CAPÍTULO 4

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO NA LÓGICA PROPOSICIONAL

4.1 Introdução

Estabelecer critérios e métodos para identificar a verdade é um dos principais objetivos do trabalho cognitivo humano, pois frequentemente perguntamos se alguma coisa é verdadeira ou não. Podemos ter algo verdadeiro em uma situação, de um certo ponto de vista, e falso em outra. Mas, o melhor mesmo seria encontrar um método para identificar a verdade que correspondesse, de forma exata, ao critério semântico de verdade que temos na cabeça. Em posse de tal aparato, poderíamos buscar por verdades universais, ou seja, algo verdadeiro em todas as situações, de todos os pontos de vista. Entretanto, é claro, um aparato assim está muito além do que podemos fazer. Isso é definitivamente um problema não trivial, pois, para começo de conversa, entender o que significa a verdade é um profundo tema filosófico. Mais ainda, estabelecer critérios e métodos para definir tal verdade parece estar além da nossa capacidade congnitiva. E sobre isso tem até alguns resultados, em textos mais avançados de Lógica[1]. Mas, nem tudo está perdido, pois no contexto da

[1] O teorema de Henkin demonstra que, para boas teorias, o conceito de verdade é indefinível [Smith].

Lógica Proposicional, tais conceitos são mais simples e são tratáveis. Ou seja, nesse contexto, é possível definir verdades universais, as tautologias, e encontrar métodos para identificá-las. Um dos passos frequentemente utilizados no estudo da Lógica corresponde à análise desses métodos, ou mecanismos, que verificam propriedades semânticas das fórmulas da Lógica Proposicional. Este capítulo analisa três métodos de dedução: tabela-verdade, negação, ou redução ao absurdo e *tableaux* semânticos. Como é visto a seguir, esses métodos se equivalem em muitos aspectos. Entretanto, dependendo da fórmula, há métodos mais eficientes na demonstração de propriedades semânticas. E tal eficiência é um importante tema de estudo em Computação.

4.2 Método da Tabela-Verdade

O método da tabela-verdade é o método da força bruta, utilizado na determinação de propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Isso ocorre porque nesse método, temos que analisar as linhas da tabela-verdade. E tal fato é, às vezes, um problema custoso. Veja por que: dada uma fórmula H, suponha que ela contenha apenas os símbolos proposicionais P e Q. Nesse caso, como já vimos inúmeras vezes, a tabela-verdade associada a H contém quatro linhas. Mas, se H contém os símbolos P, Q e R, então a tabela contém oito linhas. Suponha, por exemplo, o caso particular no qual $H = ((P \rightarrow Q) \wedge R)$. Nesse caso, a tabela-verdade associada a H, Tabela 4.1, contém oito linhas. Lembre que não contamos a primeira linha da tabela. Observe que a Tabela 4.1 contém todas as combinações de valores de verdade dos símbolos proposicionais.

P	Q	R	H
T	T	T	?
T	T	F	?
F	F	T	?
F	F	F	?
T	T	T	?
T	T	F	?
F	F	T	?
F	F	F	?

Tabela 4.1: Tabela-verdade associada a H.

Suponha, então, que, dada uma fórmula H tal que $H = ((P \rightarrow Q) \wedge R)$, se queira determinar se ela é satisfatível. Isto é, dado H e utilizando a sua tabela-verdade, queremos determinar se existe uma interpretação I tal que $I[H] = T$. Qual é o custo dessa operação, ou seja, de determinar se H é satisfatível? Para responder tal questão, devemos fazer duas análises.

Custo para verificar se $I[H] = T$. Dada uma linha qualquer da tabela, qual é o custo para saber se para tal linha, H é interpretada como verdadeira? Ou seja, qual o custo para determinar se $I[H] = T$? Nesse caso, devemos apenas analisar os símbolos de H. Ou seja, no pior caso, o custo dessa operação é proporcional à quantidade de símbolos de H. Um resultado de computação estabelece que, no pior caso, a quantidade de operações elementares necessárias para determinar se uma linha da tabela-verdade interpreta H como verdadeira é proporcional ao quadrado do número de símbolos de H[2]. Isso significa que, no caso da Tabela 4.1, o custo para determinar se $I[H] = T$, conforme a interpretação de uma linha da tabela-verdade, é, no pior caso, proporcional a 3^2, pois estamos supondo que H tem três símbolos.

Nota. Quando dizemos que H possui m símbolos, não estamos falando que H possui m símbolos proposicionais. Por exemplo, a fórmula:

$$((P \to Q) \wedge R) \to (Q \vee P)$$

possui 5 símbolos, apesar de conter apenas 3 três tipos diferentes de símbolos proposicionais.

Custo para percorrer as linhas da tabela-verdade. Para saber se $H = ((P \to Q) \wedge R)$ é satisfatível, devemos encontrar uma interpretação I tal que $I[H] = T$. No caso dessa fórmula em particular, a primeira linha já dá certo. Nessa linha, H é interpretada como sendo verdadeira. Mas, no caso geral, para encontrar tal interpretação, temos, no pior caso, que percorrer as 8 linhas da Tabela 4.1. Ou seja, devemos verificar, para cada uma das 2^3 linhas, se $I[H] = T$. E o custo para percorrer as linhas da tabela-verdade é proporcional a 2^3, que é igual ao número de linhas da tabela.

Custo para determinar se H é satisfatível. Para determinar se H é satisfatível, devemos procurar na Tabela 4.1 por uma interpretação I tal que $I[H] = T$. Logo, em geral, temos, no pior caso, que percorrer as 8 linhas da Tabela 4.1 e, além disso, verificar para cada uma delas se $I[H] = T$. Ou seja, o custo para determinar se H é satisfatível é igual ao produto dos dois custos anteriores. Esse custo é, no caso da Tabela 4.1, proporcional a $2^3 \times 3^2$.

Nota. O que significa o pior caso na determinação de um custo? No caso da verificação se $I[H] = T$, o pior caso ocorre quando é necessário analisar todos os símbolos de H. Já, no caso do custo para percorrer as linhas da tabela-verdade, o pior caso ocorre quando é necessário ir até à última linha da tabela-verdade.

Nota. O que significa dizer que o custo de uma operação é proporcional a $2^3 \times 3^2$ ou da ordem de $2^3 \times 3^2$? A rigor, estamos dizendo que para efetuar a operação necessitamos executar uma quantidade de operações elementares proporcional a $2^3 \times 3^2$. Por operações elementares estamos supondo operações básicas de um computador,

[2] Também, como pode ser demonstrado em Análise de Algoritmos, a rigor, esse custo tem uma ordem menor que o quadrado dos símbolos de H. Entretanto, na análise que se segue isso não tem importância e consideramos o custo proporcional ao quadrado do número de símbolos de H.

como adição, subtração, movimento entre posições de memória, operações lógicas, etc.

Suponha, agora, a fórmula $G = ((P \to Q) \wedge R) \to S$, que contém quatro símbolos proposicionais. Nesse caso, qual é o custo para determinar se G é satisfatível? Nesse caso, a tabela-verdade associada a G contém dezesseis linhas. Qual o custo para determinar uma interpretação I tal que $I[H] = T$?

P	Q	R	S	G
T	T	T	T	?
T	T	T	F	?
T	T	F	T	?
T	T	F	F	?
T	F	T	T	?
T	F	T	F	?
T	F	F	T	?
T	F	F	F	?
F	T	T	T	?
F	T	T	F	?
F	T	F	T	?
F	T	F	F	?
F	F	T	T	?
F	F	T	F	?
F	F	F	T	?
F	F	F	F	?

Tabela 4.2: Tabela-verdade associada a G.

Custo para verificar se $I[G] = T$. Conforme a análise anterior, o custo dessa operação é, no pior caso, proporcional ao quadrado do número de símbolos de G. Isso significa que, dado I, o custo para determinar se $I[G] = T$ é, no pior caso, proporcional a 4^2, pois G tem quatro símbolos proposicionais.

Custo para percorrer as linhas da tabela-verdade. Conforme a análise anterior, para encontrar uma interpretação I tal que $I[G] = T$, temos, no pior caso, que percorrer 16 linhas da Tabela 4.2. Isso significa que o custo para percorrer as linhas da tabela-verdade é proporcional a 2^4.

Custo para determinar se G é satisfatível. Conforme a análise anterior, para determinar se G é satisfatível, temos, no pior caso, um custo proporcional ao produto $2^4 \times 4^2$. A importante questão, nessa análise, é entender como evoluem os custos à medida que o número de símbolos proposicionais da fórmula aumenta. Essa evolução é obtida, generalizando o resultado anterior.

O caso geral. Considere, então, uma fórmula A que contém n símbolos proposicionais diferentes. Além disso, como alguns desses símbolos podem repetir, suponha que em A apareçam m símbolos proposicionais, com possíveis repetições. Nesse caso, temos:

Custo para determinar se A é satisfatível. Conforme a análise anterior, para determinar se A é satisfatível, temos, no pior caso, um custo proporcional ao produto $2^n \times m^2$. Veja, na Tabela 4.3, como esses custos evoluem à medida que n e m crescem. Verifique que o custo para percorrer as linhas cresce muito mais rápido do que o custo para verificar se uma linha da tabela interpreta a fórmula como verdadeira. Isso porque o custo para percorrer as linhas da tabela é proporcional a uma exponencial em n, dada por 2^n. E o custo de verificação é proporcional ao quadrado de m, isto é, m^2. Esse custo é proporcional a um polinômino em m, dado por m^2. E, como sabemos, a exponencial cresce muito mais rápido que o polinômio. Observe, na Tabela 4.3, como os números da terceira coluna crescem muito mais rápido do que os da segunda coluna. Na última linha, por exemplo, calculamos $20^2 = 400$. Por outro lado, o número 2^{20} é tão grande que não é possível escrevê-lo, sem utilizar a notação exponencial 2^{20}.

x	x^2	2^x
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
7	49	128
8	64	256
20	400	2^{20}

Tabela 4.3: Custo para encontrar I tal que $I[H] = T$.

Temos, pelo menos, quatro conclusões dessa análise.

