**Universidade Federal de Sergipe**
**Centro de Ciências Exatas e Tecnologia**
**Departamento de Matemática**

**Vetores & Geometria Analítica – Lista 3**

**Prof. Douglas F. de Albuquerque** **e-mail:** douglas@mat.ufs.br

**Exercício 1** Obtenha a equação da reta cuja ordenada à origem é 2 e cuja inclinação é $30°$ com o eixo $y$.

**Exercício 2** Calcule a área de um paralelogramo cujas laterais tem as retas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_1x + b_1y + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ e } a_2x + b_2y + d_2 = 0\,.$$

**Exercício 3** Mostre que

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}\,) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}\,) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}\,) = \vec{0}$$

conhecida como identidade de Jacobi.

**Exercício 4** Considere duas retadas dadas pelas equações

$$\begin{aligned} r_1 :&\quad ax + by + c = 0 \\ r_2 :&\quad dx + ey + f = 0\,. \end{aligned}$$

Mostre que:

(a) o ângulo entre as retas é dado por

$$\arccos\left(\frac{|ad + be\,|}{\sqrt{(a^2 + b^2\,)\,(d^2 + e^2\,)}}\right)$$

(b) se as retas são paralelas a distância entre elas é

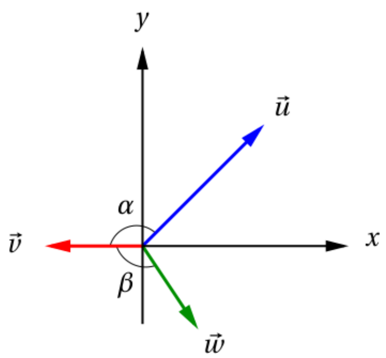
$$\frac{|c - f\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exercício 5** Considere $\vec{v} = (1,\ 0,\ 0)$ e $\vec{w} = (a,\ 0,\ 0)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\parallel \vec{w} \parallel = |a| \parallel \vec{v} \parallel$ .

**Exercício 6** Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ conforme figura ao lado.

(a) Escreva o vetor $\vec{w}$ como como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Escreva seu resultado para quando $\alpha = 135^0$, $\beta = 120^0$ .



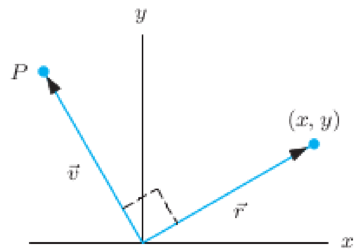

**Exercício 6**

**Exercício 7** Se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$ e $|\vec{v} \times \vec{w}\,| = 3$, e o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\theta$, determine: (a) $\tan\theta$, (b) $\theta$ .
(c) Se $\vec{v} \times \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3$, encontre $\tan\theta$ em que $\theta$ é o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ .

**Exercício 8** O ponto $P$ na figura ao lado tem o vetor posição $\vec{v}$ obtido pela rotação do vetor posição $\vec{r}$ do ponto $(x,\ y)$ de $90^0$ no sentido anti-horário em torno da origem.

(a) Use a definição geométrica de produto vetorial para explicar porquê $\vec{v} = \vec{k} \times \vec{r}$ .

(b) Determine as coordenadas de $P$.




**Exercício 8**

**Exercício 9** Quais dos pares de vetores (se existem):

- são perpendiculares?
- são paralelos?
- tem ângulo maior que $\pi/2$?
- tem ângulo menor que $\pi/2$?

(a) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
(b) $\vec{c} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{d} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
(c) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$
(d) $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

**Exercício 10** Mostre que
(a) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\, |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ .
(b) se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$$

Explique a relação $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ .

**Exercício 11** Como parte de um jogo de videogame, o ponto $(a,\, b)$ , com $a$ e $b$ não nulos, é girado no sentido anti-horário em torno da origem do plano $XY$ através de um ângulo de $30°$. Encontre as coordenadas do novo ponto.

