos o conjunto $[S]$ como sendo o subconjunto de $V$ formado por todas as combinações lineares dos elementos de $S$, ou seja, $[S] = \{v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.

**Exemplo 1.45.** Seja $n \in \mathbb{N}$ e $S = \{e_1, \ldots, e_n\} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$. Como todo vetor de $\mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vetores canonicos $e_1, \ldots, e_n$ segue que $\mathbb{R}^n = [S]$. Se $S = \{A_{i,j} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ onde $A_{i,j}$ são as matrizes definidas no Exemplo 1.42, então $M(n, m) = [S]$. Similarmente, se $S$ é o subconjunto de $P_n(\mathbb{R})$ formado pelos polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ temos que $P_n(\mathbb{R}) = [S]$.

Nos exemplos anteriores, o subespaço gerado por $S$ é sempre o espaço completo. Em geral isto não é assim. Considere a modo de exemplo, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $S = \{e_1, e_2\}$. É fazil ver que neste caso, $[S] = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3$.

**Exemplo 1.46.** Se $S \subset P_3(\mathbb{R})$ é o conjunto $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$ então $P_3(\mathbb{R}) = [S]$.

De fato, note que um polinomio da forma $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ pode ser representado na forma $p(t) = (a_0 - a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3(t^3 + 1) \in [S]$, de onde segue que $P_3(\mathbb{R}) = [S]$.

**Exemplo 1.47.** Se $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, os vetores em $[S]$ são da forma

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Como $\alpha, \beta$ são arbitrarios, vemos que $[S]$ está formado por todas as matrizes con diagonal principal nula.

Na próxima proposição consideramos algumas importantes propriedades dos conjuntos gerados.

**Proposição 1.48.** *Seja $S$ um subconjunto não vazio de $V$. As seguintes condições são válidas.*

1. *$[S]$ é um subespaço vetorial de $V$, $S \subset [S]$ e $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ contendo $S$,*
2. *se $S$ um subespaço vetorial de $V$ então $S = [S]$ e $[[S]] = [S]$,*
3. *se $T \subset S$ então $[T] \subset [S]$,*
4. *$[S \cup T] = [S] + [T]$.*

**Prova:** Provemos a primeira propriedade. Para mostrar que $[S]$ subespaço vetorial de $V$, fixemos $u, v \in [S]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pela definição de $[S]$ podemos supor que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$ onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ são números números reais e $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_m$ são vetores em $S$. De esta forma, temos que

$$u + \alpha v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha\beta_1 v_1 + \cdots + \alpha\beta_m v_m,$$

que mostra que $u+\alpha v \in [S]$ pois $u+\alpha v$ se escreve como combinação linear de vetores em $S$. Agora, pela Proposição 1.17 segue que $[S]$ subespaço vetorial de $V$. O fato que $S \subset [S]$ é obvio.

Para completar a prova de (1), mostremos agora que $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contem o conjunto $S$. Suponha que $M$ é um subespaço vetorial de $V$ tal que $S \subset M$. Se $u \in [S]$ então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e vetores $u_1, \ldots, u_n$ em $S$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Como cada vetor $u_i$ é um elemento de $M$ e $M$ é subespaço vetorial temos que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in M$, o que implica que $[S] \subset M$. Isto prova que $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contem $S$.

Mostremos agora a segunda propriedade. Como $S$ é um subespaço vetorial e $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ temos que $[S] \subset S$ o que implica que $[S] = S$ pois $S \subset [S]$. Mais ainda, usando o anterior é claro que $[[S]] = [S]$.

Para mostrar (3) suponha que $T \subset S$. Se $u \in [T]$ então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e vetores $u_1, \ldots, u_n$ em $T$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Como cada vetor $u_i$ é també um elemento de $S$ segue da definição de $[S]$ que $u \in [S]$. Isto prova que $[T] \subset [S]$.

Para finalizar, provemos que $[S \cup T] = [S] + [T]$. É fazil ver que $S \subset [S] + [T]$ e $T \subset [S]+[T]$ de onde segue que $S \cup T \subset [S]+[T]$. Observando agora que $[S]+[T]$ é um subespaço vetorial de $V$ e que $[S \cup T]$ é o menor subespaço vetorial que contem $S \cup T$, obtemos que $[S \cup T] \subset [S]+[T]$. Mais ainda, como $[S]+[T] \subset [S \cup T]+[S \cup T] \subset [S \cup T]$ vemos que $[S] + [T] \subset [S \cup T]$. Do anterior, tem-se que $[S] + [T] = [S \cup T]$. ■

**Proposição 1.49.** *Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$, etão as seguintes propriedades são válidas.*

1. *$[S]$ é um subespaço vetorial de $V$, $S \subset [S]$ e $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ contendo $S$.*
2. *se $T \subset S$ então $[T] \subset [S]$,*
3. *$[S \cup T] = [S] + [T]$.*

**Prova:** Provemos a primeira propriedade. Para mostrar que $[S]$ subespaço vetorial de $V$, fixemos $u, v \in [S]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pela definição de $[S]$ podemos supor que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são números reais. Assim, temos que

$$u + \alpha v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha\beta_1 v_1 + \cdots + \alpha\beta_n v_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i,$$

que mostra que $u + \alpha v \in [S]$ pois $u + \alpha v$ é uma combinação linear de vetores em $S$. Agora, pela Proposição 1.17 segue que $[S]$ subespaço vetorial de $V$. O fato que $S \subset [S]$ é obvio pois cada vetor $u_i$ pode ser escrito na forma $u_i = \sum_{j \neq i} 0 u_j + 1 u_i$

Mostremos agora que $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contem o conjunto $S$. Suponha que $M$ é um subespaço vetorial de $V$ tal que $S \subset M$. Se $u \in [S]$ então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Como cada vetor $u_i$ é também um elemento de $M$ e $M$ é subespaço vetorial temos que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in M$, o que implica que $[S] \subset M$. Isto prova que $[S]$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contem $S$.

Mostremos agora (2). Como $T \subset S$, podemos supor que $T = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}\}$ sendo $1 \leq i_j \leq i_n$ para cada $j$. Se $u \in [T]$ então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tais que $u = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_{i_j}$. Mas, como $u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$ com $\beta_j = \alpha_j$ se $j = i_j$ e $\beta_j = 0$ quando $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ temos que $u \in [S]$, o que prova que $[T] \subset [S]$.

Para finalizar, provemos que $[S \cup T] = [S] + [T]$. É fazil ver que $S \subset [S] + [T]$ e $T \subset [S] + [T]$ de onde segue que $S \cup T \subset [S] + [T]$. Observando agora que $[S] + [T]$ é um subespaço vetorial de $V$ e que $[S \cup T]$ é o menor subespaço vetorial que contem $S \cup T$, obtemos que $[S \cup T] \subset [S] + [T]$. Mais ainda, como $[S] + [T] \subset [S \cup T] + [S \cup T] \subset [S \cup T]$ vemos que $[S] + [T] \subset [S \cup T]$. Do anterior, tem-se que $[S] + [T] = [S \cup T]$. ■

**Definição 1.50.** *Seja $S \subset V$. O conjunto $[S]$ é chamado o subespaço vetorial gerado por $S$ e os elementos de $S$ são chamados de geradores de $[S]$. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$, usaremos a notação $[S] = [u_1, \ldots, u_n]$.*

**Definição 1.51.** *Seja $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$. O conjunto $[S]$ é chamado o subespaço vetorial gerado por $S$ e os elementos de $S$ são chamados de geradores de $[S]$. No que segue, também usamos a notação $[S] = [u_1, \ldots, u_n]$.*

**Definição 1.52.** *Dizemos que $V$ é um espaço finitamente gerado se existe un conjunto $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ tal que $V = [S]$.*

Do Exemplo 1.45 segue que os espaços $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ e $M(n, m)$ são espaços vetoriais finitamente gerados.

**Exemplo 1.53.** O espaço $W$ definido por $W = \{X \in M(3,1) : AX = 0\}$ onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é finitamente gerado.

Para rovar nossa afirmação, é conveniente caracterizar os elementos de $W$. Se $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in W$ então $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de onde segue que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, o único elemento em $W$ é o vetor zero. Assim, $W = [\{0\}]$.

**Exemplo 1.54.** O espaço $W$ definido por $W = \{X \in M(4,1) : AX = 0\}$ sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é finitamente gerado.

Para começar, caracterizemos de uma forma mais explicita o espaço $W$. Se $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in W$ então

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de onde segue que

$$\begin{cases} \alpha = -\gamma/2 - \delta/2 \\ \beta = 3\gamma/2 + \delta/2 \end{cases}$$

e

$$X = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - \delta/2 \\ 3\gamma/2 + \delta/2 \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Do anterior concluimos que $W = \left[ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

No seguinte exemplo, vemos o caso de um espaço vetorial que não é finitamente gerado.

**Exemplo 1.55.** Seja $P(\mathbb{R})$ conjunto formado por todos os polinomios de grau finito munido das operações soma e multiplicação por escalar usuais. Como veremos, $P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado. Para mostrar esta afirmação, suponha que existem polinomios $p_1, \ldots, p_n$ tais que $P(\mathbb{R}) = [p_1, \ldots, p_n]$. Seja $N$ o grau mais alto dentre os graus dos polinômios $p_1, \ldots, p_n$. Como o $x^{N+1}$ pertence $P(\mathbb{R})$ e $P(\mathbb{R}) = [p_1, \ldots, p_n]$, segue que existem numeros reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $x^{N+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$. Logo, temos que $1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{p_i}{x^{N+1}}$ para todo $x \neq 0$. Porém isto é abusrdo, pois para valores grandes de $x$ temos que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{p_i}{x^{N+1}} < 1$. Como este absurdo surge de supor que $P(\mathbb{R}) = [p_1, \ldots, p_n]$, segue que $P(\mathbb{R})$ não pode ser finitamente gerado.

**Exemplo 1.56.** Sejam $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + t + z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - t + z = 0\}$. No que segue, acharemos um conjunto gerador para cada um dos espaços $U$, $V$, $U \cap V$ e $U + V$.

Para começar, estudemos o espaço $U$. Se $(x, y, z, t) \in U$ então $y = x + z + t$ e

$$(x, y, z, t) = (x, x + z + t, z, t) = x(1, 1, 0, 0) + z(0, 1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1),$$

de onde segue que $U = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)]$.

Vejamos agora o espaço $V$. Se $(x,y,z,t) \in V$ então $t = x+y+z$ e

$$(x,y,z,t) = (x,y,z,x+y+z) = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,1),$$

de onde podemos concluir que $V = [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)]$.

Se $(x,y,z,t) \in U \cap V$ então

$$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0, \end{cases}$$

o que implica em $x = -z$ e $y = t$. Deste modo, temos que $(x,y,z,t) = (x,y,-x,y) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,1)$ de onde concluimos que $U \cap V = [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)]$.

Finalmente, estudemos o espaço $U+V$. Como $U + V = [U] + [V] = [U \cup V]$, temos que

$$U + V = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

Mais ainda, como $(1,1,0,0) = (1,0,0,1) + (0,1,1,0) - (0,0,1,1)$ temos que

$$U + V = [(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

## 1.4 Exercícios

**Ex. 1.57.** Em cada caso, achar $[S]$ como subespaço de $V$.

1. $S = \{(1,0),(2,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.
2. $S = \{(1,1,1),(2,2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
3. $S = \left\{1, t, t^2, 1+t^3\right\}$, $V = P_3(\mathbb{R})$.
4. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M(2,2)$.

**Ex. 1.58.** Em cada um dos itens abaixo achar um conjunto finito que gere o espaço $W$.

1. $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\right\}$.
2. $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
3. $W = \left\{A \in M(2,2) : A^t = A\right\}$.
4. $W = \{X \in M(3,1) : AX = 0\}$ onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

**Ex. 1.59.** Em cada um dos itens abaixo achar un conjunto (o menor possivel) gerador de $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$.

1. $U = [(1,0,0),(1,1,1)]$ e $W = [(0,1,0),(0,0,1)]$,

2. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ e $W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)]$,

3. $U = \{A \in M(2, 2) : A^t = A\}$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$,

4. $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3]$ e $W = [t^3 + 4t^2, t - 1, 1]$ como subespaços de $P_3(\mathbb{R})$.

**Ex. 1.60.** Achar un subconjunto finito de $P_3(\mathbb{R})$ que seja gerador de

1. $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p(0) = 0\}$,

2. $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p'' = 0\}$,

3. $U \cap W$.

**Ex. 1.61.** Mostre que as funções 1 e $\cos 2x$ pertencem a $[\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x]$.

