CAPÍTULO 1

A LINGUAGEM DA LÓGICA PROPOSICIONAL

1.1 Introdução

Quando fazemos declarações, podemos, ou não, apresentar provas que apoiam o que estamos dizendo. E, se apresentamos, como devem ser essas provas? É a análise lógica que nos dará suporte na apresentação da prova que estamos procurando. Certamente, compreender como deve ser essa prova depende do entendimento de como as pessoas raciocinam. Pois, para justificar ou provar algo, o que fazemos é, geralmente, raciocinar. E, nesse contexto, as técnicas da Lógica podem ser aplicadas para compreendermos o nosso raciocínio, a nossa prova. Assim, um dos objetivos fundamentais da Lógica é proporcionar uma capacidade crítica que permita distinguir os argumentos, as inferências e as provas corretas. Para atingir o objetivo de desenvolver nossa capacidade crítica, iniciamos o estudo da Lógica considerando o sistema lógico mais simples: a Lógica Proposicional. O estudo dessa Lógica[1] segue fundamentalmente os três passos básicos:

1. Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Tal representação considera os conceitos de sintaxe e semântica associados é linguagem.
2. Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos

[1] E também da Lógica de Predicados, considerada na segunda parte deste livro.

válidos. A verificação do conceito semântico de tautologia, ou validade, de fórmulas sintáticas da linguagem é um exemplo desse estudo.

3. Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de conhecimento a partir daquele representado previamente, o que também define a noção de consequência lógica.

Este capítulo analisa os elementos fundamentais da sintaxe da linguagem da Lógica Proposicional. Essa análise corresponde ao início do estudo do item 1 dos três passos básicos do estudo da Lógica. Os capítulos posteriores dão continuidade a análise, considerando os outros passos.

A definição da linguagem da Lógica Proposicional é semelhante a definição de outras linguagens, como a linguagem da língua portuguesa. O alfabeto, que é constituído pelos símbolos que formam as palavras da linguagem,é definido inicialmente. No caso do alfabeto da língua portuguesa, ele é formado pelo conjunto de letras $\{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\}$. Em seguida, as palavras da linguagem são definidas. A concatenação das letras "d" e "e" forma a palavra "de", que pertence *à* linguagem da língua portuguesa. Por outro lado, a concatenação das letras "e" e "d", cujo resultado é "ed", não forma uma palavra dessa linguagem. Nas línguas naturais, como a portuguesa, em geral temos os dicionários, nos quais estão listadas todas as suas palavras. A partir da combinação dessas palavras, seguindo as regras da gramática do idioma, são formadas as sentenças. No caso de uma linguagem como a da Lógica, não há algo que corresponda a um dicionário, mas há regras gramaticais para a formação das sentenças. Uma gramática, a propósito, é um conjunto de regras que determinam como as palavras e os símbolos do alfabeto devem ser combinados para formar sentenças. Nas linguagens naturais, como o português, as sentenças podem ser classificadas de diversas formas: interrogativas ("Qual é o seu nome?"); imperativas ("Lave as panelas agora!"); ou declarativas ("José é uma pessoa legal"). No caso da Lógica considerada neste livro, as sentenças que são objetos de estudo são as sentenças declarativas.[2] Portanto, a linguagem da Lógica considerada neste texto tem como objetivo o estudo de sentenças do tipo: "está chovendo", que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Além disso, para simplificar, desconsiderando uma análise filosófica [Gabbay], [Goldstein], consideramos, neste texto, que uma sentença é uma sequência de palavras que obedecem a certas regras gramaticais[3] e semânticas. Uma proposição, por exemplo, é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Definir proposição dessa forma é uma grande simplificação, pois pode haver grandes discordências sobre o que são, exatamente, as sentenças declarativas que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Como tratar, por exemplo, as sentenças ambóguas? Quando elas podem ser consideradas ambíguas? Assim, para simplificar, consideramos neste livro somente os casos nos quais as proposições não podem ser uma sentença ambígua como: "Eu

[2]há Lógicas não clássicas que consideram sentenças imperativas e interrogativas.

[3]As regras da gramática da linguagem natural.

vi José com uma luneta." Essa sentença é ambígua pois pode significar dois fatos: eu estava utilizando uma luneta e vi José; ou eu vi José, que estava utilizando uma luneta. Além disso, para simplificar, as sentenças: "José comeu o bolo" e "O bolo foi comido por José" são representações da mesma proposição, ou seja: são consideradas equivalentes. Isso ocorre porque a Lógica se preocupa apenas com o conteúdo e significado de uma sentença declarativa, e não com a sua sequência de palavras. Além disso, na Lógica apresentada neste livro, o tempo verbal também não seria considerado. "José come o bolo", "José comeu o bolo" e "José comeu o bolo" são sentenças que possuem a mesma representação. Os filósofos utilizam o termo "proposição" de muitas maneiras, e não é nosso objetivo uma análise profunda desse tema. Queremos apenas dizer que "proposição" é frequentemente usada como sinônimo de "conteúdo" e, portanto, nesse sentido, podemos dizer que as proposições são as portadoras primárias de verdade e falsidade. Quando dizemos que uma certa sentença declarativa é verdadeira ou falsa, estamos falando que seu conteúdo é verdadeiro, ou falso. Mas, afinal, por que devemos definir uma linguagem formal para estudar Lógica? Uma linguagem com símbolos proposicionais, de pontuação e conectivos? A resposta para essa questão é complexa e depende do estudo da Lógica propriamente dita. Entretanto, podemos elucidar algumas coisas a esse respeito. Considere o argumento: "Se está chovendo, então a rua está molhada. está chovendo. Portanto, a rua está molhada." Considere também o argumento: "Se tenho mais de um milhão de dólares, então sou milionário. Tenho mais de um milhão de dólares. Portanto, sou milionário." Observe que utilizamos com frequência esses tipos de argumentos, em variadas formas. Do ponto de vista da Lógica, o que interessa é a forma desses argumentos. E todos têm a forma:

