UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

Análise de complexidade

Estruturas de Dados

Bruno Prado

Departamento de Computação / UFS

Introdução

- O que é eficiência?
  - Tempo ou esforço empregado para realizar algo
  - Otimização do uso dos recursos

$$\uparrow \textit{Eficiência} \longleftrightarrow \textit{Tempo} \downarrow$$

$$\uparrow \textit{Eficiência} \longleftrightarrow \textit{Recursos} \downarrow$$

Introdução

- Qual a história e por que era importante?
  - Os recursos computacionais eram muito limitados
  - Grande consumo de potência e uso compartilhado

Introdução

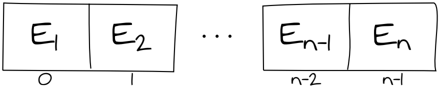
- Por que hoje é importante?
  - Restrições de custo
  - Baixo consumo de potência

Introdução

- Quais os tipos de eficiência ou de complexidade computacional?
  - Tempo
    - Número de passos executados
  - Espaço
    - Tamanho da alocação em memória

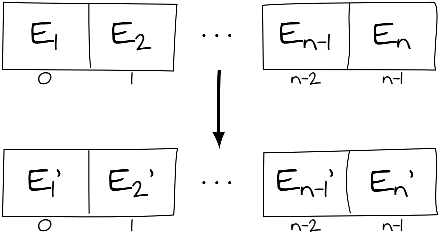
Complexidade de tempo

- Indicador de eficiência de execução do algoritmo
  - Métrica: número de passos executados
  - Problema: ordenação de sequência com n números $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para gerar uma sequência ordenada $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n-1}, E'_n$



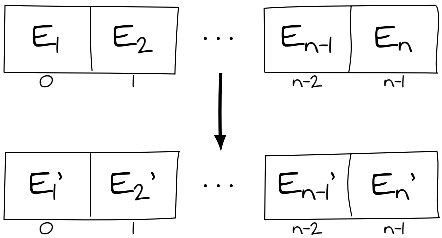
Complexidade de tempo

- Indicador de eficiência de execução do algoritmo
  - Métrica: número de passos executados
  - Problema: ordenação de sequência com n números $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para gerar uma sequência ordenada $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n-1}, E'_n$



Complexidade de tempo

- Indicador de eficiência de execução do algoritmo
  - Métrica: número de passos executados
  - Problema: ordenação de sequência com n números $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para gerar uma sequência ordenada $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n-1}, E'_n$



Quantos passos são realizados?

Complexidade de tempo

- Ordenação por seleção

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de ordenação por seleção
void selection_sort(uint32_t* V, uint32_t n) {
    for(uint32_t i = 0; i < n - 1; i++) {
        uint32_t min = i;
        for(uint32_t j = i + 1; j < n; j++)
            if(V[j] < V[min]) min = j;
        if(i != min) trocar(&V[i], &V[min]);
    }
}
```

Complexidade de tempo

- Ordenação por seleção

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de ordenação por seleção
void selection_sort(uint32_t* V, uint32_t n) {
    for(uint32_t i = 0; i < n - 1; i++) {
        uint32_t min = i;
        for(uint32_t j = i + 1; j < n; j++)
            if(V[j] < V[min]) min = j;
        if(i != min) trocar(&V[i], &V[min]);
    }
}
```

$$\begin{aligned} \textit{Número de passos} &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ &= \frac{(n-1)\left[1+(n-1)\right]}{2} \approx n^2 \end{aligned}$$

Complexidade de tempo

- Ordenação por inserção

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de ordenação por inserção
void insertion_sort(uint32_t* V, uint32_t n) {
    for(uint32_t i = 1; i < n; i++)
        for(uint32_t j = i; j > 0 && V[j - 1] > V[j];
            j--)
            trocar(&V[j], &V[j - 1]);
}
```

Complexidade de tempo

- Ordenação por inserção

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de ordenação por inserção
void insertion_sort(uint32_t* V, uint32_t n) {
    for(uint32_t i = 1; i < n; i++)
        for(uint32_t j = i; j > 0 && V[j - 1] > V[j]; j--)
            trocar(&V[j], &V[j - 1]);
}
```

$$n < \textit{Número de passos} < n^2$$

Complexidade de tempo

- Como calcular a quantidade de passos?
  - Análise depende somente do tamanho da entrada n
  - Demais trechos do código são constantes

