Ativ Vetores Retas

terça-feira, 20 de setembro de 2022 21:58

23) Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $2y = x + 1$

$y = \frac{x+1}{2} = t$

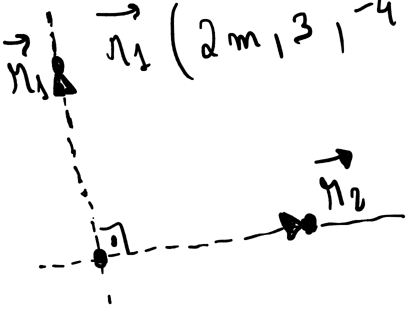
$\boxed{x + 1 = 2t}$

$\hookrightarrow y = z - 4$

$y = 4 - z = t$

$\boxed{4 - z = t}$

$\boxed{y = t}$



$\vec{r_1}\,(2m, 3, -4)$

$\vec{r_2} \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases}$

$\vec{r_2}\,(2, 1, -1)$

$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 0$

$(2m, 3, -4) \cdot (2, 1, -1) = 0$

$4m + 3 + 4 = 0$

$4m = -7$

$\boxed{m = -7/4}$

$z = 0 \qquad x = x_0 + at$

24) Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A e é simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2, nos casos:

a) A(3, 2, -1) $\quad r_1: \begin{cases} x = 3 + 0t \\ y = -1 + 0t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$

$z = z = 1t$

$x = y + 3 = t$

$x = t$

$y + 3 = t$

$\underline{y = t - 3}$

$-2x = z - 3$

$x = \frac{3 - z}{2} = t$

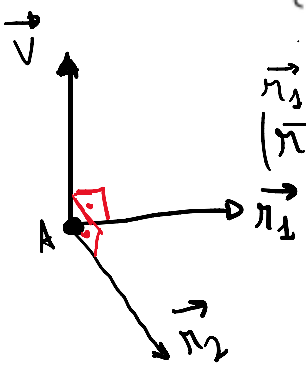
$x = t$

$\frac{3 - z}{2} = t$

$3 - z = 2t$

$-z = 2t - 3$

$\boxed{z = 3 - 2t}$



$\vec{r_1} = (0, 0, 1)$ $\qquad$ $\vec{r_2} = (1, 1, -2)$

$|\vec{r_1} \times \vec{r_2}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$\vec{v} = (-1, 1, 0)$ $\quad = |(0 - 1)\cdot\vec{i} - (-1)\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}|$

$= |-\vec{i} + \vec{j}|$

$$\vec{V} = \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$$

c) A é a interseção de r_1 e r_2

$r_1 : x-2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

$\to y = 1 - x = t$

$\to 2y = z - 2$

$y = \dfrac{z-2}{2} = t$

$\boxed{y = t}$

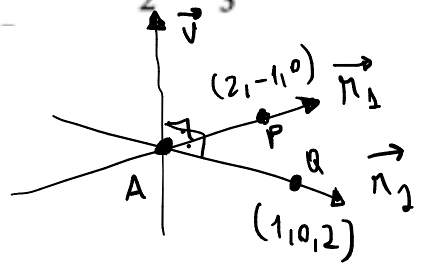
$z - 2 = 2t$

$\boxed{z = 2t + 2}$

$1 - x = t$

$-x = t - 1$

$\boxed{x = 1 - t}$



$$r_1: \begin{cases} x - 2 = t \to x = 2 + t \\ \frac{y+1}{2} = t \to y = -1 + 2t \\ \frac{z}{3} = t \to z = 0 + 3t \end{cases}$$

$\vec{n}_1 = (1, 2, 3)$

$$\vec{n}_2 : \begin{cases} x = 1 - 1t \\ y = 0 + 1t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$\vec{n}_2 = (-1, 1, 2)$

$Q - A = (-1, 1, 2)$

$(1, 0, 2) - (x_A, y_A, z_A) = (-1, 1, 2)$

$1 - x_A = -1 \to \boxed{x_A = 2}$

$0 - y_A = 1 \to \boxed{y_A = -1}$

$2 - z_A = 2 \to \boxed{z_A = 0}$

$$|\vec{n}_1 \times n_2| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3)\vec{i} - (2 + 3)\vec{j} + (1 + 2)\vec{k}$$

$= \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$

$= (1, -5, 3)$

$$\vec{V} = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 5t \\ z = 0 + 3t \end{cases}$$

25) Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de interseção:

a) $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$

Dada as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, elas serão concorrentes se satisfazerem a condição estabelecida pela seguinte matriz quadrada: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Dessa forma, duas retas serão concorrentes se a matriz formada por seus coeficientes a e b resultarem em um determinante diferente de zero.