1. Se tra-la-lá, então tro-lo-lô.
2. Tra-la-lá.
3. Portanto, tro-lo-lô.

No último caso, "tra-la-lá" é uma variável que representa alguma proposição. Igualmente, "tro-lo-lô" também representa alguma proposição. Escrevendo de uma maneira mais formal, os argumentos anteriores podem ser escritos como: "Se $\breve{P}$, então $\breve{Q}$. $\breve{P}$. Portanto, $\breve{Q}$." Assim, temos uma conclusão importante. Quando utilizamos símbolos proposicionais ou variáveis proposicionais em uma fórmula, estamos interessados na forma da fórmula. Nesse caso, se o argumento anterior tem alguma propriedade importante, isso depende da sua forma e não necessariamente daquilo que os símbolos $\breve{P}$ e $\breve{Q}$ representam. Por essas razíes, entre outras, a Lógica é chamada de Lógica Formal, dado que nela a ênfase não é o estudo de argumentos expressos em linguagem natural. Em vez disso, estudamos a forma dos argumentos, que é revelada pelo uso de símbolos, como os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$. A definição da linguagem da Lógica Proposicional, que é uma linguagem formal, segue os seguintes passos: inicialmente é definido o alfabeto da linguagem; em seguida, são definidas as regras gramaticais que são utilizadas na construção de proposições a partir do alfabeto.

1.2 Alfabeto da Lógica Proposicional

Para iniciar o estudo da Lógica Proposicional, o nosso primeiro passo é definir o conjunto de símbolos utilizados na sua linguagem. Observe a

com o estudo das linguagens naturais. Por exemplo: para iniciar o estudo do chinês, o primeiro passo é, certamente, conhecer algo sobre o alfabeto da língua chinesa. Na Matemática também temos a mesma situação. Um dos primeiros passos do estudo formal da Matemática é conhecer os símbolos utilizados na linguagem matemática. No caso da Lógica Proposicional, o alfabeto da sua linguagem é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Definição 1.1 (alfabeto da Lógica Proposicional) *O alfabeto da Lógica Proposicional é constituído por:*

1. *símbolos de pontuação:* $($, $)$;
2. *símbolos proposicionais:* $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$;
3. *conectivos proposicionais:* $\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$.

Observe que o alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional é constituído de um conjunto infinito, enumerável de símbolos. Caso você não saiba, um conjunto é enumerável quando há uma correspondência biunívoca entre seus elementos e os números naturais, ou parte dos números naturais. No caso dos símbolos proposicionais, por exemplo, eles formam um conjunto infinito que é enumerável. Basta considerar a seguinte correspondência entre tal conjunto e os números naturais, como se segue: P corresponde ao número 0; Q corresponde ao número 1; R corresponde ao número 2; S corresponde ao número 3; P_1 corresponde ao número 4; Q_1 corresponde ao número 5; R_1 corresponde ao número 6; S_1 corresponde ao número 7; P_2 corresponde ao número 8; e assim por diante. Isso é diferente do que ocorre no alfabeto da língua portuguesa, que é formado por um conjunto finito de símbolos. O alfabeto da Lógica Proposicional é também dividido em três classes.

símbolos de pontuação. O alfabeto da Lógica Proposicional contém apenas dois símbolos para pontuação "(" e ")", que, evidentemente, são diferentes daqueles utilizados no alfabeto da língua portuguesa.

símbolos proposicionais. Os símbolos proposicionais são utilizados para representar as proposições na linguagem da Lógica. O símbolo P, por exemplo, pode ser utilizado para representar a proposição "está chovendo". Tal fato é indicado por: $P =$ "está chovendo", ou seja, P é igual a proposição "está chovendo". Como há um conjunto enumerável de símbolos proposicionais, é possível representar um conjunto enumerável de proposições. Isto é, como o conjunto dos símbolos proposicionais é infinito e enumerável, é possível representar um conjunto infinito e enumerável de proposições.

Conectivos proposicionais. Os conectivos proposicionais são símbolos utilizados frequentemente na matemática e possuem as seguintes denominações: o símbolo

$\neg$ é denominado por "não", $\vee$ por "ou", $\wedge$ por "e", $\rightarrow$ por "se então" ou "implica" e o símbolo $\leftrightarrow$ é denominado por "se, e somente se". O símbolo $\leftrightarrow$ também é denominado por "bi-implicação" e frequentemente é referenciado pelo acrônimo "sse".

