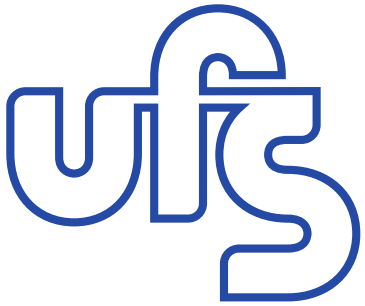
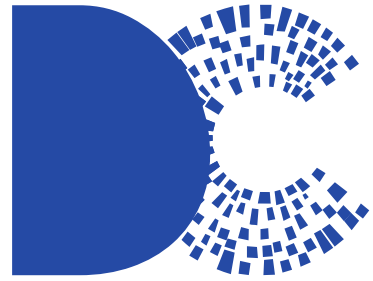


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE



DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

Árvore *heap*

Estruturas de Dados

Bruno Prado

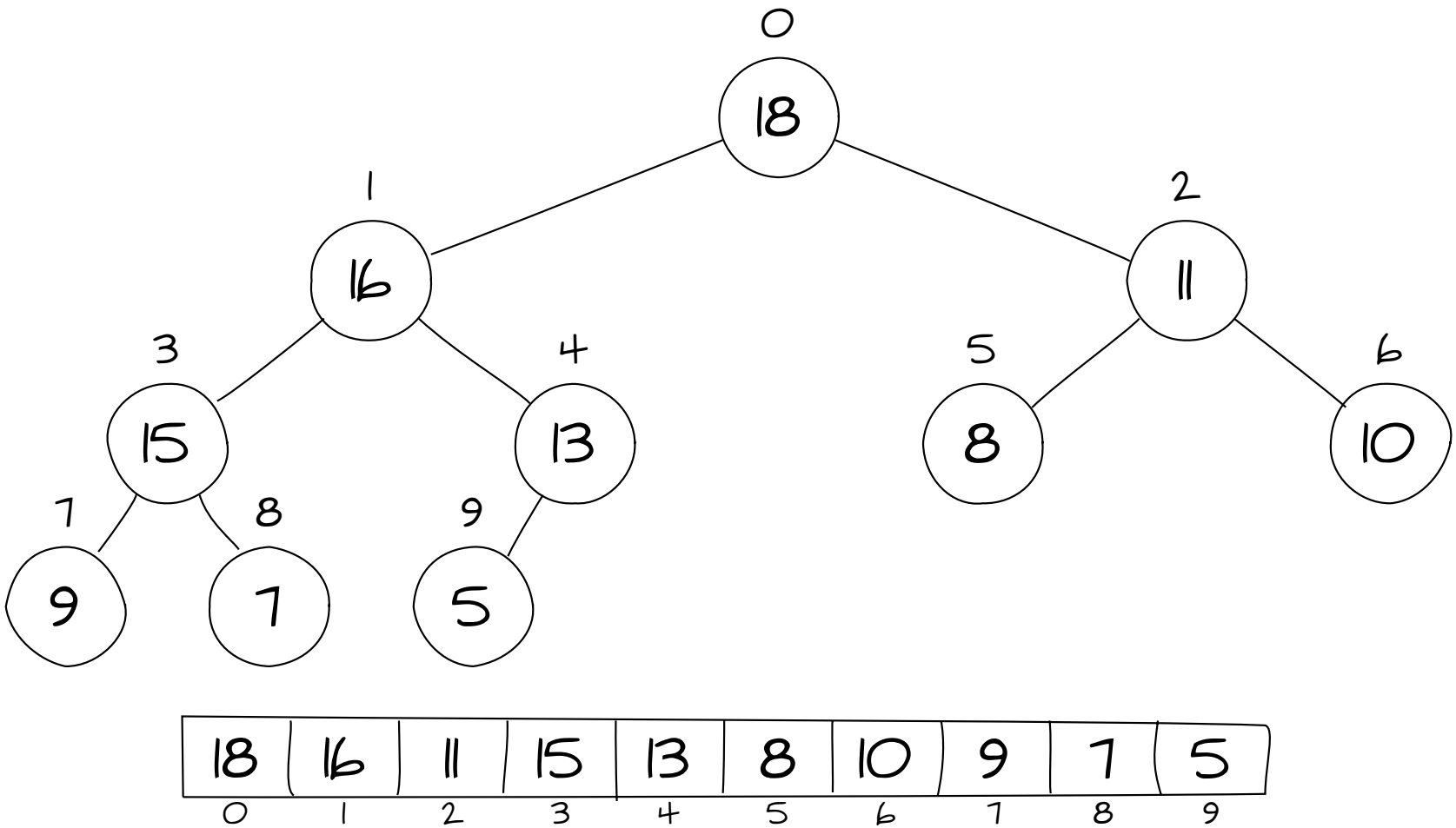
Departamento de Computação / UFS

Introdução

- O que é uma árvore *heap*?
  - Árvore binária de prioridade
  - Representação implícita em vetor
  - Percursos por indexação dos nós

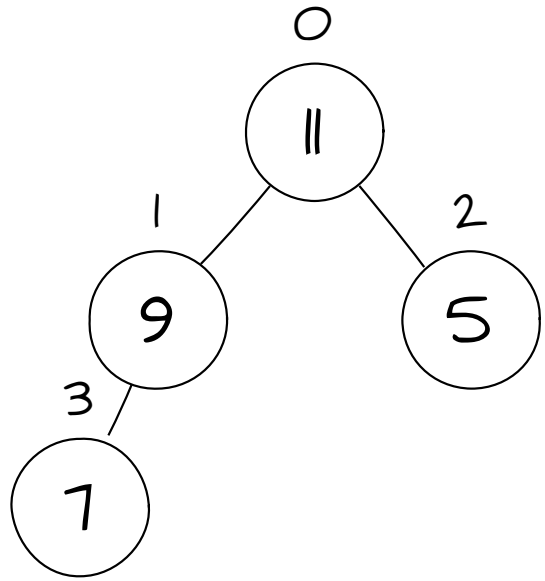
Introdução

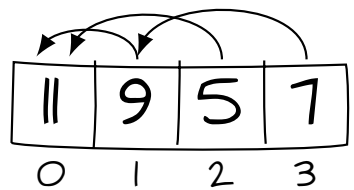
- Árvore binária *heap*



Árvore *heap*

- Representação e indexação
  - Nó pai

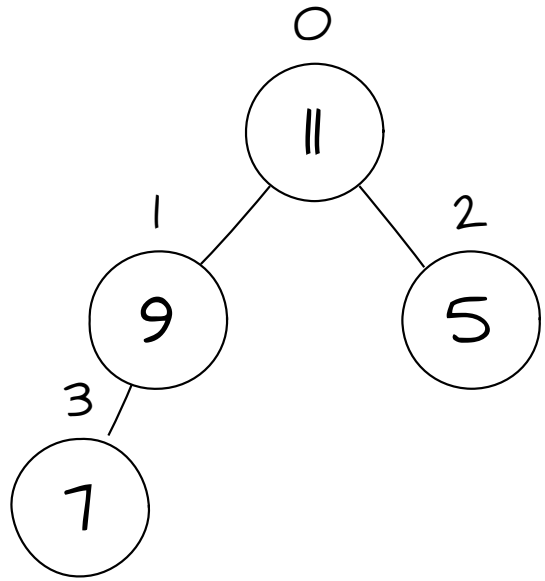


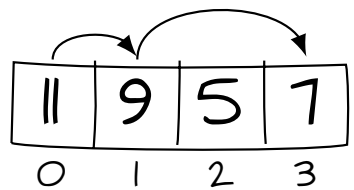


$$Pai(i) = \frac{i-1}{2}$$

Árvore *heap*

- Representação e indexação
  - Nó filho esquerdo

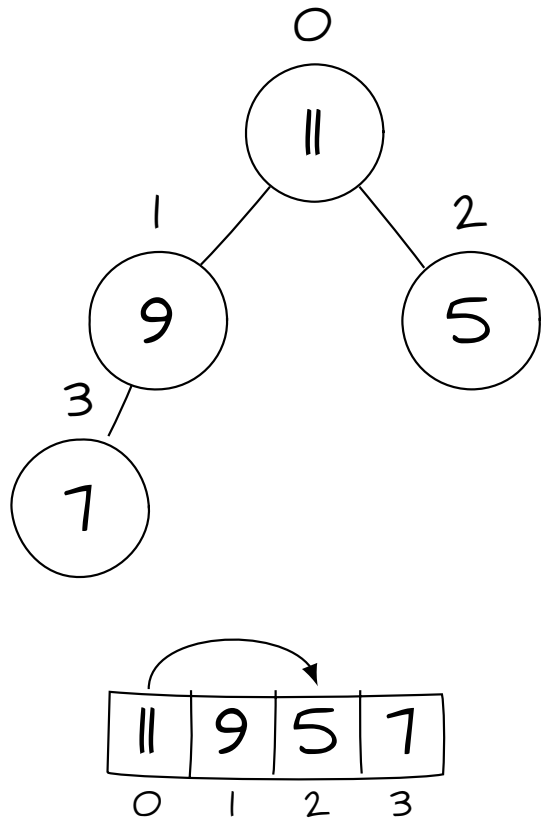




$$Esquerdo(i) = 2i + 1$$

Árvore *heap*

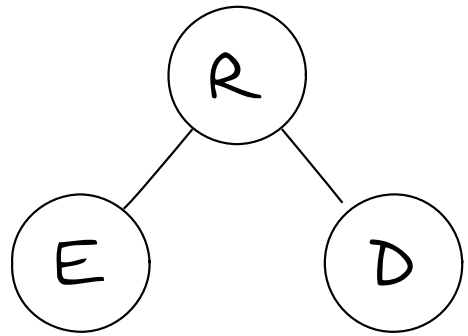
- Representação e indexação
  - Nó filho direito



$$Direito(i) = 2i + 2$$

Árvore *heap*

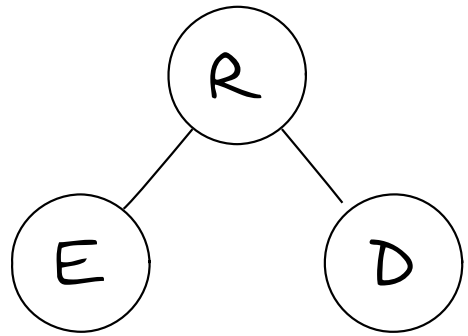
- Tipos de árvores *heap*
  - *Heap* mínimo