**Exercício 12** Naftaleno cristalino tem uma célula unitária monoclínica descrita pelos vetores

$$\vec{a} = a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k},\ \vec{b} = b_1\,\vec{i} \text{ e } \vec{c} = c_2\,\vec{j}\,.$$

Se $|\vec{a}\,| = 0.824$nm, $|\vec{b}\,| = 0.600$nm e $|\vec{c}\,| = 0.866$nm e os ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $\vec{a}$ e $\vec{c}$ e, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são $\alpha = 90^0$, $\beta = 122,9^0$ e $\gamma = 90^0$, respectivamente.
(a) determine os valores de $b_1$ e $c_2$ .
(b) da relação $\vec{a} \cdot \vec{c}$ calcule $a_2$ .
(c) determine $a_3$ .
(d) qual o volume da célula unitária da nafitalina. Discuta a luz do resultado do item (c) seu resultado.

**Exercício 13** As posições de dois átomos são descritas por $A_1(1,\, 1,\, -2)$ e $A_2(1,\, 0,\, 1)$ .
(a) Determine o ângulo entre esses átomos.
(b) Suponha que um terceiro átomo deve ser colocado ao longo de uma reta ortogonal cruzando o ponto médio da linha que une esses dois átomos. Determine o conjunto de pontos do átomo $A_3$ .

**Exercício 14** Sabendo que $\vec{u} \times \vec{v}$ um vetor ortogonal (aqui, perpendicular) a ambos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Considere um vetor não nulo, $\vec{w}$, e mostre que o produto vetorial $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$.

**Exercício 15** Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam com os eixos $x, y$ e $z$ ângulos $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ e $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$. Determine o ângulo entre estes vetores em termos destes ângulos.

**Exercício 16** Considere os vetores
(a) $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$
(b) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 1, 0)$
(c) $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -1, 4)$ e $\vec{w} = (1, 1, -2)$
(d) $\vec{u} = (2, -2, 2)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-1, -1, -1)$ .
Obtenha:

(a) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}\,)$
(b) $(\vec{u} \times \vec{v}\,) \times \vec{w}$
(c) $\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}\,)$
(d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}\,)$
(e) $(\vec{u} \times \vec{w}\,) \times (\vec{v} \times \vec{w}\,)$
(f) $(\vec{u} \cdot \vec{w}\,)\ (\vec{v} \times \vec{u}\,)$
(g) $(\vec{u} \times \vec{v}\,) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}\,)$
(h) $(2\,\vec{w} \times \vec{v}\,) \cdot (-\vec{v} \times \vec{w}\,)$
(i) $(\vec{v} \times \vec{v}\,) \times (\vec{v} \times \vec{w}\,)$

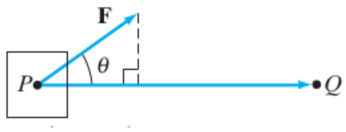
**Exercício 17** Dados os vetores $\vec{v} = (2,\, -1,\, 1)$ e $\vec{w} = (3,\, 0,\, 2)$ em $\mathbb{R}^3$. Calcule:

(a) $\vec{v} + \vec{w}$
(b) $\vec{v} - \vec{w}$
(c) $3\,\vec{v} + \alpha\,\vec{w}$
(d) $\vec{v} - 3\,\vec{w}$

**Exercício 18** Em Física, quando uma força constante atua sobre um objeto quando ele é deslocado, o trabalho realizado pela força é o produto do deslocamento pela componente da força na direção do movimento (figura ao lado). Se $\theta$ é o ângulo entre a força $\vec{F}$ e o vetor deslocamento $\overrightarrow{PQ}$:

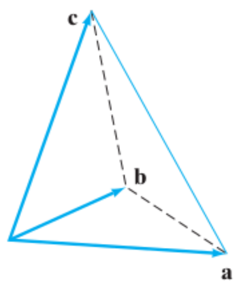
(a) mostre que o trabalho é dado por $\vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

(b) determine o trabalho realizado por $\vec{F} = \vec{i} + 5\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ movendo um objeto do ponto $(1, -1, 1)$ ao ponto $(2, 0, -1)$.




**Exercício 18**

**Exercício 19** Suponha que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são não coplanares em $\mathbb{R}^3$, de moque que eles formam um tetrahedron (figura ao lado). Obtenha a expressão para a área da superfície desse tetrahedron em termos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. (**Nota:** mais de uma forma é possível.)