1. O custo de verificação se uma linha da tabela-verdade interpreta uma fórmula como verdadeira é insignificante em relação ao custo para percorrer as linhas da tabela, que tem custo exponencial.
2. O custo para determinar se uma fórmula H é satisfatível corresponde, a grosso modo, ao custo para percorrer as linhas da tabela-verdade.
3. O custo para determinar se uma fórmula H é satisfatível é maior que um custo polinomial no número de símbolos de H.
4. O custo para determinar se uma fórmula H é satisfatível depende exponencialmente do número de símbolos de H.

Essa notícia é horrível, pois imagine uma fórmula com 20 símbolos proposicionais. Para determinar se ela é satisfatível, no pior caso, temos um custo da ordem de 2^{20} operações. Surge, então, uma questão óbvia. Existe algum método para identificar se uma fórmula H é satisfatível e que seja mais eficiente do que o método da tabela-verdade? Ou seja, existe algum método cujo custo tem ordem inferior a uma função exponencial? Um método que tenha, por exemplo, custo de ordem polinomial? Se você conseguir responder essa questão, afirmativa ou negativamente, ficará famoso e receberá um prêmio de um milhão de dólares. Isso, porque essa questão corresponde à solução do problema $P = NP$[3], que está em aberto e ainda não foi resolvido por ninguém. Vale a pena tentar! Portanto, para determinar a satisfatibilidade de uma fórmula H, não sabemos se existe método mais eficiente do que o da tabela-verdade. Entretanto, isso não nos impede de desenvolver outros métodos que têm vantagens sobre o método da tabela-verdade, mesmo não sendo mais eficientes do ponto de vista computacional.

O problema SAT. Até esse ponto, analisamos o custo para determinar se uma fórmula é satisfatível. Foi feito assim porque esse problema corresponde ao importante problema SAT, que resolve exatamente essa questão. Isto é, o problema SAT é o problema de identificar as fórmulas da Lógica Proposicional que são satisfatíveis. Entretanto, nada há de especial em relação à propriedade semântica da satisfatibilidade. Podemos, de forma inteiramente equivalente, considerar, no lugar da satisfatibilidade, outras propriedades semânticas como tautologia, contradição, etc. E nesses casos, toda a análise de custo feita anteriormente se aplica.

Considerando o custo exponencial, o método da tabela-verdade é mais adequado para fórmulas que contêm um pequeno número de símbolos proposicionais. Nesses casos, as tabelas são pequenas. Entretanto, quando a fórmula contém muitos símbolos proposicionais, isso não ocorre. Considere a fórmula

$$P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))).$$

Nesse caso, há sete símbolos proposicionais e a tabela-verdade associada a essa fórmula possui 128 linhas. Uma tabela um pouco grande para ser elaborada manualmente.

O método da tabela-verdade é um método de decisão. Dada uma fórmula H, utilizando o método da tabela-verdade é possível decidir se H possui, ou não possui, alguma propriedade semântica. Nesse sentido, dizemos que o método da tabela-verdade é um mecanismo de decisão. Ele sempre fornece uma decisão sobre a pergunta: H possui, ou não possui, determinada propriedade semântica?

4.3 Método da negação, ou redução ao absurdo

O método da negação, ou redução ao absurdo, analisado a seguir, é um método geral de demonstração que, neste contexto, é utilizado para demonstrar propriedades

[3]Para maiores detalhes sobre o problema $P = NP$, consulte [Cooper] e [Sipser].

semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Observamos que seus princípios podem ser visto como gerais e, dessa forma, podem ser utilizados em outros tipos de demonstração, como aquelas por refutação, que é uma técnica de demonstração comum em várias áreas da Computação e da Matemática. Apesar desse método, do ponto de vista do custo computacional, não ser mais eficiente que o método da tabela-verdade, ele tem suas vantagens para alguns tipos de fórmulas, como é analisado a seguir.

4.3.1 Os fundamentos do método da negação

Nesse método, consideramos a seguinte linha de raciocínio.

1. Negamos inicialmente aquilo que pretendemos demonstrar. Assim, dada uma fórmula H, se o objetivo é demonstrar, por exemplo, que H é uma tautologia, suponha então que H não é uma tautologia.
2. A partir da suposição inicial, é utilizado um conjunto de deduções. Se ao final do raciocínio, concluímos um fato contraditório ou absurdo, então temos que rever nossa suposição inicial.
3. Dessa forma, caso se obtenha um absurdo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. Em outras palavras, se a suposição inicial diz que H não é uma tautologia; e após uma sequência de deduções é concluído um absurdo, então a afirmação "H não é uma tautologia" é um absurdo. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia.

Observe que, neste contexto, estamos utilizando o princípio do terceiro excluído, pois se é absurdo que H não é uma tautologia, só resta concluir que H é uma tautologia. Não temos uma terceira possibilidade. Dessa forma, é verdadeiro que H é tautologia ou não é tautologia. O exemplo a seguir ilustra o método da negação, ou redução ao absurdo, que também é denominado refutação.

4.3.2 Prova de que H é uma tautologia

Utilizamos, inicialmente, o método da negação para provar que uma fórmula H é uma tautologia. Nesse caso, supomos, a princípio, que H não é uma tautologia. Em seguida, se a partir de uma sequência de deduções semânticas, concluímos um absurdo, então H é uma tautologia.

Exemplo 4.1 (lei da transitividade) Este exemplo demonstra a lei da transitividade para o conectivo $\rightarrow$. Essa lei é definida pela fórmula H a seguir, que é uma tautologia.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$

Observe que a transitividade diz que se $(P \rightarrow Q)$ e $(Q \rightarrow R)$ são fórmulas verdadeiras, então $(P \rightarrow R)$ também é uma fórmula verdadeira. A demonstração de que H é uma tautologia, segundo o método da negação, ou redução ao absurdo, segue os passos subsequentes.

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = F$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo F como um subíndice do conectivo $\rightarrow$ na fórmula H, como é indicado a seguir.

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow_F (P \rightarrow R)$$

A leitura dessa fórmula, na qual temos o conectivo com o subíndice "F", é que o conectivo "$\rightarrow_F$" é falso. Mas, se $I[H] = F$, ou seja, "$\rightarrow_F$" é falso, então:

$$I[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] = T \text{ e } I[(P \rightarrow R)] = F.$$

Ou seja, o antecedente de H é verdadeiro e o consequente é falso, segundo a interpretação I. Isso é indicado colocando T e F como subíndices dos principais conectivos no antecedente e no consequente de H. Dessa forma, iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, de que "$\rightarrow_F$" é falso, concluímos que:

$$I[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] = T \text{ e } I[(P \rightarrow R)] = F.$$

Para indicar essas interpretações, nesse caso, dizemos que o conectivo "$\wedge_T$" é verdadeiro e o conectivo "$\rightarrow_F$" é falso. Tais fatos são descritos na fórmula inicial como a seguir.

$$((P \rightarrow Q) \wedge_T (Q \rightarrow R)) \rightarrow_F (P \rightarrow_F R)$$

A partir dos valores de verdade dos conectivos indicados na fórmula anterior, os valores de verdade das outras subfórmulas são obtidos. Assim, o próximo passo é dado pela fórmula a seguir.

$$((P \rightarrow_T Q) \wedge_T (Q \rightarrow_T R)) \rightarrow_F (P_T \rightarrow_F R_F)$$

Nesse ponto, já é possível concluir que $I[P] = T$ e $I[R] = F$. Esses valores de verdade são distribuídos pela fórmula, obtendo:

$$((P_T \rightarrow_T Q) \wedge_T (Q \rightarrow_T R_F)) \rightarrow_F (P_T \rightarrow_F R_F)$$

Observe que na fórmula anterior há duas subfórmulas: $(P_T \rightarrow_T Q)$ e $(Q \rightarrow_T R_F)$. A partir da subfórmula $(P_T \rightarrow_T Q)$ conclui-se que $I[Q] = T$. Entretanto, com base na subfórmula $(Q \rightarrow_T R_F)$, temos outro resultado: $I[Q] = F$. Logo, há um absurdo, pois Q não pode ser interpretado como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, o que é indicado por:

$$((P_T \rightarrow_T Q_{(T,F)}) \wedge_T (Q_{(F,T)} \rightarrow_T R_F)) \rightarrow_F (P_T \rightarrow_F R_F)$$

Nesse ponto, estamos iniciamos o terceiro passo do método.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma tautologia. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia.

Portanto, a suposição inicial é falsa, isto é, não existe interpretação I tal que $I[H] = F$. Não é possível interpretar H como sendo falsa. Logo, H é uma tautologia.
■

Exemplo 4.2 (tautologia e ausência de absurdo) Este exemplo demonstra que a fórmula

$$H = ((P \to Q) \to ((Q \to R) \to (R \to S)))$$

não é uma tautologia. Imagine que não sabemos que H não é uma tautologia. Então, vamos tentar demonstrar, utilizando o método da negação, que H é uma tautologia.

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = F$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo F como um subíndice do conectivo $\to$ na fórmula H, como é indicado a seguir.

$$((P \to Q) \to_F ((Q \to R) \to (R \to S))).$$

Logo, o conectivo "$\to_F$" é falso. Mas, se $I[H] = F$, ou seja, "$\to_F$" é falso, então $I[(P \to Q)] = T$ e $I[((Q \to R) \to (R \to S))] = F$. Isto é, o antecedente de H é verdadeiro e o consequente é falso, segundo a interpretação I. Dessa forma, iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, concluímos que

$$((P \to_T Q) \to_F ((Q \to R) \to_F (R \to S))).$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos:

$$((P \to_T Q) \to_F ((Q \to_T R) \to_F (R \to_F S))).$$

E, em seguida:

$$((P \to_T Q) \to_F ((Q \to_T R_T) \to_F (R_T \to_F S_F))).$$

Não chegamos a nenhum absurdo. O que fazer? Conforme o terceiro passo do método, se tivesse ocorrido um absurdo, poderíamos concluir da seguinte forma.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma tautologia. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia.

Mas, como não ocorreu o absurdo, não podemos concluir dessa forma. Como temos na fórmula, os símbolos proposicionais R_T e S_F com os respectivos subíndices, então considere: $I[R] = T$ e $I[S] = F$. Observe que a interpretação de R e S corresponde à interpretação estabelecida pelos subíndices. Para os símbolos P e Q, devemos escolher uma interpretação que seja coerente com os valores de verdade das subfórmulas: $(P \rightarrow_T Q)$ e $(Q \rightarrow_T R_T)$. Suponha, então, que $I[P] = I[Q] = T$. Nessas condições, temos que

$I[(P \rightarrow_T Q)] = T$ e $I[(Q \rightarrow_T R_T)] = T$.