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de exemplo
void exemplo(uint32_t n) {
    c1();
    for(uint32_t i = 0; i < n; i++)
        c2();
        for(uint32_t j = 0; j < n; j++)
            c3();
            for(uint32_t k = 0; k < n; k++)
                c4();
}
```

Complexidade de tempo

- Como calcular a quantidade de passos?
  - Expressão em função do valor de n
  - Sub-rotinas $c1$, $c2$, $c3$ e $c4$ não dependem de n

$$
\begin{aligned}
exemplo(n) &= c1 + n \times \{c2 + n \times [c3 + (c4 \times n)]\} \\
&= c1 + c2 \times n + c3 \times n^2 + c4 \times n^3 \\
&\approx c \times n^3
\end{aligned}
$$

Complexidade de tempo

- Como obter o tempo consumido?
  - Entrada de tamanho 1.000
  - Valores de $c1 = 200\ ns,\ c2 = 150\ ns,\ c3 = 250\ ns$ e $c4 = 100\ ns$

$$\begin{aligned}
exemplo(1000) &= 200\ ns + 150\ ns \times 10^3 + 250\ ns \times 10^6 + 100\ ns \times 10^9 \\
&= (0,0000002 + 0,00015 + 0,25 + 100) \times 10^9\ ns \\
&= 100,2501502 \times 10^9\ ns \\
&\approx 100\ s
\end{aligned}$$

Complexidade de tempo

- Como obter o tempo consumido?
  - Quanto maior o valor do tamanho da entrada n, maior é o domínio do fator de maior grau da função
  - Para um valor de n suficientemente grande $n > n_0$

$$exemplo(n) \leq g(n)$$

$$g(n) = c \times n^3$$

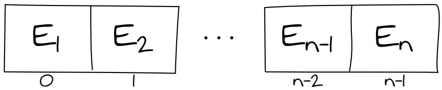
Complexidade de tempo

- Análise assintótica
  - Valores das constantes dependem da máquina
  - Com $n \to \infty$ se analisa a ordem das funções

$$\lim_{n \to \infty} \frac{exemplo(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & exemplo(n) < g(n) \\ k & exemplo(n) = g(n) \\ \infty & exemplo(n) > g(n) \end{cases}$$

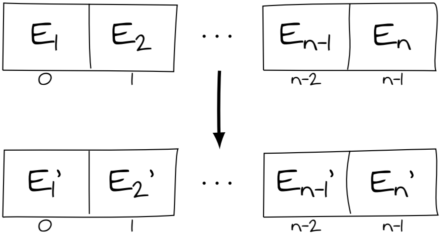
Complexidade de espaço

- Indicador de eficiência de memória do algoritmo
  - Métrica: tamanho da alocação em memória
  - Problema: ordenação de sequência com n números $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para gerar uma sequência ordenada $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n-1}, E'_n$



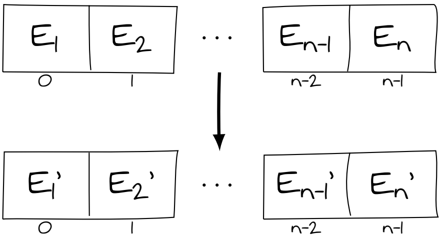
Complexidade de espaço

- Indicador de eficiência de memória do algoritmo
  - Métrica: tamanho da alocação em memória
  - Problema: ordenação de sequência com n números $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para gerar uma sequência ordenada $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n-1}, E'_n$



Complexidade de espaço

- Indicador de eficiência de memória do algoritmo
  - Métrica: tamanho da alocação em memória
  - Problema: ordenação de sequência com n números $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para gerar uma sequência ordenada $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n-1}, E'_n$



Quantas posições de memória são utilizadas?

Complexidade de espaço

- Como calcular a memória alocada?
  - Expressão em função do valor de entrada *n*
  - Constantes dependem do tamanho do dado

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de ordenação por inserção
void insertion_sort(uint32_t* V, uint32_t n) {
    for(uint32_t i = 1; i < n; i++)
        for(uint32_t j = i; j > 0 && V[j - 1] > V[j];
            j--)
            trocar(&V[j], &V[j - 1]);
}
```

Complexidade de espaço

- Como calcular a memória alocada?
  - Expressão em função do valor de entrada n
  - Constantes dependem do tamanho do dado

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de ordenação por inserção
void insertion_sort(uint32_t* V, uint32_t n) {
    for(uint32_t i = 1; i < n; i++)
        for(uint32_t j = i; j > 0 && V[j - 1] > V[j];
             j--)
            trocar(&V[j], &V[j - 1]);
}
```

$$insertion\_sort(n) = c_{uint32\_t} \times n + 4c_{uint32\_t} \approx c \times n$$

Complexidade de espaço

- Como calcular a memória alocada?
  - Expressão em função do valor de entrada *n*
  - Constantes dependem do tamanho do dado

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de exemplo
void exemplo(uint32_t* V, uint32_t n) {
    uint32_t* U = (uint32_t*)(malloc(n *
        sizeof(uint32_t)));
    for(uint32_t i = 0, j = 0; i < n; i++, j++)
        U[j] = V[i] * rand();
}
```