**Exercício 19**

**Exercício 20** Represente os vetores

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i}\,\cos\alpha + \vec{j}\,\text{sen}\,\alpha \\ \vec{v} = \vec{i}\,\cos\beta - \vec{j}\,\text{sen}\,\beta \\ \vec{w} = \vec{i}\,\cos\beta + \vec{j}\,\text{sen}\,\alpha\,, \end{cases}$$

no plano $xy$. Mostre que

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,.$$

**Exercício 21** Um curso tem quatro exames com pesos 10%, 15%, 25% e 50%, respectivamente. A média da turma em cada desses exames é 75%, 91%, 84% e 87%, respectivamente. O que os vetores $\vec{p} = (0.10,\ 0.15,\ 0.25,\ 0.50)$ e $\vec{n} = (0.75,\ 0.91,\ 0.84,\ 0.87)$ representam em termos do curso? Calcule $\vec{p} \cdot \vec{w}$. Discuta o resultado obtido.

**Exercício 22** Um ponto $P$ se move de tal modo que sua distância a origem do sistema de coordenadas é sempre um valor constante $R$. Mostre que:

(a) se o ponto está se movmento em três dimensões, o lugar geométrico representa uma esfera de raio $R$.

(b) se o ponto se move em duas dimensões, o lugar geometríco representa uma circuferência de raio $R$.

(c) e em uma dimensão? Discuta!

**Exercício 23** Obtenha a distância dos pontos à reta:

(a) $P(2, 1)$, $\quad 2x - y + 5 = 0$.

(b) $P(0, 1)$, $\quad 3x + 4y - 2 = 0$.

(c) $P(2, -2)$, $\quad 3x - y = 0$.

(d) $P(3, 0)$, $\quad x + 5y - 10 = 0$.

**Exercício 24** Obtenha o ângulo entre as retas:

(a) $x - y + 4 = 0, \quad x - 4y + 5 = 0$.

(b) $2x + 3y = 0, \quad x - 5y - 4 = 0$.

(c) $2x - y - 3 = 0, \quad x + 3y - 20 = 0$.

(d) $2x + y - 40 = 0, \quad 4x + 2y - 1 = 0$.

**Exercício 25** Determinar a equação do plano que passa pela origem de coordenadas e é paralelo ao plano $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

**Exercício 26** Obtenha a equação do plano que passa

(a) pelo eixo $0x$ e pelo ponto $(4-1,2)$;
(b) pelo eixo $0y$ e pelo ponto $(1,4,-3)$;
(c) pelo eixo $0z$ e pelo ponto $(3,-4,7)$.

**Exercício 27** Encontre os pontos de interseção do plano $2x-3y-4z-24=0$ com os eixos coordenados.

**Exercício 28** Determinar a área do triângulo intersectado no ângulo coordnado $0xy$ pelo plano $5x-6y+3z+120=0$.

**Exercício 29** Duas faces de um cubo estão nos planos

$$2x-2y+z-1=0$$
$$2x-2y+z+5=0\ .$$

Determine o volume deste cubo.

**Exercício 30** Determine:
(a) no eixo $0y$, um ponto que se encontra a uma distância $d=4$ do plano $x+2y-2z-2=0$.
(b) no eixo $0x$, um ponto equidistante dos planos

$$12x-16y+15z+1=0\ , \qquad 2x+2y-z-1=0\ .$$

**Exercício 31** Determinar as equações dos planos paralelos ao plano $2x-2y-z-3=0$, que estão à distância $d=5$ dele.

**Exercício 32** Verifique se o ponto $(3,2,-1)$ está situado em um ângulo agudo ou obtuso formado pelos planos

$$5x-y+z+3=0\ , \qquad 3x+5y-5z+3=0$$

**Exercício 33** Encontrar os pontos de interseção da reta

$$\begin{cases} 2x+y-z-3 & =0 \\ x+y+z-1 & =0\ . \end{cases}$$

**Exercício 34** Verique que a reta

$$\begin{cases} 2x-3y+5z-6 & =0 \\ x+5y-7z+10 & =0\ , \text{corta o eixo } 0y. \end{cases}$$

**Exercício 35** Obter a partir da família de planos

$$2x-3y+z-3+k\,(x+3y+2z+1)=0$$

um plano que:
(a) passa pelo ponto $(1,-2,3)$;
(b) seja paralelo ao eixo $0x$;
(c) seja paralelo ao eixo $0z$.