Logo, concluímos que $I[H] = F$. Isto é, H pode ser interpretada como falsa e não é uma tautologia. ■

4.3.3 Prova de que H é uma contradição

Dada uma fórmula H, o método da negação, ou redução ao absurdo, também se aplica para demonstrar se H é contraditória. Nesse caso, a afirmação inicial deve ser negada. Logo, para demonstrar que H é contraditória, devemos inicialmente supor que H não é contraditória, isto é, que existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$. O raciocínio segue de maneira análoga ao descrito. Caso se obtenha uma contradição ou absurdo, então é demonstrado que H é contraditória.

Exemplo 4.3 (contradição) Este exemplo montra que a fórmula a seguir é uma contradição.

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge (\neg(\neg P \vee Q)).$$

A demonstração de que H é uma contradição segue os passos:

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma contradição. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo T como um subíndice do conectivo $\wedge$ da fórmula H, como é indicado a seguir.

$$(P \rightarrow Q) \wedge_T (\neg((\neg P) \vee Q)).$$

A leitura dessa fórmula, na qual temos o conectivo com o subíndice "T", é que o conectivo "$\wedge_T$" é verdadeiro. Mas, se $I[H] = T$, ou seja, "$\wedge_T$" é verdadeiro, então $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[(\neg((\neg P) \vee Q))] = T$. Seguindo o raciocínio, escrevemos T como subíndice do principal conectivo das subfórmulas: $(P \rightarrow Q)$, $(\neg((\neg P) \vee Q))$. E, dessa forma, já iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, temos:

$$(P \rightarrow_T Q) \wedge_T (\neg_T((\neg P) \vee Q)).$$

Em seguida, colocamos o subíndice F no conectivo "$\vee$". Isso porque se $(\neg_T((\neg P) \vee Q))$ é verdadeira, então $((\neg P) \vee_F Q)$ é falsa. Dessa forma, obtemos o resultado:

$$(P \rightarrow_T Q) \wedge_T (\neg_T((\neg P) \vee_F Q)).$$

Em seguida, dado que "$\vee_F$" é falso, então temos:

$$(P \rightarrow_T Q_F) \wedge_T (\neg_T((\neg_F P) \vee_F Q_F)).$$

Seguindo o raciocínio, temos:

$$(P_T \rightarrow_T Q_F) \wedge_T (\neg_T((\neg_F P_T) \vee_F Q_F)).$$

Observe, então, a subfórmula $(P_T \rightarrow_T Q_F)$. Ela é um absurdo, pois se P é verdadeiro e Q é falso, então a subfórmula é falsa. Ou seja, o conectivo "$\rightarrow_{(T,F)}$" é verdadeiro e falso. $(P_T \rightarrow_{(T,F)} Q_F)$.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma contradição. Portanto, a conclusão final é que H é uma contradição.

■

Exemplo 4.4 (contradição e ausência de absurdo) Este exemplo mostra que a fórmula H, a seguir, não é uma contradição.

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge ((Q \rightarrow R) \wedge ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))).$$

Imagine que, de forma incorreta, supomos que H é uma contradição e para demonstrar esse fato, utilizamos o método da negação. Veja o que acontece. A demonstração de que H é uma contradição, segue os passos:

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma contradição. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo T como um subíndice do conectivo $\wedge$, que é o principal conectivo da fórmula H, como é indicado a seguir.

$$(P \rightarrow Q) \wedge_T ((Q \rightarrow R) \wedge ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))).$$

A leitura dessa fórmula, na qual temos o conectivo com o subíndice "T", é que o conectivo "$\wedge_T$" é verdadeiro. Mas, se $I[H] = T$, ou seja, "$\wedge_T$" é verdadeiro, então
$I[(P \rightarrow Q)] = T$ e
$I[(Q \rightarrow R) \wedge ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))] = F$.

Seguindo o raciocínio, escrevemos T como subíndice do principal conectivo das subfórmulas:

$$(P \rightarrow_T Q)$$

$$(Q \rightarrow R) \wedge_T ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))$$

E, dessa forma, já iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, temos:

$$(P \rightarrow_T Q) \wedge_T ((Q \rightarrow R) \wedge_T ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))).$$

Em seguida, colocamos o subíndice T nos conectivos "$\rightarrow$" e "$\wedge$" e o resultado é:

$$((P \rightarrow_T Q) \wedge_T ((Q \rightarrow_T R) \wedge_T ((R \rightarrow S) \wedge_T (S \rightarrow \neg P)))).$$

Mais um passo, colocando os respectivos subíndices, temos:

$$((P \rightarrow_T Q) \wedge_T ((Q \rightarrow_T R) \wedge_T ((R \rightarrow_T S) \wedge_T (S \rightarrow_T \neg P)))).$$

Não chegamos a nenhum absurdo e, conforme o terceiro passo do método, se tivesse ocorrido um absurdo, poderíamos concluir da seguinte forma.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma contradição. Portanto, a conclusão final é que H é uma contradição.

Mas, como não ocorreu o absurdo, não podemos concluir dessa forma. A interpretação dos símbolos P, Q, R e S deve ser coerente com as interpretações das subfórmulas de H. Isto é, devemos definir $I[P], I[Q], I[R]$ e $I[S]$ de tal forma que:

$$I[(P \rightarrow_T Q)] = T,\ I[(Q \rightarrow_T R)] = T,\ I[(R \rightarrow_T S)] = T \ \text{ e } \ I[(S \rightarrow_T \neg P))] = T.$$

Suponha, então, que $I[P] = I[Q] = I[R] = I[S] = F$. Nessas condições, temos que $I[H] = T$. Isto é, H é satisfatível e, por isso, não é uma contradição. ■

4.3.4 Várias possibilidades no desenvolvimento da prova

O método da negação, ou redução ao absurdo, geralmente determina demonstrações mais simples nos casos em que a negação da fórmula tem como consequência apenas uma possibilidade de desenvolvimento da prova. Considere, por exemplo, o conectivo "$\rightarrow$". Nesse caso, supondo a falsidade de uma fórmula do tipo: $(H \rightarrow G)$, obtemos uma única possibilidade para as interpretações do antecedente H e do consequente G. O antecedente deve ser verdadeiro e o consequente, falso. Assim, no desenvolvimento da prova, obtemos a fórmula $(H_T \rightarrow_F G_F)$. E, de maneira geral, a existência de uma única possibilidade para as interpretações das subfórmulas simplifica a demonstração. Ainda, de forma análoga às observações anteriores, supondo a falsidade de uma fórmula do tipo $(H \vee G)$, obtemos uma única possibilidade para as interpretações de H e G. As subfórmulas H e G, que compõem a disjunção, devem ser falsas. Nesse caso, a fórmula obtida no desenvolvimento da prova é $(H_F \vee_F G_F)$. O método da negação, ou redução ao absurdo, em geral, também determina demonstrações mais simples nos casos em que supomos a veracidade do conectivo $\wedge$. Supondo a veracidade de uma fórmula do tipo: $(H \wedge G)$, obtemos uma única possibilidade para as interpretações das subfórmulas H e G, que compõem a conjunção. Essas subfórmulas devem ser verdadeiras e a fórmula que obtemos no desenvolvimento da prova é $(H_T \wedge_T G_T)$. Conforme as observações anteriores, o método da negação se aplica com uma única possibilidade de desenvolvimento, quando:

1. interpretamos como falso os conectivos "$\rightarrow$", "$\vee$",
2. interpretamos como verdadeiro o conectivo "$\wedge$" e
3. interpretamos como verdadeiro, ou falso, o conectivo "$\neg$".

Por outro lado, para outros tipos de combinações entre interpretações e conectivos, o desenvolvimento da prova, conforme o método da negação, não implica uma única possibilidade. Considere, por exemplo, o conectivo "$\leftrightarrow$". Nesse caso, supondo a falsidade de uma fórmula do tipo $(H \leftrightarrow G)$, obtemos duas possibilidades para as interpretações de H e G. Nesse caso temos as duas possibilidades: na primeira H é verdadeira e G é falsa, enquanto na segunda H é falsa e G é verdadeira.

Possibilidade 1. $(H_T \leftrightarrow_F G_F)$;

Possibilidade 2. $(H_F \leftrightarrow_F G_T)$.

Exemplo 4.5 (prova com várias possibilidades) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar se a fórmula H é uma tautologia.

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q).$$

Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F escrito como subíndice do conectivo "$\leftrightarrow$" em H, conforme indicado a seguir.

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow_F (\neg P \rightarrow \neg Q).$$

A partir dessa fórmula, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1. $(P \rightarrow_T Q) \leftrightarrow_F (\neg P \rightarrow_F \neg Q)$;

Possibilidade 2. $(P \rightarrow_F Q) \leftrightarrow_F (\neg P \rightarrow_T \neg Q)$.

Desenvolvimento da possibilidade 1. Desenvolvendo a possibilidade 1, obtemos a fórmula:

$$(P_F \rightarrow_T Q_T) \leftrightarrow_F (\neg_T P_F \rightarrow_F \neg_F Q_T)$$

Observe que na fórmula anterior, não há nenhum absurdo. Como não é obtido absurdo nessa possibilidade, não podemos concluir que H é uma tautologia. De fato, H não é uma tautologia, pois, conforme a interpretação dos símbolos proposicionais na fórmula anterior, é possível definir uma interpretação I tal que $I[H] = F$. Como temos na fórmula P_F e Q_T, considere uma interpretação I tal que $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Neste caso, $I[H] = F$.