**Ex. 1.62.** Verifique se $P_2(\mathbb{R}) = [1 + x, x + 2x^2, 1 - x^2]$.

**Ex. 1.63.** Achar um conjunto finito que seja gerador de

1. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$,

2. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$,

3. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$,

4. $U \cap V$ e $V + W$.

**Ex. 1.64.** Achar un conjunto de geradores para o conjunto dos numeros complexos $\mathbb{C}$ munido das operações usuais $(a+ib)+(c+id) = a+c+i(c+d)$ e $\alpha(a+ib) = \alpha a+i\alpha b$. Mostre que $\{2 + 3i, 1 - 2i\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{C}$.

**Ex. 1.65.** Os conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. ?

**Ex. 1.66.** O conjuto de matrizes $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ é un conjunto gerador de $M(2, 2)$ ?

# Capítulo 2

# Dependência Linear, base e dimensão

Nos Exemplo 1.45 foi observado que os conjuntos $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $T = \{A_{i,j} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ são geradores de $\mathbb{R}^n$ e $M(n,m)$ respectivamente. É interessante notar para qualquer vetor $e_i$ temos que $S \setminus \{e_i\}$ não é gerador de $\mathbb{R}^n$. Similarmente, para cada matriz $A_{i,j}$ temos que $T \setminus \{A_{i,j}\}$ não é gerador de $M(n,m)$. A propriedade descrita anteriormente não é restrita a esses conjuntos e a essses espaços. Mais ainda, como veremos neste capitulo nenhum subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com menos de $n$ vetores pode ser gerador de $\mathbb{R}^n$ e nenhum subconjunto de $M(n,m)$ com menos de $mn$ elementos pode ser gerador de $M(n,m)$. Do anterior vemos que os conjuntos geradores de um espaço vetorial com o menor número de elementos possiveis são muito especiais. Este tipo de conjunto serão chamados de bases. Para formalizar as ideias anteriores, temos que introduzir algumas definições.

**Definição 2.1.** *Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores não nulos de $V$. Dizemos que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes ou que o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente, se nenhum dos vetores $u_i$ é combinação linear dos outros vetores.*

No próximo Lema reformulamos o conceito anterior.

**Lema 2.2.** *Un conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ de vetores não nulos é linearmente independente $\Leftrightarrow$ a única solução da equação $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ é a solução nula, ou seja, a solução com $\alpha_1 = \ldots, \alpha_n = 0$.*

**Prova:** Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente e que a equação $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ possui uma solução não nula. Então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos zero, tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$. Se $\alpha_i \neq 0$, então $u_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_i} u_j$ o que implica que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ não é linearmente independente, o que é absurdo. Isto prova que a equação $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ tem uma única solução, a solução nula $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Suponha que a equação $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ possui uma única solução. Se o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ não é l.i, então um desses vetores, digamos $u_i$, é combinação linear dos outros. Neste caso, existem números reais $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i, \ldots, \beta_n$ tais que $u_i = \sum_{j=1, j\neq i}^n \beta_j u_j$. Nessas condições, temos que os números $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, -1, \beta_i, \ldots, \beta_n$ são uma solução nula de $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$, o que é aburdo. Portanto, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente. ■

**Observação 2.3.** Do Lemma anterior vemos que para mostrar que um conjunto de vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente, é suficiente provar que a equação $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ possui uma única solução.

**Definição 2.4.** *Dizemos que um conjunto de vetores não nulos* $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *é linearmente dependente (o que os vetores* $u_1, \ldots, u_n$ *são linearmente dependentes) se* $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *não é linearmente independente.*

**Observação 2.5.** Un conjunto de vetores $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ não nulos é linearmente dependente se é possível encontrar números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não todos zeros tais que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$.

**Exemplo 2.6.** Os vetores $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)$ são linearmente independente em $\mathbb{R}^3$. De fato, note que a equação $\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$ é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Como este sistema possui uma única solução, a soluçaõ nula, segue que $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ e linearmente independente.

**Exemplo 2.7.** Sejam $u_1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{n,1})$, $u_2 = (x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{n,2})$, $\ldots$, $u_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{n,n})$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Como foi observado nateriormente, para ver se os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são lineramente independentes, temos que estudar a equação $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$. Esta equação é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 x_{1,1} + & \ldots & +\alpha_i x_{1,i} & \ldots + \alpha_n x_{1,n} & = 0, \\ \alpha_1 x_{2,1} + & \ldots & +\alpha_i x_{2,i} & \ldots + \alpha_n x_{2,n} & = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 x_{j,1} + & \ldots & +\alpha_i x_{j,i} & \ldots + \alpha_n x_{j,n} & = 0, \\ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 x_{n,1} + & \ldots & +\alpha_i x_{n,i} & \ldots + \alpha_n x_{n,n} & = 0, \end{array} \tag{2.8}$$

o qual pode ser re-escrito na forma

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j,1} & x_{j,2} & \cdots & x_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A\alpha = 0. \tag{2.9}$$

Se a matriz $A$ é inversivel (o que é equivalente a ter que $\det A \neq 0$) segue que $\alpha = A^{-1}0 = 0$ é a única solução de (2.9), o que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são lineramente independentes. Se $A$ não é inversivel (o que é equivalente a ter que $\det A = 0$), o problema $A\alpha = 0$ tem infinitas soluções, de onde segue que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente dependentes.

Resumimos as observações do Exemplo 2.7 na seguinte proposição.

**Proposição 2.10.** *Sejam* $u_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n})$*,* $u_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n})$*,* $\ldots$*,* $u_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n})$ *vetores de* $\mathbb{R}^n$ *e* $A$ *a matriz definida em (2.9). Os vetores* $u_1, \ldots, u_n$ *são linearmente independentes* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

**Exemplo 2.11.** As matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes. ?

Para resolver o problema temos que estudar a equação

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Deste equação segue que

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta + \gamma \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde inferimos que $\beta = -\alpha$ e $\gamma = \alpha$. Logo, temos que para $\alpha \in \mathbb{R}$, os números $\alpha$, $\beta = -\alpha$ e $\gamma = \alpha$ são soluções de (2.12), o que implica que as matrizes são linearmente dependentes.

**Exemplo 2.13.** As funções $\cos(\cdot)$ e $\operatorname{sen}(\cdot)$ são linearmente independentes. ?

Como antes, temos que estudar a equação $\alpha \cos(\cdot) + \beta \operatorname{sen}(\cdot) = 0$. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são soluções desta equação, então teremos que $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se avaliamos em $x = 0$ obtemos que $\alpha = 0$, de onde segue que $\beta \sin(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se avaliarmos agora em $x = \pi/2$ obtemos que $\beta = 0$. Portanto, a única solução da equação $\alpha \cos(\cdot) + \beta \operatorname{sen}(\cdot) = 0$ e $\alpha = \beta = 0$, o que implica que as funções $\cos(\cdot)$ e $\operatorname{sen}(\cdot)$ são linearmente independentes.

O próximo resultado resume algumas propriedades associadas ao conceito de conjunto linearmente independente.

**Teorema 2.14.** *Seja* $A = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$.

1. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é linearmente dependente então pelo um dos vetores é combinação linear dos outros.*

2. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é linearmente dependente e* $B$ *é un conjunto finito tal que* $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset B$ *então* $B$ *é l.d.*

3. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é linearmente independente e* $B \subset \{u_1, \ldots, u_n\}$ *então* $B$ *também é l.i.*

4. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é linearmente independente e* $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ *é linearmente dependente então o vetor* $v$ *é combinação linear dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$.

5. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é linearmente independente, então todo vetor* $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ *se escreve de uma única maneira como combinação linear dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$*, ou seja, se* $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ *e* $v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ *então* $\alpha_i = \beta_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, n$.

**Prova:** A propriedade em (1) segue diretamente da definiçaõ de conjunto linearmente independente. Para mostrar (2), suponha que $B = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p\}$. Como $A$ é linearmente dependente existem números reias $\beta_1, \ldots, \beta_n$ não todos zero tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$. Em particular, temos que

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0v_1 + \cdots + 0v_p = 0,$$

o que implica que os vetores $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p$ são linearmente dependente.

Provemos agora (3). Sem perda de generalidade, podemos supor que $B = \{u_1, \ldots, u_k\}$ para algum $k \leq n$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ é uma soluçao da equação $\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i = 0$ então

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + 0u_{k+1} + \cdots + 0u_k = 0,$$

de onde segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_k = 0$ pois os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes. Assim, a única solução da equação $\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i = 0$ é $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_k = 0$ o que prova que $B$ é linearmente independente.

Mostremos agora (4). Suponha que $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes e que $u_1, \ldots, u_n, v$ são linearmente dependentes. Como os vetores $u_1, \ldots, u_n, v$ são linearmente dependentes, existem números reias $\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma$ não todos zero tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i + \gamma v = 0$. Se $\gamma = 0$ então $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$ o que implica que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ pois os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes. Assim, temos que necesariamente $\gamma \neq 0$ de onde obtemos que $v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\gamma} u_i = 0$. Isto mostra que $v$ é combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$.

Para finalizar, mostremos agora (5). Se $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ então $0 = v - v = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0$ de onde segue que $\alpha_i - \beta_i = 0$ para todo $i$ pois $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente. Portanto, $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. ■

## 2.1 Exercícios

1. Estude se o conjunto $S \subset V$ é linearmente independente.

   (a) $S = \{(1,2), (-3,1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   (b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

   (c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M(2,2)$.

   (d) $S = \{(1,2,2,-3), (-1,4,-2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   (e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $V = M(3,3)$.

   (f) $S = \{xe^x, x\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

2. Suponha que o conjunto $S = \{u, v, w\}$ é linearmente independente. Os conjuntos $S_1 = \{u, u+v, u+v+w\}$, $S_2 = \{u-v, v-w, w-u\}$ e $S_3 = \{u+v, u+v+w, w\}$ são linearmente independentes. ?

3. Quais os subconjuntos abaixo são linearmente independentes ?

   (a) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (2,3,5)\}$,

(b) $\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,-2)\}$,

(c) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$,

(d) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$,

4. Quais dos subconjuntos de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ são linearmente independentes. ?

   (a) $\{1, x-1, x^2+2x+1, x^2\}$,

   (b) $\{2, x^2+1, x+1, x^2-1\}$,

   (c) $\{x(x-1), x^3, 2x^3-x^2, x\}$,

5. O subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ dado por $\{1, e^x, e^{2x}\}$ é linearmente independente. ?

Introduzimos agora o conceito de base de um espaço vetorial.

**Definição 2.15.** *Dizemos que um conjunto de vetores não nulos $\{u_1,\dots,u_n\} \subset V$ é uma base de $V$ se $\{u_1,\dots,u_n\}$ é linearmente independente e $[S]=V$.*

**Exemplo 2.16.** O conjunto $\{e_1,\dots,e_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e o conjunto de matrizes $\{A_{i,j} : i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m\}$, veja Exemplo 1.42, é uma base de $M(n,m)$.

**Exemplo 2.17.** O conceito de base é especial, e por isso é um conceito restritivo. Porém, um espaço vetorial (diferente de $\{0\}$) sempre possui infinitas bases. Considere como exemplo, o espaço $V=\mathbb{R}^2$.

Seja $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ diferente de $(0,0)$. Vejamos como podemos achar vetores $(c,d)$ de modo que $\{(a,b),(c,d)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^2$. Sejam $c,d\in\mathbb{R}$ de modo que $ad-bc\neq 0$ (note que isto é sempre possivel de fazer). Vejamos agora que $\{(a,b),(c,d)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Para mostrar que $\{(a,b),(c,d)\}$ é um conjuto gerador de $V$ temos que provar que todo vetor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $(a,b),(c,d)$. Considere a equação $\alpha(a,b)+\beta(c,d)=(x,y)$ donde as incognitas são $\alpha$ e $\beta$. Esta equação é equivalente a equação

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Como $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad-bc\neq 0$, segue que a matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ é inversivel de onde obtemos que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Portanto, a equação $\alpha(a,b)+\beta(c,d)=(x,y)$ tem uma única solução o que mostra que $\mathbb{R}^2=[(a,b),(c,d)]$.

Vejamos agora que $\{(a,b),(c,d)\}$ é linearmente independente. Para isto, temos que estudar a equação $\alpha(a,b)+\beta(c,d)=(0,0)$. De (2.19) sabemos que a única solução desta equação é $(\alpha,\beta)=(0,0)$, o que prova que $\{(a,b),(c,d)\}$ é linearmente independente.

Do anterior, vemos que $\{(a,b),(c,d)\}$ é uma base se $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad-bc\neq 0$, o que nos permite afirmar que existe uma quantidade não finita de bases de $\mathbb{R}^2$.