Propriedade $R \leq E$ e $R \leq D$

Árvore *heap*

- Tipos de árvores *heap*
  - *Heap* máximo



Propriedade $R \geq E$ e $R \geq D$

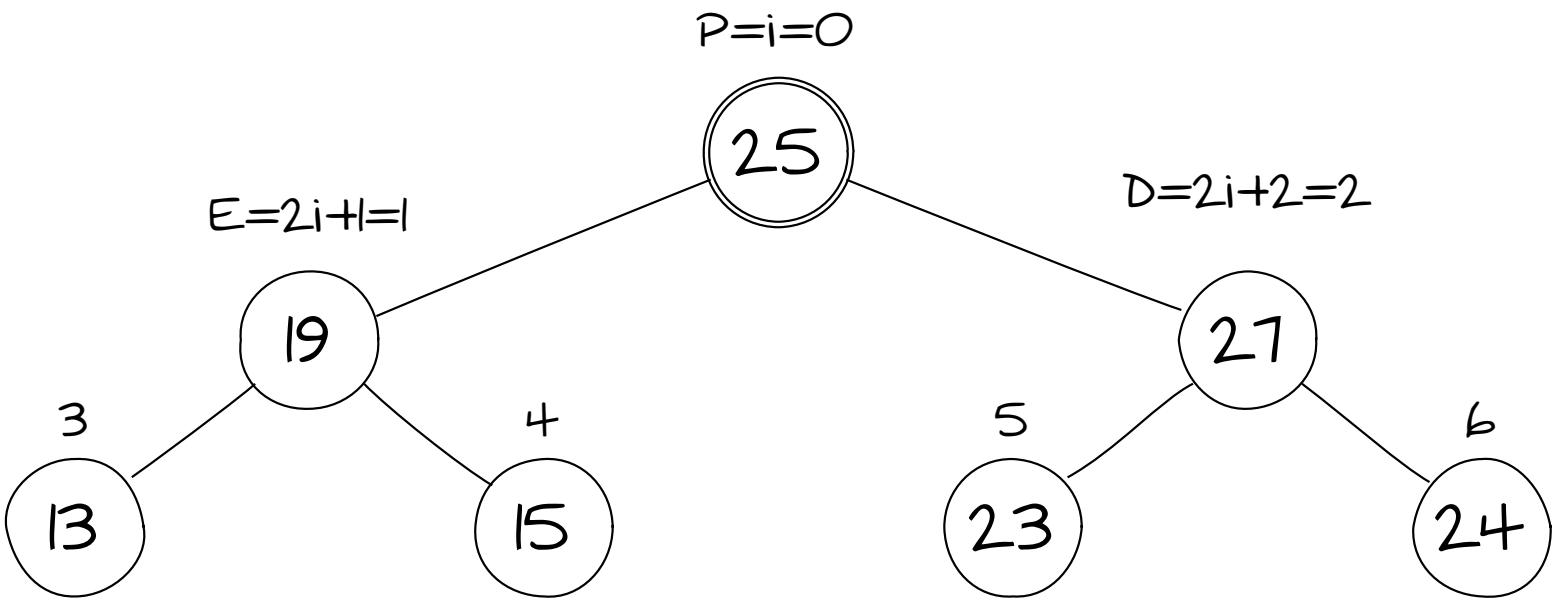
Árvore *heap*

- Aplicação da propriedade de *heap*

```
1   // Padrão de tipos por tamanho
2   #include <stdint.h>
3   // Heapify recursivo
4   void heapify(int32_t* V, uint32_t T, uint32_t i) {
5       // Declaração dos índices
6       uint32_t P = i, E = esquerdo(i), D = direito(i);
7       // Filho da esquerda é maior
8       if(E < T && V[E] > V[P])
9           P = E;
10      // Filho da direita é maior
11      if(D < T && V[D] > V[P])
12          P = D;
13      // Troca e chamada recursiva
14      if(P != i) {
15          trocar(V, P, i);
16          heapify(V, T, P);
17      }
18  }
... ...
```