**Exercício 36** Determine a equação do plano que passa plea reta de interseção dos planos

$$2x-y+3z-5=0\ , \qquad x+2y-z+2=0$$

e é paralelo ao vetor $\vec{v}=(2,-1,-1)$.

**Exercício 37** Obter as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos:

(a) $(3,-1,2)$ e $(2,1,1)$; (b) $(1,1,-2)$ e $(3,-1,0)$.

**Exercício 38** Através dos pontos $A(-6,6,-5)$ e $B(12,-6,1)$ é traçado uma reta. Determine os pontos de interseção desta reta com os planos coordenados.

**Exercício 39** Determinar as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $(2,3,-5)$ e é paralela à reta

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7 & =0 \\ x+3y-2z+3 & =0\ . \end{cases}$$

**Exercício 40** Obtenha as equações do movimento de um ponto $M(x, y, z)$, cuja posição inicial é $P_0(3, -1, -5)$, e o movimento é retilíneo e uniforme e segue na direção do vetor $\vec{s} = (-2, 6, 2)$ com velocidade $v = 21$.

## Respostas dos Exercícios Ímpares

1. $\sqrt{3}\,x - y + 2 = 0\,.$
3. Use a propriedade cíclica do produto vetorial.
5. $\vec{v} = \vec{i}$, $\vec{w} = a\vec{i} = a\vec{v}$. Logo, $|\vec{w}\,| = |a|\,|\vec{v}\,|$ .
7. (a) $\tan\theta = \dfrac{3}{5}$, (b) $\theta = \arctan\left(\dfrac{3}{5}\right)$ , (c) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{38}}{3}$ .
9. (a) tem Ãngulo maior que $\pi/2$, (b) Ãngulo menor que $\pi/2$, (c) Ãngulo menor que $\pi/2$, (d) Ãngulo maior que $\pi/2$,
11. $\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\pi/6),\ \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{sen}\,(\alpha+\pi/6)\right)$ em que $\alpha = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ .
13. (a) $-\mathrm{arcos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$, (b) $(x, y, z) = (1,\ 3z+2,\ z)\,.$
15. $\theta = \mathrm{arcos}\,(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\,)$
17. (a) $(5, -1, 3)$, (b) $-(1, 1, 1)$, (c) $(3\alpha+6, -3, 2\alpha+3)$, (d) $-(7, 1, 5)$.
19. Área da superfície (uma das representações): $\dfrac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{2} + \dfrac{|\vec{a}\times\vec{c}\,|}{2} + \dfrac{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}{2} + \dfrac{\left|\vec{c}\times\left(\vec{b}-\vec{a}\right) - \vec{a}\times\vec{b}\right|}{2}$.
21. $\vec{p}\cdot\vec{n} = 0.8565$ representa a média ponderada da turma nos exames.
23. (a) $\frac{8}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{2}{5}$, (c) $\frac{8}{\sqrt{10}}$, (d) $\frac{7}{\sqrt{26}}$.
25. $5x - 3y + 2z = 0\,.$
27. $(12, 0, 0)$, $(0, -8, 0)$, $(0, 0, -6)\,.$
29. $V = 8$.
31. $\pi_1 :\ 2x - 2y - z - 3 + 12 = 0,$ e $\pi_2 :\ 2x - 2y - z - 3 - 18 = 0.$
33. $(x, y, z) = \left(x, -\dfrac{3x-4}{2}, \dfrac{x-2}{2}\right)$ .
35. (a) $2x + 15y + 7z + 7 = 0$, (b) $9y + 3z + 5 = 0$, (c) $3x - 9y - 7 = 0$.
37. $x = 3 - t,\ y = 2t - 1,\ z = 2 - t\,.$
39. reta dada na questão (solução do sistema) $r_s :\ x = t,\ y = 2 - 2t,\ z = -\dfrac{5t-9}{2}$. Reta procurada $r_p :\ x = x_0 + s,\ y = y_0 - 2s,\ z = z_0 - \dfrac{5s}{2}$. Ou seja, $r_p :\ x = 2 + s,\ y = 3 - 2s,\ z = -5 - \dfrac{5s}{2}$.