**Exercício 2.20.** Achar bases de $\mathbb{R}^2$ da forma $\{(1,1),(c,d)\}$.

Do Exemplo anterior, segue $\{(1,1),(c,d)\}$ é base se $d \neq c$. Logo, $\{(1,1),(1,2)\}$, $\{(1,1),(1,\pi)\}$, $\{(1,1),(\pi,\sqrt{2})\}$.... são bases de $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 2.21.** Achar uma base do subespaço vetorial $U$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $\{(1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1)\}$.

É fazil ver que o vetor $(0,2,-1)$ é combinação linear dos vetores $(1,0,1)$ e $(1,2,0)$ e que $\{(1,0,1),(1,2,0)\}$ é linearmente independente. Assim, obtemos que $\{(1,0,1),(1,2,0)\}$ é uma base de $U$.

**Exemplo 2.22.** Os vetores $u_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n})$, $u_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n})$, $\ldots$, $u_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n})$ forman uma base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ o determinate da matriz $A$ em (2.9) é diferente de zero.

Do exemplo 2.7 sabemos que os vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ são linearmente independentes $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Assim, para mostrar que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base resta provar que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é un conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$.

Seja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e considere a equação $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = y$. Procedendo como no Exemplo 2.7, vemos que esta equação é equivalente a $A\alpha = y^T$ onde $y^T$ é o vetor $y$ escrito na forma de coluna. Como a matriz $A$ é inversivel, segue que o problema tem uma única solução a qual é dada por $A^{-1}y^T$. Isto mostra que o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 2.23.** Existem infinitas bases do espaço $\mathbb{R}^n$.

Sabemos que os vetores canonicos $u_2 = e_1, u_2 = e_2, \ldots, u_{n-1} = e_{n-1}$ são linearmente independentes. Seja agora $u_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n})$ de modo que o determinate da matriz $A$ em (2.9) seja diferente de zero (note que este vetor existe pois neste caso $\det(A) = x_{n,n}$). Nessas condições, sabemos que o conjunto de vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e como existem infinitos vetores $u_n$ que verificam as condições acima, temos que existem infinitas bases de $\mathbb{R}^n$.

No seguinte resultado veremos que todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base.

**Teorema 2.24.** *Se $V$ é finitamente gerado, então $V$ possui uma base.*

**Prova:** Suponha que $V = [u_1, \ldots, u_n]$. Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente então o resultado está provado. Se os vetores $u_1, \ldots, u_n$ não são linearmente independentes, então existe um vetor $u_j$ que é combinação linear dos outros vetores. Para simplificar a escrita, podemos reordenar os vetores e supor que $u_1 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k u_k$ sendo $\alpha_k$ números reais.

Afirmamos que o conjunto $\{u_2, \ldots, u_n\}$ é un conjunto gerador de $V$. Para mostrar isto, fixemos $u \in V$. Como $V = [u_1, \ldots, u_n]$ temos que existem números reais $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tais que $u = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k$. Logo

$$u = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k = \gamma_1 u_1 + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k u_k = \gamma_1 \sum_{k=2}^{n} \alpha_k u_k + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k u_k = \sum_{k=2}^{n} (\gamma_1 \alpha_k + \gamma_k) u_k,$$

o que prova que $u \in [u_2, \ldots, u_n]$. Como $u$ é arbitrario, obtemos que $V = [u_2, \ldots, u_n]$.

Se os vetores $u_2, \ldots, u_n$ são linearmente independente então $\{u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$ e o resultado está provado. De modo contrario, um dos vetores $u_2, \ldots, u_n$

é combinaçõa linear dos outros. Renumerando os vetores, sem necessario, podemos supor $u_2 = \sum_{k=3}^{n} \beta_k u_k$ sendo $\beta_k$ escalares.

Com antes, afirmamos que $\{u_3, \ldots, u_n\}$ é um conjunto gerador de $V$. De fato, se $u \in V$ e $u = \sum_{k=2}^{n} \theta_k u_k$ então

$$u = \sum_{k=2}^{n} \theta_k u_k = \theta_2 u_2 + \sum_{k=3}^{n} \theta_k u_k = \theta_2 \sum_{k=3}^{n} \beta_k u_k + \sum_{k=3}^{n} \theta_k u_k = \sum_{k=3}^{n} (\theta_2 \beta_k + \theta_k) u_k,$$

o que implica que $u \in [u_3, \ldots, u_n]$ e que $\{u_3, \ldots, u_n\}$ é um conjunto gerador de $V$.

Como o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é finito, o processo anterior não pode continuar indefinidamente (o processo finaliza em $\{u_n\}$ ou antes). Assim, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que os vetores $u_k, \ldots, u_n$ são linearmente independentes e $[\{u_k, \ldots, u_n\}] = V$. Neste caso, o conjunto $\{u_k, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$. ■

O próximo resultado nos permitirá introduzir o conceito de dimensão de um espaço vetorial finitamente gerado.

**Proposição 2.25.** *Suponha que $V$ é finitamente gerado e que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $V$. Se $n > m$ e $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente dependente.*

**Prova:** Para provar o resultado temos que estudar a equação em variaveis $x_i$ dada por

$$x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n = 0. \tag{2.26}$$

Como $V = [\{v_1, \ldots, v_m\}]$, temos que cada vetor $u_j$ é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_m$. Logo, para cada $1 \leq j \leq n$ existen números reais $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{m,j}$ tais que $u_j = \alpha_{1,j} v_1 + \cdots + \alpha_{m,j} v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} v_i$. Usando isto em (2.26) obtemos que

$$x_1 \left( \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,1} v_i \right) + \cdots + x_n \left( \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,n} v_i \right) = 0. \tag{2.27}$$

Notamos agora que a somma anterior pode ser re-escrita na forma

$$\left( \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{1,j} \right) v_1 + \cdots + \left( \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_{m,j} \right) v_m = 0.$$

Como os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes, vemos que cada uma das somas que aparecem na última expressao são zero. Assim, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_{1,1} + \ldots + x_n \alpha_{1,n} &= 0, \\ x_1 \alpha_{2,1} + \ldots + x_n \alpha_{2,n} &= 0, \\ &\vdots \\ x_1 \alpha_{m,1} + \ldots + x_n \alpha_{m,n} &= 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

O sistema (2.28) é um sistema linear homogêneo de $m$ equações e $n$ incógnitas e como $n > m$, segue-se que este sistema possui uma solução não trivial que denotamos $x_1, \ldots, x_n$. É claro do anterior que $x_1, \ldots, x_n$ é uma solução não trivial de (2.26) o que mostra que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é un conjunto linearmente dependente. A prova está completa. ■

Como consequência do resultado anterior temos o seguinte Teorema.

**Teorema 2.29.** *Se $V$ é finitamente gerado então todas as bases de $V$ possuem o mesmo número de elementos.*

**Prova:** Suponha que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ são duas bases do espaço $V$. Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é base e $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente, da Proposição 2.25 segue que $m \leq n$. De maneira similar, como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é base e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente, obtemos que $n \leq m$. Como $m \leq n$ e $n \leq m$ segue-se que $n = m$. ■

O resultado anterior nos permite introduzir o conceito de dimensão de um espaço vetorial.

**Definição 2.30.** *Suponha que $V$ é finitamente gerado. Se $V \neq \{0\}$, definimos a dimensão de $V$ como o número de elementos de uma base de $V$. Se $V = \{0\}$ dizemos que a dimensão de $V$ é zero. A dimensão de $V$ será denotada por* $\dim(V)$.

**Observação 2.31.** Do exemplo (1.55) sabemos que existem espaços vetorias de dimensão não finita. Quando um espaço não tem dimensão finita, diremos simplesmente que possui dimensão infinita.

Para facilitar a prova de nossos proximos resultados estabelecemos o próximo Lemma.

**Lema 2.32.** *Se $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é linearmente independente e $v \notin [\{u_1, \ldots, u_n\}]$ então o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n, v\} \subset V$ é linearmente independente.*

**Prova:** Suponha que $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha v = 0$. Se $\alpha \neq 0$, então $v = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha} u_j$ o que é absurdo pois $v \notin [\{u_1, \ldots, u_n\}]$. Assim, $\alpha = 0$. Como $\alpha = 0$, segue-se que $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ de onde obtemos que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ pois $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente. Portanto, a única solução de $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha v = 0$ é a solução com $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha = 0$, o que implica que $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ é linearmente independente. ■

O próximo resultado considera algumas propriedades dos espaços de dimensão finita.

**Proposição 2.33.** *Suponha que $V$ é um espaço de dimensão finita.*

1. *Se $W$ é um subespaço vetorial de $V$ então $W$ é um espaço de dimensão finita e* $\dim(W) \leq \dim(V)$,
2. *Se $n = \dim(V)$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$.*

**Prova:** Suponha que $W \neq \{0\}$ é um subespaço vetorial de $W$. Como $W \neq \{0\}$, existe um vetor (não zero) $w_1 \in W$. Se $\{w_1\}$ é uma base de $W$ então a propriedade está provada. De modo contrario, $\{w_1\}$ não é base e existe $w_2 \in W$ tal que $w_2 \notin [\{w_1\}]$. Agora, do Lemma 2.32 vemos que $\{w_1, w_2\}$ é un conjunto linearmente independente.

Se $\{w_1, w_2\}$ é uma base de $W$, o resultado está provado. De modo contrario, existe $w_3 \in W$ tal que $w_3 \notin [\{w_1, w_2\}]$. Como antes, do Lemma 2.32 obtemos que $\{w_1, w_2, w_3\}$ é linearmente independente.

Se o processo anterior continua indefinidamente, teremos que existe $k > n$ e un conjunto $\{w_1, \ldots, w_k\}$ que é linearmente independente, o que é absurdo segundo a Proposição 2.25. Assim, deve existir $k \leq n$ tal que o processo para. Note agora que neste caso, o conjunto $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é uma base de $W$. Isto prova que $W$ é finitamente gerado e que $\dim(W) \leq n$.

Mostremos agora (2). Suponha por absurdo que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ não é una base. Como este conjunto é linearmente independente, temos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ não é um conjunto gerador. Logo, existe $u_{n+1} \in V$ tal que $u_{n+1} \notin [\{u_1, \ldots, u_n\}]$. Mais ainda, do Lemma 2.32 segue-se que $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ é linearmente independente. Isto é absurdo, pois todo conjunto com mais de $n = \dim(V)$ elementos é linearmente dependente (veja a Proposição 2.25). Como o absurdo é consequencia de supor que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ não é base, podemos concluir que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é base de $V$. ■

**Exemplo 2.34.** É fazil ver $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$. Mais ainda, deixamos como exercicio mostrar que o conjunto de matrizes $\{A_{k,l} : k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, m\}$ (veja Exemplo 1.42) é uma base de $M(n, m)$ e que $\dim M(n, m) = nm$.

**Teorema 2.35.** *[Completamento] Suponha $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset V$ é linearmente independente e que $\dim V = n > r > 0$. Então existem vetores $u_{r+1}, \ldots, u_n$ tais que $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$.*

**Prova:** Pelo Teorema 2.29 vemos que $\{u_1, \ldots, u_r\}$ não pode ser base de $V$ e como este conjunto é linearmente independente concluimos que $\{u_1, \ldots, u_r\}$ não é un conjunto gerador de $V$. Logo, existe um vetor $u_{r+1} \in V$ tal que $u_{r+1} \notin [\{u_1, \ldots, u_r\}]$. Mais ainda, do Lema 2.32 obtemos que $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}\}$ é un conjunto linearmente independente.

Agora temos duas possibilidades, $r + 1 = n$ ou $r + 1 < 1n$. Se $r + 1 = n$, do item (3) da Proposição 2.33 obtemos que $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}\}$ é uma base de $V$, e a prova estaria completa. Se $r + 1 < n$ podemos fazer como antes e obter um vetor $u_{r+2}$ tal que $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}\}$ é linearmente independente.

Continuando com a ideia anteriorm em $n - r - 2$ passos teremos um conjunto da forma $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3} \ldots, u_n\}$ que é linearmente independente. Como este conjunto possui $n$ elementos e é linearmente independente, do item (2) da Proposição 2.33 podemos concluir que $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$. A prova está completa. ■

**Exemplo 2.36.** Achar uma base do espaço $\mathbb{R}^3$ contendo o vetor $(1, 1, -1)$.

Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, precisamos achar vetores $(a, b, c), (x, y, z)$ de modo que o conjunto $\{(a, b, c), (x, y, z), (1, 1, -1)$ seja linearmente independente. Do Exemplo 2.22 sabemos que $\{(a, b, c), (x, y, z), (1, 1, -1)$ é linearmente independente se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ -1 & c & z \end{pmatrix} = x(b + c) - y(a + c) + z(b - a) \neq 0.$$

Em particular, usando $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ e $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ temos que o determinante anterior é um, de onde segue que o conjunto $\{(0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

No próximo resultado estudamos a dimensão do espaço soma.