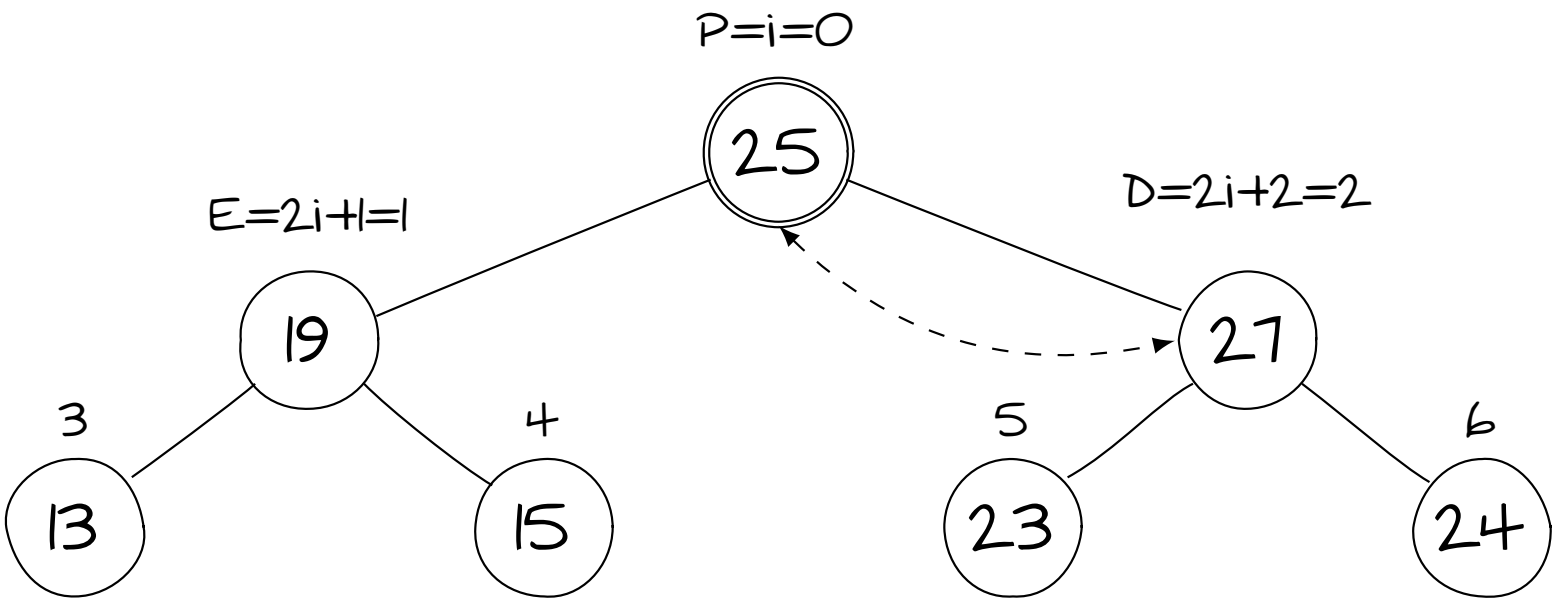
Árvore *heap*

- Aplicação da propriedade de *heap*
  - Procedimento *heapify* na raiz



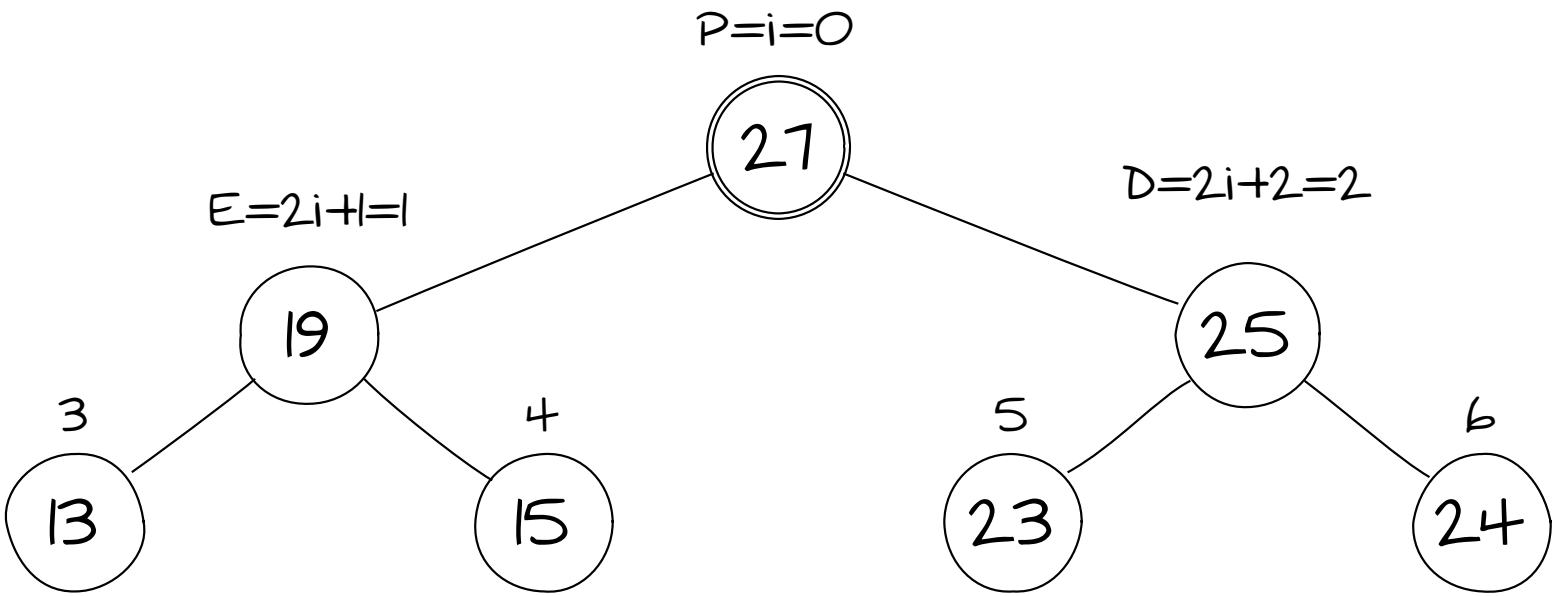
Árvore *heap*

- Aplicação da propriedade de *heap*
  - Procedimento *heapify* na raiz



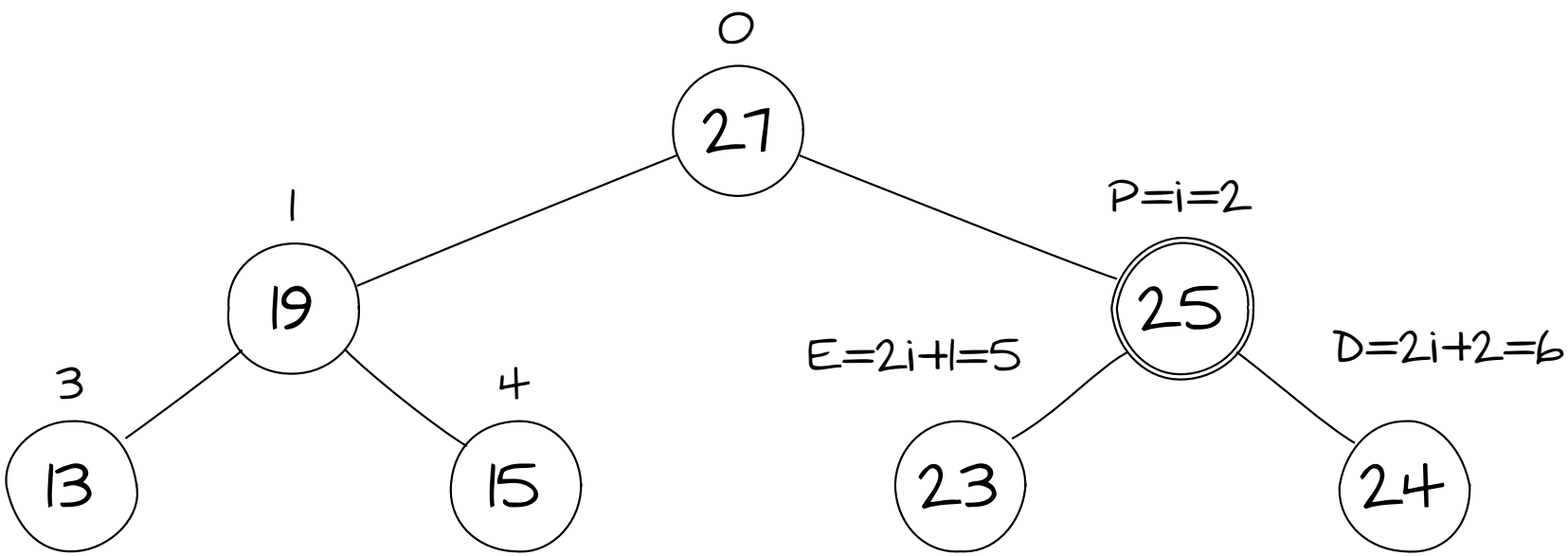
Árvore *heap*

- Aplicação da propriedade de *heap*
  - Procedimento *heapify* na raiz



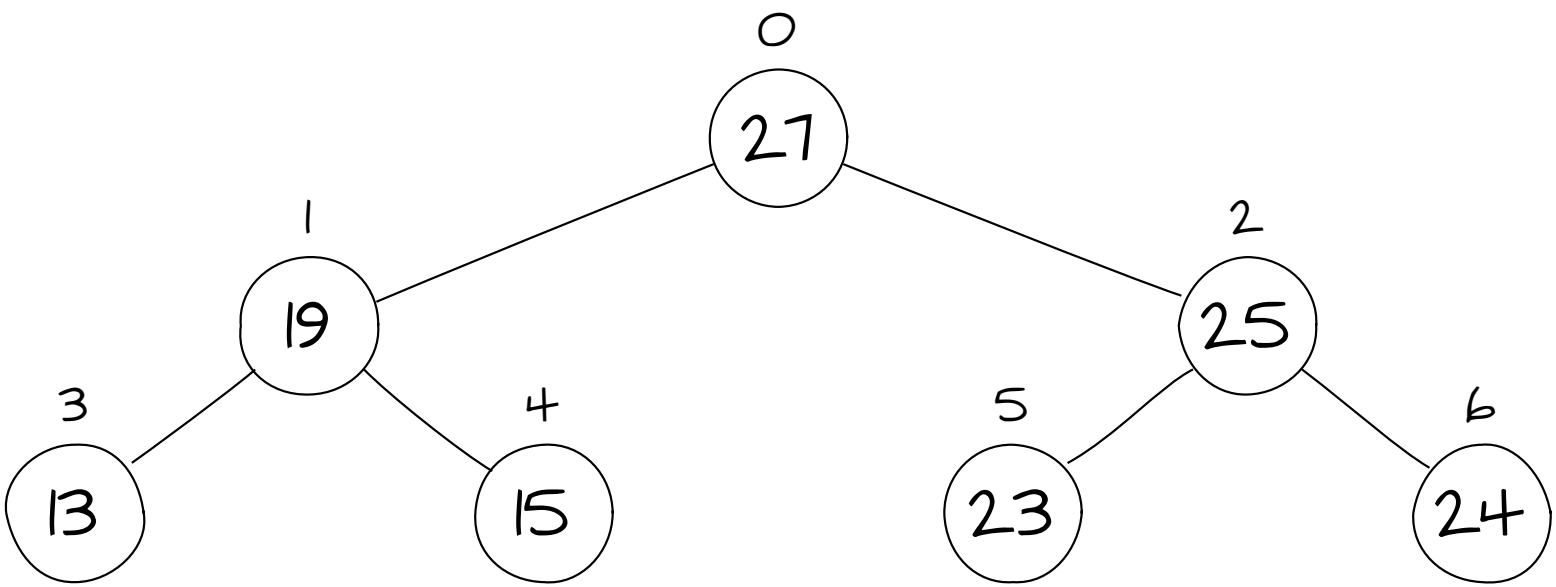
Árvore *heap*

- Aplicação da propriedade de *heap*
  - Procedimento *heapify* na raiz



Árvore *heap*

- Aplicação da propriedade de *heap*
  - Procedimento *heapify* finalizado

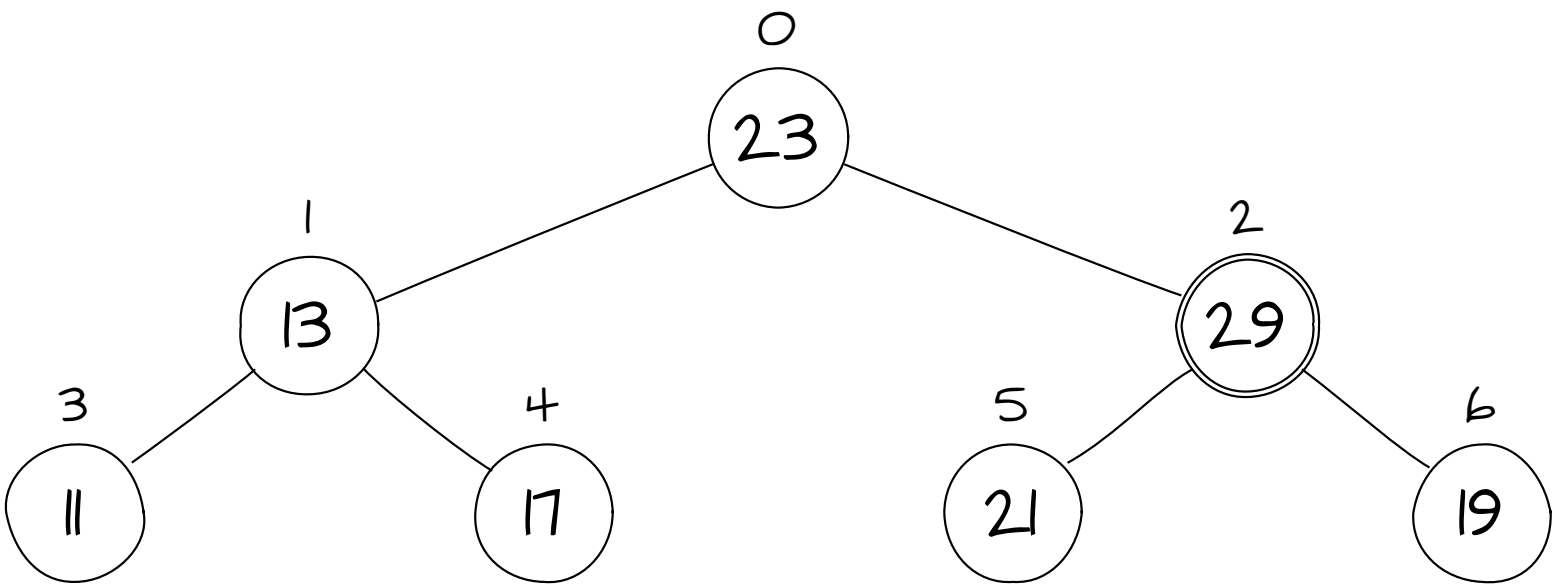


Árvore *heap*

- Complexidade do procedimento *heapify*
  - A altura h da árvore é $\log_2 n$
  - Espaço e tempo: $\Omega(1)$ e $O(h)$

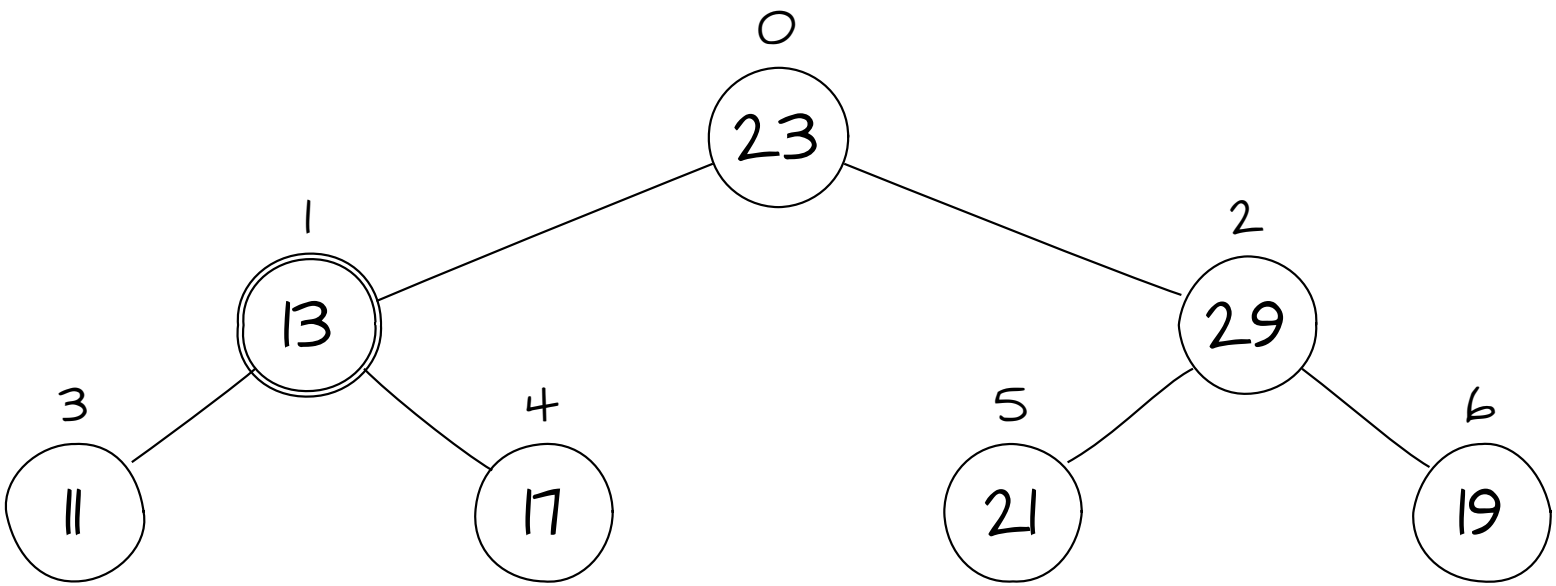
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - Começa pelo último nó com filhos
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