Nota. Em geral, linguagens de computação utilizam, Além dos símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional, os símbolos de verdade. Tais símbolos são símbolos proposicionais especiais, pois, como veremos mais a frente, eles possuem interpretação fixa. Em vários textos e linguagens de programação, esses símbolos são denotados por *true* e *false*. Os símbolos de verdade são as palavras da língua inglesa *true* e *false*, que no presente contexto são consideradas apenas como símbolos. Entretanto, há também livros onde tais símbolos são representados de forma diferente.[4] Observe, então, que os símbolos de verdade não necessariamente fazem parte do alfabeto da Lógica Proposicional. Então, a rigor, utilizamos a Definição 1.1 como a definição dos símbolos do alfabeto. Entretanto, como os símbolos de verdade *true* e *false* são muito utilizados em Computação, em vários contextos, eles são admitidos como símbolos extras ao alfabeto, quando necessários.

1.3 fórmulas da Lógica Proposicional

Na língua portuguesa, não é qualquer concatenação de letras que forma uma palavra, como também não é qualquer concatenação de palavras que forma uma sentença. Analogamente, não é qualquer concatenação de símbolos do alfabeto que é uma fórmula da Lógica Proposicional. O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional, que são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto, é definido a seguir.

Definição 1.2 (fórmulas da Lógica Proposicional) *As fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional são construídas, de forma indutiva, a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir. O conjunto das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as regras:*

1. *todo símbolo proposicional é uma fórmula;*
2. *se H é uma fórmula, então $(\neg H)$, a negação de H, é uma fórmula;*
3. *se H e G são fórmulas, então a disjunção de H e G, dada por $(H \vee G)$, é uma fórmula;*
4. *se H e G são fórmulas, então a conjunção de H e G, dada por $(H \wedge G)$, é uma fórmula;*
5. *se H e G são fórmulas, então a implicação de H em G, dada por $(H \rightarrow G)$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o antecedente e G o consequente da fórmula $(H \rightarrow G)$;*

[4] há livros em que *true* e *false* são representados respectivamente por $\top$ e $\bot$ ou por *verum* e *falsum*.

6. se H e G são fórmulas, então a bi-implicação de H e G, dada por $(H \leftrightarrow G)$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula $(H \leftrightarrow G)$.

Na Definição 1.2, cada item define uma regra para a construção de fórmulas a partir de fórmulas mais simples. Observe que, nesse aspecto, a linguagem da Lógica Proposicional é diferente da linguagem da língua portuguesa, na qual não há regras para a construção de palavras e sentenças. Conforme as regras da Definição 1.2, as fórmulas mais elementares são consideradas no primeiro item. A regra 1 estabelece que todo símbolo proposicional é uma fórmula. Dessa regra decorre que todos os símbolos $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$ são fórmulas. Em seguida, utilizando as outras regras, é possível obter um conjunto infinito, enumerável, de fórmulas a partir daquelas mais elementares. Além disso, na formação das fórmulas, a partir da regra 2, os símbolos de pontuação são sempre utilizados. A Definição 1.2 estabelece uma gramática para a construção de fórmulas bem formadas. é importante observar que na língua portuguesa não existe um método para a construção das palavras e sentenças da linguagem. Além disso, o conjunto das palavras da língua portuguesa é finito, o que não ocorre com o conjunto das fórmulas, que é infinito.

Nota. Como os símbolos de verdade são símbolos proposicionais especiais, então eles são também fórmulas. Ou seja, no caso em que temos símbolos de verdade no alfabeto, então todo símbolo de verdade é uma fórmula.

Exemplo 1.1 (construção de fórmulas) Neste exemplo, vamos construir algumas fórmulas a partir das regras da Definição 1.2.

a) Conforme a regra 1, o símbolo $P_{10.000}$ é uma fórmula. Observe que nesse caso, temos o símbolo P com o subíndice 10.000. Estamos querendo lembrar que os símbolos P, Q, R ou S, com qualquer subíndice, mesmo os grandes, são fórmulas.

b) Conforme a regra 1, os símbolos P e Q são fórmulas.

c) A partir das fórmulas P e Q obtidas no item b) e utilizando a regra 3, obtemos a fórmula $(P \vee Q)$.

d) Utilizando a fórmula $(P \vee Q)$ obtida no item c), a fórmula $P_{10.000}$ do item a) e utilizando a regra 5, obtemos a fórmula $((P \vee Q) \rightarrow P_{10.000})$. ■

Observe que o raciocínio do exemplo anterior pode ser repetido indefinidamente. Isto é, as regras da Definição 1.2 podem ser aplicadas inúmeras vezes e, nesse caso, podem ser obtidas fórmulas bem grandes. Entretanto, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula, conforme explicamos no próximo exemplo.

