Planos: Atividade Vetores 2 - Unidade 2

quinta-feira, 6 de outubro de 2022 21:52

43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57

Nos problemas 43 e 44, encontrar equações paramétricas da reta interseção dos planos:

43) $\pi_1: 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2: x - y - z - 3 = 0$

1) Encontrar um Ponto:

→ Para $x = 0$

$\pi_1: y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2: -y - z - 3 = 0$

$$\begin{cases} \cancel{y} - 3z = 5 \\ \cancel{-y} - z = 3 \end{cases} \Rightarrow -4z = 8 \qquad \boxed{z = -2} \qquad \rightarrow \boxed{y = -1}$$

$P(0, -1, -2)$

2) Encontrar os Vetores Diretores dos Planos:

$\vec{n_1}$ de π_1: $\vec{n_1}(3, 1, -3)$

$\vec{n_2}$ de π_2: $\vec{n_2}(1, -1, -1)$

3) Com os Vetores dos planos e o Ponto P, buscamos o vetor diretor da reta que passa pelo dois pontos;

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-3).\vec{i} - (-3+3).\vec{j} + (-3-1).\vec{k}$$

$$\vec{n} = -4\vec{i} - 0\vec{j} - 4\vec{k} \rightarrow \boxed{\vec{n} = -4\vec{i} - 4\vec{k}}$$

$P(0, -1, -2)$

$\vec{n}(-4, 0, -4)$

$$r: \begin{cases} x = 0 - 4t \\ y = -1 + 0t \\ z = -2 - 4t \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4t \\ y = -1 \\ z = -2 - 4t \end{cases}$$

Nos problemas de 45 a 47, determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π:

45) $r: x = 3t,\ y = 1 - 2t,\ z = -t$ e $\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

$$r: \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 - t \end{cases}$$

→ $P(0, 1, 0)$

→ $\vec{n}(3, -2, -1)$

$$r: \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 - t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \to P(0,1,0) \\ \to \vec{n}(3,-2,-1) \end{array}$$

$$\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$$

$$2.(3t) + 3.(1-2t) - 2.(-t) - 7 = 0$$

$$\cancel{6t} + 3 - \cancel{6t} + 2t - 7 = 0$$

$$2t = 4$$

$$\boxed{t = 2}$$

$$r: \begin{cases} x = 3.2 \Rightarrow 6 \\ y = 1 - 2.2 \Rightarrow -3 \\ z = -2 \Rightarrow -2 \end{cases}$$

$P(6,-3,-2)$

↳ Ponto de Intersecção

---

47) $r: \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ e $\pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$

$$4 + k = 2 + h + 2t$$

$$\boxed{h + 2t - k = 2}$$

$$3 + 2k = -3 - h - t$$

$$-h - t - 2k = 6 \quad \times(-1)$$

$$\boxed{h + t + 2k = -6}$$

$$-2 - 3k = 1 + 3h - 3t$$

$$3h - 3t + 3k = -3 \quad (\div 3)$$

$$\boxed{h - t + k = -1}$$

(2) RESOLVER O SIST. DE EQ.

$$\begin{cases} h + 2t - k = 2 \to h = 2 + k - 2t \\ h + t + 2k = -6 \to t = -6 - 2k + h \to t = -6 - 2k + 2 + k - 2t \\ h - t + k = -1 \end{cases}$$

$$3t = -4 - k$$

$$\boxed{t = \frac{-4-k}{3}}$$

$$h = 2 + k - 2.\left(\frac{-4-k}{3}\right)$$

$$h = 2 + k + \frac{8 + 2k}{3}$$

$$\boxed{h = \frac{5k + 14}{3}}$$

$$\frac{5k + 14}{3} + \frac{4 + k}{3} + k = -1$$

$$\frac{6k + 18}{3} + k = -1$$

$$\frac{9k + 18}{2} = -1$$

$$9k + 18 = -3$$

$$9k = -21$$

$$\boxed{k = -3}$$

■ Substituir k_1 na Eq. Paramétrica da RETA!

$$r:\begin{cases} x = 4+k \longrightarrow x = 4-3 \longrightarrow x = 1 \\ y = 3+2k \longrightarrow y = 3+2\cdot(-3) \longrightarrow y = -3 \\ z = -2-3k \longrightarrow z = -2-3\cdot(-3) \longrightarrow z = 7 \end{cases}$$

$\boxed{P(1,-3,7)}$ Ponto da Intersecção!