Desenvolvimento da possibilidade 2. Desenvolvendo a possibilidade 2, obtemos a fórmula

$$(P_T \rightarrow_F Q_F) \leftrightarrow_F (\neg_F P_T \rightarrow_T \neg_T Q_F)$$

Novamente, não há absurdo nessa possibilidade. De fato, H não é uma tautologia, pois, a partir das interpretações dos símbolos proposicionais da fórmula, é possível definir outra interpretação I tal que $I[H] = F$. Como temos na fórmula P_T e Q_F, considere uma interpretação I tal que $I[P] = T$ e $I[Q] = F$. Neste caso, $I[H] = F$. Nesse exemplo, não ocorreu absurdo em nenhuma das possibilidade. Entretanto isso nem sempre ocorre. ■

Exemplo 4.6 (prova com várias possibilidades) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar se a fórmula H é uma tautologia. $H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Suponha por absurdo que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo "$\leftrightarrow$" em H, conforme indicado a seguir.

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow_F (\neg P \vee Q).$$

A partir dessa fórmula, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1. $(P \wedge_T Q) \leftrightarrow_F (\neg P \vee_F Q)$;

Possibilidade 2. $(P \wedge_F Q) \leftrightarrow_F (\neg P \vee_T Q)$.

Desenvolvimento da possibilidade 1. Desenvolvendo a possibilidade 1, obtemos a fórmula

$$(P_T \wedge_{(T,F)} Q_F) \leftrightarrow_F (\neg_F P_T \vee_F Q_F).$$

Na fórmula anterior, temos um absurdo no conectivo "$\wedge$". Mas, será que a partir desse absurdo, já podemos concluir que H é tautologia? Cuidado! Temos duas possibilidades. E esse desenvolvimento mostra que é impossível ocorrer a possibilidade 1, pois ela leva a um absurdo. É como se essa possibilidade fosse uma porta fechada. Mas, se ela está fechada, não necessariamente podemos concluir que a outra porta também está fechada. Ou seja, que a outra possibilidade também nos leva a um absurdo.

Desenvolvimento da possibilidade 2. Desenvolvendo a possibilidade 2, obtemos a fórmula:

$$(P_F \wedge_F Q_F) \leftrightarrow_F (\neg_T P_F \vee_T Q_F).$$

Na fórmula anterior, não temos absurdo. Como não é obtido absurdo nessa possibilidade, não podemos concluir que H é uma tautologia. De fato, H não é uma tautologia, pois, a partir das interpretações dos símbolos proposicionais da fórmula, é possível definir uma interpretação I tal que $I[H] = F$. Como temos na fórmula P_F e Q_F, considere uma interpretação I tal que $I[P] = F$ e $I[Q] = F$. Neste caso, $I[H] = F$.

Conclusão final: H não é uma tautologia. ■

Generalização do método. É importante observar a utilização do método da negação, ou redução ao absurdo, no presente contexto, na demonstração de propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Devemos enfatizar que os princípios desse método possuem ampla aplicação em outros tipos de demonstrações. Nesses casos, é negada a afirmação que desejamos demonstrar. Após um conjunto de deduções, caso obtenhamos um absurdo, então a afirmação inicial é verdadeira.

Exemplo 4.7 (consequência semântica) Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então, conforme a Definição 3.7:
H implica semanticamente G, se, e somente se,
para toda interpretação I, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$.

A partir dessa definição, é sempre bom lembrar, temos a importante questão: o conceito de consequência semântica corresponde ao conceito de consequência que utilizamos no dia a dia? Como já vimos, a semântica dos conectivos da Lógica Proposicional não corresponde exatamente ao uso que temos deles em linguagem natural. Da mesma forma, a consequência semântica também não corresponde, de forma exata, ao uso que fazemos da palavra "consequência" na linguagem natural. Considere, por exemplo, a seguinte situação. Zé sabe que Maria viajou para a região norte e deve estar em Rio Branco, no Acre, ou em Boa Vista, em Roraima. Zé fica então pensando:

"Se Maria está em Rio Branco, então ela está no Acre.
Ou, se está em Boa Vista, então está em Roraima".

É possível representar essa implicação na Lógica Proposicional, como se segue. Suponha que: $P =$ "Maria está em Rio Branco". $Q =$ "Maria está em Boa Vista". $R =$ "Maria está no Acre". $S =$ "Maria está em Roraima". Nesse sentido, o que Zé está pensando pode ser representado pela fórmula: $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow S)$. Digamos que, por um momento, Zé fique confuso. Ele não sabe, ao certo, quais são as capitais dos estados da região norte. Ele sempre confunde as capitais do Acre e de Roraima. Às vezes ele acha que Boa Vista é a capital do Acre e que Rio Branco é a capital de Roraima. Zé então fica imaginando.

"Puxa, se Maria está em Rio Branco, então em qual estado ela está?"

Zé ficaria mais confuso ainda se utilizasse o conceito de consequência semântica. Isso ocorre porque as implicações a seguir são válidas.

$(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow S)$ implica $(P \rightarrow S) \vee (Q \rightarrow R)$, e

$(P \rightarrow S) \vee (Q \rightarrow R)$ implica $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow S)$.

Conforme a Proposição 3.8, essas implicações ocorrem se, e somente se, as fórmulas H e G, a seguir, são tautologias.

$H = ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow S)) \rightarrow ((P \rightarrow S) \vee (Q \rightarrow R))$, e

$G = ((P \rightarrow S) \vee (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow S))$.

Provamos, a seguir, utilizando o método da negação, que H é uma tautologia. Suponha, inicialmente, que H não é tautologia. Interpretamos o conectivo "$\rightarrow$" como falso.

$H = ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow S)) \rightarrow_F ((P \rightarrow S) \vee (Q \rightarrow R))$.

Os outros passos da prova são indicados pela sequência de fórmulas.

$$((P \rightarrow R) \vee_T (Q \rightarrow S)) \rightarrow_F ((P \rightarrow S) \vee_F (Q \rightarrow R))$$

$$((P \rightarrow R) \vee_T (Q \rightarrow S)) \rightarrow_F ((P \rightarrow_F S) \vee_F (Q \rightarrow_F R))$$

$$((P_T \rightarrow R_F) \vee_T (Q_T \rightarrow S_F)) \rightarrow_F ((P_T \rightarrow_F S_F) \vee_F (Q_T \rightarrow_F R_F))$$

$$((P_T \rightarrow_F R_F) \vee_T (Q_T \rightarrow_F S_F)) \rightarrow_F ((P_T \rightarrow_F S_F) \vee_F (Q_T \rightarrow_F R_F))$$

E a última fórmula:

$$H = ((P_T \to_F R_F) \vee_{(T,F)} (Q_T \to_F S_F)) \to_F ((P_T \to_F S_F) \vee_F (Q_T \to_F R_F))$$

Na última fórmula, temos um absurdo na interpretação do conectivo "$\vee_{(T,F)}$". Portanto, H é uma tautologia. De forma análoga, provamos que G também é uma tautologia. A partir disso, Zé concluiria que: dado que:

Se Maria está em Rio Branco, então ela está no Acre.
Ou, se está em Boa Vista, então está em Roraima.

então é possível concluir, por consequência semântica, que:

Se Maria está em Rio Branco, então ela está em Roraima.
Ou, se está em Boa Vista, então está no Acre.

Tudo isso é um pouco confuso. Parece que mesmo que Zé esteja errado, então ele está certo. E se ele está certo, então ele também está errado. Esse problema ocorre porque a consequência semântica, conforme definida na Lógica Proposicional, não representa adequadamente o conceito de consequência que utilizamos em linguagem natural. A consequência semântica é uma representação muito simplificada do rico conceito de consequência, que utilizamos em linguagem natural. Vale observar que esse estudo das implicaturas é um importante tema de estudo em Lógica e Filosofia [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. ■

4.3.5 Custo computacional do método da negação

Conforme análise feita no início deste capítulo, o custo computacional para determinar se uma fórmula H é uma tautologia, utilizando o método da tabela-verdade, é exponencial. Mas, afinal, qual é o custo computacional para executar a mesma tarefa, utilizando o método da negação? Também, conforme já foi dito, tal custo deve ser exponencial, pois ainda não foi descoberto nenhuma maneira de determinar as fórmulas que são tautologias, executando algum algoritmo com custo inferior ao exponencial. Conclusão: o custo computacional do método da negação também é exponencial. Mas, se o custo do método da negação é exponencial, qual é a vantagem desse método? Para responder um pouco dessa questão, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 4.8 (tautologia) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar que a fórmula H é uma tautologia.

$$H = P_1 \to ((P_2 \wedge P_3) \to ((P_4 \wedge P_5) \to ((P_6 \wedge P_7) \to P_1))).$$

Suponha por absurdo que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo "$\to$" em H, conforme indicado a seguir:

$$P_1 \to_F ((P_2 \wedge P_3) \to ((P_4 \wedge P_5) \to ((P_6 \wedge P_7) \to P_1))).$$

A partir dessa fórmula, desenvolvendo o método da negação, temos a sequência:

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow_F ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))),$$

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_2 \wedge_T P_3) \rightarrow_F ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow_F ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))),$$

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_{2_T} \wedge_T P_{3_T}) \rightarrow_F ((P_4 \wedge_T P_5) \rightarrow_F ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow_F P_1))),$$

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_{2_T} \wedge_T P_{3_T}) \rightarrow_F ((P_{4_T} \wedge_T P_{5_T}) \rightarrow_F ((P_{6_T} \wedge_T P_{7_T}) \rightarrow_F P_{1_F}))).$$

Na fórmula anterior, há um absurdo, pois temos P_{1_T} no início e P_{1_F} no final da fórmula. Logo, H é uma tautologia. Certamente, a análise anterior é mais fácil do que fazer uma tabela-verdade com 128 linhas para determinar se H é uma tautologia. Por isso, poderia se esperar que o custo do método da negação fosse inferior ao custo do método da tabela-verdade. Entretanto, isso não ocorre. No caso da fórmula anterior, a análise foi rápida devido a presença de inúmeros conectivos "$\rightarrow$" e "$\wedge$". E, devido a tais conectivos, não ocorreu a presença de múltiplas possibilidades, como no Exemplo 4.6. Logo, esse não é o pior caso. ■

Exemplo 4.9 (tautologia?) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para tentar demonstrar se a fórmula G é uma tautologia.

$$G = P_1 \leftrightarrow ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1))).$$

Inicialmente, observe como a fórmula G é semelhante à fórmula H do Exemplo 4.8. A fórmula G pode ser obtida de H trocando os conectivos "$\rightarrow$" e "$\wedge$" por "$\leftrightarrow$" e "$\vee$", respectivamente. Suponha, então, que se tente demonstrar se G é tautologia, utilizando o método da negação. Nesse caso, suponha, por absurdo, que G não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo "$\leftrightarrow$" em G, conforme indicado a seguir.

$$G = P_1 \leftrightarrow_F ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1))).$$

Observe que já começamos com um problema. Se o conectivo "$\leftrightarrow_F$" é falso, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1. $G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)))$;

Possibilidade 2. $G = P_{1_F} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow_T ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)))$.