Exemplo 1.2 (construção de fórmulas) As concatenações dos símbolos a seguir não constituem fórmulas: PR, $(RP_{10.000} \leftrightarrow)$ e $(P_{10.000} \rightarrow\leftrightarrow (RP_{10.000} \rightarrow))$. Nesses casos não é possível obter as concatenações a partir das regras da Definição 1.2. ■

Na linguagem da língua portuguesa, é frequente a omissão de símbolos de pontuação, ou acentos, o que nem sempre altera a compreensão dos significados das palavras e sentenças. Por exemplo, a palavra "José" é muitas vezes escrita como "Jose". A rigor, "Jose" não é uma palavra da língua portuguesa, pois não possui o acento necessário na letra "e". Mas, mesmo assim, não há dificuldade em compreender que a palavra "Jose" possa corresponder a correta palavra "José". Algo análogo também é considerado na Lógica Proposicional.

Notação. Neste livro, os parênteses ou símbolos de pontuação das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre a sua interpretação. Além disso, as fórmulas podem ser escritas em várias linhas para uma melhor leitura. Assim, a fórmula

$$(((P \lor R) \to P_{10.000}) \leftrightarrow (Q \land S))$$

pode ser escrita como:

$$\begin{array}{c} (P \lor R) \to P_{10.000} \\ \leftrightarrow \\ Q \land S \end{array}$$

ou ainda como $((P \lor R) \to P_{10.000}) \leftrightarrow (Q \land S)$. Uma outra forma de simplificar a escrita das fórmulas, omitindo símbolos de pontuação, é definir uma ordem de precedência dos conectivos. Nesse caso, o raciocínio é o mesmo da aritmética, na qual há uma ordem de precedência entre operações como adição, subtração, multiplicação, etc. Nesse caso, a ordem de precedência entre as operações possibilita a eliminação de parênteses das fórmulas. Considere, por exemplo, na aritmética, a expressão $2 + 4 \times 5$ Mesmo com a ausência de parênteses, todos sabem que essa expressão equivale a $(2 + (4 \times 5))$. Isso ocorre porque foi convencionado que a multiplicação tem precedência sobre a adição. Nesse caso, a multiplicação é executada inicialmente. Isso significa que, ao colocar os parênteses, eles ficam inicialmente perto da multiplicação. Conforme as convenções da aritmética, há também operações sem ordem de precedência entre si, como a multiplicação e a divisão. A expressão $4 \times 6 \div 3$ pode ter duas leituras: $((4 \times 6) \div 3)$ ou $(4 \times (6 \div 3))$. Nesse caso, em alguns livros, há uma convenção adicional. A operação mais à esquerda tem precedência sobre a segunda. Entre os conectivos, podemos definir uma precedência análoga a da aritmética. E essa ordem de precedência permite a simplificação das fórmulas com a eliminação de símbolos de pontuação.

Definição 1.3 (ordem de precedência) *Na Lógica Proposicional, a ordem de precedência dos conectivos proposicionais é definida por:*

1. *maior precedência:* $\neg$;
2. *precedência intermediária:* $\to$, $\leftrightarrow$;
3. *menor precedência:* $\land$, $\lor$.

Conforme a regra 1 da Definição 1.3, o conectivo $\neg$ tem precedência sobre os outros. Isso significa que na ausência de símbolos de pontuação, ele deve ser considerado primeiro. Observe que algo similar ocorre na aritmética, na qual a negação aritmética "-" tem precedência sobre todas as outras operações. Ou seja, $3 + -5 \times 3$ corresponde a expressão $(3 + ((-5) \times 3))$. Nesse caso, antes de efetuar a adição e a multiplicação, o número 5 é negado, e obtemos (-5). Voltando aos conectivos proposicionais, como na aritmética, há também aqueles casos em que não há relação de precedência. Por exemplo, conforme a regra 2 da Definição 1.3, os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ não possuem precedência um sobre o outro, e a fórmula $P \rightarrow Q \leftrightarrow R$ possui duas leituras correspondentes $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R)$ ou $(P \rightarrow (Q \leftrightarrow R))$. Nesse caso, podemos utilizar várias linhas para eliminar ambiguidades. A fórmula $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R)$ pode ser escrita como:

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \leftrightarrow \\ R \end{array}$$

Até agora, apresentamos o alfabeto e as fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional. Demos os primeiros passos para entender essa linguagem e seus significados. Entretanto, observe que ainda não consideramos o significado das fórmulas. Neste ponto, cada fórmula é vista apenas como uma concatenação de símbolos. Isso equivale a apresentar a palavra da língua portuguesa "saudade" a uma pessoa que não sabe português. A pessoa sabe que "saudade" pertence à língua portuguesa porque está no dicionário. Entretanto, é necessário mais informação para que ela saiba o significado dessa palavra. As fórmulas estão sendo apresentadas apenas sintaticamente e seu significado é estudado no próximo capítulo.