---

c) equações da reta interseção de π com o plano xOy.

49) Dado o ponto P(5, 2, 3) e o plano π: 2x + y + z - 3 = 0, determinar

a) equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a π;

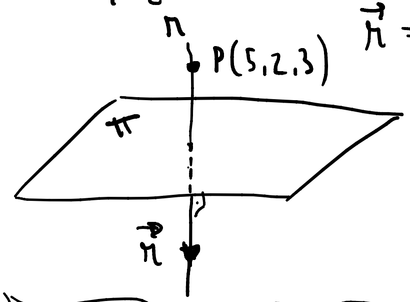
b) a projeção ortogonal de P sobre o plano π;

c) o ponto P' simétrico de P em relação a π;

d) a distância de P ao plano π.

$P(5,2,3)$; $\pi: 2x+y+z-3=0$

(A) $r\begin{cases} x = x_0 + a\cdot t \\ y = y_0 + b\cdot t \\ z = z_0 + c\cdot t \end{cases}$ e PASSA POR P e $r \perp \pi$



$\vec{r} = (a,b,c)$

$\pi: 2x+y+z-3=0$

$\vec{s} = (2,1,1) \rightarrow$ Vetor Diretor do PLANO π perpendicular!

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{s} \\ (a,b,c) &= (2,1,1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{r = \begin{cases} x = 5+2t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}}$$

(B) (1) Encontrar 3 Pontos $\in \pi$

$\pi: 2x+y+z-3=0$ $\quad B(0,1,2)$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad y+z=3$

$1+z=3$

$\boxed{z=2}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad y+z=3$

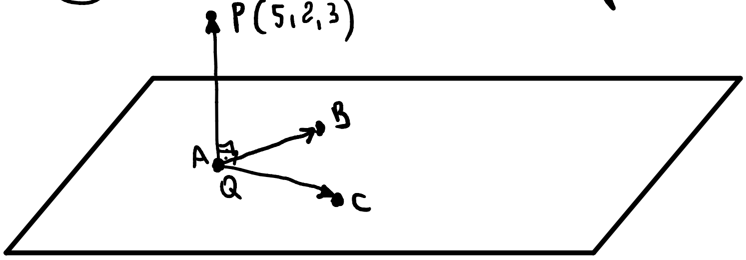
$2+z=3$

$\boxed{z=1}$

$A(0,2,1)$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right\} \quad 2\cdot 2 -1 + z - 3 = 0 \quad \boxed{z=0} \qquad c(2,-1,0)$$

② Ponto $Q(a,b,c)$ proj. ortogonal de P;



$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,-1,1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,-3,-1)$

$\overrightarrow{QP} = P - Q = (5,2,3) - (a,b,c) = (5-a, 2-b, 3-c)$

$\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$(5-a, 2-b, 3-c) \cdot (0,-1,1) = 0$

$0 - 2 + b + 3 - c = 0$

$\boxed{b - c = -1}$

$\boxed{b = c - 1}$

$\boxed{Q(2c-1, c-1, c)}$

$\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{AC}$

$(5-a, 2-b, 3-c) \cdot (2,-3,-1) = 0$

$10 - 2a - 6 + 3b - 3 + c = 0$

$-2a + 3b + c + 1 = 0$

$-2a + 3b + c = -1$

$-2a + 3\cdot(c-1) + c = -1$

$-2a + 3c - 3 + c = -1$

$-2a + 4c = 2$

$-2a = 2 - 4c$

$-a = 1 - 2c$

$\boxed{a = 2c - 1}$

③ O Ponto Q pertence ao plano π. Logo:

$\pi: 2x + y + z - 3 = 0 \quad ; \quad Q(2c-1, c-1, c)$

$2\cdot(2c-1) + (c-1) + c - 3 = 0$

$4c - 2 + c - 1 + c - 3 = 0$

$6c - 6 = 0$

$6c = 6$

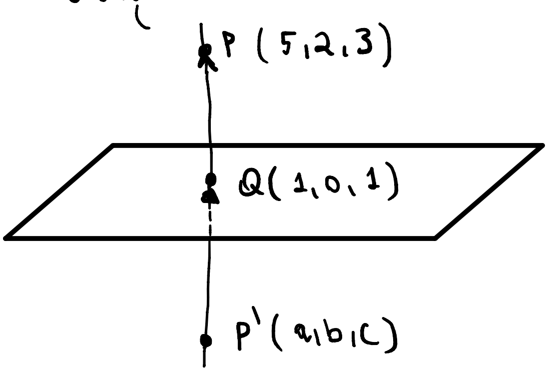
$\boxed{c = 1}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Q(1,0,1)}$$

ⓒ O Ponto P' simétrico de P em

Ⓒ O Ponto P' simétrico de P em relação a π:



$\overrightarrow{QP} = (4,2,2)$

$\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{QP}$

$(1,0,1)-(a,b,c) = (5,2,3)-(1,0,1)$

$(1-a,-b,1-c) = (4,2,2)$

↳ $1-a=4 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

↳ $\underline{b=-2}$

↳ $1-c=2 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

$\boxed{P'(-3,-2,-1)}$

Ⓓ A Dist. de P ao PLANO π:

$d = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{4^2+2^2+2^2} = \sqrt{16+4+4}$

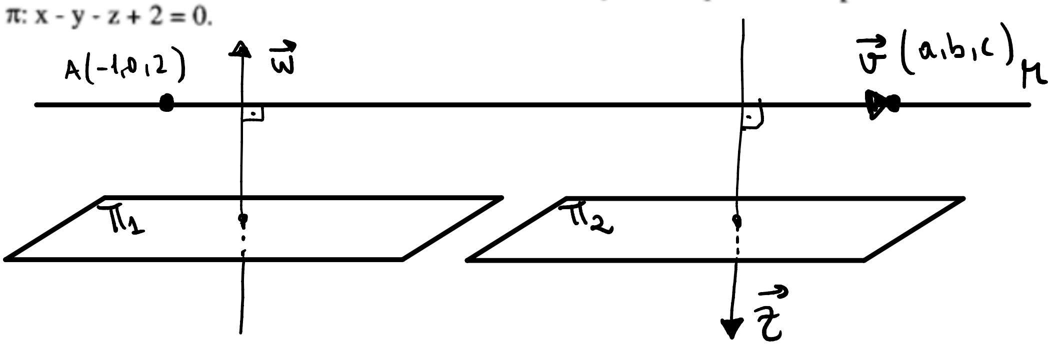
$= \sqrt{24} \Rightarrow \underline{2\sqrt{6}\ u.c}$

---

51) Obter equações paramétricas das retas nos casos:

a) A reta passa por A(-1, 0, 2) e é paralela a cada um dos planos
π_1: $2x + y + z + 1 = 0$ e π_2: $x - 3y - z - 5 = 0$.

b) A reta passa pela origem, é ortogonal à reta r: $2x = y = 3z$ e paralela ao plano
π: $x - y - z + 2 = 0$.



$\pi_1: 2x+y+z+1=0$

$\vec{w} = (2,1,1)$

$\pi_2: x-3y-z-5=0$

$\vec{z} = (1,-3,-1)$

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{z} \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

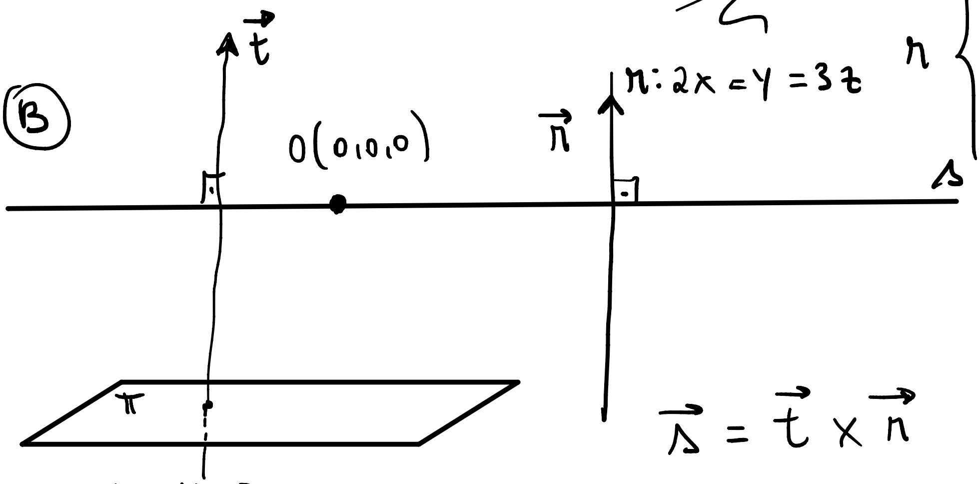
$$= (-1+3)\vec{i} - (-2-1)\vec{j} + (-6-1)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{v} = (2, 3, -7)$$

