Lógica Proposicional

Profª. Maely Moraes

Livro base: Souza, João Nunes, Lógica para Ciência da Computação, Editora Campus, 9ª tiragem.

Lógica Proposicional

Propriedades semânticas da Lógica Proposicional

Introdução
Propriedades Semânticas

- **Definição 3.1 (propriedades semânticas básicas da Lógica Proposicional)**
- *Sejam* H, G, H_1, H_2,...,H_n, *fórmulas da Lógica Proposicional.*
  As propriedades semânticas básicas da Lógica Proposicional são definidas a seguir.
  - H *é uma tautologia,*
    se, e somente se,
    para toda interpretação I, I[H]= T .

Introdução
Propriedades Semânticas

- **Definição 3.1 (propriedades semânticas básicas da Lógica Proposicional)**
  - H *é satisfatível,*
    se, e somente se,
    existe uma interpretação I, *tal que* I[H]= T .
  - H *é uma contingência,*
    se, e somente se,
    existem duas interpretações I_1 *e* I_2*, tais que*
    $I_1[H] = T$ *e* $I_2[H] = F$.

Introdução
Propriedades Semânticas

- H *é contraditória,*

  se, e somente se,

  para toda interpretação I, I[H] = F .
- H *implica semanticamente* G,

  ou G *é uma conseqüência lógica semântica de* H,

  se, e somente se,

  para toda interpretação I, *se* I[H] = T, *então* I[G] = T .
- H *equivale semanticamente* G,

  se e somente se,

  para toda interpretação I, I[H] = I[G].

Introdução
Propriedades Semânticas

- *Dada uma interpretação* I,
  então
  I *satisfaz* H, *se* I[H] = T .
- *O conjunto* $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$ *é satisfatível,*
  se, e somente se,
  existe uma interpretação I, *tal que*
  $$I[H_1] = T, I[H_2] = T, \ldots = I[H_n] = T, \ldots.$$
  Nesse caso, I *satisfaz o conjunto de fórmulas.*

Introdução
Propriedades Semânticas

- *Dado um conjunto de fórmulas vazio, então toda interpretação* I *satisfaz esse conjunto.*

- *O conjunto* β = {H1,H2,...,Hn,...},

  implica semanticamente uma fórmula H,

  se para toda interpretação I;

  se I[β]= T, *então* I[H]= T.

  Nesse caso, também dizemos que H *é uma conseqüência lógica semântica de* G.

- **Notação.** Se um conjunto de fórmulas β implica semanticamente H,

  ou seja, H é conseqüência lógica semântica de G,

  então tal fato é indicado por β   H.

  No caso em que β é vazio,

  então é utilizada a notação   H.

- O símbolo $\models$ é, portanto, utilizado para denotar a implicação semântica ou conseqüência semântica, que relaciona interpretações de fórmulas.
- No caso em que β não implica semanticamente H, isto é,

  H não é conseqüência lógica semântica de G, é utilizada a notação: $\beta \not\models H$

- **Notação.** Da mesma forma,

  se H implica semanticamente G,

  isto é, G é uma conseqüência lógica semântica de H, denotamos esse fato por $H \models G$.

  No caso em que H não implica semanticamente G,

  isto é, G não é uma conseqüência lógica semântica de H,

  utilizamos a notação: $H \not\models G$.

- **Nota.**
  "implicação semântica"
  significa o mesmo que
  "conseqüência lógica semântica".
  Quanto do contexto está claro,
  "implicação", "conseqüência semântica" e "conseqüência“ tem o mesmo significado.

- **Notação.** Se uma interpretação I satisfaz o conjunto de fórmulas β,
  esse fato é indicado por $I[\beta]= T$.

O princípio do terceiro-excluído.

O princípio da não-contradição.

- **Nota.**
  Quando o contexto está claro,
  “equivalência semântica"
  e
  "equivalência"
  tem o mesmo significado.

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.1 (tautologia e contradição)** *Dada uma fórmula* H, *então:*

  H *é tautologia,*

  se, e somente se,

  ¬H *é contraditória.*

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.2 (tautologia e satisfatibilidade)** *Dada uma fórmula* H,

  se

  H *é tautologia*

  então

  H *é satisfatível.*

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.3 (tautologia e contradição)** *Dada uma fórmula* H*, então:*

  H *é tautologia,*

  se, e somente se,

  ¬H *é contraditória;*

  ¬H *não é satisfatível,*

  se, e somente se,

  ¬H *é contraditória.*

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.4 (implicação semântica e o conectivo $\rightarrow$)**

  Dadas duas fórmulas H *e* G,

  H   G,

  se, e somente se,

  (H $\rightarrow$ G) *é tautologia.*

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.5 (equivalência semântica e o conectivo $\leftrightarrow$)**

  Dadas as fórmulas H *e* G,

  H *equivale a* G,

  se, e somente se,

  ($H \leftrightarrow G$) *é tautologia.*

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.6 (equivalência e implicação semânticas)**

  Dadas duas fórmulas H *e* G,

  H *equivale a* G,

  se, e somente se,

  H   G *e* G   H.

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.7 (transitividade da equivalência semântica)**

  Dadas as fórmulas E, H *e* G,

  se

  E *equivale a* H

  e

  H *equivale a* G,

  então

  E *equivale a G.*

Relações entre as Propriedades Semânticas

- **Proposição 3.8 (satisfatibilidade)**

  Seja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *um conjunto de fórmulas.*

  $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *é satisfatível,*

  se, e somente se,

  $(H_1 \land (H_2 \land (\ldots \land H_n) \ldots))$ *é satisfatível.*

Equivalências

- **Conjectura 3.1 (equivalência e tautologia)**

  Sejam H *e* G *fórmulas da Lógica Proposicional, então*

  { H *equivale a* G*},*

  se, e somente se,

  *{*H *é tautologia, se, e somente se,* G *é tautologia}.*

  Esta conjectura indicada anteriormente é falsa, pois ela é composta de duas implicações, sendo uma delas falsa.

Equivalências

- **Proposição 3.9 (equivalência e tautologia)**

  Sejam H *e* G *duas fórmulas.*

  Se

  {H *equivale a* G},

  então

  { H *é tautologia, se, e somente se,* G *é tautologia*}.

- **Lema 3.1 (implicação e tautologia)** *Sejam* H *e* G *duas fórmulas.*

  Se

  { { H   G *} e {* H *é tautologia } },*

  então

  { G *é tautologia }.*

- **Lema 3.2 (implicação e conjunção)** *Dadas três fórmulas* A, B *e* C, *então*

  $$(A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$$

  equivale a

  $$((A \land B) \rightarrow C).$$

- **Lema 3.3 (implicação e tautologia)** *Sejam* H *e* G *duas fórmulas.*

  Se

  { H   G *},*

  então

  { H *é tautologia* ⇒ G *é tautologia }*

- **Teorema 3.1 (teorema da dedução -forma semântica)**

  Considere β *um conjunto de fórmulas e* A *e* B *duas fórmulas da Lógica Proposicional.*

$$\beta \cup \{A\} \vDash B,$$

se, e somente se,

$$\beta \vDash (A \rightarrow B)$$