1.4 Linguagem-objeto e Metalinguagem

Quando definimos uma linguagem, como a da Lógica, é necessário ter em mente a diferença entre linguagem-objeto e metalinguagem. Por exemplo: "I love New York"é uma sentença com quatro palavras da língua inglesa". Essa sentença expressa uma informação sobre a sentença: "I love New York". Temos uma sentença da língua portuguesa que expressa algo sobre outra sentença da língua inglesa. Nesse caso, a sentença "I love New York" pertence à linguagem-objeto, e, portanto, o inglês é a linguagem-objeto. Por outro lado, nesse caso, o português é a metalinguagem. Analogamente, na Lógica também há sentenças que expressam informação sobre fórmulas. Considere a sentença: "A concatenação de símbolos $((P \vee Q) \rightarrow P_{10.000})$ é uma fórmula da Lógica Proposicional." Nesse caso, a linguagem da Lógica Proposicional é a linguagem-objeto, e a linguagem portuguesa é a metalinguagem. Ou seja, as palavras da língua portuguesa: "A concatenação de símbolos ... é uma fórmula da Lógica Proposicional." pertencem a metalinguagem. Por outro lado, a fórmula: $((P \vee Q) \rightarrow P_{10.000})$ pertence à linguagem-objeto, que neste caso é a linguagem da Lógica Proposicional. Mas por que estamos tão preocupados em distinguir linguagem-objeto de metalinguagem? Porque fazer tal distinção facilita o entendimento das definições que estabelecem as regras para formação das fórmulas da Lógica Proposicional. Considere, por exemplo, a Definição 1.1. Nessa definição, temos os três itens:

1. símbolos de pontuação: $($, $)$;
2. símbolos proposicionais: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$;
3. conectivos proposicionais: $\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$.

No item 1, a expressão "símbolos de pontuação:" pertence à metalinguagem, que nesse caso é o português. Isso significa que estamos utilizando o português para explicar os símbolos da linguagem-objeto. Já os símbolos "(" e ")" pertencem a linguagem-objeto. Isso, porque eles pertencem a linguagem da Lógica. Observe que a vírgula entre "($''$ e ")$''$ não pertence à linguagem-objeto, dado que tal vírgula não pertence ao alfabeto da Lógica. Algo semelhante ocorre no item 2. A expressão "símbolos proposicionais" pertence à metalinguagem. E os símbolos P e Q e R e S e P_1 e Q_1 e R_1 e S_1 e P_2 e Q_2, etc. pertencem a linguagem-objeto. Isso porque eles pertencem a linguagem da Lógica. Novamente, observe que as vírgulas entre os símbolos P e Q e R e S e P_1 e Q_1 e R_1 e S_1 e P_2 e Q_2 etc. não pertencem a linguagem-objeto, dado que tais vírgulas não pertencem ao alfabeto da Lógica. Na verdade, tudo isso parece um preciosismo. Mas não é bem assim. Isso também é importante para entender outros tipos de definição, principalmente, aquelas que utilizam variáveis da metalinguagem.

1.5 Variáveis

A utilização de variáveis em matemática é comum e facilita expressar leis como a igualdade $(x-y)(x+y)=(x^2-y^2)$, na qual x e y são variáveis que representam números. Imagine descrever essa igualdade sem a utilização de variáveis. Certamente, seria bem mais difícil. Entretanto, o uso de variáveis facilita, pois x e y podem representar qualquer número. Da mesma forma, para expressar de maneira mais simples as leis da Lógica, as variáveis são também utilizadas. Entretanto, em Lógica há dois tipos de variáveis: as que pertencem a linguagem-objeto e aquelas que pertencem a metalinguagem. As primeiras serão consideradas na segunda parte deste livro, na Lógica de Predicados. Porém variáveis da metalinguagem podem ser utilizadas para representar símbolos proposicionais e fórmulas. Imagine a situação em que é necessário falar alguma coisa sobre qualquer símbolo proposicional. Dizer, por exemplo, que uma fórmula que contém apenas um símbolo proposicional tem comprimento igual a 1. Isso poderia ser expresso de várias formas, como por exemplo:

- comprimento de P é igual a 1; comprimento de Q é igual a 1; comprimento de R é igual a 1.

- se H é uma fórmula do tipo: P, ou Q, ou R, etc. então o comprimento de H é igual a 1.
- se $H = P$, ou $H = Q$, ou $H = R$, etc. então o comprimento de H é igual a 1.

Entretanto, se for utilizada a noção de variável da metalinguagem, tudo fica mais simples. Suponha que o símbolo, maluco, $\otimes$ seja um símbolo da metalinguagem, utilizado para se referir a qualquer símbolo proposicional. Ou seja, $\otimes$ é utilizado como a variável x da matemática que pode ser substituída por qualquer número. Portanto, podemos ter: $x = 1$, ou $x = 2$, etc. E, da mesma forma, podemos ter: $\otimes = P$, ou $\otimes = Q$ etc. Observe que $\otimes$ é utilizado como uma variável que varia no conjunto do símbolos proposicionais. E utilizando tal variável da metalinguagem, fica bem mais simples dizer que uma fórmula que contém apenas um símbolo proposicional tem comprimento igual a 1.

- se $H = \otimes$, então o comprimento de H é igual a 1.

Mas, é claro, não utilizaremos símbolos tão obscuros como $\otimes$ para denotar variáveis da metalinguagem.