Desenvolvimento da possibilidade 1. Desenvolvendo a possibilidade 1, temos mais duas possibilidades:

Possibilidade 1.1. $G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_T P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow_F ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)))$;

Possibilidade 1.2. $G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_F P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow_T ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)))$.

Seguindo o método, o desenvolvimento da possibilidade 1.1 temos, também, outras duas possibilidades:

Possibilidade 1.1.1. .

$G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_T P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee_T P_5) \leftrightarrow_F ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow_F P_1)))$;

Possibilidade 1.1.2. .

$G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_T P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee_F P_5) \leftrightarrow_F ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow_T P_1)))$,

E vamos parar por aqui. Observe que nessa análise aparecem inúmeras possibilidades. Ou seja, dependendo da fórmula, o custo da análise de todas as possibilidades é semelhante ao custo da análise da fórmula, utilizando a tabela-verdade. Mas, afinal, G é tautologia? Parece que não. Mas, em Lógica, "parecer" nada significa. Prove se G é, ou não, uma tautologia. ■

Dada uma fórmula H, o custo para determinar se H é satisfatível é o mesmo, utilizando o método da tabela-verdade, ou o método da negação. Mas preste atenção: esse é o custo do pior caso. Não saia por aí, fazendo tabela-verdade para analisar as propriedades semânticas de todas as fórmulas da Lógica Proposicional. Isso, porque para alguns tipos de fórmulas, o uso, por exemplo, do método da negação é muito mais vantajoso, dado que nesses casos ele tem um custo bem menor. Veja o caso do Exemplo 4.8. Entretanto, há também casos, nos quais não temos tais vantagens, Exemplo 4.9. Surge, então, outra questão. Como identificar as fórmulas que são boas para se usar o método da negação? Responder tal questão, no caso geral, não é fácil e tem custo semelhante ao custo do uso do método da tabela-verdade. Ou seja, responder se a fórmula é adequada para a aplicação do método da negação tem custo semelhante ao uso do método da tabela-verdade. Conclusão: não vale a pena tentar elaborar um método para responder se uma fórmula é adequada ao uso do método da negação. Seria melhor usar logo o método da tabela-verdade. Mas, mesmo assim, devemos prestar atenção em alguns detalhes das fórmulas e tentar, na medida do possível, usar o método da negação, antes de se aventurar pela tabela-verdade. Se o uso do método da negação implica em uma análise com poucas possibilidades de desenvolvimento, então o método é indicado. Veja o exemplo 4.8.

O método da negação, ou redução ao absurdo, é um método de decisão. Como no caso do método da tabela-verdade, dada uma fórmula H, utilizando o método da negação é possível decidir se H possui, ou não possui, alguma propriedade semântica. Nesse sentido, dizemos que o método da negação é um mecanismo de decisão. Ele sempre fornece uma decisão quanto à pergunta: H possui, ou não possui, determinada propriedade semântica?

4.4 *Tableaux* semânticos na Lógica Proposicional

Já sabemos que nenhum método semântico para determinação da satisfatibilidade de fórmulas da Lógica Proposicional é mais eficiente que o método da tabela-verdade.

Mas, mesmo assim, a aplicação do método da negação tem suas vantagens em alguns casos, principalmente para fórmulas cuja análise não implica em muitas possibilidades de desenvolvimento. Isso significa que para algumas fórmulas o custo da aplicação do método da negação é menor que o da tabela-verdade. Observe que estamos sempre atentos à questão do custo. Entretanto, há outros elementos importantes a serem considerados. Por exemplo, uma relevante questão é a seguinte: existe algum método que determina a satisfatibilidade de fórmulas da Lógica Proposicional, cuja implementação em computadores é facilitada? A resposta é sim e esse método é o método dos *tableaux* semânticos. Portanto, mesmo tendo um custo computacional semelhante ao método da tabela-verdade, o método dos *tableaux* semânticos é mais adequado às implementações em computadores. Além disso, o método dos *tableaux* semânticos tem uma extensão para a Lógica de Predicados, o que não ocorre com o método da tabela-verdade. Além dessa característica o método dos *tableaux* semânticos tem outras relevâncias práticas e teóricas, cujo estudo não consideramos neste livro. Também é importante observar que vários sistemas de *tableaux* semânticos podem ser encontrados na literatura [Fitting], [Kelly], todos eles equivalentes entre si, mas com diferenças sintáticas.

4.4.1 Elementos básicos

Mas, afinal, o que é um *tableau* semântico na Lógica Proposicional? Primeiro, observe que *"tableau"* significa, em português, quadro. Então, estamos falando de um método que utiliza quadros semânticos. E são nesses quadros que escrevemos as fórmulas do nosso sistema de dedução semântico. Na verdade, uma sequência de fórmulas construída de acordo com um conjunto de regras. Além disso, as fórmulas são escritas no quadro, ou *tableau*, sob a forma de uma árvore. Portanto, no método dos *tableaux* semânticos utilizamos quadros, onde escrevemos sequências de fórmulas, tudo na forma de árvores. Formalmente, os elementos básicos que compõem o método dos *tableaux* semânticos são definidos a seguir.

Definição 4.1 (elementos básicos) *Os elementos básicos do método dos tableaux semânticos na Lógica Proposicional são:*

- *o alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 1.1;*
- *o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;*
- *um conjunto de regras de dedução.*

Os elementos básicos do método dos *tableaux* semânticos determinam sua estrutura fundamental. De forma análoga, a tabela-verdade também determina a estrutura básica do método da tabela-verdade. Entretanto, no caso do método dos *tableaux* semânticos não consideramos tabelas-verdade e sim, quadros semânticos. Observe que nos dois casos, temos como elemento básico a linguagem da Lógica Proposicional. Mas, diferentemente do que ocorre no método da tabela-verdade, no método dos *tableaux* semânticos temos regras de dedução. E são essas regras que definem o mecanismo de inferência do método e permitem a dedução de conhecimento e que podem ser implementadas em computadores. As regras são definidas a seguir, e seguem ideias apresentadas por [Kelly].

Definição 4.2 (regras de inferência) *Sejam A e B duas fórmulas da Lógica Proposicional. As regras de inferência do método dos tableaux semânticos na Lógica Proposicional são as regras $R_1, \ldots, R_9$ indicadas a seguir.*

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} R_1 = A \land B \\ A \\ B \end{array} &
\begin{array}{c} R_2 = A \lor B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \qquad B \end{array} &
\begin{array}{c} R_3 = A \rightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg A \qquad B \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} R_4 = A \leftrightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \land B \qquad \neg A \land \neg B \end{array} &
\begin{array}{c} R_5 = \neg\neg A \\ A \end{array} &
\begin{array}{c} R_6 = \neg(A \land B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg A \qquad \neg B \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} R_7 = \neg(A \lor B) \\ \neg A \\ \neg B \end{array} &
\begin{array}{c} R_8 = \neg(A \rightarrow B) \\ A \\ \neg B \end{array} &
\begin{array}{c} R_9 = \neg(A \leftrightarrow B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg A \land B \qquad A \land \neg B \end{array}
\end{array}$$

E agora, o que fazer com as regras? Sabemos que elas são utilizadas no método dos *tableaux* semânticos. Elas são aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional, deduzindo-se novas fórmulas. Então, utilizando essas fórmulas deduzidas, o quadro semântico é preenchido. Mas, afinal, como tudo isso é feito? Para entender como se aplica o método dos *tableaux* semânticos e, portanto, a utilização das regras da Definição 4.2, vamos seguir o roteiro.

1. Entender o significado de cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$;
2. Entender como as regras $R_1, \ldots, R_9$ são selecionadas e aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional;
3. Dada uma fórmula H, ou um conjunto de fórmulas, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H, ou do conjunto de fórmulas;
4. Analisar o *tableau* semântico obtido e entender como se podem deduzir propriedades semânticas a partir do *tableau*.

4.4.2 O significado das regras dos *tableaux* semânticos

A ferramenta básica no desenvolvimento dos *tableaux* semânticos é o seu conjunto de regras. Portanto, entender o que cada uma diz, do ponto de vista semântico, é o primeiro passo para a compreensão do método.

O significado da regra R_1. Observe, inicialmente, como é escrita a regra R_1:

$$\begin{array}{c} R_1 = A \land B \\ A \\ B \end{array}$$

Na parte de cima, escrevemos a fórmula $(A \wedge B)$ e logo abaixo, em duas linhas consecutivas, escrevemos as fórmulas A e B. A forma de escrever a regra está intimamente ligada ao seu significado semântico. Ela diz que dada a fórmula $(A \wedge B)$, deduzimos as fórmulas A e B. Em outras palavras, se $(A \wedge B)$ foi deduzida no *tableau*, então deduzimos A e também B. Para denotar que deduzimos A e B, escrevemos as fórmulas A e B em duas linhas consecutivas. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir A e B a partir de $(A \wedge B)$, o que é claro, pois se $A \wedge B$ é verdadeira, então A e B são verdadeiras.

O significado da regra R_2. Observe como é escrita a regra R_2:

$$\begin{array}{rc} R_2 = & A \vee B \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & A \qquad B \end{array}$$

Na parte de cima, escrevemos a fórmula $(A \vee B)$. Mas, logo abaixo, escrevemos duas setas com as fórmulas A e B nas suas pontas. Isso é diferente do caso da regra R_1. Como no caso da regra R_1, a forma de escrever a regra R_2 está intimamente ligada ao seu significado semântico. Ela diz que se a fórmula $A \vee B$ já foi deduzida no *tableau*, então deduzimos a fórmula A ou a fórmula B. Em outras palavras, se $(A \vee B)$ foi deduzida, então deduzimos A ou B. Para denotar essa disjunção, que A ou B é verdadeira, escrevemos as fórmulas A e B nas pontas das setas. Portanto, as setas têm um significado de disjunção lógica. Isto é, um lado ou o outro da ponta da seta é deduzido. Devemos ainda observar que a disjunção determinada pelas setas tem o mesmo significado semântico do conectivo $\vee$. Isso significa que A ou B é verdadeira. E nesse caso, como ocorre com o conectivo $\vee$, podemos ter A e B verdadeiras[4]. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir A ou B, a partir de $(A \vee B)$. Tal fato é claro, pois se $A \vee B$ é verdadeira, então A ou B, é verdadeira.