**Teorema 2.37.** *Suponha que $V$ é finitamente gerado e que $U$, $W$ são subespaços vetoriais de $V$. Então*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W. \tag{2.38}$$

**Prova:** Da Proposição 2.33 e do Teorema 2.24 segue-se que $U, W, U \bigcap W$ e $U + W$ possuim bases. Seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $U \bigcap W$. Como $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset U$ é un conjunto linearmente independente, do Teorema 2.35 sabemos que existe un conjunto de vetores $\{u_1, \ldots, u_p\} \subset U$ tal que $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m\}$ é base de $U$. De maneira similar, vemos que existe un conjunto de vetores $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ tal que $\{w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base $W$.

A seguir mostraremos que $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $U + W$. Para começar, vejamos que $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente.

Suponha que $\alpha_i, \beta_j, \delta_k$ são números reais tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0. \tag{2.39}$$

De (2.39) vemos que

$$\sum_{i=1}^{q} \beta_i w_i = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^{m} \delta_i v_i. \tag{2.40}$$

Como os vetores o lado direito pertencem a $U$ e os vetores que aparecem do lado esquerda pertecem a $W$, segue-se que $\sum_{i=1}^{q} \beta_i w_i \in U \bigcap W$. Usando agora que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é base de $U \cap W$, temos que existem números reais $\gamma_i$, $i = 1, \ldots, m$ tais que

$$\sum_{i=1}^{q} \beta_i w_i = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m,$$

de onde obtemos que $\sum_{i=1}^{q} \beta_i w_i - \sum_{i-1}^{m} \gamma_i v_i = 0$. Como $\{w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente, segue-se que $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = \beta_1 = \ldots = \beta_q = 0$.

Voltando agora a (2.40), obtemos que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \delta_i v_i = 0$, de onde se deduz que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \delta_1 = \ldots = \delta_m = 0$ pois $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente.

Do anterior temos que todos os coeficientee em (2.39) são zero, o que implica que $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente.

Vejamos agora que $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de $U + W$. Seja $v \in U + W$ e suponha que $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.

Como $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $U$, podemos escrever $u$ na forma $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$ onde $\alpha_i, \ldots, \alpha_p$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ são números reais. Similarmente, como $\{w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é base de $W$, existem números reais $\alpha_i', \ldots, \alpha_q'$, $\beta_1', \ldots, \beta_m'$ tais que $v = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i' w_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i' v_i$. Do anterior vemos que

$$v = u + w = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} (\beta_i + \beta_i') v_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' w_i,$$

o que prova que $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de $U + W$.

Como $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente e gerador de $U + W$, concluimos que este conjunto é uma base de $U + W$. Para finalizar note que

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= p + q + m \\ &= (p + m) + (q + m) - m \\ &= \dim U + \dim W - \dim U \bigcap W, \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

**Exemplo 2.41.** Achar uma base para os espaçõs $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$ sendo $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$ e $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$.

Para comecar estudemos o espaço $U$. Seja $p \in U$ e suponha que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Como $p(0) = 0$ segue que $a_0 = 0$ e $p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Usando agora que $p(1) = 0$ obtemos que $a_1 = -a_2 - a_3$ e que $p$ pode ser representado na forma

$$p(x) = -(a_2 + a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x),$$

o que implica que $U = [x^2 - x, x^3 - x]$.

Mostraremos agora que $\{x^2 - x, x^3 - x\}$ é linearmente independente. Se $\alpha, \beta$ são números reais tais que $\alpha(x^2 - x) + \beta(x^3 - x) = 0$ então $-(\alpha + \beta)x + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0$, de onde obtemos que $-(\alpha + \beta) = \alpha = \beta = 0$ pois os vetores $x, x^2, x^3$ são linearmente independentes. Isto prova que $\{x^2 - x, x^3 - x\}$ é linearmente independente o que implica que $\{(x^2 - x), (x^3 - x)\}$ é uma base de $U$ e $\dim(U) = 2$.

Estudemos agora o conjunto $W$. Suponha que $p \in W$ e $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Como $p(-1) = 0$, temos que $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$ e que $a_1 = a_0 + a_2 - a_3$. Assim,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + (a_0 + a_2 - a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ &= a_0(1 + x) + a_2(x^2 + x) + a_3(x^3 - x), \end{aligned}$$

de onde vemos que $\{1 + x, x^2 + x, x^3 - x\}$ é um conjunto gerador de $W$.

Por outro lado, se $\alpha(1+x)+\beta(x^2+x)+\gamma(x^3-x) = 0$ temos que $\alpha+(\alpha+\beta-\gamma)x+\beta x^2 + \gamma x^3 = 0$, de onde segue-se que $\alpha = (\alpha + \beta - \gamma) = \gamma = \beta = 0$ pois os vetores $1, x, x^2, x^3$ são linearmente independentes. Isto prova que $\{1 + x, x^2 + x, x^3 - x\}$ é um conjunto linearmente independente de $W$.

Do anterior podemos concluir que $\{1 + x, x^2 + x, x^3 - x\}$ é uma base de $W$ e que $\dim(W) = 3$.

Achemos agora uma base de $U \cap W$. Se $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U \cap W$ então $p(0) = p(1) = p(-1) = 0$, de onde obtemos

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

e que $a_0 = a_2 = 0$ e $a_1 = -a_3$. Portanto, $p$ pode ser escrito na forma $p(x) = -a_1(x^3 - x)$ o que permitr deduzir que $\{x^3 - x\}$ é uma base de $U \cap W$ e que $\dim(U \cap W) = 1$.

Para finalizar, note que do Teorema 2.37 temos que $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4$ o que implica que $W + U = P_3(\mathbb{R})$ pois $\dim(P_3(\mathbb{R})) = 4$.

**Exemplo 2.42.** Sejam $U = \{A \in M(2, 2) : A^T = A\}$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$. Calculemos a dimensão dos espaços $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$.

Para começar, estudemos o espaço $U$. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ então $A = A^T$, de onde vemos que $c = b$. Assim, $A$ é da forma

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e $U$ é gerado por $\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Mais ainda, como $\mathcal{A}$ é linearmente independente obtemos que $\mathcal{A}$ é uma base de $U$ e que $\dim(U) = 3$.

É obvio que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma base de $W$ e que $\dim W = 1$.

Estudemos agora o espaço $U \cap W$. Se $A \in U \cap W$ então $A \in W$ e $A$ é da forma $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Usando agora que $A \in U$, obtemos que $\alpha = 0$ e que $A$ é a matriz nula. Portanto, $U \cap W = \{0\}$ e $\dim U \cap W = 0$.

Pelo Teorema 2.37 temos que $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 4$, de onde concluimos que $U + W = M(2, 2)$ pois $U + W$ é um subespaço vetorial de $M(2, 2)$ e $\dim M(2, 2) = 4$.

**Exemplo 2.43.** Sejam $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p' = 0\}$, $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$ subespaços vetoriais de $W = P_2(\mathbb{R})$. Estudemos as dimensão dos espaços $U$, $W$, $U \cap W$ e $U + W$.

Para começar vejamos o espaço $U$. Se $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U$ então $p'(t) = a_1 + 2a_2 t = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de onde segue que $a_1 = a_2 = 0$. Portanto, $p$ é o polinomio constante $p(t) = a_0$, $\{1\}$ é uma base de $U$ e $\dim U = 1$.

Vejamos agora o espaço $W$. Se $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U$ então $p(0) = a_0 = 0$ e $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = a_1 + a_2 = 0$ de onde vemos que $a_1 = -a_2$ e $p = a_1 t - a_1 t^2 = a_1(t - t^2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue disto que $\{t - t^2\}$ é uma base de $W$ e que $\dim W = 1$.

Para estudar $U \bigcap W$, suponha que $p \in U \cap W = [1] \cap [t - t^2]$. Pelo feito anteriormente, temos que existen constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $p(t) = \lambda$ e $p(t) = \mu(t - t^2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, para $t = 1$ vemos que $p(1) = \mu(1 - 1^2) = 0$ de onde obtemos que $\lambda = 0$ e que $p(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $U \cap W = \{0\}$ e $\dim U \cap W = 0$.

Finalmente, como $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 1 + 1 - 0 = 2$ e $\{1, t - t^2\} \subset U + W$ temos que $\{1, t - t^2\}$ é uma base de $U + W$.

### 2.1.1 Coordenadas

Pelo Teorema 2.14 sabemos que cada vetor $v \in V$ pode ser representado como combinação linear dos vetores da base e que esta representação é única. Usando este fato, podemos introduzir a seguinte definição.

**Definição 2.44.** *Suponha que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$, que $u \in V$ e que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são chamados de coordenas de $u$ em relação à a base $B$. No que segue $u_B$ será o vetor dado por $u_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.*

**Exemplo 2.45.** O conjunto $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Para determinar as coordenadas do vetor $u = (1, 2, 0)$ em relação a base $B$, temos que achar números reais $\alpha, \beta, \gamma$ tais que

$$(1, 2, 0) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1) = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma),$$

o que é equivalente a resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = -2$, de modo que $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Além do anterior, podemos achar $v_B$ para um vetor generico $v = (x, y, z)$. Para fazer isto temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z, \end{cases}$$

que tem como solução $\alpha = x$, $\beta = y - x$ e $\gamma = z - y + x$. Assim, $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z - y + x \end{pmatrix}$.

**Exemplo 2.46.** Mostrar que o conjunto de polinômios $B = \{1, x, x^2 - x\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e achar as coordenadas do polinômio $u = 1 + x + x^2$ em relação a $B$. Encontre também as coordenadas de um polinômio generico $(p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$ em relação a $B$.

Como $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, para mostrar que $\{1, x, x^2 - x\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$ é suficiente provar que $\{1, x, x^2 - x\}$ é linearmente independente. Se $\alpha, \beta, \gamma$ são tais que $\alpha + \beta x + \gamma(x^2 - x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $\alpha + (\beta - \gamma)x + \gamma x^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de onde obtemos que $\alpha = (\beta - \gamma) = \gamma = 0$ pois os polinomios $1, x, x^2$ são linearmente independentes. Do anterior é obvio que e $\alpha = \beta = \gamma = 0$ o que mostra que $\{1, x, x^2 - x\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

Para achar $u_B$, temos que escrever $u$ como combinação linear dos polinomios em $\{1, x, x^2 - x\}$, o que é equivalente a encontrar números reais $\alpha, \beta, \gamma$ tais que $u = 1 + x + x^2 = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x)$. A partir desta equação obtemos que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e que $\gamma = 1$. Assim, $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Suponha agora que $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Para achar as coordenadas de $p$ en relação a $B$ temos que achar $\alpha, \beta, \gamma$ de modo que $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x)$. A partir disto, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha = a_0 \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases}$$

que tem por solução $\alpha = a_0$, $\beta = a_1 + a_2$ e $\gamma = a_2$. Do anterior vemos que $p_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 + a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

## 2.2 Exercícios

**Ex. 2.47.** Estude se o conjunto $B$ é uma base do espaço $V$.

1. $B = \left\{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\right\}$, $V = P_3(\mathbb{R})$.
2. $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$, $V = M(2,2)$.
3. $B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

**Ex. 2.48.** Achar uma base e a dimensão do subespaço $W$ de $V$.

1. $W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\right\}$, $V = \mathbb{R}^4$.
2. $W = \{X \in M(2,2) : AX = X\}$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M(2,2)$.
3. $W = \{X \in M(2,2); AX = XA\}$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $V = M(2,2)$.

**Ex. 2.49.** Nos seguintes casos, achar uma base e a dimensão de $U$, $W$, $U+W$ e $U \cap W$.

1. $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$, $W = \{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
2. $U = \{A \in M(2,2) : \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $W = \left\{A \in M(2,2) : A^T = -A\right\}$ e $V$ é o espaço $M(2,2)$. Lembre que a traça de $A$, denotada por $\operatorname{tr}(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal de $A$.

**Ex. 2.50.** Achar as coordenadas do vetor $u = (-1,8,5) \in \mathbb{R}^3$ em relação as bases de $\mathbb{R}^3$ $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $B = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ e $C = \{(1,2,1), (0,3,2), (1,1,4)\}$. Achar as coordenadas do vetor $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ em relação as bases anteriores.