Notação. As variáveis da metalinguagem que denotam os símbolos proposicionais são escritas como: $\breve{P}$, com possíveis subíndices. Portanto, por esta notação, temos a letra P com um pequeno risco na parte de cima. Isso significa, por exemplo, que $\breve{P}$ pode denotar qualquer um dos símbolos: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, \ldots$. Analogamente, as variáveis A, B, C, D, E, H, G com possíveis subíndices denotam fórmulas. A variável H_2 pode denotar, por exemplo, a fórmula $(P \rightarrow Q)$. Portanto, letras como: $\breve{P}, A, B, C, D, E, H$ são elementos da metalinguagem que denotam símbolos proposicionais e fórmulas da Lógica Proposicional. Isso significa, por exemplo, que, a rigor, $(\breve{P}_1 \rightarrow \breve{P}_2)$ não é uma fórmula da Lógica Proposicional. Essa expressão é uma denotação de fórmulas do tipo $(P \rightarrow Q)$ e $(R \rightarrow S)$. Do mesmo modo, $(H \vee G)$ não é uma fórmula, mas a denotação de uma fórmula do tipo $((P \rightarrow Q) \vee (R \wedge S))$, onde H é substituída por $(P \rightarrow Q)$ e G por $(R \wedge S)$. Geralmente, expressões do tipo $(\breve{P}_1 \rightarrow \breve{P}_2)$ e $(H \vee G)$ são denominadas esquemas de fórmulas. Os esquemas de fórmulas se transformam em fórmulas quando as variáveis da metalinguagem são substituídas por símbolos e fórmulas da Lógica. Vale a pena observar nas definições a seguir, a utilização de variáveis que representam símbolos proposicionais e fórmulas.

1.6 Características sintáticas das fórmulas

Algumas características sintáticas, definidas a partir das fórmulas da Lógica Proposicional, como o comprimento e as subfórmulas, são consideradas a seguir. O comprimento de uma fórmula da Lógica Proposicional, por exemplo, é um conceito frequentemente utilizado em demonstrações que utilizam indução finita, como será visto a partir do capítulo 5.

Definição 1.4 (comprimento de uma fórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. O comprimento de H, denotado por $comp[H]$, é definido como se segue.*

1. *Se $H = \check{P}$, então $comp[H] = 1$;*
2. *$comp[\neg H] = comp[H] + 1$;*
3. *$comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
4. *$comp[H \wedge G] = comp[H] + comp\ [G] + 1$;*
5. *$comp[H \rightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
6. *$comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$.*

Conforme a Definição 1.4, os símbolos de pontuação não são considerados no cílculo do comprimento. O comprimento de uma fórmula é obtido contando apenas os símbolos proposicionais, tanto os de verdade quanto os conectivos proposicionais.

Exemplo 1.3 (comprimento de uma fórmula) As fórmulas

$$(P \rightarrow Q), \quad ((P \wedge Q) \leftrightarrow P)$$

têm comprimentos iguais a 3 e 5, respectivamente. ∎

Outro conceito sintático sobre fórmulas é a ideia de subfórmula, que, informalmente, é um pedaão da fórmula que é fórmula.

Definição 1.5 (subfórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, então:*

1. *H é uma subfórmula de H;*
2. *se H é uma fórmula do tipo $(\neg G)$, então G é uma subfórmula de H;*
3. *se H é uma fórmula do tipo: $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H;*
4. *se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.*

Exemplo 1.4 (subfórmulas) As subfórmulas de $(((P \vee S) \wedge Q) \leftrightarrow R)$ são:

$$(((P \vee S) \wedge Q) \leftrightarrow R), \ ((P \vee S) \wedge Q), \ R, \ (P \vee S), \ Q, \ P, \ S. \ \blacksquare$$

1.7 símbolos de Pontuação

Conforme a Definição 1.2, as únicas fórmulas que não possuem símbolos de pontuação são aquelas com um único símbolo proposicional. Tais fórmulas são determinadas conforme a regra 1 da definição. Daí para a frente, as outras regras sempre introduzem símbolos de pontuação para obter fórmulas maiores a partir de outras menores. A regra 2, por exemplo, diz que dada uma fórmula qualquer H, então $(\neg H)$, a negação de H, também é uma fórmula. Observe que nesse caso, a fórmula $(\neg H)$ é obtida a partir de H, pela adição dos símbolos de pontuação "(" e ")". O mesmo ocorre quando usamos as outras regras: 3, 4, 5 e 6, que também constroem fórmulas maiores a partir de outras menores. Assim, se tais regras forem repetidas muitas vezes, obtemos fórmulas com um comprimento grande e com muitos símbolos de pontuação, ou parênteses. Observe a sequência de fórmulas a seguir, que começa com fórmulas de comprimento igual a 1. Em seguida, as outras fórmulas são obtidas das precedentes, utilizando as regras da Definição 1.2 e introduzindo inúmeros parênteses.

1. pela regra 1, P, Q, R e S são fórmulas;
2. pela regra 5, $(P \rightarrow Q)$ é fórmula;
3. pela regra 2, $(\neg R)$ é fórmula;
4. pela regra 3, $(S \vee P)$ é fórmula;
5. pela regra 6, $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$ é fórmula;
6. pela regra 5, $((S \vee P) \rightarrow P)$ é fórmula;
7. pela regra 4, $(((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))$;
8. pela regra 5,
   $((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)))$
   é fórmula.