Complexidade de espaço

- Como calcular a memória alocada?
  - Expressão em função do valor de entrada n
  - Constantes dependem do tamanho do dado

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de exemplo
void exemplo(uint32_t* V, uint32_t n) {
    uint32_t* U = (uint32_t*)(malloc(n *
        sizeof(uint32_t)));
    for(uint32_t i = 0, j = 0; i < n; i++, j++)
        U[j] = V[i] * rand();
}
```

$$exemplo(n) = c_{uint32\_t} \times 2n + 5c_{uint32\_t} \approx c \times n$$

Complexidade de espaço

- Como calcular a memória alocada?
  - Quanto maior o valor do tamanho da entrada n, maior é o domínio do fator de maior grau da função
  - Para um valor de n suficientemente grande $n > n_0$

$$exemplo(n) \leq g(n)$$

$$g(n) = c \times n$$

Complexidade de espaço

- Análise assintótica
  - Valores das constantes dependem da máquina
  - Com $n \to \infty$ se analisa a ordem das funções

$$\lim_{n \to \infty} \frac{exemplo(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & exemplo(n) < g(n) \\ k & exemplo(n) = g(n) \\ \infty & exemplo(n) > g(n) \end{cases}$$

Ordem de crescimento

- Classes de complexidade para entrada n

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10^1	$3,3$	10^1	$3,3 \times 10^1$	10^2	10^3	10^3	$3,6 \times 10^6$
10^2	$6,6$	10^2	$6,6 \times 10^2$	10^4	10^6	$1,3 \times 10^{30}$	$9,3 \times 10^{157}$
10^3	10	10^3	$1,0 \times 10^4$	10^6	10^9	-	-
10^4	13	10^4	$1,3 \times 10^5$	10^8	10^{12}	-	-
10^5	17	10^5	$1,7 \times 10^6$	10^{10}	10^{15}	-	-
10^6	20	10^6	$2,0 \times 10^7$	10^{12}	10^{18}	-	-

Exemplo

- Calcular a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo fatorial
  - Descrever sua implementação iterativa
  - Tudo deve ser claramente justificado

$$Fatorial(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \times Fatorial(n-1) & n > 0 \end{cases}$$

Notação O

- Necessidade de formalização da complexidade dos algoritmos
  - Notação matemática
  - Análise assintótica
- Notações para melhor caso (Ω), pior caso (O) e caso médio (Θ)
  - Definições e aplicações

Notação O

- Função de busca sequencial
  - Descrita pela equação $busca(n) = c_A + c_B \times n$

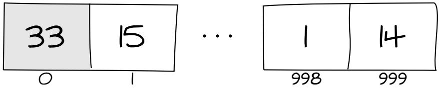
```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de busca
int32_t busca(int32_t elem, int32_t V[], uint32_t n) {
    int32_t r = -1;
    for(uint32_t i = 0; r == -1 && i < n; i++)
        if(V[i] == elem)
            r = i;
    return r;
}
```

Melhor caso

- O que é a análise de melhor caso de um algoritmo?
  - Situação com menor número de passos realizados
  - Estabelece um limitante inferior ou melhor caso

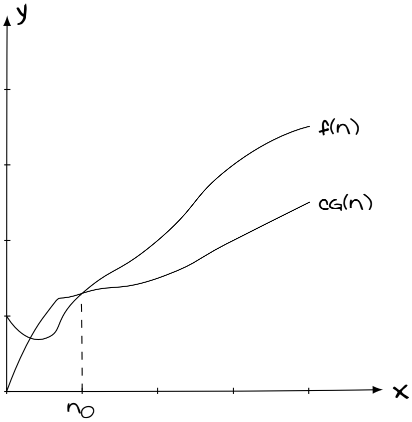
Melhor caso

- O que é a análise de melhor caso de um algoritmo?
  - Situação com menor número de passos realizados
  - Estabelece um limitante inferior ou melhor caso
- Busca sequencial pelo elemento 33
  - Primeira ocorrência
  - Vetor possui 1.000 elementos sem repetições



Melhor caso

- Análise de melhor caso da busca sequencial