O significado da regra R_3. A regra R_3 é dada por:

$$\begin{array}{rc} R_3 = & A \rightarrow B \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & \neg A \qquad B \end{array}$$

Na parte de cima, escrevemos a fórmula $A \rightarrow B$. E, logo abaixo, escrevemos duas setas com as fórmulas $\neg A$ e B nas suas pontas. Essa regra diz que se deduzimos a fórmula $A \rightarrow B$, então deduzimos a fórmula $\neg A$ ou a fórmula B. Em outras palavras, se $A \rightarrow B$ foi deduzida, então deduzimos que $\neg A$ é verdadeira, ou que B é verdadeira. Como no caso da regra R_2, para denotar essa disjunção, que $\neg A$ ou B é deduzida, escrevemos as fórmulas $\neg A$ e B nas pontas das setas. Portanto, novamente, as setas têm um significado de disjunção. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir $\neg A$ ou B, a partir de $(A \rightarrow B)$. Tal fato é claro, pois

[4] Observe que essa disjunção não é uma disjunção exclusiva. Aquela em que apenas uma, e somente uma, das fórmulas é verdadeira.

$A \to B$ é verdadeira, então $\neg A$ é verdadeira, ou B é verdadeira. Observe que já demonstramos que $(A \to B)$ equivale a $(\neg A \vee B)$. Por isso, novamente, se $A \to B$ é verdadeira, então $\neg A$ é verdadeira, ou B é verdadeira.

O significado da regra R_4. A regra R_4 é dada por:

$$\begin{array}{ccc} R_4 = & A \leftrightarrow B & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ A \wedge B & & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

Essa regra diz que se já foi deduzida a fórmula $(A \leftrightarrow B)$, então deduzimos a fórmula $(A \wedge B)$ ou a fórmula $(\neg A \wedge \neg B)$. Como no caso da regra R_2, para denotar essa disjunção escrevemos as fórmulas $(A \wedge B)$ e $(\neg A \wedge \neg B)$ nas pontas das setas. E, novamente, as setas têm um significado de disjunção. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir $(A \wedge B)$ ou $(\neg A \wedge \neg B)$, a partir de $(A \leftrightarrow B)$. Observe que se $A \leftrightarrow B$ é verdadeira, então $(A \wedge B)$ ou $(\neg A \wedge \neg B)$, é verdadeira. Nos exercícios, você é convidado a demonstrar que $(A \leftrightarrow B)$ equivale a $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$. E é por isso que, se $A \leftrightarrow B$ é verdadeira, então $(A \wedge B)$ é verdadeira, ou $(\neg A \wedge \neg B)$ é verdadeira.

O significado da regra R_5. A regra R_5 é dada por:

$$\begin{array}{cc} R_5 = & \neg\neg A \\ & A \end{array}$$

Essa regra é simples. Ela diz que da dedução da fórmula $(\neg\neg A)$, deduzimos a fórmula A. Do ponto de vista semântico isso é claro, pois $(\neg\neg A)$ tem uma dupla negação e sabemos que $(\neg\neg A)$ equivale a A.

O significado da regra R_6. Observe como é escrita a regra R_6 e a sua semelhança com a regra R_1. A fórmula inicial da regra R_6 é a negação da fórmula inicial de R_1:

$$\begin{array}{ccc} R_6 = & \neg(A \wedge B) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \neg A \qquad \neg B & \end{array}$$

Mas R_6 tem duas setas e R_1 não. Por que isso ocorre? Observe inicialmente pela lei de De Morgan, vista no Exemplo 3.13, que $\neg(A \wedge B)$ equivale a $(\neg A \vee \neg B)$. Logo, se já foi deduzida a fórmula $(\neg A \vee \neg B)$, então, aplicando a regra R_2, deduzimos $\neg A$ ou $\neg B$. Portanto, a regra R_6 é uma reescrita, disfarçada, da regra R_2.

O significado da regra R_7. A regra R_7 é escrita a seguir. Observe sua semelhança com a regra R_2:

$$\begin{array}{cc} R_7 = & \neg(A \vee B) \\ & \neg A \\ & \neg B \end{array}$$

A fórmula inicial de R_7 é a negação da fórmula inicial de R_2. E pela lei de De Morgan, vista no Exemplo 3.13, temos que $\neg(A \vee B)$ equivale a $(\neg A \wedge \neg B)$. Logo, se já foi deduzida a fórmula $(\neg A \wedge \neg B)$, então, aplicando a regra R_1, deduzimos $\neg A$ e $\neg B$. Portanto, a regra R_7 é simplesmente a regra R_1 escrita em outra forma.

O significado da regra R_8. A regra R_8 é escrita a seguir:

$$\begin{array}{rl} R_8 = & \neg(A \rightarrow B) \\ & \quad A \\ & \quad \neg B \end{array}$$

A fórmula inicial de R_8 é $(\neg(A \rightarrow B))$. E, conforme o Exemplo 3.12, temos que $\neg(A \rightarrow B)$ equivale a $(A \wedge \neg B)$. Então, se já foi deduzida a fórmula $(A \wedge \neg B)$, então, aplicando a regra R_1, deduzimos A e $\neg B$. Portanto, a regra R_8 é uma reescrita da regra R_1.

O significado da regra R_9. A regra R_9 é dada por:

$$\begin{array}{rccc} R_9 = & & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ & & \swarrow \quad \searrow & \\ & A \wedge \neg B & & \neg A \wedge B \end{array}$$

Essa regra diz que se já foi deduzida a fórmula $(\neg(A \leftrightarrow B))$, então deduzimos a fórmula $(A \wedge \neg B)$ ou a fórmula $(\neg A \wedge B)$. Observe como essa regra é semelhante à regra R_4. Primeiro, a fórmula inicial de R_9 é a negação da fórmula inicial de R_4. Segundo, a partir da fórmula inicial, nas duas regras, deduzimos uma disjunção, que é indicada pela presença das setas. Na regra R_9, se $(\neg(A \leftrightarrow B))$ é deduzida, então deduzimos $(A \wedge \neg B)$ ou $(\neg A \wedge B)$. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir $(A \wedge \neg B)$ ou $(\neg A \wedge B)$, a partir de $(\neg(A \leftrightarrow B))$. E isso está correto, pois, conforme é proposto nos exercícios, temos que $\neg(A \leftrightarrow B)$ equivale a $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. Por isso, se $(\neg(A \leftrightarrow B))$ é verdadeira, então $(A \wedge \neg B)$ é verdadeira, ou $(\neg A \wedge B)$ é verdadeira.

A primeira etapa do nosso roteiro foi vencida. Agora passamos para o segundo passo.

4.4.3 Aplicação das regras do *tableau* semântico

No método dos *tableaux* semânticos, o preenchimento do quadro semântico sempre é feito a partir de uma, ou mais fórmulas iniciais. E, a partir dessas fórmulas iniciais, para desenvolver o método, devemos aplicar as regras. Surgem, então, duas questões:

1. Dada uma fórmula H, qual é a regra adequada para ser aplicada a H?
2. Dada uma fórmula H, como aplicar a regra adequada a H?

Considere, inicialmente, a primeira questão. Qual é a regra adequada para aplicar a uma determinada fórmula? Nesse caso, dada uma fórmula H, para identificar a regra a ser aplicada, basta comparar H com as fórmulas iniciais das regras

$$R_1, \ldots, R_9$$

Ou seja, dadas as fórmulas iniciais das regras:

$$(A \land B),\ (A \lor B),\ (A \to B),\ (A \leftrightarrow B),$$
$$\neg\neg A,\ \neg(A \land B),\ \neg(A \lor B),\ \neg(A \to B),\ \text{ou}\ \neg(A \leftrightarrow B),$$

devemos identificar qual delas corresponde à forma de H. Em seguida, a partir da correspondência, determinar as fórmulas A e B. Em relação à segunda questão, a respeito de como aplicar a regra, basta escrever no quadro semântico as fórmulas A e B, conforme é indicado em cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$. O exemplo a seguir esclarece tais procedimentos.

Exemplo 4.10 (aplicação da regra R_1.) Este exemplo mostra como selecionar e aplicar a regra R_1. Considere a fórmula H_1 tal que

$$H_1 = (\neg\neg P) \land (Q \lor (R \to (S \leftrightarrow P))).$$

Observe que H_1 é uma fórmula do tipo $A \land B$, na qual:

$$A = (\neg\neg P)$$
$$B = (Q \lor (R \to (S \leftrightarrow P)))$$

Portanto, a regra adequada para ser aplicada a H_1 é a regra R_1. E, nesse caso, o resultado da aplicação de R_1 em H_1 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir:

1.	$(\neg\neg P) \land (Q \lor (R \to (S \leftrightarrow P)))$	H_1
2.	$(\neg\neg P)$	$R_1, 1.$
3.	$(Q \lor (R \to (S \leftrightarrow P)))$	$R_1, 1.$

O quadro, ou *tableau* semântico, é escrito em três colunas. Na primeira, escrevemos a enumeração das linhas do *tableau*. Na segunda coluna, indicamos as fórmulas envolvidas. E, para facilitar a leitura do *tableau*, indicamos na terceira coluna como são deduzidas as fórmulas da segunda coluna. No caso do *tableau* acima, a fórmula da linha 1 é H_1, o que é indicado na terceira coluna. Na linha 2, temos uma fórmula que foi deduzida da fórmula da linha 1, utilizando a regra R_1. Tal fato é indicado na terceira coluna, escrevendo $R_1, 1$. De forma análoga, a fórmula da linha 3 também é deduzida da fórmula da linha 1, utilizando a regra R_1. E, por isso, escrevemos $R_1, 1$ na terceira coluna da terceira linha. ■