**Ex. 2.51.** Achar as coordenadas do polinômio $p \in P_3(\mathbb{R})$ dado por $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$ em relação as bases de $P_3(\mathbb{R})$, $A = \{1, t, t^2, t^3\}$, $B = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ e $C = \{4+t, 2, 2-t^2, t+t^3\}$. Achar representação do polinômio generico $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ em relação as bases anteriores.

**Ex. 2.52.** Achar as coordenadas do vetor $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ em relação a base canonica de $M(2,2)$ e em relação a base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

**Ex. 2.53.** Achar uma base $M(2,2)$ que contenha os vetores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Ex. 2.54.** Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$. Mostre que $\{u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots, u_1+\cdots, u_n\}$ é um base de $V$. Prove que $\{\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n\}$ é uma base de $V$ quando todos os números $\alpha_j$ são diferentes de zero.

### 2.2.1 Prova teste 1 de 2011

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to M(2,2)$ a função definida por $T : \mathbb{R}^3 \to M(2,2)$ dada por

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z & z-y \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que $T$ é uma transformação linear.

   (b) Achar $Ker(T)$, a dimensão e uma base.

   (c) Achar $Img(T)$, a dimensão e uma base.

2. Suponha que $U$ e $W$ são subespaços vetorias de um espaço vetorial $X$.

   (a) Mostre que $U \bigcap W$ e $U + W$ são subespaços vetorias de $X$.

   (b) Suponha que $dim(X) = n$, $dim(U) > n/2$ e que $dim(W) > n/2$. Mostre que $U \cap W \neq \{0\}$.

3. Seja $X = M(n,n)$ munido das operações usuais e $\mathfrak{S}$ o conjunto definido por $\mathfrak{S} = \{A \in X : A = -A^T\}$ (lembre que $A^T = (a_{j,i})$ se $A = (a_{i,j})$). Mostre que $S$ é um espaço vetorial com as operações de $X$. Achar a dimensão e uma base para $\mathfrak{S}$.

### 2.2.2 Prova Teste 2 de 2012

1. Mostre que o conjunto $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y = z \,\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Achar un conjunto gerador de $U$.

2. Mostre que o conjunto $W = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y - z \,\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Achar un conjunto gerador de $W$.

3. Achar un conjunto gerador para $U + W$. É verdade que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ ? (justifique)

4. Defina o conceito de combinação linear e represente o polinomio $p(x) = x^2$ como combinação linear dos vetores $\{\, 1, 2 - x, 2 + x + x^2 \,\}$ de $P(2)$.

5. Sejam $P_3(\mathbb{R})$ os espaço de polinomios de grau menor o igual a 3 e

$$U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p(0) = 0\}.$$

   O conjunto é um espaço vetorial com as operações de $P_3(\mathbb{R})$? Em caso afirmativo, achar un conjunto gerador de $U$.

### 2.2.3 Prova 1 do ano 2011

1. Seja $T : M(2,2) \to M(2,2)$ a função dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 2b & c \end{bmatrix}$

   (a) Mostre que $T$ é uma transformação linear.

   (b) Achar o núcleo de $T$, a dimensão do núcleo e uma base.

   (c) Achar $Img(T)$, a dimensão de $Img(T)$, e uma base.

2. Seja $U = \{(1,2,3),(1,1,1),(2,8,14)\}$ e $W$ o conjunto definido por

$$W = \{\alpha(1,2,3) + \beta(1,1,1) + \gamma(2,8,14) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Mostre que $W$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Achar uma base para $W$ e a dimensão de $W$.

3. Sejam $X = M(3,3)$ com as operações usuais e $\mathfrak{S} = \{A \in X : A = -A^T\}$ (Note que $A^T = (a_{j,i})$ se $A = (a_{i,j})$). Mostre que $S$ é um subespaço vetorial de $X$. Achar a dimensão e uma de $\mathfrak{S}$.

### 2.2.4 Prova 1 de 2012

1. Seja $V$ um espaço vetorial e $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset X$.

   (a) Defina os conceitos de combinação linear, conjunto l.i. e espaço gerado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$,

   (b) mostre que $[\{u_1, \ldots, u_n\}]$ é um espaço vetorial de $V$,

   (c) $[\{(1,2,3),(4,5,6),(1,0,0)\}] = \mathbb{R}^3$? (justifique ! )

2. Mostre que o conjunto $U = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 3z\,\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Achar un conjunto gerador de $U$.

3. Mostre que o conjunto $W = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x = 5y - 6z\,\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Achar un conjunto gerador de $W$.

4. Achar um conjunto gerador de $U + W$. É verdade que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ ? (justifique!)

# Capítulo 3

# Transformações Lineares

Neste capitulo estudaremos um tipo especial de funções que são definidas entre espaços vetorias. Este tipo de funções, chamadas de transformações lineares, nos permitiram comparar os espaços vetorials desde diferentes pontos de vista. Em particular, veremos que dois espaços vetoriais de igual dimensão são (do ponto de vista da algebra linear) iguais.

No que segue, $U$, $V$ são espaços vetoriais e para simplificar a escrita, usaremos a mesma notação para as operações em $U$ e em $V$ (mas lembre que essas operações podem ser diferentes,.. muito diferentes!!). Começamos com a seguinte definição.

**Definição 3.1.** *Uma função $T : U \to V$ é chamada transformação linear se $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ e $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

**Observação 3.2.** No que segue, $\mathcal{L}(U, V)$ denotará o conjunto formado por todas as transformações lineares definidas de $U$ em $V$.

Deixamos como exercicio a prova do seguinte Lema.

**Lema 3.3.** *Uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear $\Leftrightarrow$ $T(u + \mu v) = T(u) + \mu T(v)$ para todo $u, v \in U$ e cada $\mu \in \mathbb{R}$.*

Vejamos alguns exemplos de transformações lineares.

1. A função $T : U \to V$ dada por $T(u) = 0$ para todo $u \in U$, é uma transformação linear.

2. A função $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$ é uma transformação linear. Esta função é chamada de transformação identidade e no que segue será notada simplesmente por $I$.

3. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ a função dada por $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (a_0, \ldots, a_n)$.

   Para provar que $T$ é uma transformação linear, usaremos o Lemma 3.3. Sejam $u, v \in P_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e suponha que $u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_nx^n$ e $v = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_nx^n$. Da definição de $T$ vemos que

$$
\begin{aligned}
T(u + \lambda v) &= T((a_0 + \alpha b_0) + (a_1 + \alpha b_1)x \ldots + (a_n + \alpha b_n)x^n) \\
&= ((a_0 + \alpha b_0), (a_1 + \alpha b_1), \ldots + (a_n + \alpha b_n)) \\
&= (a_0, a_1, \ldots, a_n) + \alpha(b_0, b_1, \ldots, b_n) \\
&= T(u) + \alpha T(v),
\end{aligned}
$$

o que prova que $T$ é uma transformação linear.

4. Seja $A \in M(m,n)$. Definimos a função $T : M(n,1) \to M(m,1)$ por $T(X) = AX$. A função $T$ é uma transformação linear.

   Suponha que $A = (a_{i,j})_{i,j}$ e sejam $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ vetores de $M(n,1)$. Para mostrar que $T(u) + \alpha T(v) = T(u + \alpha v)$ é suficiente mostrar que as coordenadas de $T(u + \alpha v)$ são iguais as coordenadas de $T(u) + \alpha T(v)$. Da definição do produto $A(u + \alpha v)$ vemos que a coordenada $i$ de $A(u + \alpha v)$ é dada por $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(u_j + \alpha v_j)$. Similarmente, vemos que a coordenada $i$ de $T(u) = Au$ e a coordenada $i$ de $T(v) = Av$ são dadas por $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}u_j$ e $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j$ respectivamente, de onde segue que a coordenada $i$ de $Au + \alpha Av$ é $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}u_j + \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j$.

   Do anterior é claro que para todo $i = 1, \ldots, n$, a coordenada $i$ de $T(u + \alpha v)$ é igual a coordenada $i$ de $T(u) + \alpha T(v)$. Assim, $T(u) + \alpha T(v) = T(u + \alpha v)$ o que implica que $T$ é uma transformação linear.

### 3.0.5 Imagem e Núcleo de uma transformação

Antes de introduzir a imagem e Núcleo de uma transformação linear, lembremos alguns conceitos da teoria de funções.

**Definição 3.4.** *Sejam $X, Y$ conjuntos, $A \subset X$, $B \subset Y$ e $f : X \to Y$ função. A imagem de $A$ por $f$ é o subconjunto de $Y$ dado por $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ e a imagem inversa de $B \subset Y$ por $T$ é o subconjunto de $X$ definido por $f^{-1}(B) = \{x \in X : T(x) \in B\}$.*

**Definição 3.5.** *Sejam $X, Y$ conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que*

1. *$f$ é injetora se $f(x) = f(z) \Leftrightarrow x = z$,*
2. *$f$ é sobrejetora se $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = Y$ (equivalentemente, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$),*
3. *$f$ é bijetora se $f$ é injetora e sobrejetora,*
4. *$f$ é inversivel, se existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in X$ e $f \circ g(y) = y$ para todo $y \in Y$. Neste caso, a função $g$ será denotada por $f^{-1}$.*

**Lema 3.6.** *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ é inversivel então a inversa de $T$ é única e $T^{-1}$ é uma transformação linear.*

**Prova:** Suponha que $R, S \in \mathcal{L}(V,U)$ são inversas de $T$. Para $v \in V$ temos que

$$Sv = S \circ I_V v = S \circ (T \circ R)v = (S \circ T) \circ Rv = I_U \circ Rv = Rv$$

o que implica que $S = R$.

Para mostrar que $T^{-1}$ é uma transformação linear, fixemos $x, y \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $T$ é sobrejetora, existem vetores $v, w \in U$ tais que $T(u) = x$ e $T(w) = y$. Mais ainda, notando que $T(u + \alpha w) = T(u) + \alpha T(w) = u + \alpha y$ segue que $T^{-1}(x + \alpha y) = u + \alpha w = T^{-1}(x) + \alpha T^{-1}(y)$, o que prova que $T^{-1}$ é linear. ■

**Proposição 3.7.** *Suponha que $T : U \to V$ uma transformação linear.*

1. *Se $W$ é um subespaço vetorial de $U$ então $T(W)$ é um subespaço vetorial de $V$. Mais ainda, se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é um conjunto gerador de $W$ então o conjunto $\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}$ é gerador de $T(W)$ ( $T(W) = [\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}]$).*

2. Sejam $0_U$ e $0_V$ o zero de $U$ e o zero de $V$ respectivamente. Então $T(0_U) = 0_V$.

3. Se $W$ é um subespaço vetorial de $V$, então $T^{-1}(W) \neq \emptyset$ e $T^{-1}(W)$ é um subespaço vetorial de $U$.

**Prova:** Mostremos (1). Para provar que $T(W)$ é subespaço vetorial de $U$ temos que mostrar que $x + \alpha y \in T(W)$ para todo $x, y \in T(W)$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $x, y \in T(W)$, então existem $u, w \in W$ tais que $x = T(u)$ e $y = T(w)$. Usando que $T$ é uma transformação linear, vemos que

$$x + \alpha y = T(u) + \lambda T(w) = T(u) + T(\alpha w) = T(u + \alpha w),$$

o que implica que $x + \alpha y \in T(W)$ pois $u + \alpha w \in W$.

Suponha agora que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é um conjunto gerador de $W$. Se $w \in W$, então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$. Usando agora que $T$ é uma transformação linear vemos que $T(w) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(w_i)$ o que implica que $T(w) \in [\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}]$. Como $w$ é arbitrário, do anterior vemos que $T(W) \subset [\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}]$.

Notando que $T(W)$ é um espaço vetorial e que $\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\} \subset T(W)$ é claro que $[\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}] \subset T(W)$. Do anterior, $T(W) \subset [\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}]$ e $[\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}] \subset T(W)$ o que mostra que $T(U) = [\{T(w_1), \ldots, T(w_n)\}]$.

A prova de prova (2) é obvia pois $T(00_U) = 0T(0_U) = 0_V$.