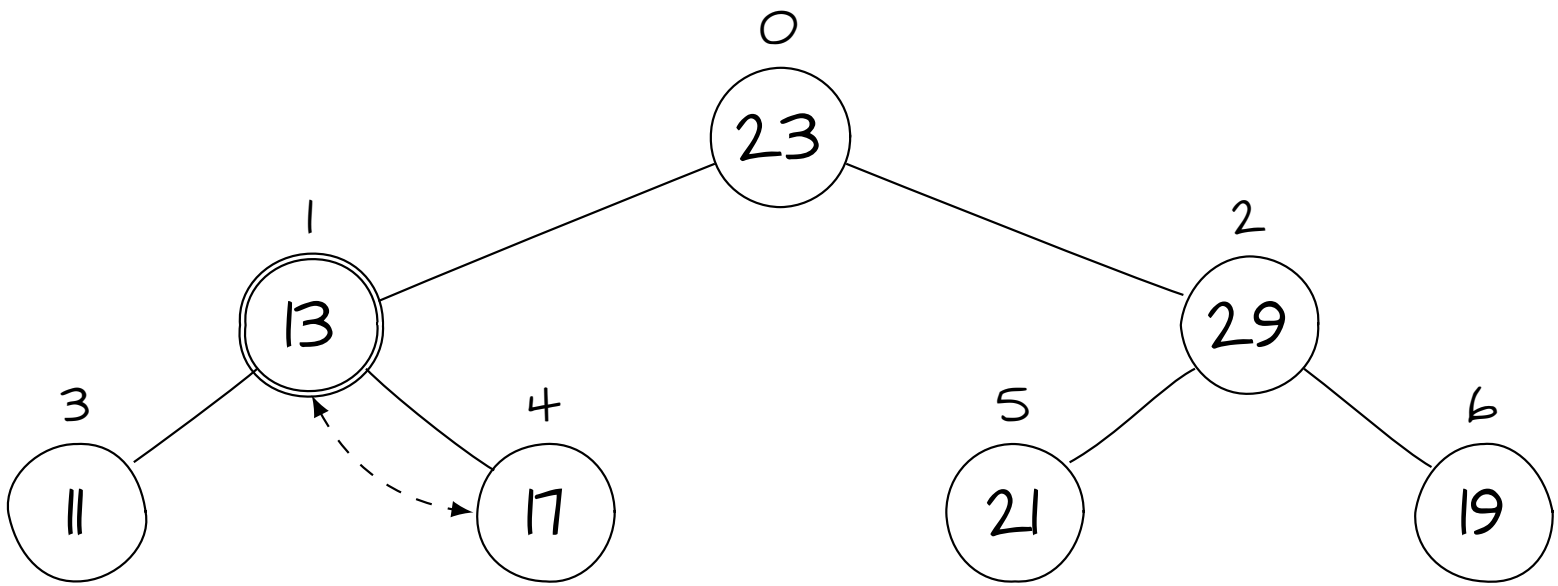
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



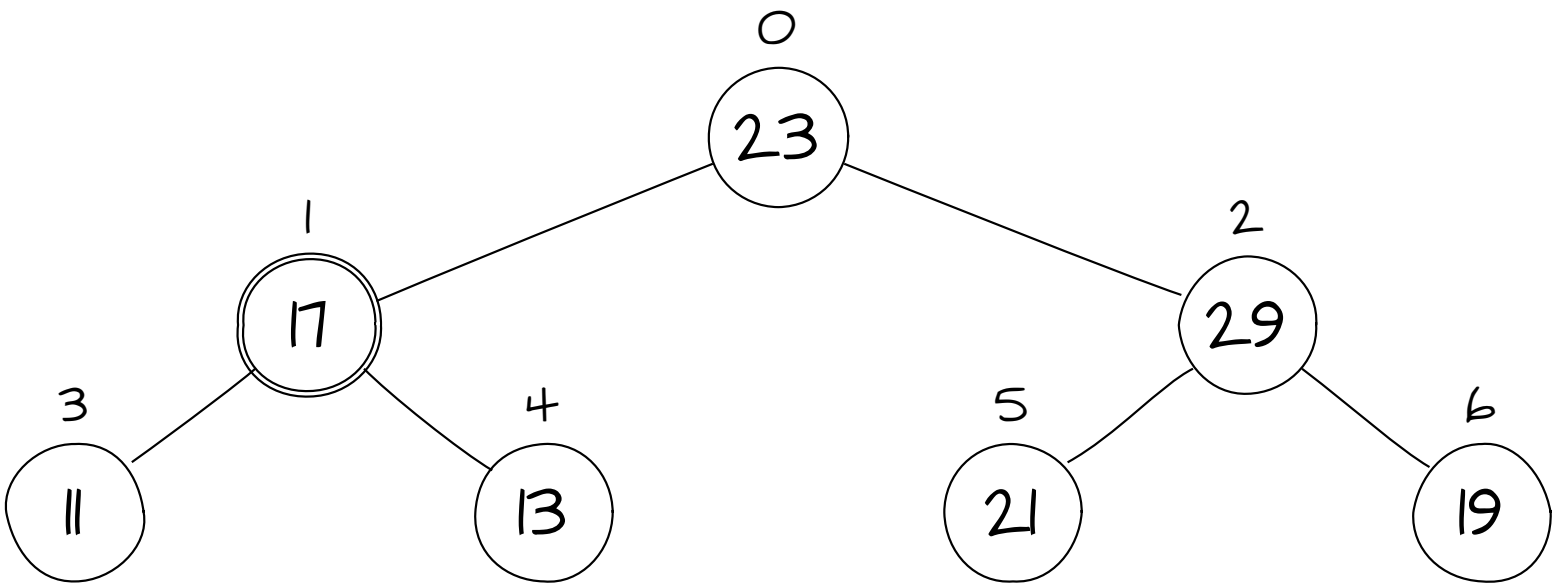
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



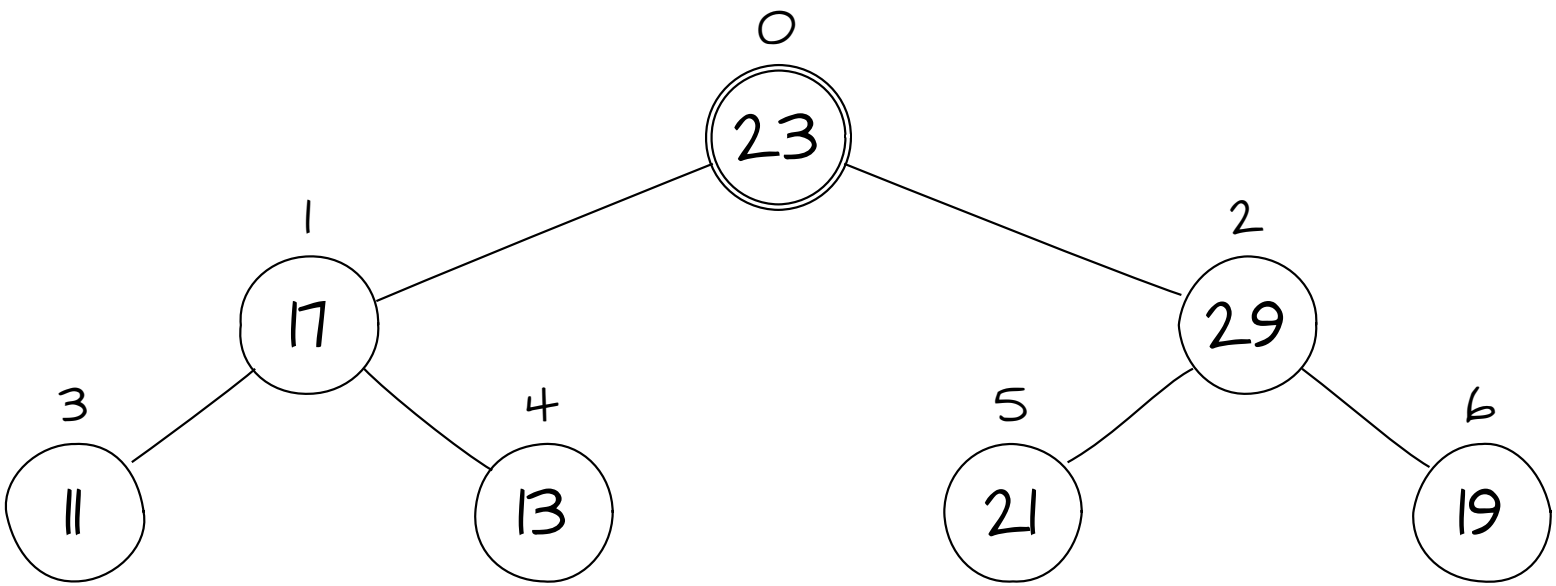
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



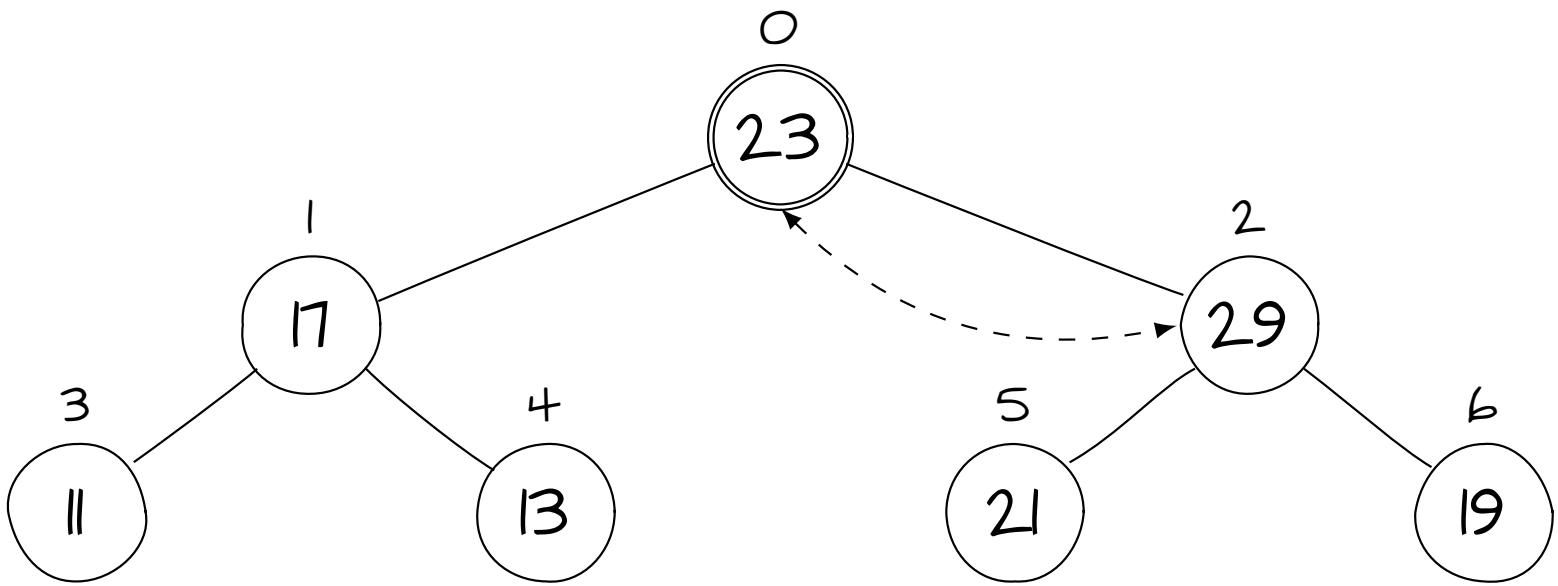
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