  - Existem constantes positivas c e n_0 tal que $0 \leq cg(n) \leq busca(n)$, para todo $n \geq n_0$, logo $\Omega(busca(n)) = \Omega(g(n)) = \Omega(c_A + c_B) = c_{MC}$



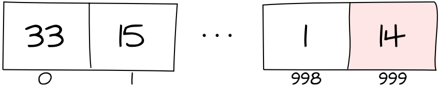
$f(n) = \Omega(G(n))$

Pior caso

- O que é a análise de pior caso de um algoritmo?
  - Descreve a situação com maior número de passos
  - Estabelece um limitante superior

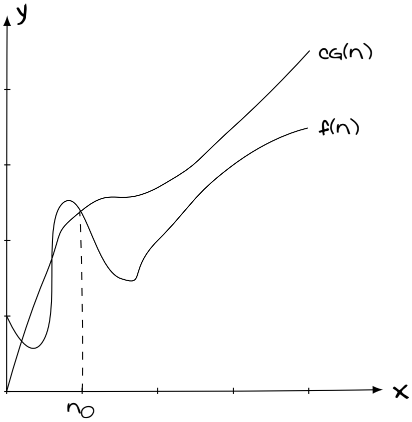
Pior caso

- O que é a análise de pior caso de um algoritmo?
  - Descreve a situação com maior número de passos
  - Estabelece um limitante superior
- Busca sequencial pelo elemento 14
  - Última ocorrência
  - Vetor possui 1.000 elementos sem repetições



Pior caso

- Análise de pior caso da busca sequencial
  - Existem constantes positivas c e n_0 tal que $0 \leq busca(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$, logo $O(busca(n)) = O(cg(n)) = O(c_A + c_B \times n) = c_{PC} \times n$



$f(n) = O(G(n))$

Notação O

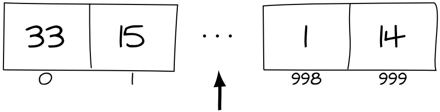
- Propriedades da notação O
  - Termos constantes: $O(c) = O(1)$
  - Multiplicação por constantes: $O(c \times f(n)) = O(f(n))$
  - Adição: $O(f_1(n)) + O(f_2(n)) = O(|f_1(n)| + |f_2(n)|)$
  - Produto: $O(f_1(n)) \times O(f_2(n)) = O(f_1(n) \times f_2(n))$

Caso médio

- Não confundir com caso prático ou real
  - Observa o comportamento real do algoritmo
  - Utiliza dados estatísticos

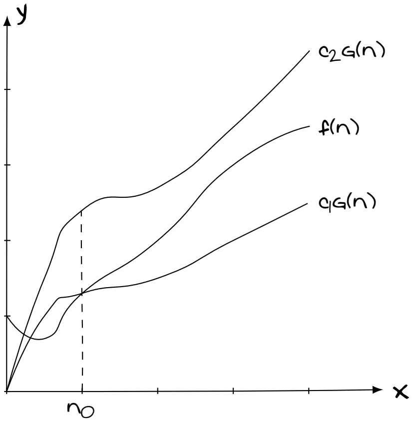
Caso médio

- Não confundir com caso prático ou real
  - Observa o comportamento real do algoritmo
  - Utiliza dados estatísticos
- Busca sequencial por um elemento qualquer
  - São executadas na busca entre 1 e n iterações
  - Vetor possui 1.000 elementos sem repetições



Caso médio

- Análise de caso médio da busca sequencial
  - Existem constantes positivas c e n_0 tal que $0 \leq c_1 g(n) \leq busca(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0$, logo $\Omega(c_{MC}) \leq busca(n) \leq O(n)$



$$c_1 G(n) \leq f(n) \leq c_2 G(n)$$

Caso médio

- Ordem exata de execução de um algoritmo $f(n)$

$$f(n) = \Omega(c_1 g(n)) \text{ e } f(n) = O(c_2 g(n))$$
$$\downarrow$$
$$f(n) = \Theta(g(n))$$

Exemplo

- Calcule a complexidade de tempo e espaço do código abaixo, utilizando as 3 notações vistas

```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Procedimento de exemplo
void exemplo(uint32_t n) {
    int a[] = (int*)(malloc((n*n+10) * sizeof(int)));
    for(int i = 0; i <10; i++)
        a[i] = 1;
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        int b = 3;
        for(int j = 0; j < n; j++) {
            a[i][j] = b * a[i][j];
            for(int k = 0; k <10; k++)
                a[i][j]=a[i][j] * a[k];
        }
    }
    for(int i = n; i < n * n; i++)
        a[i] = a[i] + 2;
}
```

Exercícios

- Explique porque é utilizada a análise assintótica e qual a importância de utilização da notação O
- Descreva com suas palavras o que você entende por pior caso, melhor caso e caso médio
- Verifique como calcular a complexidade de algoritmos recursivos