Para finalizar provemos (3). Como $T(0_U) = 0_V$ segue-se que $0_U \in T^{-1}(W)$, de modo que $T^{-1}(W) \neq \emptyset$. Para mostrar que $T^{-1}(W)$ é subsepaço vetorial de $U$, fixemos $x, y \in T^{-1}(W)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pela definição de $T^{-1}(W)$ temos que $T(x), T(y) \in W$ o que implica que $T(x) + \alpha T(y) \in W$ pois $W$ é um espaço vetorial. Usando isto segue que $T(x + \alpha y) = T(x) + \lambda T(y) \in W$ o que mostra que $x + \lambda y \in T^{-1}(W)$. Isto prova que $T^{-1}(W)$ é um subespaço vetorial de $U$. A prova está completa. ■

Pelo item (1) da proposição anterior, temos que uma transformação linear $T : U \to V$ é completamente determinada pelos valores que ela assume numa base de $U$. De fato, se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é uma base de $U$ e $u \in U$, então $u$ pode ser escrito na forma $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$ de onde obtemos que $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(w_i)$. Logo, se conhecemos os valores $T(w_i)$ conhecemos $T(u)$ para qualquer $u$. Mais ainda, como veremos no próximo Lemma, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ são vetores de $U$ e $V$ respectivamente, e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $U$ então existe uma transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i$.

**Lema 3.8.** *Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base e $U$ e que $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Então existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i$.*

**Prova:** Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base e $U$, para $u \in U$ existem números reais $\alpha_1, \ldots, u_n$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Usando este fato, definimos $T : U \to V$ por $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ quando $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Afirmamos que $T$ é função e que $T$ é uma transformação linear.

Da definição de $T$ e do fato que os coeficientes na representação de $u \in U$ são unicos, segue que $T$ é uma função. Para ver que $T$ é linear, suponha que $u, x \in U$ e que $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ e $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ então $\alpha u + x = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i) u_i$ de onde segue que

$$T(\alpha u + x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i) v_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \alpha T(u) + T(x),$$

o que prova que $T$ é linear. Mais ainda, como $u_i = 0u_1 + \ldots, 1u_i + \ldots 0u_n$ temos que $T(u_i) = v_i$ para cada $i$, o que prova que $T$ é uma transformação como a requerida.

Para mostrar que é unica, suponha que $S : U \to V$ é uma outra transformação linear tal que $S(u_i) = T(u_i) = v_i$ para cada $i$. Se $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in U$ então

$$S(u) = S(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = T(u),$$

o que implica que $S(u) = T(u)$ para todo $u \in U$. Isto prova que $T = S$. ■

**Observação 3.9.** Note que na prova do Lema 3.8 aparece como definir a transformação $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i$. De fato, se $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ então $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Deixamos como exercicio provar o seguinte Lemma.

**Lema 3.10.** *Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto linearmente independente de $U$ e que $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Então existe uma transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i$. Mais ainda, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ não é uma base então existem infinitas transformações que verificam as condições requeridas.*

**Exemplo 3.11.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^3)$ seja gerada por $\{(1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$.

Definiremos uma transformação $T$ tal que $T(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) \\ &= x(1, 2, 0) + y(1, 1, 1) \\ &= (x + y, 2x + y, y). \end{aligned}$$

Assim, a transformação linear dada por $T(x, y, z)(x+y, 2x+y, y)$ é como a requerida.

**Exemplo 3.12.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (3, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 2)$.

Como $\{(1, 2), (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existem números reais $\alpha, \beta$ tais que $(x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(0, 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta)$. Mais ainda, é fazil ver que neste caso $\alpha = x$ e $\beta = (y - 2x)$.

Da Observação 3.9 temos que a transformação requerida é dada por

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)) \\ &= xT(1, 2) + (y - 2x)T(0, 1) \\ &= x(3, -1) + (y - 2x)(1, 2) \\ &= (x + y, 2y - 5x). \end{aligned}$$

Introduzimos agora o conceito de núcleo de uma transformação linear. No que segue desta apostilha, usaremos a mesma notação "0" para o zero de algum espaço vetorial.

**Definição 3.13.** *Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. O núcleo de $T$ é o subconjunto de $U$ definido por $T^{-1}(\{0\}) = \{u \in U : T(u) = 0\}$. No que segue usaremos a notação $\mathcal{N}(T)$ para o núcleo de $T$.*

**Lema 3.14.** *Suponha que $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então o núcleo de $T$ é um subespaço vetorial de $U$. Mais ainda, $T$ é injetora $\Leftrightarrow \mathcal{N}(T) = \{0\}$.*

**Prova:** A Primeira propriedade segue diretamente de Proposição 3.7 pois $\{0\}$ é um subespaço vetorial de $V$ e $\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{0\})$.

Mostremos agora a segunda propriedade. Suponha agora que $T$ é injetora e seja $x \in \mathcal{N}(T)$. Como $T(x) = 0_V$, $T(0) = 0$ (veja o item (2) da Proposição 3.7) e $T$ é injetora, segue que $x = 0_U$. Isto prova que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Suponha agora que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e que $x, y \in U$ são tais que $T(x) = T(y)$. Como $T$ é linear, vemos que $T(x-y) = T(x)-T(y) = 0$ o que implica que $x-y \in \mathcal{N}(T) = \{0\}$ e que $x = y$. Isto mostra que $T$ é injetora. A prova está completa. ■

**Exemplo 3.15.** Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

Se $(x, y) \in \mathcal{N}(T)$ então $T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta) = (0, 0)$, de onde segue que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como A matriz anterior é inversivel (o determinante da matriz anterior é 1), obtemos que $(x, y) = (0, 0)$. Assim, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ o que implica que $T$ é injetora.

Estabelecemos agora um dos mais importantes resultados da teoria de transformações lineares.

**Teorema 3.16** (Teorema do Núcleo e da Imagem)**.** *Suponha que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e que $U$ tem dimensão finita. Então* $\dim(U) = \dim \mathcal{N}(T) + \dim T(U)$.

**Prova:** No que segue supomos que $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$. Como $U$ é um espaço de dimensão finita, temos que $\mathcal{N}(T)$ também é finitamente gerado. Suponha que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Pelo Teorema 2.35 sabemos que existem vetores $v_1, \ldots, v_q$ de $U$ tais que $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $U$.

No que segue, mostraremos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é uma base de $T(U)$. Para começar vejamos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é linearmente independente.

Suponha que $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_q T(v_q) = 0$. Como $T$ é linear, é fazil ver que $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q) = 0$, de onde segue que $\sum_{j=1}^{q} \alpha_i v_i \in \mathcal{N}(T)$. Usando que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, podemos supor que $\sum_{j=1}^{q} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_i u_i$ onde $\beta_i$ são números reais. Assim,

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_q v_q = 0,$$

de onde obtemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$ pois $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $U$. Isto prova que $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é linearmente independente.

Por outro lado, como $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $U$, do item (1) da Proposição 3.7 segue que $\{T(u_1), \ldots, T(u_p), T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é um conjunto gerador de $T(U)$, o que implica que $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é um conjunto gerador de $T(U)$. Isto completa a prova que $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é uma base de $T(U)$.

Notando que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$, que $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ é base de $U$ e que $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é uma base do espaço $T(U)$, vemos que $\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim T(U)$. A prova do caso $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ segue da prova anterior. Isto completa a demostração. ∎

**Observação 3.17.** Na prova do Teorema 3.16 aparece uma maneira de achar uma base para o espaço $T(U)$. De fato, na prova supomos que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e logo completamos este conjunto a uma base do espaço $U$ que foi denotada por $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$. O conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_q)\}$ é uma base de $T(U)$.

Como consequência do resultado anterior temos as seguintes propriedades.

**Corolário 3.18.** *Suponha que $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Se $\dim U = \dim V$, então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *$T$ é sobrejetora,*
2. *$T$ é injetora,*
3. *$T$ é bijetora,*
4. *$T$ leva bases de $U$ em bases de $V$, isto é, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $U$ então $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $V$.*

**Prova:** Suponha que $T$ é sobrejetora. Pelo teorema anterior temos que $\dim(U) = \dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(V)$ de onde segue que $\dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ e que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Agora, do Lemma 3.14 podemos concluir que $T$ é injetora.

Se $T$ é injetora então $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e do Teorema 3.16 segue $\dim U = \dim T(U)$. Portanto, $T(U)$ é um subespaço de $V$ com a mesma dimensão de $V$ o que implica via o item (2) da Proposição 2.33 que $T(U) = V$. Isto prova que $T$ é sobrejetora, e como consequencia bijetora.

Suponha que $T$ é bijetora e que $u_1, \ldots, u_n$ é uma base de $U$. Do item (1) da Proposição 3.7 sabemos que $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é um conjunto gerador de $T(U) = V$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) = 0$ então $T(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = 0$ de onde obtemos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ uma vez que $T$ é injetora. Como $u_1, \ldots, u_n$ é base obtemos que $\alpha_1 = \ldots u_n = 0$ o que implica que $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é linearmente independente. Assim, temos provado que $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $V$. Portanto, $T$ leva bases em bases.

Finalmente, suponha que $T$ leva bases em bases. Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma base de $U$. Pela hipótese, o conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $V$. Assim, dado $v \in V$ existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i)$ de onde obtemos que $v = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i)$. Isto mostra que $T$ é sobrejetora. A prova está completa. ∎

**Exemplo 3.19.** Estudemos a transformação $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p) = p' + p''$.

Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathcal{N}(T)$ então $(a_1 + 2a_2x) + 2a_2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = 0$, seque que $a_1 = -2a_2$ e com $x = -1$ segue que $a_1 = 0$. Assim, $p$ é o polinomio constante $p = a_0$. Logo, $\mathcal{N}(T) = \{a : a \in \mathbb{R}\}$ que tem por base o polinômio $\{1\}$.

Da observação 3.17 segue que o conjunto $\{Tx, Tx^2\} = \{1, 2x + 2\}$ é uma base da imagem de $T$. Assim, $T(P_2(\mathbb{R}))$ é um espaço de dimensão 2.

**Exemplo 3.20.** Achar uma transformação $T \in \mathcal{L}(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ tal que $\mathcal{N}(T) = [\{1 + x^3, 1 - x^2\}]$.

Para definir a transformação $T$ precissamos de uma base de $P_3(\mathbb{R})$. Por conveniencia, consideramos a base $\{1 + x^3, 1 - x^2, 1, x\}$. Como queremos que o núcleo de $T$ seja $\{1 + x^3, 1 - x^2\}$, definimos $T(1 + x^3) = T(1 - x^2) = 0$. Mais ainda, para que o núcleo de $T$ seja exatamente $[\{1 + x^3, 1 - x^2\}]$, definimos $T(1) = 1$ e $T(x) = x$.

Para achar uma formula explicita de $T$, fixemos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$. Note agora que

$$\begin{aligned} T(p) &= T(a_0 + a_2 - a_3 + a_1x + a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2)) \\ &= T(a_0 + a_2 - a_3) + a_1Tx + a_3T(1 + x^3) - a_2T(1 - x^2) \\ &= (a_0 + a_2 - a_3)1 + a_1x \\ &= a_0 + a_2 - a_3 + a_1x. \end{aligned}$$

**Exercício 3.21.** Usando as ideias no exemplo anterior, achar uma segunda transformação $S \in \mathcal{L}(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ tal que $\mathcal{N}(S) = [\{1 + x^3, 1 - x^2\}]$.

**Corolário 3.22.** *Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $\dim(V) = 1$ e $T$ é não nula, então $T$ é sobrejetora.*

**Prova:** Como $T$ é não nula, $1 = \dim U = \dim N(T) + \dim T(U) \geq \dim T(U) \geq 1$, de onde segue que $\dim T(U) = 1$. Isto prova que $T$ é sobrejetora pois $\dim V = 1$.

**Corolário 3.23.** *Suponha que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é não nula. Então $T$ é sobrejetora e existem números reais $a_1, \ldots, a_n$ tais que $T((x_1, \ldots, x_n)) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mais ainda, $\mathcal{N}(T) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ e $\dim(\mathcal{N}(T)) = n - 1$.*

**Prova:** Como $T$ é não nula segue do Corolario anterior que $T$ é sobrejetora. Um vetor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito na forma $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ de onde vemos que $T((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_iT(e_i)$. Assim, $T((x_1, \ldots, x_n)) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ com $a_i = T(e_i)$ e é obvio que $\mathcal{N}(T) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$.

Finalmente, do Teorema 3.16 segue que $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathcal{N}(T)) + \dim T(U) = \dim(\mathcal{N}(T)) + 1$ de onde obtemos que $n - 1 = \dim(\mathcal{N}(T))$. Isto completa a prova. ■

**Exemplo 3.24.** Estudemos o núcleo e a imagem da transformação $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ dada por $T(X) = AX - XA$, onde $A$ é a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}(T)$, então $AX = XA$ e

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ c = c. \\ d = 2c + d \end{cases}$$

Deste sistema obtemos que $c = 0$, $a = d$. Logo, $X$ é da forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o espaço $\mathcal{N}(T)$ é gerado pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais ainda, como estas matrizes são linearmente independentes segue que $\mathcal{N}(T)$ é um espaço de dimensão dois e que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$.