Observe a última fórmula:

$$((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))).$$

Ela possui 20 símbolos de pontuação, que, a rigor, somente são utilizados para estabelecer a correta relação entres os símbolos proposicionais e conectivos presentes na fórmula. Em outras palavras, como analisamos no próximo capítulo, para interpretar uma fórmula como essa, devemos dar significados para os símbolos proposicionais e para os conectivos. Isso significa que para interpretar a fórmula anterior, a rigor, não é necessário interpretar os parênteses. Ou seja, os 20 parênteses são utilizados somente para separar, corretamente, os símbolos da fórmula. Do ponto de vista computacional, isso é uma perda de espaço. Isto é, armazenar os 20 parênteses exige memória do computador. Para solucionar esse problema, podemos escrever as fórmulas da Lógica Proposicional sem a utilização de símbolos de pontuação e sem que haja confusão na sua interpretação. Isso é obtido, utilizando a notação polonesa, que é definida a seguir. Conforme a Definição 1.2, os conectivos proposicionais diferentes de $\neg$ devem ser escritos na forma infixa. Isto é, o conectivo $\vee$, por exemplo, deve ser escrito entre duas fórmulas. A Definição 1.2 pode ser modificada, possibilitando escrever os conectivos na notação prefixa, estabelecendo uma nova notação, denominada notação polonesa.

Definição 1.6 (fórmula com notação polonesa) *Na notação polonesa, as fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional são construídas, de forma indutiva, a partir dos símbolos do alfabeto, conforme as regras a seguir. O conjunto das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as regras:*

1. *todo símbolo proposicional é uma fórmula:*
2. *se H é uma fórmula, então $\neg H$, a negação de H, é uma fórmula;*
3. *se H e G são fórmulas, então a disjunção de H e G, dada por $\vee HG$, é uma fórmula;*
4. *se H e G são fórmulas, então a conjunção de H e G, dada por $\wedge HG$, é uma fórmula;*
5. *se H e G são fórmulas, então a implicação de H em G, dada por $\rightarrow HG$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o antecedente e G o consequente da fórmula $\rightarrow HG$;*
6. *se H e G são fórmulas, então a bi-implicação de H e G, dada por $\leftrightarrow HG$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula $\leftrightarrow HG$.*

Conforme a Definição 1.6, as fórmulas são construídas sem a utilização de símbolos de pontuação. Nesse caso, para construir a fórmula

$$(((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)))$$

utilizando a notação polonesa, temos a seguinte sequência.

1. pela regra 1, P, Q, R e S são fórmulas;
2. pela regra 5, $\rightarrow PQ$ é fórmula;
3. pela regra 2, $\neg R$ é fórmula;
4. pela regra 3, $\vee SP$ é fórmula;
5. pela regra 6, $\leftrightarrow \rightarrow PQ\neg R$ é fórmula;
6. pela regra 5, $\rightarrow \vee SPP$ é fórmula;
7. pela regra 4, $\wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ\neg R \rightarrow \vee SPP$ é fórmula;
8. pela regra 5, $\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ\neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ\neg R$ é fórmula.

Na notação polonesa, a fórmula resultante é:

$$\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ\neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ\neg R$$

Observe que essa fórmula não possui nenhum símbolo de pontuação. Entretanto, só um computador para entender essa fórmula. é isso mesmo, as fórmulas na notação polonesa são adequadas para manipulação em computadores. Entretanto, sua leitura não é imediata. Na apresentação precedente, mostramos como construir uma fórmula na notação polonesa a partir da Definição 1.6. Entretanto, dada uma fórmula na notação convencional, temos um algoritmo para obter a correspondente fórmula na notação polonesa. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.5 (notação polonesa) Este exemplo transforma a fórmula a seguir para a fórmula correspondente na notação polonesa:

$$((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))).$$

O processo de transformação para a notação polonesa inicia enumerando todos os conectivos da fórmula:

1. $((((P \rightarrow_1 Q) \leftrightarrow_2 (\neg_3 R)) \wedge_4 ((S \vee_5 P) \rightarrow_6 P)) \rightarrow_7 ((P \rightarrow_8 Q) \leftrightarrow_9 (\neg_{10} R)))$

No próximo passo, as subfórmulas mais internas são sublinhadas:

2. $(((\underline{(P \rightarrow_1 Q)} \leftrightarrow_2 \underline{(\neg_3 R)}) \wedge_4 (\underline{(S \vee_5 P)} \rightarrow_6 P)) \rightarrow_7 (\underline{(P \rightarrow_8 Q)} \leftrightarrow_9 \underline{(\neg_{10} R)}))$

Então, cada uma das subfórmulas sublinhadas é transformada para a notação polonesa. Além disso, o número associado ao seus conectivos são retirados. Isso, porque tais conectivos já foram transformados para a notação prefixa:

3. $(((\rightarrow PQ \leftrightarrow_2 \neg R) \wedge_4 (\vee SP \rightarrow_6 P)) \rightarrow_7 (\rightarrow PQ \leftrightarrow_9 \neg R))$

Em seguida, sublinhamos as subfórmulas mais internas, que correspondem a conectivos enumerados:

4. $((\underline{(\rightarrow PQ \leftrightarrow_2 \neg R)} \wedge_4 \underline{(\vee SP \rightarrow_6 P)}) \rightarrow_7 \underline{(\rightarrow PQ \leftrightarrow_9 \neg R)})$

Depois disso, as fórmulas sublinhadas são transformadas para a notação polonesa, considerando os conectivos enumerados:

5. $((\leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \wedge_4 \rightarrow \vee SPP) \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)$

Em seguida, a fórmula mais interna é sublinhada:

6. $(\underline{(\leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \wedge_4 \rightarrow \vee SPP)} \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)$

Transformando fórmula mais interna para a notação polonesa, temos.