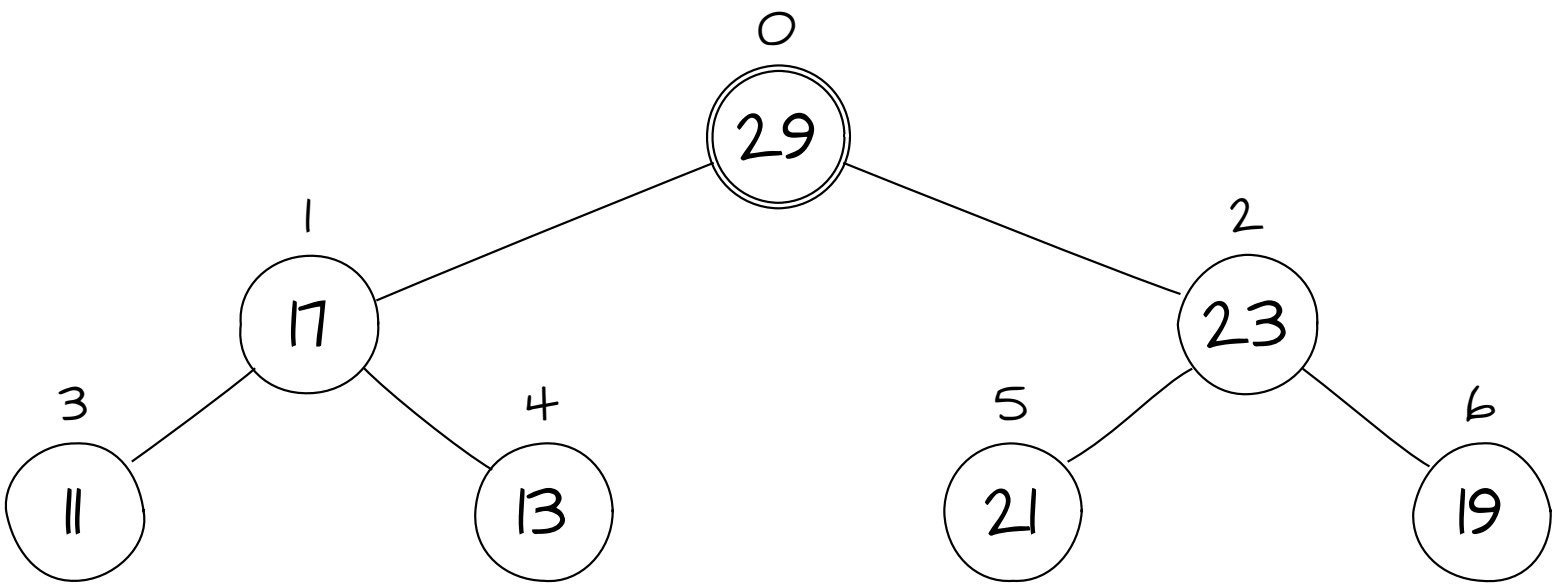
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



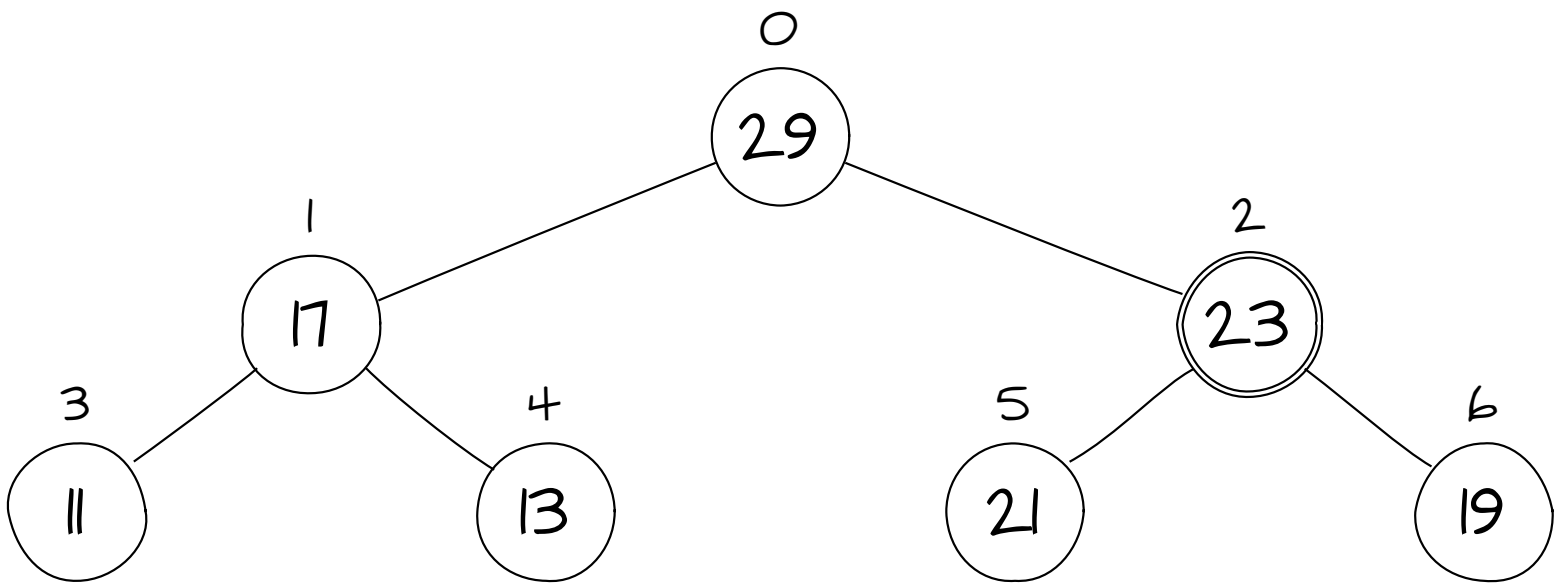
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



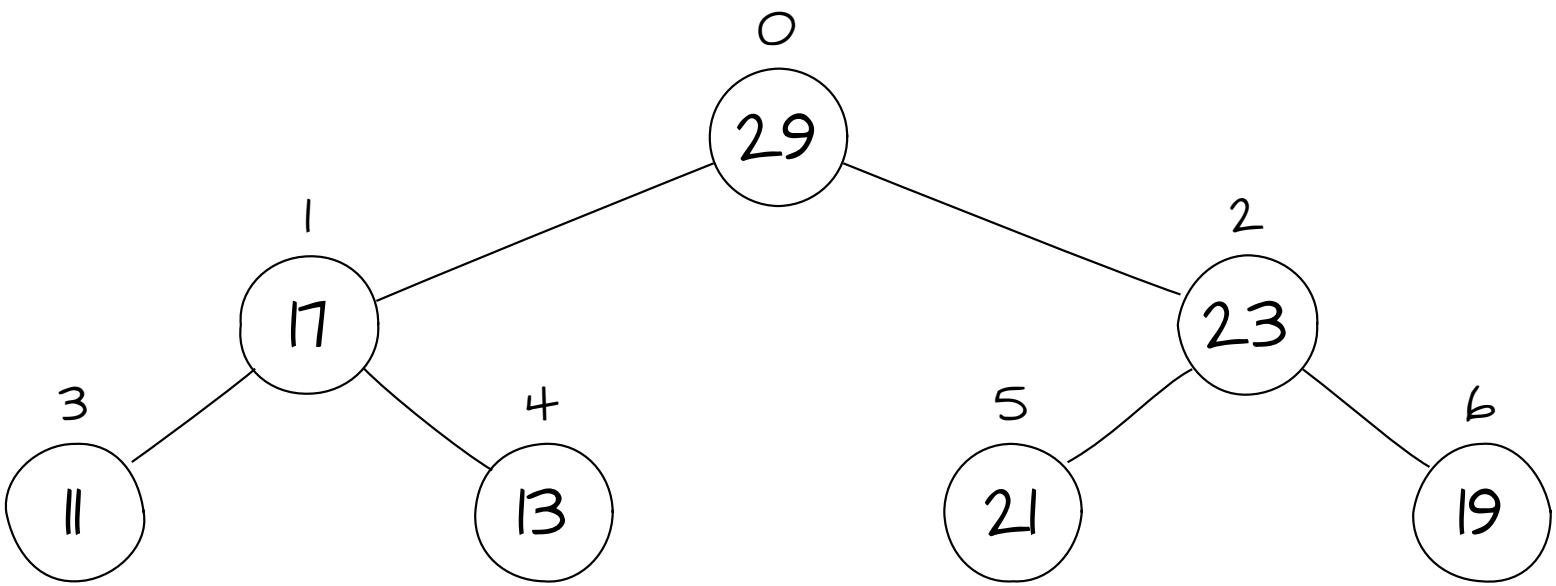
Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - O índice é decrementado até atingir a raiz
  - *Heapify* no índice $i = \frac{(Tamanho-1)-1}{2}$



Árvore *heap*

- Construção da árvore *heap*
  - A construção do *heap* foi finalizada

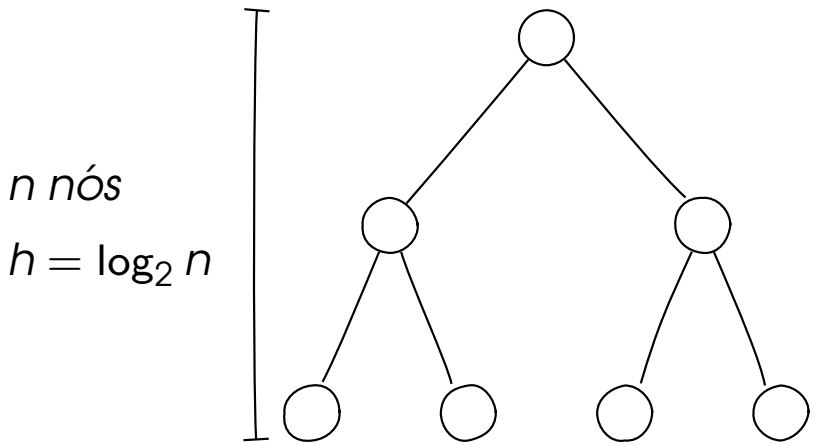


Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - São feitas $\frac{n}{2}$ iterações do *heapify*: $\Omega(1)$ e $O(log_2 n)$
  - Espaço: $\Omega(1)$ e $O(\log_2 n)$
  - Tempo: $\Omega(n)$ e $O(\frac{n}{2} \times h) = O(n \log_2 n)$

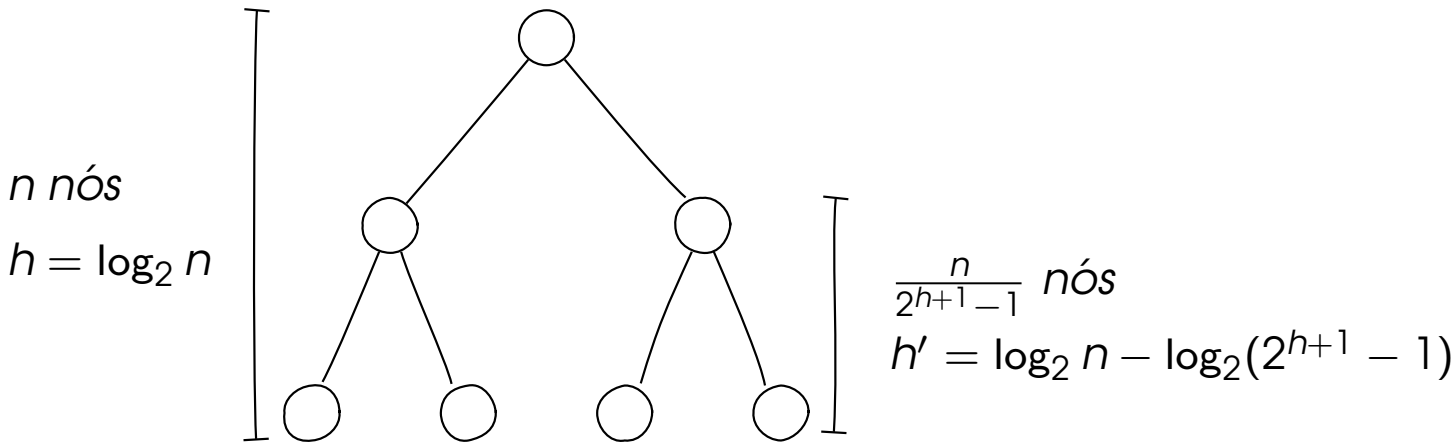
Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - No nível i existem até 2^i nós
  - Máximo de $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$ nós
  - Acima no nível h, a altura $h' = \log_2 n - \log_2(2^{h+1} - 1)$ e até $\frac{n}{2^{h+1}-1}$ nós



Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - No nível i existem até 2^i nós
  - Máximo de $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$ nós
  - Acima no nível h, a altura $h' = \log_2 n - \log_2(2^{h+1} - 1)$ e até $\frac{n}{2^{h+1}-1}$ nós



Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - O tempo de execução do *heapify* está limitada a altura h' que possui até $\frac{n}{2^{h+1}-1}$ nós

$$construir\_heap(n) = O\left(\sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^{h+1}-1} \times h\right)$$

Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - O tempo de execução do *heapify* está limitada a altura h' que possui até $\frac{n}{2^{h+1}-1}$ nós

$$
\begin{aligned}
\textit{construir\_heap}(n) &= O\left(\sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^{h+1}-1} \times h\right) \\
&= O\left(n \times \sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{h}{2^h}\right)
\end{aligned}
$$

Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - O tempo de execução do *heapify* está limitada a altura h' que possui até $\frac{n}{2^{h+1}-1}$ nós

$$
\begin{aligned}
\textit{construir\_heap}(n) &= O\left(\sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^{h+1}-1} \times h\right) \\
&= O\left(n \times \sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{h}{2^h}\right) \\
&= O\left(n \times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}\right) \quad c
\end{aligned}
$$

Árvore *heap*

- Análise de complexidade da construção
  - O tempo de execução do *heapify* está limitada a altura h' que possui até $\frac{n}{2^{h+1}-1}$ nós

$$
\begin{aligned}
\textit{construir\_heap}(n) &= O\left(\sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^{h+1}-1} \times h\right) \\
&= O\left(n \times \sum_{h=0}^{\log_2 n} \frac{h}{2^h}\right) \\
&= O\left(n \times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}\right) \quad (c) \\
&= O(n)
\end{aligned}
$$

Árvore *heap*

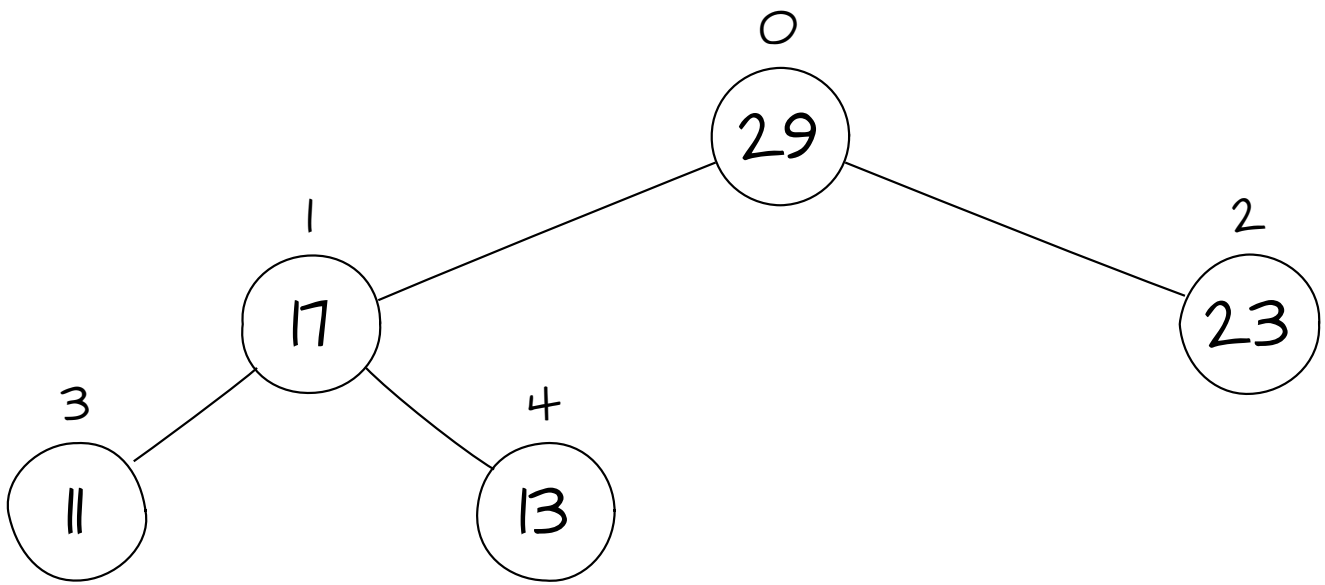
- Análise de complexidade da construção
  - Espaço: $\Omega(1)$ e $O(\log_2 n)$
  - Tempo: $\Theta(n)$

Árvore *heap*

- Operações básicas
  - Inserção
  - Remoção

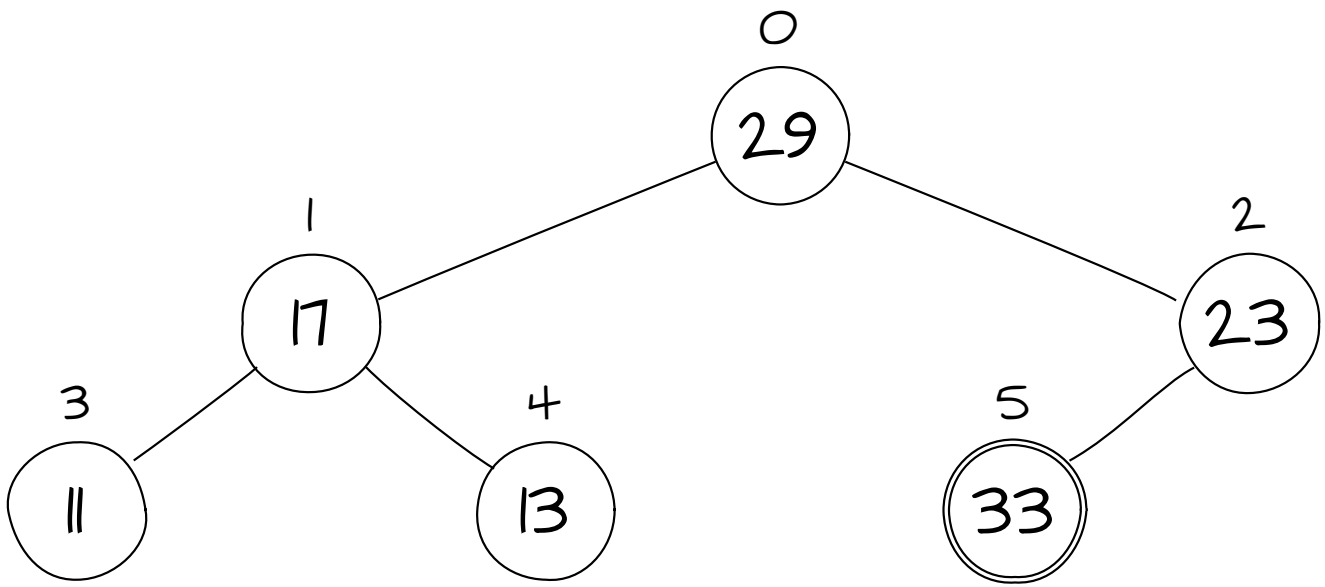
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



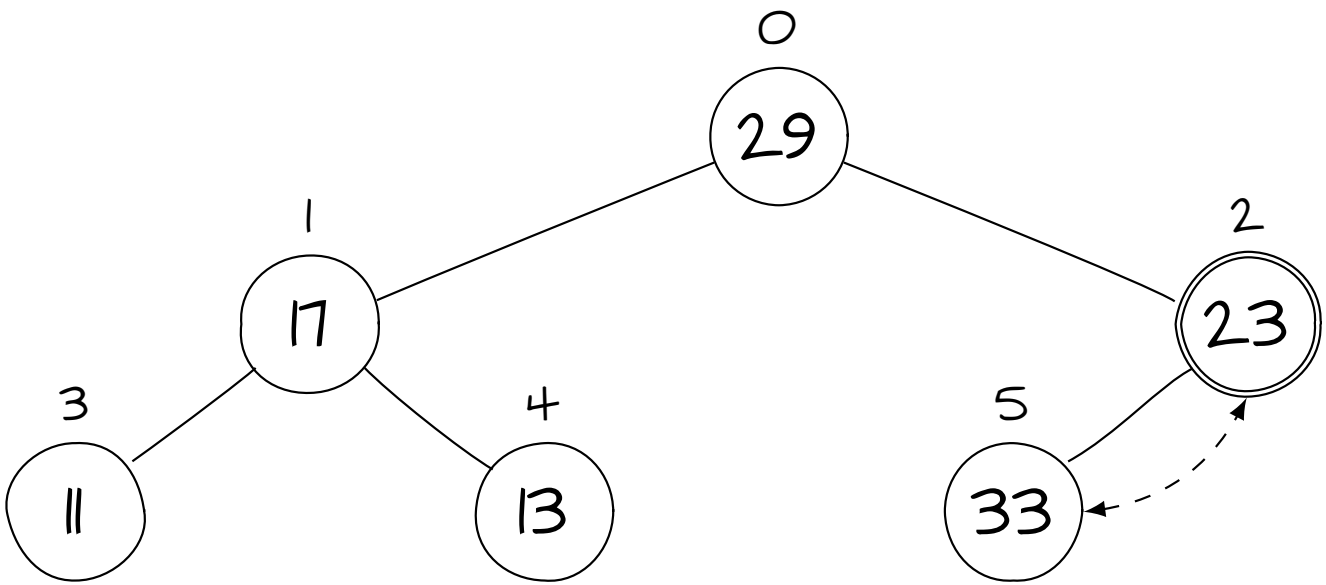
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