$y_{r_1} = y_{r_2}$

$2x - 3 = -3x + 7$

$5x = 10$

$\boxed{x = 2}$

$z_{r_1} = z_{r_2}$

$-x + 5 = x + 1$

$-2x = -4$

$\boxed{x = 2}$

$y = 2.2 - 3$

$\boxed{y = 1}$

$z = x + 1$

$\boxed{z = 3}$

. São concorrentes no ponto $A(2,1,3)$

---

e) $r_1 : (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3)$ e $r_2 : (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$

$r_1 : (x, y, z) = (2 + t, 4 - 2t, 1 + 3t)$

$r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \rightsquigarrow x = 3 \\ y = 4 - 2t \rightsquigarrow y = 2 \\ z = 1 + 3t \rightsquigarrow z = 4 \end{cases}$

$r_2 : (x, y, z) = (-1 + 4t, 2 + 3t, 5 - 2t)$

$r_2 \begin{cases} x = -1 + 4t \rightsquigarrow x = 3 \\ y = 2 + 3t \rightsquigarrow y = 5 \\ z = 5 - 2t \rightsquigarrow z = 3 \end{cases}$

Sol: Retas com pontos diferentes, logo não temos pontos de intersecção!

$x_{r_1} = x_{r_2}$

$2 + t = -1 + 4t$

$-3t = -3 \rightarrow \boxed{t = 1}$

f) $r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \rightsquigarrow t = x - 2 \\ y = 4 - t \rightsquigarrow t = 4 - y \\ z = -t \rightsquigarrow t = -z \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$

$x - 2 = 4 - y$

$-y = x - 6$

$\boxed{y = 6 - x}$

$x - 2 = -z$

$\boxed{z = 2 - x}$

$y_{r_1} = y_{r_2}$

$z_{r_1} = z_{r_2}$

$x_{r_1} = x_{r_2}$

$\boxed{y = 6 - x}$

$\boxed{x_{r_1} = x_{r_2}}$

$\to$ As retas são coincidentes!

26) Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

a) $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2 : x - 5 = \dfrac{y}{m} = z + 1$

$\dfrac{y+5}{2} = x = t$

$\dfrac{y+5}{2} = t$

$y + 5 = 2t$

$\boxed{y = -5 + 2t}$

$\boxed{x = t}$

$x = 2 - z = t$

$\boxed{x = t}$

$2 - z = t$

$\boxed{z = 2 - t}$

$r_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 + mt \\ z = -1 + t \end{cases}$

$\vec{r_1} = (1, 2, -1)$

$\vec{r_2} = (1, m, 1)$

$r_1 : \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = -5 + 2t \\ z = 2 - 1t \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

$-2 \quad m \quad -1 \qquad m \quad \cancel{2} \quad -1$

Sol: $m = \mathbb{R} - 1$

$D \neq 0 \to (2m - 2) \neq 0$

$2m \neq 2$

$\boxed{m \neq 1}$

27) Dadas as retas

$r_1 : \dfrac{x-1}{2} = -y;\ z = 3$ e $r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$,

encontrar equações reduzidas na variável x da reta que passa por A(0, 1, 0) e pelo ponto de interseção de r_1 com r_2.

$\dfrac{x-1}{2} = -y$

$r_1 : \begin{cases} x = t \to 1 \\ y = \dfrac{1-t}{2} \to 0 \end{cases}$

$r_2 : \begin{cases} x = t \to 1 \\ y = -1 + t \to 0 \\ z = 2 + t \to 3 \end{cases}$

$$\frac{x-1}{2} = -y$$

$$x - 1 = -2y$$

$$x = 1 - 2y = t$$

$$\boxed{x = t}$$

$$1 - 2y = t$$

$$-2y = t - 1$$

$$\boxed{y = \frac{1-t}{2}}$$

$$r_1: \begin{cases} y = \frac{1-t}{2} \to 0 \\ z = 3 + 0t \to 3 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} y = -1 + t \to 0 \\ z = 2 + t \to 3 \end{cases}$$

$$y_{r_1} = y_{r_2}$$

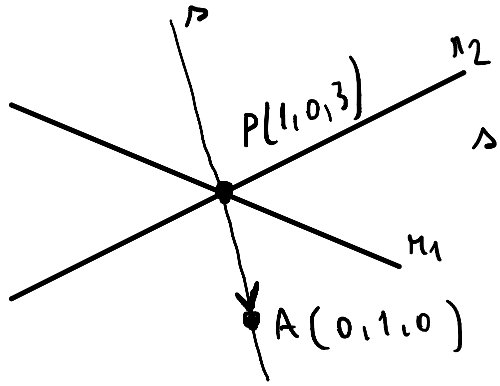
$$\frac{1-t}{2} = -1 + t$$

$$1 - t = -2 + 2t$$

$$3t = 3 \to \boxed{t = 1}$$

$P: (1, 0, 3)$

↪ Ponto de intersecção das retas r_1 e r_2.



$$\vec{PA} = A - P = (0,1,0) - (1,0,3) = (-1,1,-3)$$

$$s: \begin{cases} x = 0 - t \to t = -x \\ y = 1 + t \to t = y - 1 \\ z = 0 - 3t \to t = -\frac{z}{3} \end{cases}$$

$$-x = y - 1 = -\frac{z}{3}$$

$$-x = y - 1 \qquad -x = -\frac{z}{3}$$

$$\boxed{y = 1 - x} \qquad \boxed{z = 3x}$$

$$s: \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 3x \end{cases}$$