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2 - 7t \end{cases}$$

(B)



$\pi: x - y - z + 2 = 0$

$\vec{t} = (1, -1, -1)$

$$r \begin{cases} x = t/2 \\ y = t \\ z = \frac{t}{3} \end{cases} \quad \vec{n}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)_{\times 6} \quad \vec{n}(3, 6, 2)$$

$$\vec{s} = (a, b, c)$$

$$\vec{s} = \vec{t} \times \vec{n}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+6)\vec{i} - (2+3)\vec{j} + (6+3)\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} - 5\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{s} = (4, -5, 9)}$$

$$s: \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = 9t \end{cases}$$

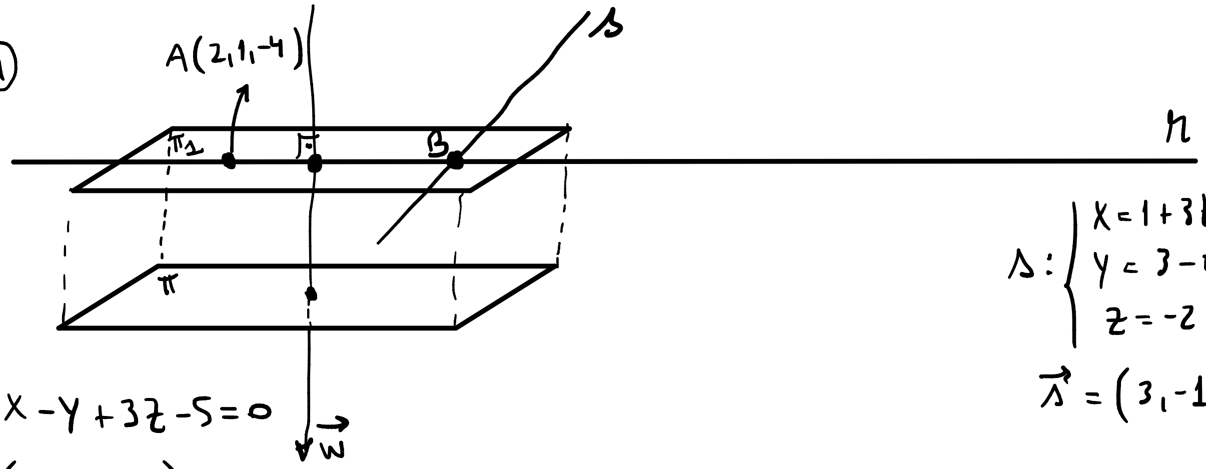
53) Achar equações paramétricas da reta r que passa por A, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s, nos casos:

a) $A(2, 1, -4)$, $\pi: x - y + 3z - 5 = 0$, $s: x = 1 + 3t$, $y = 3 - t$, $z = -2 - 2t$;

b) $A(3, -2, -4)$, $\pi: 3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $s: x = 2 + t$, $y = -4 - 2t$, $z = 1 + 3t$.

Determinar ainda o ponto de interseção entre r e s.

A



$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

$\vec{s} = (3, -1, -2)$

$\pi: x - y + 3z - 5 = 0$

$\vec{w}(1, -1, 3)$

$\pi_1 // \pi$

$\pi_1: x - y + 3z + d = 0 \Rightarrow$ O ponto $A(2,1,-4)$ pertence ao PLANO!