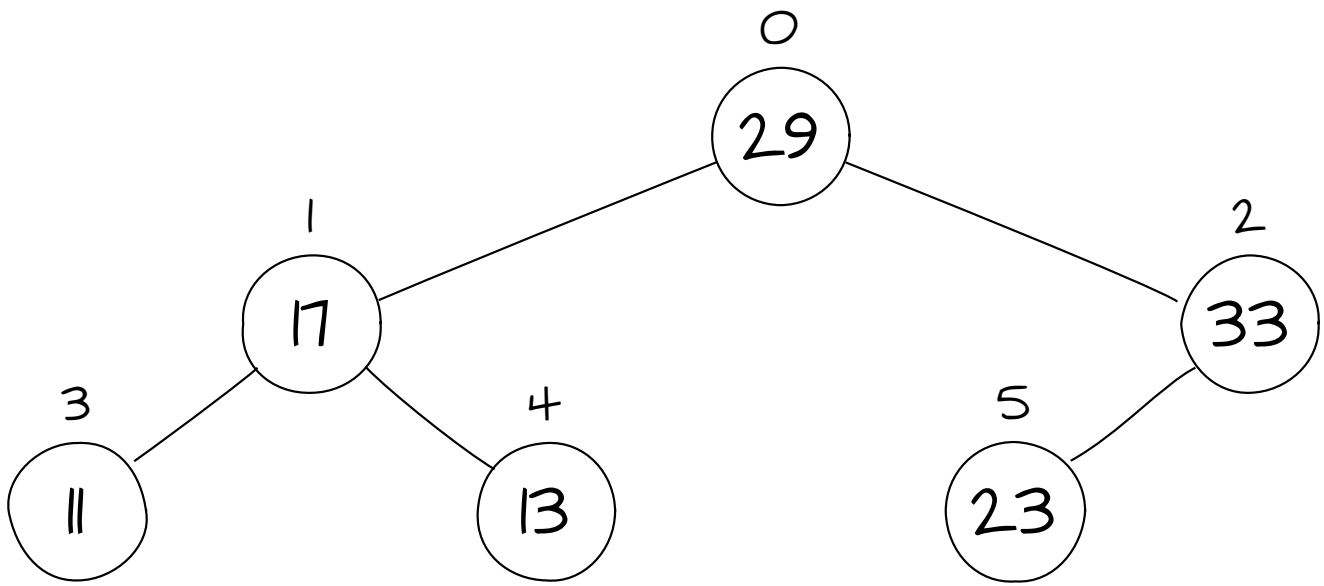
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



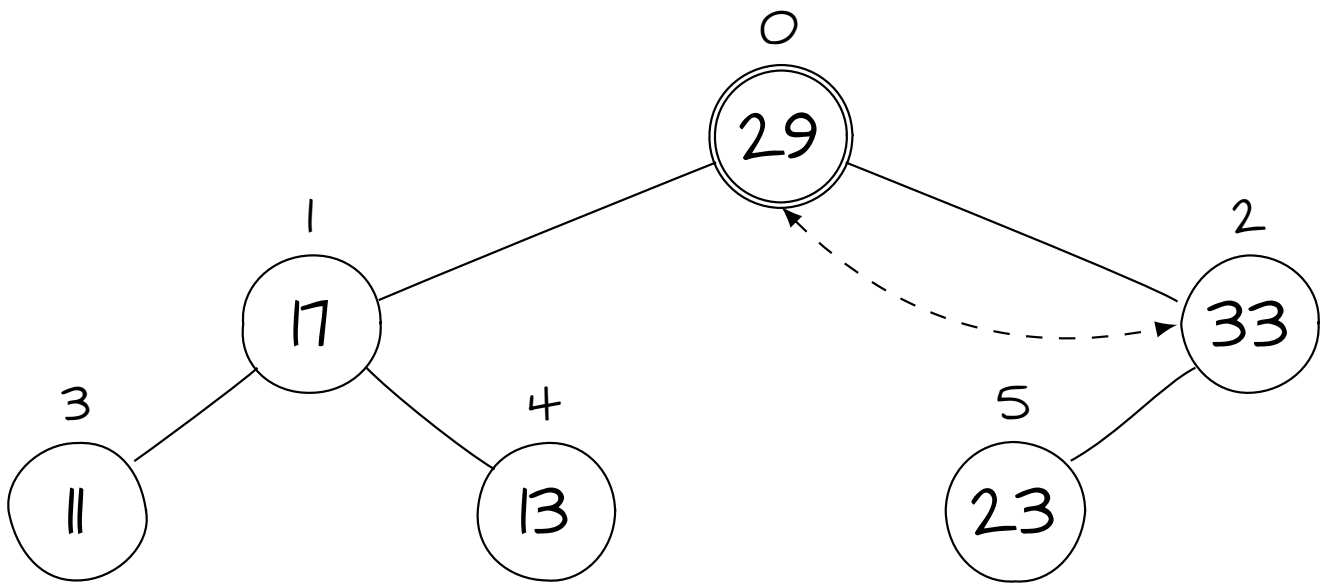
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



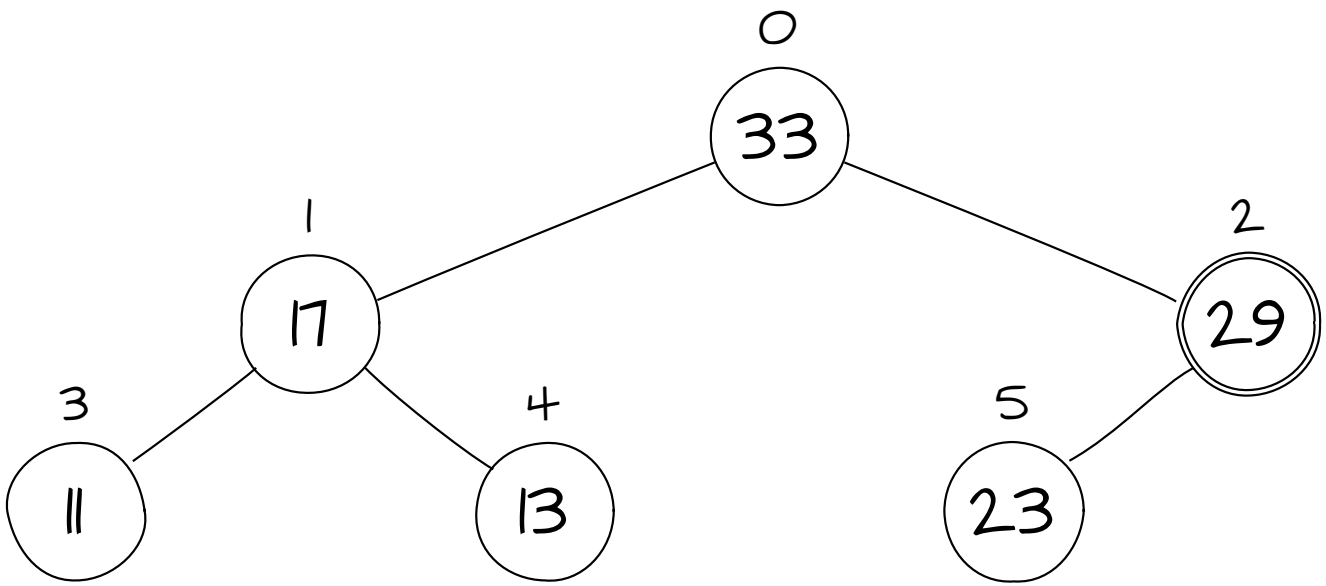
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



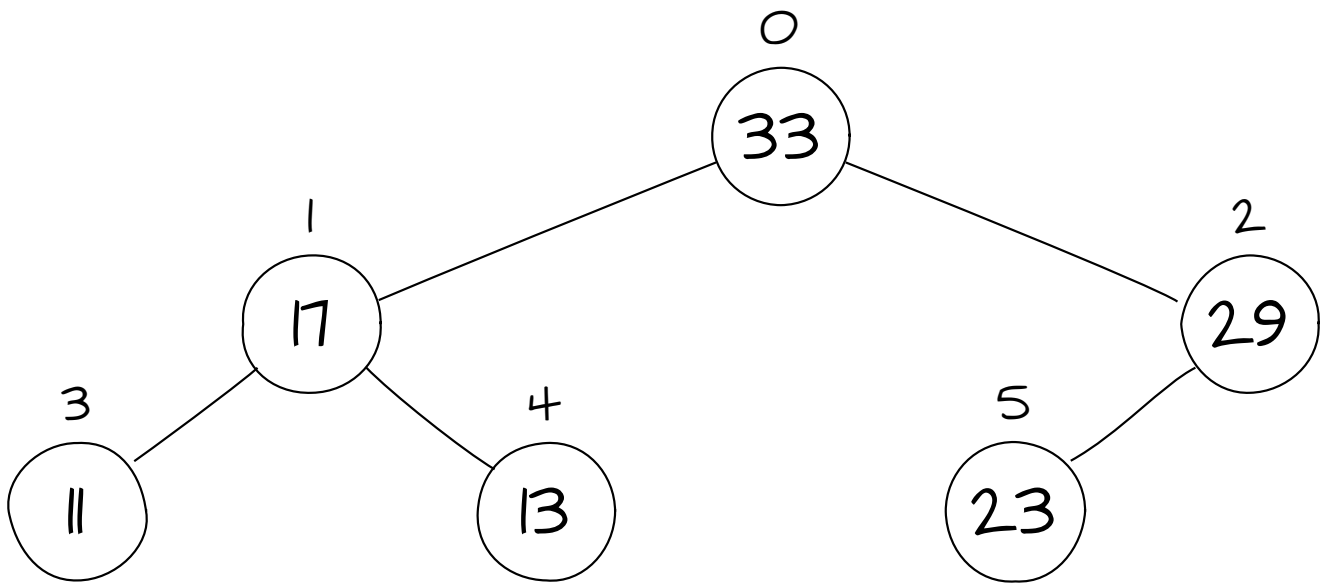
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



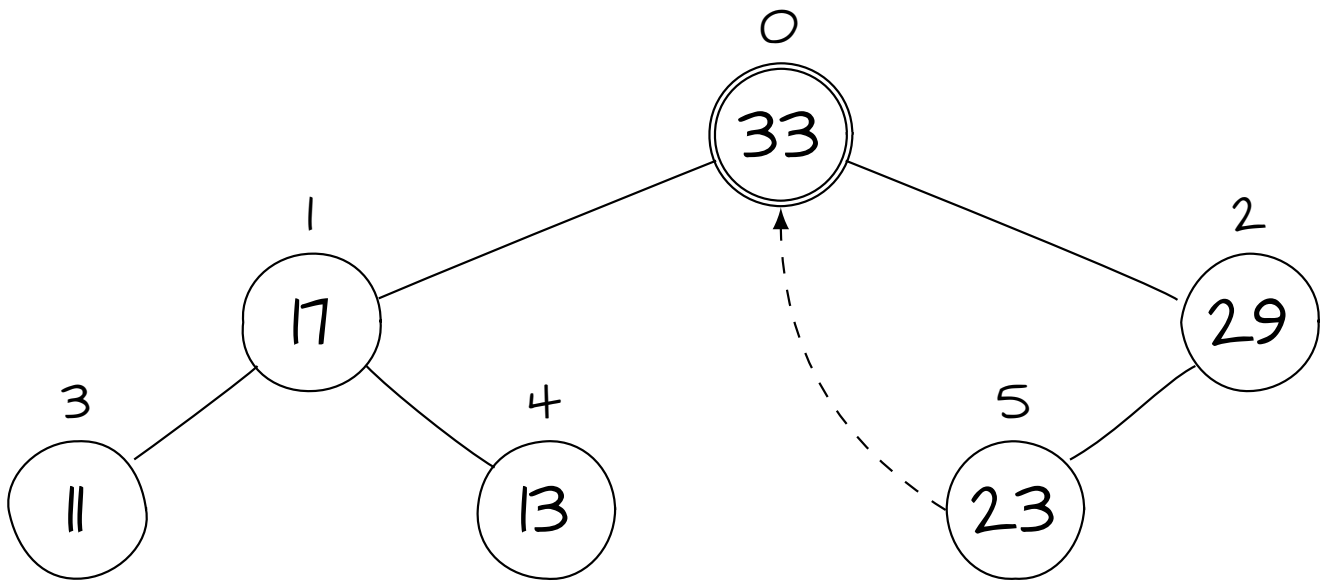
Árvore *heap*

- Operação de inserção
  - Parâmetro: 33
  - A inserção sempre é feita na última posição, aplicando o procedimento *heapify* no pai