Estudemos agora a imagem de $T$. Uma matriz $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ petence a imagen de $T$ se existe uma matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $Y = AX - XA$. Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c & 2d - 2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \\ &= 2c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2(d - a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

de onde deduzimos que a imagem de $T$ é gerada por $\mathcal{A} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ Como $\mathcal{A}$ é linearmente independente, obtemos que a imagem de $T$ é um espaço vetorial de dimensão dois e que $\mathcal{A}$ é uma base da imagem de $T$.

## 3.1 Isomorfismo e Automorfismo

Nesta seção estudamos o conceito de espaços vetoriais isomorfos. A isomorfia é um dos conceitos mais importantes da algebra lineat, e basicamente diz que espaços vetoriais isomorfos são "iguais" do ponto de vista da algebra linear. Para comecar, introduzimos o conceito de isomorfismo.

**Definição 3.26.** *Uma transformação linear $T : U \to V$ é chamada isomorfismo se $T$ é bijetora. Se $U = V$ dizemos que $T$ é um automorfismo.*

**Definição 3.27.** *Os espaços $U$ e $V$ são isomorfos se existe um isomorfismo linear definido de $U$ em $V$.*

**Exemplo 3.28.** As seguintes funções são isomorfismos.

1. $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$,

2. $T : \mathbb{R}^n \to P_{n-1}(\mathbb{R})$ dada por $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}$,

3. $T : M(m,n) \to \mathbb{R}^{mn}$ que associa a cada matriz $A = (a_{ij})$ de $M(m,n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por $(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,n})$,

**Teorema 3.29.** *Sejam $U, V$ espaços vetoriais de dimensão finita. Os espacos $U, V$ são isomorfos* $\Leftrightarrow \dim(U) = \dim(V)$.

**Prova:** Suponha que $\Leftrightarrow \dim(U) = \dim(V)$ e sejam $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ bases de $U$ e $V$ respectivamente. Para mostrar que os espaços são isomorfos, temos que mostrar que existe um isomorfismo $T$ de $U$ em $V$. Pelo Lemma 3.8 existe uma única $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i = 1, \dots n$. Mais ainda, para $x \in U$ com $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ temos que $T(x) = T(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

No que segue mostraremos que $T$ é um isomorfismo entre $U$ e $V$. Para mostrar que $T$ é injetora provaremos que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Suponha que $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in \mathcal{N}(T)$. Como $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de $V$, segue que $x_i = 0$ para todo $i$ e que $x = 0$. Isto prova que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Vejamos agora que $T$ é sobrejetora. Se $y \in Y$ então $y$ pode ser representado na forma $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Seja $x \in U$ definido por $x = \sum_{i=1}^n y_i u_i$. É obvio que $T(x) = T(\sum_{i=1}^n y_i u_i) = \sum_{i=1}^n y_i v_i = y$ o que implica que $y \in T(U)$. Como $y$ é arbitario, podemos concluir que $T(U) = V$. Portanto, $T$ é sobrejetora.

Dos passos anteriores segue que $T$ é um isomorfismo e que os espaços $U$ e $V$ são isomorfos.

Suponha agora que os $U, V$ são isomorfos. Sejam $T : U \to V$ um isomorfismo e $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de $U$. Pelo Corolario 3.18 sabemos que $T$ leva bases de $U$ em bases de $V$, de onde obtemos que $\{Tu_1, \dots, Tu_n\}$ é uma base de $V$ e que $\dim(U) = \dim(V)$. A prova está completa. ∎

**Exemplo 3.30.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x - y, x - z, z - y)$. Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ então $x - y = 0$, $x - z = 0$ e $z - y = 0$ de onde obtemos que $x = y = z$. Logo, $\mathcal{N}(T) = [(1, 1, 1)]$ e $T$ não é injetora. Em particular, notamos que $T$ não é um isomorfismo.

### 3.1.1 O Espaço Vetorial $\mathcal{L}(U, V)$

Sejam $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $V$ é um espaço vetorial, podemos definir as funções $T + S : U \to V$ e $(\alpha T) : U \to V$ por $(T + S)(u) = T(u) + S(u)$ e $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$. Mais ainda, é fazil mostrar as funções $S+T$ e $\alpha T$ são transfromações lineraes de $U$ em $V$. Deixamos como exercicio a prova do seguinte Lemma.

**Lema 3.31.** *Sejam $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então as funções $T + S : U \to V$ e $(\alpha T) : U \to V$ são transformações lineares de $U$ em $V$.*

**Teorema 3.32.** *O conjunto $\mathcal{L}(U, V)$ munido das operações $S + T$ e $\alpha T$ definidas anteriormente é um espaço vetorial e* $\dim \mathcal{L}(U, V) = \dim(U) \dim(V)$.

**Prova:** A prova que $\mathcal{L}(U, V)$ é um espaço vetorial é deixada como exercicio. Para calcular a dimensão de $\mathcal{L}(U, V)$, temos que achar uma base deste espaço.

Sejam $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ bases de $U$ e $V$ respectivamente. Para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ denotamos por $T_{i,j}$ a única transformação linear $T_{i,j} : U \to V$ tal que

$T_{i,j}(u_i) = v_j$. Note que $T_{ij}(x) = x_i v_j$ quando $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$. Mostraremos a seguir, que $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m\}$ é uma base de $\mathcal{L}(U,V)$.

Provemos para começar que $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m\}$ é linearmente independente. Se $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij} = 0$, da definição das funções $T_{i,j}$ segue que

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}T_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}v_j.$$

Usando agora que os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes, obtemos que $a_{k1} = \ldots = a_{km} = 0$. Notando agora que $k$ é arbitrario, deduzimos que todos os coeficientes $a_{i,j}$ são zeros, o que mostra que $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m\}$ é linearmente independente.

Mostremos agora que $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m\}$ é un conjunto gerador de $\mathcal{L}(U,V)$. Para começãr, escrevemos cada vetor $T(u_i)$ na forma

$$T(u_i) = \alpha_{1i}v_1 + \cdots + \alpha_{mi}v_m.$$

Usando agora que $T_{ij}(u) = x_i v_j$, para $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ vemos que

$$\begin{aligned} T(u) &= x_1T(u_1) + \ldots + x_nT(u_n) \\ &= x_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{m1}v_m) + \cdots + x_n(\alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_m) \\ &= \alpha_{11}x_1v_1 + \cdots + \alpha_{m1}x_1v_m + \cdots + \alpha_{1n}x_nv_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_nv_m \\ &= \alpha_{11}T_{11}(u) + \cdots + \alpha_{m1}T_{1m}(u) + \cdots + \alpha_{1n}T_{1n}(u) + \cdots + \alpha_{mn}T_{nm}(u), \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$T = \alpha_{11}T_{11} + \cdots + \alpha_{m1}T_{1m} + \cdots + \alpha_{1n}T_{1n} + \cdots + \alpha_{mn}T_{nm},$$

o que prova que $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{L}(U,V)$.

Do anterior, vemos que $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m\}$ é uma base de $\mathcal{L}(U,V)$ e que $\dim \mathcal{L}(U,V) = \dim(U)\dim(V)$. ■

**Definição 3.33.** *O espaço vetorial $\mathcal{L}(U,\mathbb{R})$ é chamado espaço dual de $U$.*

**Corolário 3.34.** *O espaco dual de $U$ é um espaço vetorial de dimensão $n$.*

**Observação 3.35.** A prova do Teorema 3.32 nos fornece de uma base do espaço $\mathcal{L}(U,V)$. Em particular, se $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $U$, a familia de transformações lineares $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ dadas por $f_j(u) = f_j(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, é base do espaço dual de $U$. Esta base é chamada base dual de $\mathcal{B}$.

**Exemplo 3.36.** Achar a base dual de $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então $(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$ de onde segue que $f_1(x,y,z) = z$, $f_2(x,y,z) = y - z$ e $f_3(x,y,z) = x - y$.

**Proposição 3.37.** *Sejam $Z, W$ espaços vetoriais.*

1. *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $S \in \mathcal{L}(V,W)$ então $S \circ T \in \mathcal{L}(U,W)$.*
2. *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $S \in \mathcal{L}(V,W)$ e $R \in \mathcal{L}(W,X)$ então $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.*
3. *Se $S, T \in \mathcal{L}(U,V)$, $R \in \mathcal{L}(V,W)$ então $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$.*

*4. Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $I_V$ é a identidade em $V$ e $I_U \in L(U)$ é a identidade em $U$. então $I_V \circ T = T$ e $T \circ I_U = T$.*

**Prova:** Somente provaremos (1). Para $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vemos que

$$\begin{aligned} S \circ T(\lambda u + v) &= S(T(\lambda u + v)) \\ &= S(\lambda T(u) + T(v)) \\ &= S(\lambda T(u)) + S(T(v)) \\ &= \lambda S(T(u)) + S(T(v)) \\ &= \lambda (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v), \end{aligned} \tag{3.38}$$

o que mostra que $S \circ T$ é uma transformação linear. ■

### 3.1.2 A matriz associada a uma Transformação Linear

Como consequencia do Teorema 3.29, temos que um espaço de dimensão finita $n$ é do ponto de vista da algebra linear igual ao espaço $\mathbb{R}^n$. De esta forma é possivel simplificar de maneira importante o estudo de espaços vetoriais. Da mesma forma, podemos simplificar a teoria de transformações lineares associando a cada transformação linear $T : U \to V$ uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mais ainda, como veremos nesta seção, podemos estudar o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ via o espaço de matrizes $M(n, m)$.

Para iniciar nosso estudo, precissamos introduzir algumas notações. Sejam $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $U$ e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $V$. No que segue, supomos que $T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} v_i$ onde $a_i$ são números reais.

**Definição 3.39.** *A matriz de representação da transformação $T$ em relação às bases $B$ e $C$ é a matriz $[T]_C^B \in M(m,n)$ dada por*

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.40.** Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x+y, x-z)$, $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $C = \{(1,1),(0,1)\}$.

Para achar $[T]_C^B$, temos que representar os vetores $T(e_i)$ como combinação linear dos vetores $C = \{(1,1),(0,1)\}$. Note que

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1) = 1(1,1) + 0(0,1), \\ T(0,1,0) &= (1,0) = 1(1,1) - 1(0,1), \\ T(0,0,1) &= (0,-1) = 0(1,1) - 1(0,1), \end{aligned}$$

de onde obtemos que $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exemplo 3.41.** Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x+y, x-z)$, $B$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $C$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Como antes, para achar $[T]_C^B$ temos que achar as coordenada de cada vetor $T(e_i)$ em relação a base $C$. Como

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1), \\ T(0,1,0) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1), \\ T(0,0,1) &= (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1), \end{aligned} \tag{3.42}$$

obtemos que $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Note que neste caso (o caso onde usamos as bases canonicas) temos que

$$T(x,y,z) = (x+y, x-z) = [T]_C^B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como veremos a seguir, este fato é bem mais geral.

**Proposição 3.43.** *Sejam $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $B$ base de $U$ e $C$ base de $V$. Se $u \in U$ então, $T(u)_C = [T]_C^B u_B$.*

**Prova:** Suponha que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $[T]_C^B = (\alpha_{ij})$. Seja $u \in U$ e suponha que $u_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Com essas notações temos que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) \\ &= a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n) \\ &= a_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{m1}v_m) + \cdots + a_n(\alpha_{1,n}v_1 + \cdots + \alpha_{m,n}v_m) \\ &= (a_1\alpha_{1,1} + \cdots + a_n\alpha_{1,n})v_1 + \cdots + (a_1\alpha_{m,1} + \cdots + a_n\alpha_{m,n})v_m, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$T(u)_C = \begin{pmatrix} a_1\alpha_{1,1} + \cdots + a_n\alpha_{1,n} \\ \vdots \\ a_1\alpha_{m,1} + \cdots + a_n\alpha_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [T]_C^B u_B,$$

o que completa a prova. ■

Estabelecemos agora algumas propriedades relativas a matrizes de representação.