Exemplo 4.11 (aplicação da regra R_2.) Este exemplo mostra como selecionar e aplicar a regra R_2. Considere a fórmula

$$H_2 = ((\neg\neg P) \land Q) \lor (R \to (S \leftrightarrow P)).$$

Observe que H_2 é uma fórmula do tipo $A \lor B$, na qual:

$$A = ((\neg\neg P) \land Q)$$
$$B = (R \to (S \leftrightarrow P))$$

A regra adequada para ser aplicada a H_2 é a regra R_2. E, nesse caso, o resultado da aplicação de R_2 em H_2 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir:

1.	$((\neg\neg P) \land Q) \lor ((R \to (S \leftrightarrow P)))$	H_2
	$\swarrow \searrow$	
2.	$((\neg\neg P) \land Q) \qquad (R \to (S \leftrightarrow P))$	$R_2, 1.$

Como no Exemplo 4.10, o quadro, ou *tableau* semântico, é escrito em três colunas. Na primeira coluna temos a enumeração das linhas, na segunda as fórmulas e setas, e na terceira, indicamos como são obtidas as fórmulas da segunda coluna. Mas, observe que a linha das setas não é enumerada. Além disso, escrevemos $R_2, 1.$ na linha 2, terceira coluna, para indicar que as fórmulas da linha 2 foram deduzidas, utilizando a aplicação da regra R_2 na fórmula da linha 1. ■

Exemplo 4.12 (aplicação das regras R_3, R_4 e R_5.) Este exemplo mostra como selecionar e aplicar as regras R_3, R_4 e R_5.

Aplicação da regra R_3. Considere a fórmula H_3 tal que

$$H_3 = (((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to (S \leftrightarrow P).$$

Observe que H_3 é uma fórmula do tipo $A \to B$, na qual:

$$A = (((\neg\neg P) \land Q) \lor R)$$

$$B = (S \leftrightarrow P)$$

A regra adequada para ser aplicada a H_3 é a regra R_3. E, nesse caso, o resultado da aplicação de R_3 em H_3 é descrito no *tableau* como indicado a seguir:

1.	$(((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to (S \leftrightarrow P)$	H_3
	$\swarrow \searrow$	
2.	$\neg(((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \qquad (S \leftrightarrow P)$	$R_3, 1.$

Aplicação da regra R_4. Considere a fórmula

$$H_4 = ((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to S) \leftrightarrow P.$$

H_4 é uma fórmula do tipo $A \leftrightarrow B$, na qual

$$A = ((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to S)$$

$$B = P$$

A regra adequada para ser aplicada a H_4 é a regra R_4. O resultado da aplicação de R_4 em H_4 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir.

1.	$((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to S) \leftrightarrow P$	H_4
	$\swarrow \searrow$	
2.	$((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to S) \land P \qquad \neg((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \to S) \land \neg P$	$R_4, 1.$

1.	$\neg\neg(((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H

Figura 4.1: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

Aplicação da regra R_5. Considere a fórmula

$$H_5 = \neg\neg(P \wedge (Q \vee (R \to (S \leftrightarrow P)))).$$

H_5 é uma fórmula do tipo $\neg\neg A$, na qual:

$$A = (P \wedge (Q \vee (R \to (S \leftrightarrow P))))$$

A regra adequada para ser aplicada a H_5 é a regra R_5. O resultado da aplicação de R_5 em H_5 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir.

1.	$\neg\neg(P \wedge (Q \vee (R \to (S \leftrightarrow P))))$	H_5
2.	$(P \wedge (Q \vee (R \to (S \leftrightarrow P))))$	$R_5, 1.$

■

Para não lhe cansar com tanta repetição, simplesmente observamos que a seleção e aplicação das regras $R_6, \ldots, R_9$ segue os mesmos passos indicados nos exemplos anteriores. Para entender o método dos *tableaux* semânticos, o nosso objetivo é esclarecer os tópicos.

1. Entender o significado de cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$;
2. Entender como as regras $R_1, \ldots, R_9$ são selecionadas e aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional;
3. Dada uma fórmula H, ou um conjunto de fórmulas, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H, ou do conjunto de fórmulas;
4. Analisar o *tableau* semântico obtido e entender como se pode deduzir propriedades semânticas.

Os dois primeiros já superamos. Considere, então, o terceiro tópico da lista: dada uma fórmula H, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H. Nesse caso, a melhor forma de entender tal fato é utilizando um exemplo.

Exemplo 4.13 (construção de *tableau* semântico) Considere a fórmula H, tal que:

$$H = \neg\neg(((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P).$$

Vamos construir um *tableau* a partir de H e o primeiro passo, claro, é escrever H no *tableau*, na linha 1, como indicado na Figura 4.1. A regra adequada a aplicação em H é a regra R_5 e o resultado é mostrado na Figura 4.2. Na sequência, aplicamos a regra

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$

Figura 4.2: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$
3.	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$	$R_1, 2.$

Figura 4.3: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

R_1 e obtemos o *tableau* da Figura 4.3. Nesse ponto, temos duas opções. Aplicar a regra R_1 na fórmula da linha 3, ou a regra R_5 na fórmula da linha 4. Felizmente, no método dos *tableaux* semânticos não importa a escolha feita. Independentemente da escolha em cada passo, o resultado final, ou seja, a conclusão final do *tableau* é sempre a mesma. Isso ficará mais claro no desenvolvimento do método dos *tableaux* semânticos e, por enquanto, basta você saber que não faz diferença aplicar R_1 na fórmula da linha 3, ou R_5 na fórmula da linha 4. Escolhemos, então, aplicar R_1 na fórmula da linha 3 e depois R_5 na fórmula da linha 4. O resultado é o *tableau* da Figura 4.4. A partir das fórmulas derivadas, novamente, temos duas opções de aplicação das regras. Podemos aplicar R_3 na fórmula da linha 5, ou R_9 na fórmula da linha 6. Observe que não é possível aplicar regra alguma na fórmula da linha 7. O resultado da aplicação de R_3 é o *tableau* da Figura 4.5. No *tableau* da Figura 4.5, já aplicamos alguma regra nas fórmulas da linhas 1, 2, 3, 4 e 5. Nas fórmulas das linhas 7 e 8 não é possível aplicar nenhuma regra. Sobra somente a fórmula da linha 6. Essa é a única fórmula que ainda não aplicamos nenhuma regra e que, além disso, é possível aplicar alguma regra do *tableau*. O resultado da aplicação de R_9 na fórmula

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$
3.	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$	$R_1, 2.$
5.	$(P \rightarrow Q)$	$R_1, 3.$
6.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 3.$
7.	P	$R_5, 4.$

Figura 4.4: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

$$
\begin{array}{llccl}
1. & \multicolumn{3}{c}{\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)} & H \\
2. & \multicolumn{3}{c}{((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P} & R_5, 1. \\
3. & \multicolumn{3}{c}{(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)} & R_1, 2. \\
4. & \multicolumn{3}{c}{\neg\neg P} & R_1, 2. \\
5. & \multicolumn{3}{c}{(P \rightarrow Q)} & R_1, 3. \\
6. & \multicolumn{3}{c}{\neg(P \leftrightarrow Q)} & R_1, 3. \\
7. & \multicolumn{3}{c}{P} & R_5, 4. \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
8. & \neg P & & Q & R_3, 5.
\end{array}
$$

Figura 4.5: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

da linha 6 é o *tableau* da Figura 4.6. Algo importante ocorre na aplicação da regra R_9 na fórmula da linha 6. Preste atenção! O resultado da aplicação de R_9 é escrito após todas as fórmulas descendentes da fórmula da linha 6. Isto é, o resultado da aplicação de R_9 é escrito após todas as fórmulas da linha 8. Em seguida, aplicamos a regra R_1 nas fórmulas da linha 9. Observe que todas as fórmulas da linha 9 são adequadas à aplicação da regra R_1. Ainda que com resultados diferentes, pois temos dois tipos de fórmulas na linha 9. O resultado da aplicação de R_1 nas fórmulas da linha 9 é o *tableau* da Figura 4.7. Novamente, como ocorre com a aplicação da regra R_9 na fórmula da linha 6, os resultados da aplicação de R_1 nas fórmulas da linha 9 são escritos somente abaixo de cada fórmula. Ou seja, na linha de seus descendentes. Por exemplo, o resultado da aplicação de R_1 em $(\neg P \wedge Q)$ é escrito somente abaixo dessa fórmula. O mesmo ocorre com a aplicação de R_1 em $(P \wedge \neg Q)$. Terminamos o desenvolvimento do *tableau*, pois não há mais fórmulas sobre as quais seja possível aplicar alguma regra e que, ainda, não tenha recebido a aplicação de nenhuma regra. ■

Veja mais um exemplo:

Exemplo 4.14 (construção de um *tableau* semântico) Considere a fórmula G tal que:

$$G = (((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P.$$

Construímos, a seguir, um *tableau* a partir de G e o primeiro passo, claro, é escrever G no *tableau*, na linha 1, como indicado na Figura 4.8. A regra adequada à aplicação em G é a regra R_1 e o resultado é mostrado na Figura 4.9. Em seguida, aplicamos a regra R_2 na linha 2. Observe que poderíamos aplicar R_5 na linha 3. Entretanto, escolhemos aplicar R_2 na linha 2. E isso não modifica a conclusão do *tableau*. O resultado é mostrado na Figura 4.10. Na sequência, aplicamos a regra R_1 e obtemos

$$
\begin{array}{llcccr}
1. & & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg(((P \rightarrow Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P)} & & H \\
2. & & \multicolumn{2}{c}{((P \rightarrow Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P} & & R_5, 1. \\
3. & & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)} & & R_1, 2. \\
4. & & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg P} & & R_1, 2. \\
5. & & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q)} & & R_1, 3. \\
6. & & \multicolumn{2}{c}{\neg(P \leftrightarrow Q)} & & R_1, 3. \\
7. & & \multicolumn{2}{c}{P} & & R_5, 4. \\
 & & \swarrow & \searrow & & \\
8. & \multicolumn{2}{c}{\neg P} & \multicolumn{2}{c}{Q} & R_3, 5. \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
9. & (\neg P \land Q) & (P \land \neg Q) & (\neg P \land Q) & (P \land \neg Q) & R_9, 6.
\end{array}
$$