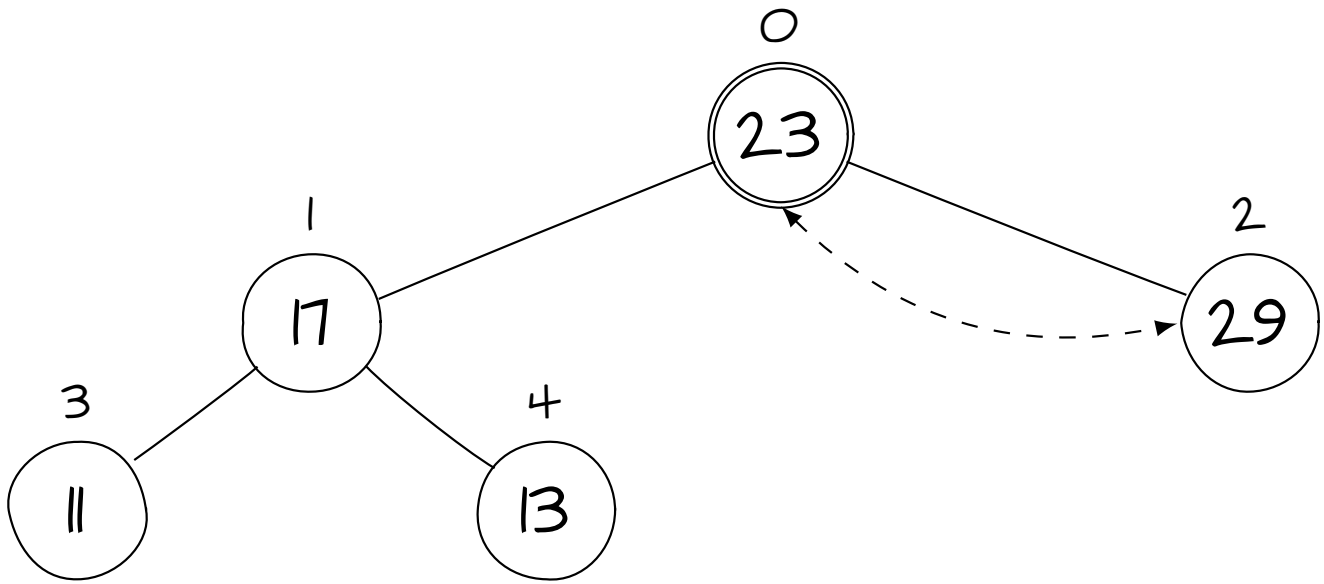
Árvore *heap*

- Operação de remoção
  - Sempre é removido o nó raiz da árvore (mínimo ou máximo), sendo substituído pelo último elemento



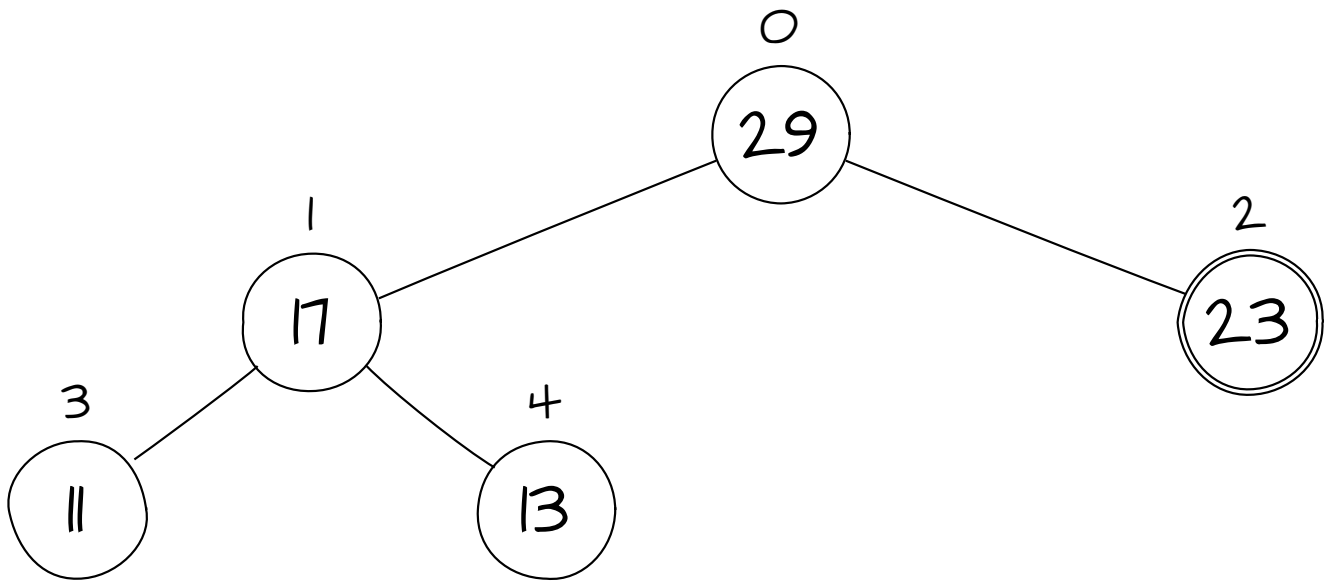
Árvore *heap*

- Operação de remoção
  - Sempre é removido o nó raiz da árvore (mínimo ou máximo), sendo substituído pelo último elemento



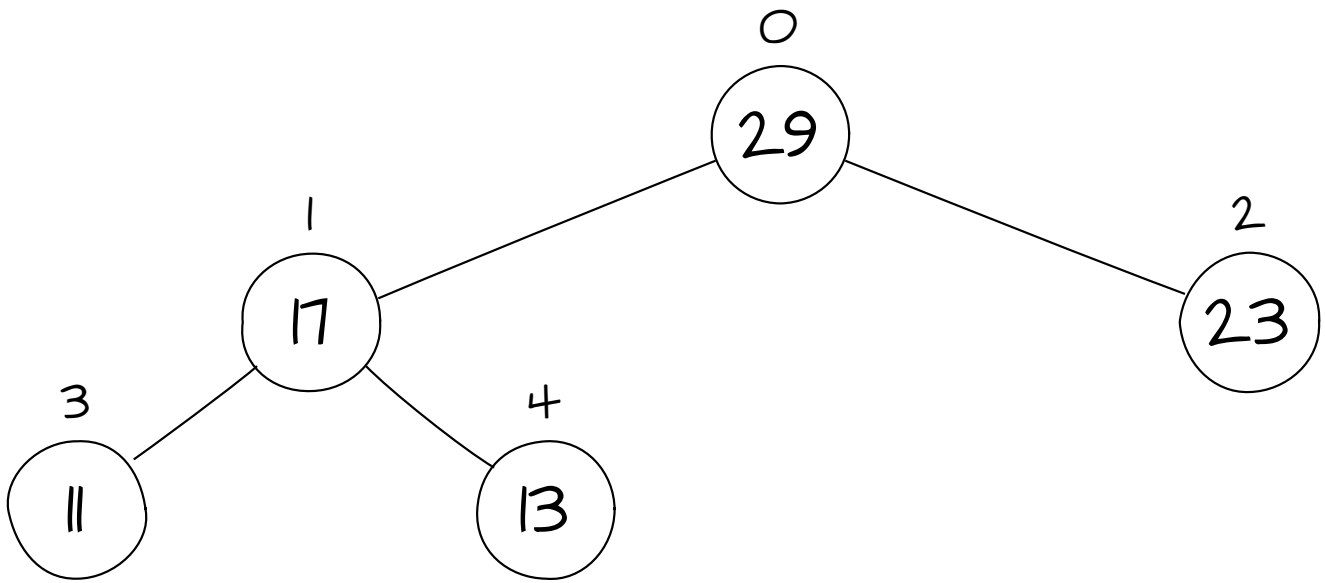
Árvore *heap*

- Operação de remoção
  - Sempre é removido o nó raiz da árvore (mínimo ou máximo), sendo substituído pelo último elemento



Árvore *heap*

- Operação de remoção
  - Sempre é removido o nó raiz da árvore (mínimo ou máximo), sendo substituído pelo último elemento

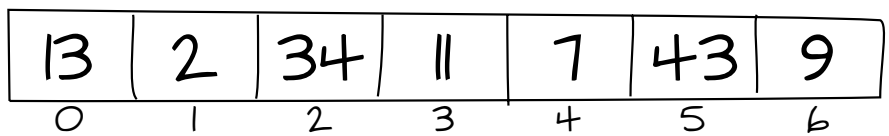


Árvore *heap*

- Análise de complexidade das operações
  - Espaço e tempo: $\Omega(1)$ e $O(\log_2 n)$

Exemplo

- Construa uma árvore *heap* mínimo e máximo
  - Considere os números do vetor abaixo
  - Ilustre a construção passo a passo



Exercício

- A empresa de tecnologia Poxim Tech e a empresa de capitalização Banana Cap estão desenvolvendo um sistema para apuração eficiente dos resultados dos concursos de loteria realizados
  - Os apostadores podem escolher 15 números dentre os valores de 1 até 50, sendo igualmente premiados por faixa as apostas com maior e menor número de acertos, impedindo a acumulação do prêmio
  - Em cada concurso são sorteados 10 números distintos que permitem aos apostadores obterem entre 0 e 10 acertos para cada aposta
  - O código da aposta é representado por um número hexadecimal único de 128 bits

Exercício

- Formato de arquivo de entrada
  - [*Prêmio em reais*]
  - [#*Quantidade de apostas*(n)]
  - [$Sorteado_1$] ... [$Sorteado_{10}$]
  - [$Código_1$] [$Número_{1_1}$] ... [$Número_{1_{15}}$]
  - ⋮
  - [$Código_n$] [$Número_{n_1}$] ... [$Número_{n_{15}}$]

Exercício

- Formato de arquivo de entrada

```
1  3000
2  5
3  1 2 3 5 8 13 25 33 42 48
4  1234567890ABCDEF1234567890ABCDEF 1 2 3 9 11 17 19
       20 21 30 34 38 39 40 44
5  1223334444555556666667777777ABCD 2 3 5 9 13 14 15
       17 18 20 33 35 40 41 42
6  AAAAAABBBBBCCCCCDDDDDEEEEEEFFFFFF 1 2 5 8 9 11 15
       16 19 21 27 33 35 42 49
7  0A1B2C3D4E5F6A7B8C9DAEBFCEDFE0F1 3 4 5 7 11 16 18
       20 24 25 31 34 35 42 50
8  F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0 3 4 7 9 15 18 23
       24 26 31 32 38 41 43 48
```

Exercício

- Formato de arquivo de saída
  - São exibidos as duas faixas de acerto com a quantidade de apostas premiadas, o número de acertos e o valor do prêmio individual, além da listagem dos códigos das apostas em cada faixa

```
1 [2:6:750]
2 12233344445555566666677777777ABCD
3 AAAAAABBBBBCCCCCDDDDDEEEEEFFFFFF
4 [1:2:1500]
5 F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0F0
```