7. $(\wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)$

Então, seguindo o raciocínio anterior, toda a fórmula é sublinhada, pois só há um conetivo enumerado.

8. $\underline{(\wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)}$

Finalmente, a fórmula é transformada para a notação polonesa.

9. $\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$ ■

Exemplo 1.6 (notação polonesa) Este exemplo transforma a fórmula a seguir, que está na notação polonesa, para a correspondente fórmula na notação usual.

$$\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$$

O processo de transformação inicia sublinhando as subfórmulas mais internas.

1. $\rightarrow \wedge \leftrightarrow \underline{\rightarrow PQ}\ \underline{\neg R} \rightarrow\ \underline{\vee SP}\ P \leftrightarrow\ \underline{\rightarrow PQ}\ \underline{\neg R}$

Então, cada uma das subfórmulas sublinhadas é transformada para a notação usual.

2. $\rightarrow \wedge \leftrightarrow (P \rightarrow Q)\ (\neg R) \rightarrow\ (S \vee P)\ P \leftrightarrow\ (P \rightarrow Q)\ (\neg R)$

Em seguida, sublinhamos as subfórmulas mais internas, cujos conectivos estão na forma prefixa.

3. $\rightarrow \wedge \underline{\leftrightarrow (P \rightarrow Q)\ (\neg R)}\ \underline{\rightarrow\ (S \vee P)\ P}\ \underline{\leftrightarrow\ (P \rightarrow Q)\ (\neg R)}$

Então, as fórmulas sublinhadas são transformadas para a notação usual.

4. $\rightarrow \wedge((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))\ ((S \vee P) \rightarrow P)\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Em seguida, a fórmula mais interna é sublinhada.

5. $\rightarrow \underline{\wedge((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))\ ((S \vee P) \rightarrow P)}\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Transformando fórmula mais interna para a notação polonesa, temos.

6. $\rightarrow (((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Então, seguindo o raciocínio anterior, toda a fórmula é sublinhada, pois só há um conetivo na forma prefixa.

7. $\underline{\rightarrow (((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))}$

Finalmente, a fórmula é transformada para a notação usual.

8. $((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)))$

Observe que a fórmula obtida, na notação usual, é a fórmula inicial utilizada no Exemplo 1.5. ■

1.8 Exercícios

1. Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da Lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, em que os símbolos de pontuação podem ser omitidos.
   (a) $(PQ \vee P_{10.000})$
   (b) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg\neg R)$
   (c) $\neg\neg P$
   (d) $\vee Q$
   (e) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$

2. Responda as questáes a seguir, justificando suas respostas.
   (a) Existe fórmula sem símbolo de pontuação?
   (b) Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da Lógica Proposicional? Quais são esses símbolos?
   (c) Existe fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação?

3. Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.

   (a) $((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge P_{10.000}$

   (b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

   (c) $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$

   (d) $\neg(P \rightarrow \neg P)$

4. Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula original.

   (a) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$

   (b) $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

   (c) $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$

5. Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da Lógica Proposicional é possível obter.

   (a) $P \vee \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$

   (b) $Q \rightarrow \neg P \wedge Q$

   (c) $\neg P \vee Q \leftrightarrow Q$

   (d) $\neg\neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \neg\neg R$

6. (a) Escreva as fórmulas dos Exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.

   (b) Determine quais sequências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da Lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a sequência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.
   $\vee \rightarrow PQ \leftrightarrow R \rightarrow \vee PQ \neg S$
   $\rightarrow \leftrightarrow PQ \vee \rightarrow PQ \rightarrow \neg RR$
   $\rightarrow \neg P \neg QR \vee \vee PQ \vee \neg R \neg P$
   $\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg\neg R \neg P$

7. Responda, justificando sua resposta.

   (a) É possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, escrita na notação convencional e que corresponda a duas fórmulas diferentes escritas na notação polonesa?

   (b) É possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa, que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional escritas na notação convencional?

8. Faça os Exercícios 5 e 6 considerando a notação pós-fixa, indicada pelas correspondências.
   $(\neg P)$ corresponde a $P\neg$
   $(P \wedge Q)$ corresponde a $PQ\wedge$
   $(P \vee Q)$ corresponde a $PQ\vee$
   $(P \rightarrow Q)$ corresponde a $PQ \rightarrow$
   $(P \leftrightarrow Q)$ corresponde a $PQ \leftrightarrow$
9. Qual a paridade do número de símbolos de pontuação de uma fórmula da Lógica Proposicional?
10. Seja H uma fórmula que não contém o conectivo $\neg$.
    (a) Qual a paridade de $comp[H]$?
    (b) Qual a relação entre $comp[H]$ e o número de conectivos de H?