Lógica Proposicional

Profª. Maely Moraes

Livro base: Souza, João Nunes, Lógica para Ciência da Computação, Editora Campus, 9ª tiragem.

Lógica Proposicional

A linguagem da Lógica Proposicional

Introdução

Alfabeto da Lógica Proposicional

- **Definição 1.1** (alfabeto) *O alfabeto da Lógica Proposicional é constituído por:*
  - *símbolos de pontuação: (;);*
  - *símbolos de verdade: true, false;*
  - *símbolos proposicionais:*

    $P; Q; R; S; P_1; Q_1; R_1; S_1; P_2; Q_2; \ldots;$
  - *conectivos proposicionais:* $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Fórmulas da Lógica Proposicional

- **Definição 1.2** (fórmula) *As fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional são construídas, de forma indutiva, a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir. O conjunto das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as regras:*
  - *todo símbolo de verdade é uma fórmula;*
  - *todo símbolo proposicional é uma fórmula;*
  - *se H é uma fórmula, então (¬H), a negação de H, é uma fórmula;*

Fórmulas da Lógica Proposicional

- **Definição 1.2** (fórmula)
  - *se H e G são fórmulas, então a disjunção de H e G; dada por: $(H \lor G)$; é uma fórmula;*
  - *se H e G são fórmulas, então a conjunção de H e G; dada por: $(H \land G)$; é uma fórmula;*
  - *se H e G são fórmulas, então a implicação de H em G; dada por: $(H \rightarrow G)$; é uma fórmula. Nesse caso, H é o antecedente e G o conseqüente da fórmula $(H \rightarrow G)$;*
  - *se H e G são fórmulas, então a bi-implicação de H e G; dada por: $(H \leftrightarrow G)$; é uma fórmula.*

    Nesse caso, H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula $(H \leftrightarrow G)$.

Fórmulas da Lógica Proposicional

Notação:

- No livro texto desta disciplina, os parênteses ou símbolos de pontuação das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre a sua interpretação. Além disso, as fórmulas podem ser escritas em várias linhas para uma melhor leitura.

  Assim, a fórmula: $(((P \lor R) \rightarrow \mathit{true}) \leftrightarrow (Q \land S))$

  pode ser escrita como

$$(P \lor R) \rightarrow \mathit{true}$$
$$\leftrightarrow$$
$$Q \land S$$

ou ainda como $((P \lor R) \rightarrow \mathit{true}) \leftrightarrow (Q \land S)$.

Ordem de Precedência

- **Definição 1.3** (ordem de precedência) *Na Lógica Proposicional, a ordem de precedência dos conectivos proposicionais é definida por:*
  - *maior precedência:* $\neg$;
  - *precedência intermediária:* $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
  - *menor precedência:* $\vee$, $\wedge$.

Linguagem-objeto e Metalinguagem

Variáveis

- **Notação.** Os símbolos proposicionais são representados por variáveis do tipo:

  $P^{\#}$, com possíveis subíndices.
- Neste caso, temos a letra P com um pequeno risco na parte de cima.

  Isso significa, por exemplo, que $P^{\#}_{1}$ pode representar qualquer um dos símbolos

  $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2 \ldots$
- As variáveis A, B, C, D, E, H e G com possíveis subíndices representam fórmulas.

  A variável H_2 pode representar, por exemplo, a fórmula $(P \rightarrow Q)$.

Linguagem-objeto e Metalinguagem

- Letras como P, A, B, C, D, E e H são elementos da metalinguagem que representam símbolos proposicionais e fórmulas em geral da Lógica Proposicional.
- Isso significa que, a rigor,

  $(P_1 \longrightarrow P_2)$

  não é uma fórmula da Lógica Proposicional.
- Essa expressão é a representação de fórmulas do tipo

  $(P \longrightarrow Q)$, $(R \longrightarrow S)$, etc.

Linguagem-objeto e Metalinguagem

- Do mesmo modo, $(H \vee G)$ não é uma fórmula, mas a representação de fórmulas do tipo
  $((P \rightarrow Q) \vee (R \wedge S))$,
  onde H é substituída por $(P \rightarrow Q)$
  e G por $(R \wedge S)$.
- Geralmente, expressões do tipo
  $(P_1 \rightarrow P_2)$ e $(H \vee G)$
  são denominadas esquemas de fórmulas.

Alguns Elementos Sintáticos das Fórmulas

- **Definição 1.4** (comprimento de uma fórmula) Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. O comprimento de H, denotado por comp[H], é definido como se segue.
  - Se H = P ou é um símbolo de verdade, então comp[H] = 1;
  - Comp[$\neg$H] = comp[H] + 1;
  - comp[H $\vee$ G] = comp[H] + comp[G] + 1;
  - comp[H $\wedge$ G] = comp[H] + comp [G] + 1;
  - comp[H $\rightarrow$ G] = comp[H] + comp[G] + 1;
  - comp[H $\leftrightarrow$ G] = comp[H] + comp[G] + 1.

Alguns Elementos Sintáticos das Fórmulas

- **Definição 1.5** (subfórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, então:*
  - *H é uma subfórmula de H;*
  - *se H é uma fórmula do tipo (¬G),*

    então G é uma subfórmula de H;
  - *se H é uma fórmula do tipo: (G ∨ E), (G ∧ E), (G → E) ou (G ↔ E),*

    então G e E são subfórmulas de H;
  - *se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.*