$2 - 1 - 12 + d = 0$

$\boxed{d = 11}$

$\pi_1: x - y + 3z + 11 = 0$

- A reta s $\in$ ao Plano π_1. Logo:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

$(1 + 3t) - (3 - t) + 3.(-2 - 2t) = -11$

$1 + 3t - 3 + t - 6 - 6t = -11$

$-2t - 8 = -11$

$-2t = -3$

$\boxed{t = 3/2}$

- Encontrar o Ponto de Intersecção da reta s com a reta r que $\in$ ao plano π_1:

$x = 1 + 3 . \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{11}{2}}$

$y = 3 - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}}$ $\quad B\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5\right)$

$z = -2 - 2\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{z = -5}$

- Encontrar o Vetor Diretor da Reta r:

$\vec{r} = \vec{AB} = B - A = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5\right) - (2, 1, -4)$

$\vec{r} = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

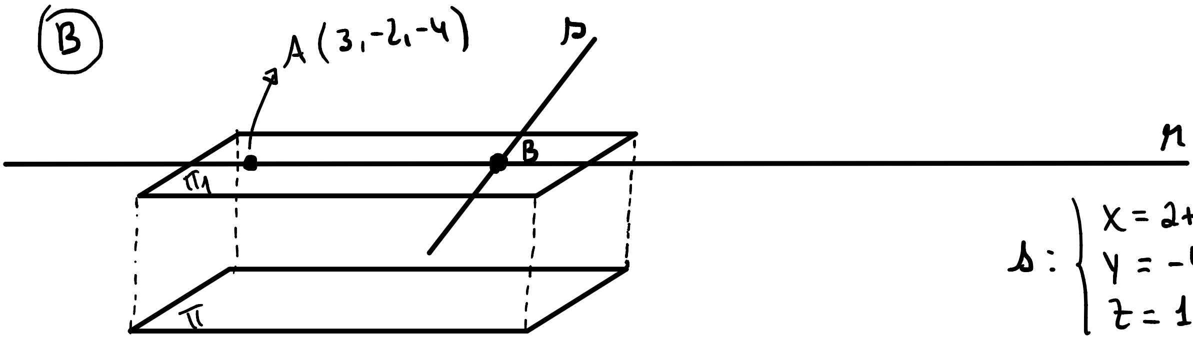
- Encontrar A Eq. Paramétrica da Reta r:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \frac{7t}{2} \\ y = 1 + \frac{t}{2} \\ z = -4 - t \end{cases}$$

- Encontrar o ponto de intersecção da reta r com a reta s:

$B\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5\right)$

(B)



$$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$\pi: 3x - 2y - 3z + 5 = 0$

$\pi // \pi_1$

$\pi_1: 3x - 2y - 3z + d = 0$, o ponto $A(3, -2, -4) \in \pi_1$

$3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) + d = 0$

$$\underbrace{9+4+12}_{25}+d=0 \rightarrow \underline{\underline{d=-25}}$$

$\pi_1: 3x-2y-3z-25=0$

- Substituir os valores de s na Eq. do Plano π_1 para encontrar o valor de t:

$$s: \begin{cases} x = 2+t \\ y=-4-2t \\ z = 1+3t \end{cases} \quad 3.(2+t)-2.(-4-2t)-3.(1+3t)=25$$

$$6+3t+8+4t-3-9t=25$$

$$-2t+11=25$$

$$-2t=14$$

$$\boxed{t=-7}$$

- Substituir o valor de t=-7 na eq. da reta s para acharmos o valor de B, ponto pertencente ao plano e a intersecção com a reta r;

$x = 2+(-7) \rightarrow \boxed{x=-5}$

$y=-4-2.(-7) \rightarrow \boxed{y=10}$

$z = 1+3.(-7) \rightarrow \boxed{z=-20}$

$B(-5,10,-20)$

- Encontrar o vetor diretor da reta r

$\vec{r} = \vec{AB} = B-A = (-5,10,-20)-(3,-2,-4)$

$\vec{r}=(-8,12,-16)$

- Encontrar a Eq. Paramétrica da reta r:

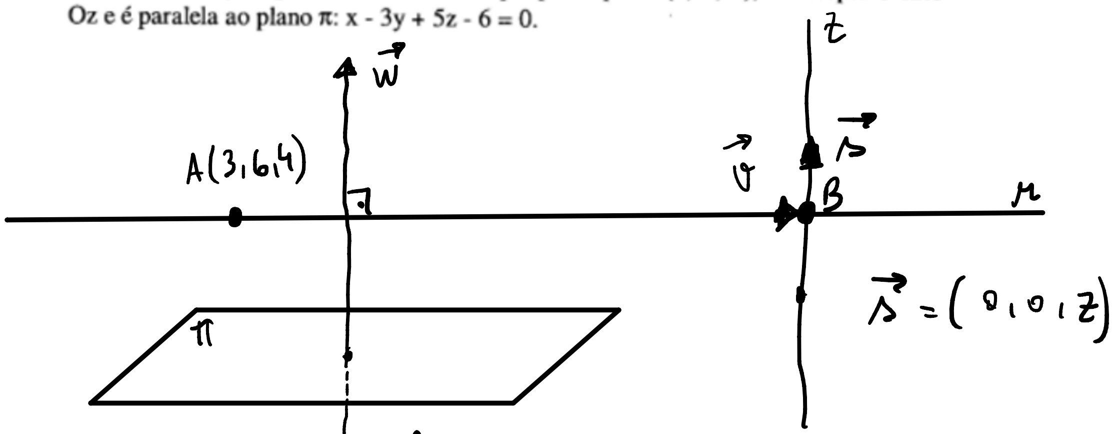
$$r: \begin{cases} x = 3-8t \\ y=-2+12t \\ z=-4-16t \end{cases}$$

- Ponto de Intersecção da reta r com a reta s:

$B(-5,10,-20)$

$B(-5, 10, -20)$

55) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A(3, 6, 4), intercepta o eixo Oz e é paralela ao plano π: x - 3y + 5z - 6 = 0.



$\pi: x - 3y + 5z - 6 = 0$

$\vec{w} = (1, -3, 5)$

- Encontrar o vetor diretor da reta r:

$\vec{v} = (a, b, c)$

$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (0, 0, z) - (3, 6, 4)$
$= (-3, -6, z-4)$

- O vetor diretor do Plano π ⇒ $\vec{w}(1, -3, 5)$ é ortogonal ao vetor diretor da reta r ⇒ $\vec{v}(-3, -6, z-4)$.

Logo: $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, -3, 5) \cdot (-3, -6, z-4)$
$-3 + 18 + 5z - 20 = 0$
$5z = 5$
$\boxed{z = 1}$ $\quad \vec{v}(-3, -6, -3)$

- Encontrar a Equação da reta r:

$r: \begin{cases} A(3, 6, 4) \\ \vec{v}(-3, -6, -3) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 6 - 6t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

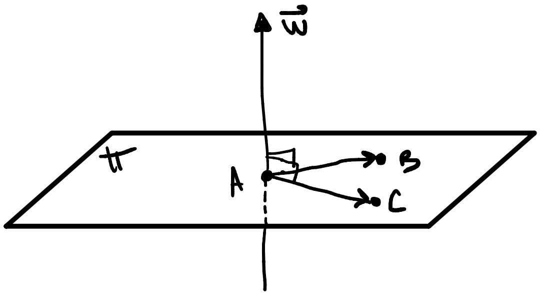
57) O plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

- Apresentar uma Equação Geral do plano:

iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

- Apresentar uma Equação Geral do plano:

$\pi: ax + by + c + d = 0$



A(-3, 0, 0)

B(0, 6, 0)

C(0, 0, -5)

- Encontrar os vetores com os pontos pertencentes ao plano e que sejam ambos ortogonais ao vetor normal do plano π

$\vec{AB} = B - A = (3, 6, 0)$

$\vec{AC} = C - A = (3, 0, -5)$

- REALIZAR o Produto Vetorial de $\vec{AB} \times \vec{AC}$ para encontrar o vetor normal $\vec{w}$ do plano π:

$$\vec{w} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-30)\vec{i} - (-15)\vec{j} + (0-18)\vec{k}$$

$$= -30\vec{i} + 15\vec{j} - 18\vec{k}$$

$$\vec{w} = (-30, 15, -18)$$

- $\pi: -30x + 15y - 18z + d = 0$

. Usar o ponto A(-3, 0, 0)

$$-30.(-3) + d = 0$$

$$\boxed{d = -90}$$

$\pi: -30x + 15y - 18z - 90 = 0 \quad \div 3$

$\pi: -10x + 5y - 6z - 30 = 0$