**Proposição 3.44.** *Sejam $B$ e $C$ bases de $U$ e $V$ respectivamente. Se $T, S \in \mathcal{L}(U,V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ então $[\lambda T + \mu S]_C^B = \lambda[T]_C^B + \mu[S]_C^B$.*

**Prova:** Suponha que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $[T]_C^B = (\alpha_{ij})$ e que $[S]_C^B = (\beta_{ij})$. Nessas condições temos que

$$\begin{aligned} (\lambda T + \mu S)(u_j) &= \lambda T(u_j) + \mu S(u_j) \\ &= \lambda(\alpha_{1,j}v_1 + \cdots + \alpha_{m,j}v_m) + \mu(\beta_{1,j}v_1 + \cdots + \beta_{m,j}v_m) \\ &= (\lambda\alpha_{1,j} + \mu\beta_{1,j})v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_{m,j} + \mu\beta_{m,j})v_m, \end{aligned}$$

de onde deduzimos que

$$[\lambda T + \mu S]_C^B = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{1,1} + \mu\beta_{1,1} & \cdots & \lambda\alpha_{1,n} + \mu\beta_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m,1} + \mu\beta_{m,1} & \cdots & \lambda\alpha_{m,n} + \mu\beta_{m,n} \end{pmatrix} = \lambda[T]_C^B + \mu[S]_C^B. \ ■$$

**Proposição 3.45.** *Seja $W$ espaços vetorial, $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $S \in L(V,W)$. Se $B, C$ e $D$ são bases de $U, V$ e $W$ respectivamente, então $[S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B$.*

**Prova:** Suponha que $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $D = \{w_1, \ldots, w_p\}$. Se $[T]_C^B = (\alpha_{i,j})$, $[S]_{C,D} = (\beta_{k,l})$ e $[S \circ T]_D^B = (\gamma_{s,r})$ temos que

$$\begin{aligned}
S \circ T(u_j) &= S\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} S(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} w_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}\right) w_k,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que o coeficiente que aparece na posição $(k,j)$ da matriz $[S \circ T]_D^B$ é dado por $\sum_{i=1}^{m} \beta_{k,i} \alpha_{i,j}$.

Por outro lado, o coeficiente $\gamma_{k,j}$ de $[S]_D^C [T]_C^B$ é obtido a partir da fila $k$ de $[S]_D^C$ e da coluna $j$ de $[T]_C^B$ via a regra $\gamma_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{k,i} \alpha_{i,j}$. Assim temos que o coeficiente que aparece na posição $(k,j)$ de $[S \circ T]_D^B$ é igual ao coeficiente que aparece na posição $(k,j)$ de $[S]_D^C [T]_C^B$, o que prova que $[S \circ T]_D^B == [S]_D^C [T]_C^B$. ∎

**Corolário 3.46.** *Sejam $B$ e $C$ bases de $U$ e $V$ respectivamente.*

1. *Se $T \in \mathcal{L}(U,V)$ é inversivel, então $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.*

2. *Se $U = V$, $B = C$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ então $[T]_C^C = [I]_C^B [T]_{B,B} [I]_B^C$.*

**Prova:** Note que

$$\begin{aligned}
[T]_C^B [T^{-1}]_B^C &= [T \circ T^{-1}]_C = [I]_C = I, \\
[T^{-1}]_B^C [T]_C^B &= [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B} = I,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde $I$ é a matriz identidade de ordem $n$. Isto implica que $[T]_C^B$ é uma matriz inversivel e que $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.

A propriedade em (2) segue diretamente de (1), e é deixada como exercicio. ∎

**Exemplo 3.48.** Seja $B = \{(1,1), (1,-1)\}$ e suponha que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $[T]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Achar $[T]_{C,C}$ onde $C$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e uma formula explícita para $T(x,y)$.

Para achar $[T]_{C,C}$, usamos a formula $[T]_{C,C} = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C =$. Para calcular $[I]_C^B$ note que

$$\begin{aligned}
(1,0) &= \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1), \\
(0,1) &= \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1),
\end{aligned}$$

de onde segue que $[I]_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Similermente, obtemos que $[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Assim,

$$[T]_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, da Proposição 3.43 segue que

$$T(x,y) = [T]_{C,C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3x - 2y, 3y - 2x). \quad \blacksquare$$

**Exemplo 3.49.** Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação dada por $T(p) = \int_0^1 p(s)ds$. Achar a matriz de $T$ em relação às bases canônicas de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$.

Sejam $C = \{1\}$ e $B = \{1, x, x^2\}$. Da definição de $T$ temos que $T(1) = 1, T(x) = \frac{1}{2}$ e $T(x^2) = \frac{1}{3}$, de onde segue que $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

**Exemplo 3.50.** Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p'$. Achar a matriz de $T$ em relação às bases canônicas de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$.

Primeiro que nada, lembre que a base canonica de $P_n(\mathbb{R})$ é $C_n = \{1, x, \dots, x^n\}$. Note agora que

$$T(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \quad T(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$T(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \quad T(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2,$$

de onde segue que

$$[T]_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.51.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x+z, y+z, x+y+2z)$. Achar $[T]_B^B$ sendo $B = \{(1,1,2), (-1,1,0), (-1,-1,1)\}$.

Note que

$$\begin{aligned} T(1,1,2) &= (3,3,6) = 3(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(-1,-1,1), \\ T(-1,1,0) &= (-1,1,0) = 0(1,1,2) + (-1,1,0) + 0(-1,-1,1), \\ T(-1,-1,1) &= (0,0,0) = 0(1,1,2) + 0(-1,1,0) + 0(-1,-1,1), \end{aligned}$$

de modo que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como veremos no seguinte resultado, é possivel deduzir propriedades de uma transformação $T$ a partir da propriedades de $[T]_C^B$.

**Proposição 3.52.** *Sejam $T \in \mathcal{L}(U,V)$, $B$ uma base de $U$ e $C$ uma base $V$. A transformação $T$ é um isomorfismo $\Leftrightarrow$ $[T]_C^B$ é inversivel.*

**Prova:** Se $T$ é um isomorfismo, pelo Corolario 3.46 temos que $[T]_C^B$ é inversivel e que $([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_{C,B}$.

Suponha agora que $[T]_C^B$ é inversivel. Da Proposição 3.43 sabemos que $T(u)_C = [T]_C^B u_B$ para todo $u \in U$, de onde vemos que $T(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Assim, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ o que implica que $T$ é um isomorfismo pois $\dim(U) = \dim(V)$. $\blacksquare$

**Exemplo 3.53.** Vejamos se a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a,b) = a + (a+b)x$ é um isomorfismo.

Se $B$ é a base canonica de $\mathbb{R}^2$ e $C = \{1, x, x^2\}$, então $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como esta matriz é inversivel, seque da Proposição 3.52 que $T$ é um isomorfismo.

## 3.2 Exercícios

**Ex. 3.54.** Seja $T \in \mathcal{L}(U)$. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(U) \subset \mathcal{N}(T)$.

**Ex. 3.55.** Verifique se as funções abaixo são transformações lineares.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = x + 5y - z$,
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = x + 5y - z + 1$,
3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = x^2 + 5y - z$,
4. $T : M(n,1) \to M(n,1)$ dada por $T(X) = AX + X$, sendo $A \in M(n,n)$ uma matriz fixa.
5. $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$,
6. $T : M(2,2) \to M(2,2)$ dada por $T(X) = AX$ onde $A \in M(2,2)$ é uma matriz fixa.
7. $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p + q$ onde $q(t) = t^2 + 1$ é um polinômio dado.

**Ex. 3.56.** Achar o núcleo, uma base do núcleo, a imagen e uma base da imagem para as seguintes transformações.

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y) = y + 2x$,
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = z - 2x$,
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (2x + 2y, x + y)$,
4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x + y, x - y)$,
5. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z - x, z - 2x, z - 3x)$,
6. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$,
7. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y) = y + 2x$,
8. $T : M(2,2) \to M(2,2)$ dada por $T(X) = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,
9. $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p'$, $p \in P_2(\mathbb{R})$,
10. $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$, $p \in P_2(\mathbb{R})$,
11. $T : M(2,2) \to M(2,2)$ dada por $T(X) = AX + X$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Ex. 3.57.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T((1,0,0)) = (2,3,1)$, $T((1,1,0)) = (5,2,7)$ e $T((1,1,1)) = (-2,0,7)$. $T$ é sobrejetora?, injetora? bijetora? justifique sua resposta.

**Ex. 3.58.** Achar uma transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = 1+t$, $T(t) = t + t^2$ e $T(t^2) = 1 + t - 2t^2$. $T$ é sobrejetora?, injetora? bijetora? justifique sua resposta.

**Ex. 3.59.** Achar uma transformação linear $T : M(2,2) \to M(2,2)$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$T$ é sobrejetora?, injetora? bijetora? justifique sua resposta.

**Ex. 3.60.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que o conjunto $\{(1,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ seja base do núcleo de $T$.

**Ex. 3.61.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que o conjunto $\{(1,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ seja base do núcleo e da imagem de $T$.

**Ex. 3.62.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

**Ex. 3.63.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ seja base do nucleo e $\{(1,-1,1)\}$ seja base da imagem.

**Ex. 3.64.** Achar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tal que $T(\mathbb{R}^3) = [(2,2,3,2), (3,2,0,2)]$.

**Ex. 3.65.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbb{R}^5) = [(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)] \text{ e } \mathcal{N}(T) = [(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,0)].$$

**Ex. 3.66.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (3,4)$ e $T(0,0,1) = (0,0)$.

**Ex. 3.67.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim \mathcal{N}(T) = 2$ e $\dim T(\mathbb{R}^5) = 3$.

**Ex. 3.68.** Achar $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tal que $\mathcal{N}(T) = [(1,0,1)]$.

**Ex. 3.69.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{N}(T) = T(\mathbb{R}^4) = [(1,0,1,0), (0,1,0,1)]$.

**Ex. 3.70.** Achar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $T(\mathbb{R}^2) = [(1,1,1), (1,2,0)]$.

**Ex. 3.71.** Achar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbb{R}^2) = [(1,1,1)]$ e $\mathcal{N}(T) = [(1,1)]$.

**Ex. 3.72.** Estudar se as transformações lineares abaixo são isomorfismos. Em caso afirmativo, achar a inversa de $T$.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$,

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z)$,

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ e $T(0, 1, 2) = (0, 0, 4)$.

**Ex. 3.73.** Estudar se os espaços $U$ e $V$ são isomorfos.

1. $U = \mathbb{R}^2$ e $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$.

2. $U = M(2, 3)$ e $V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) : p' = 0\}$.

3. $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \left\{A \in M(2, 2) : A^t = A\right\}$.

4. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ e $V = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p' = 0\}$.

**Ex. 3.74.** Mostre que as funções $T, R, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dadas por $T(x, y) = (x, 2y)$, $R(x, y) = (x, x + y)$ e $S(x, y) = (0, x)$ formam um subconjunto linearmente independente de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

**Ex. 3.75.** Suponha que $U, V, W$ são espaços vetoriais. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$ são tais que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\mathcal{N}(S) = \{0\}$, mostre que $\mathcal{N}(S \circ T) = \{0\}$.

**Ex. 3.76.** Achar matrizes de representação nas bases canónicas de

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, z)$,

2. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$,

3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

**Ex. 3.77.** Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ dado por $T(X) = MX - XM$. Achar a representação de $T$ em relação a base canónica de $M(2, 2)$

**Ex. 3.78.** Suponha que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é tal que $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ sendo $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$. Achar $[T]_C^C$ sendo $C$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Achar uma formula explicita para $T(x, y)$.

**Ex. 3.79.** Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $T(p) = \int_{-1}^{1} p(s)ds$. Achar $[T]_C^B$ nos casos

$$B = \left\{1, t, t^2\right\}, \ C = \{1\} \ \text{ e } \ B = \left\{1, 1 + t, 1 + t + t^2\right\}, \ C = \{-2\}.$$

**Ex. 3.80.** Seja $C$ a base canonica de $\mathbb{R}^3$ e suponha $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ é tal que

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S = I + T + 2T^2$. Achar uma formula explicita para $S(x, y, z)$ e $[S]_C^C$.

**Ex. 3.81.** Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $T(p(t)) = p(t) - p(1)$. Achar $[T]_C^B$, $[T]_B^B$ e $[T]_C^C$ sendo $B = \{1, t-1, (t-1)^2\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$.

**Ex. 3.82.** Suponha que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de um espaço vetorial $V$ e que $T, S : V \to V$ são transformações lineares em $V$ tais que

$$\begin{aligned} T(u_1) &= 2u_1 - 3u_2 + u_3, & S(u_1) &= 3u_1 + 2u_2, \\ T(u_2) &= u_1 + u_2, & S(u_2) &= u_1 - u_2 - u_3, \\ T(u_3) &= u_2 + u_3, & S(u_3) &= u_1 + u_2 - 2u_3. \end{aligned}$$

Achar $[T]_B^B$, $[S]_B^B$, $[S \circ T]_B^B$, $[S^2 + I]_B^B$ e $[T^3 - S^2]_B^B$.

**Ex. 3.83.** Sejam $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $C = \{(1,0), (0,1)\}$. Achar $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $[T]_C^B$ é dada por

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad c)$ $\begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$