Figura 4.6: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

$$
\begin{array}{llcccr}
1. & & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg(((P \rightarrow Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P)} & & H \\
2. & & \multicolumn{2}{c}{((P \rightarrow Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P} & & R_5, 1. \\
3. & & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)} & & R_1, 2. \\
4. & & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg P} & & R_1, 2. \\
5. & & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q)} & & R_1, 3. \\
6. & & \multicolumn{2}{c}{\neg(P \leftrightarrow Q)} & & R_1, 3. \\
7. & & \multicolumn{2}{c}{P} & & R_5, 4. \\
 & & \swarrow & \searrow & & \\
8. & \multicolumn{2}{c}{\neg P} & \multicolumn{2}{c}{Q} & R_3, 5. \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
9. & (\neg P \land Q) & (P \land \neg Q) & (\neg P \land Q) & (P \land \neg Q) & R_9, 6. \\
10. & \neg P & P & \neg P & P & R_1, 9. \\
11. & Q & \neg Q & Q & \neg Q & R_1, 9.
\end{array}
$$

Figura 4.7: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$	G

Figura 4.8: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$	G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$	$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$	$R_1, 1.$

Figura 4.9: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

o *tableau* da Figura 4.11. Observe que poderíamos fazer outra escolha, aplicar R_5 na linha 3. O o resultado da aplicação da regra R_1 na fórmula da linha 2 é escrito somente abaixo da fórmula $((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$. Esse resultado não é escrito abaixo da fórmula Q, porque a fórmula Q não é descendente, na árvore, da fórmula $((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$. Nesse ponto, podemos aplicar R_5 na linha 3, ou R_4 na linha 5, ou a regra R_3 na fórmula da linha 6. Como já foi dito, no método dos *tableaux* semânticos não importa a escolha feita, pois o resultado final, ou a conclusão final do *tableau*, é sempre a mesma. Escolhemos aplicar primeiro R_4 e depois R_3. O resultado é o *tableau* da Figura 4.12. A partir das fórmulas derivadas, temos novamente duas opções de aplicação das regras. Podemos aplicar R_1 na fórmula da linha 7, ou R_5 na fórmula da linha 2. Para as outras linhas, ou já aplicamos alguma regra, ou não é possível aplicar regra alguma, como é o caso da linha 8. O resultado da aplicação de R_1 é o *tableau* da Figura 4.13. Falta aplicar somente a regra R_5 na linha 3. E, nesse caso, o resultado deve ser escrito em todos os descendentes, na árvore, da fórmula da linha 3. O resultado da aplicação de R_5 na fórmula da linha 3 é o *tableau* da Figura 4.14. Por fim, observe que escrevemos $R_1, 4.$, $R_5, 3.$, na linha 5, da terceira coluna. Isso indica que a primeira fórmula da linha 5 foi deduzida, aplicando R_1 na linha 4 e a segunda fórmula foi deduzida, aplicando R_5 na linha 3. No *tableau* da Figura 4.14

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$		G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$		$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$		$R_1, 1.$
4.	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$	Q	$R_2, 2.$

Figura 4.10: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$		G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$		$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$		$R_1, 1.$
4.	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$	Q	$R_2, 2.$
5.	$(P \leftrightarrow Q)$		$R_1, 4.$
6.	$(P \rightarrow R)$		$R_1, 4.$

Figura 4.11: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$					G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$					$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$					$R_1, 1.$
4.	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$				Q	$R_2, 2.$
5.	$(P \leftrightarrow Q)$					$R_1, 4.$
6.	$(P \rightarrow R)$					$R_1, 4.$
7.	$P \wedge Q$		$\neg P \wedge \neg Q$			$R_4, 5.$
8.	$\neg P$	R	$\neg P$	R		$R_3, 6.$

Figura 4.12: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

$$\begin{array}{lccccl}
1. & \multicolumn{4}{c}{(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P} & G \\
2. & \multicolumn{4}{c}{(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)} & R_1, 1. \\
3. & \multicolumn{4}{c}{\neg\neg P} & R_1, 1. \\
4. & \multicolumn{3}{c}{((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))} & Q & R_2, 2. \\
5. & \multicolumn{3}{c}{(P \leftrightarrow Q)} & & R_1, 4. \\
6. & \multicolumn{3}{c}{(P \rightarrow R)} & & R_1, 4. \\
7. & \multicolumn{2}{c}{P \wedge Q} & \multicolumn{2}{c}{\neg P \wedge \neg Q} & R_4, 5. \\
8. & \neg P & R & \neg P & R & R_3, 6. \\
9. & P & P & \neg P & \neg P & R_1, 7. \\
10. & Q & Q & \neg Q & \neg Q & R_1, 7.
\end{array}$$

Figura 4.13: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

não há mais fórmulas sobre as quais é possível aplicar alguma regra e que, ainda, não tenha recebido a aplicação de nenhuma regra. Logo, o *tableau* associado a G está concluído. ■

No desenvolvimento dos *tableaux* dos exemplos anteriores, escolhemos as regras aleatoriamente. Entretanto, na medida do possível, para que o *tableaux* não fique extenso, devemos escolher preferencialmente regras que não bifurcam. O Exemplo 4.15 a seguir analisa essa questão. Este exemplo considera o desenvolvimento de um *tableau* semântico a partir de um conjunto de fórmulas.

Exemplo 4.15 (construção de *tableau* semântico) Considere o conjunto de fórmulas:

$$\{(P \vee Q), (P \wedge \neg Q)\}.$$

Um *tableau* semântico construído a partir dessas fórmulas é representado na Figura 4.15. O *tableau* semântico é iniciado com as fórmulas $(P \vee Q)$ e $(P \wedge \neg Q)$, que são denotadas nas linhas 1 e 2 na Figura 4.15. Em seguida, a regra R_2 é aplicada à fórmula 1, obtendo as fórmulas da linha 3. Finalmente, a regra R_1 é aplicada à formula 2 e são obtidas as fórmulas das linhas 4 e 5. Observe que a aplicação da regra R_2 faz com que o *tableau* semântico se bifurque em dois ramos. O mesmo não ocorre com a aplicação de R_1. Entretanto, nesse caso os resultados da aplicação

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$					G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$					$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$					$R_1, 1.$
4.	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$				Q	$R_2, 2.$
5.	$(P \leftrightarrow Q)$				P	$R_1, 4.$, $R_5, 3.$
6.	$(P \rightarrow R)$					$R_1, 4.$
7.	$P \wedge Q$		$\neg P \wedge \neg Q$			$R_4, 5.$
8.	$\neg P$	R	$\neg P$	R		$R_3, 6.$
9.	P	P	$\neg P$	$\neg P$		$R_1, 7.$
10.	Q	Q	$\neg Q$	$\neg Q$		$R_1, 7.$
11.	P	P	P	P		$R_5, 3.$

Figura 4.14: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$P \vee Q$		
2.	$P \wedge \neg Q$		
3.	P	Q	R_2 1.
4.	P	P	R_1 2.
5.	$\neg Q$	$\neg Q$	R_1 2.

Figura 4.15: *Tableau* iniciado com $\{(P \vee Q), (P \wedge \neg Q)\}$.

$$
\begin{array}{lccc}
1. & P \lor Q & & \\
2. & P \land \neg Q & & \\
3. & P & & R_1\ .2 \\
4. & \neg Q & & R_1\ .2 \\
 & \swarrow \quad \searrow & & \\
5. & P \qquad Q & & R_2\ .1
\end{array}
$$

Figura 4.16: *Tableau* iniciado com $\{(P \lor Q),\ (P \land \neg Q)\}$.

$$
\begin{array}{lc}
1. & P \to Q \\
2. & \neg(P \lor Q) \\
3. & \neg(R \to P)
\end{array}
$$

Figura 4.17: *Tableau* semântico associado a Φ.

de R_1 são repetidos nos dois ramos do *tableau*. Esse *tableau* também pode ser construído pela aplicação de R_1 e depois R_2. Nesse caso, o resultado é o *tableau* da Figura 4.16. No *tableau* da Figura 4.16, R_2 é aplicada após R_1. Isso significa que a bifurcação da árvore é postergada. Em geral, a aplicação de uma regra é feita considerando qualquer uma das fórmulas presentes na árvore. Porém, uma boa heurística na construção do *tableau* é aplicar inicialmente regras que não bifurcam a árvore. Seguindo essa heurística, obtemos de maneira geral *tableaux* menores, ou seja, com menos ramos. ■

Heurística para aplicação de regras. Aplique preferencialmente as regras R_1, R_5, R_7 e R_8, que não bifurcam o *tableau*. O Exemplo 4.16, a seguir, segue essa heurística.

Exemplo 4.16 (construção de *tableau* semântico) Considere o conjunto de fórmulas: $\Phi = \{(P \to Q), \neg(P \lor Q), \neg(R \to P)\}$. A Figura 4.17, é um *tableau* iniciado com as fórmulas desse conjunto. Iniciamos o desenvolvimento do *tableau* com a regra R_7, que não bifurca a árvore. O resultado da aplicação de R_7 à linha 2 é indicado no *tableau* da Figura 4.18. Em seguida utilizamos outra regra que não bifurca a árvore. O resultado da aplicação de R_8 à linha 3 é indicado no *tableau* da Figura 4.19. Por fim, aplicamos a regra R_3 à linha 1, bifurcando a árvore. O resultado é indicado no *tableau* da Figura 4.20.

■

4.4.4 Propriedades fundamentais

Lembre, novamente, dos nossos objetivos:

$$
\begin{array}{lcl}
1. & P \to Q & \\
2. & \neg(P \vee Q) & \\
3. & \neg(R \to P) & \\
4. & \neg P & R_7, 2. \\
5. & \neg Q & R_7, 2.
\end{array}
$$

Figura 4.18: *Tableau* semântico associado a Φ.

$$
\begin{array}{lcl}
1. & P \to Q & \\
2. & \neg(P \vee Q) & \\
3. & \neg(R \to P) & \\
4. & \neg P & R_7, 2. \\
5. & \neg Q & R_7, 2. \\
6. & R & R_8, 3. \\
7. & \neg P & R_8, 3.
\end{array}
$$

Figura 4.19: *Tableau* semântico associado a Φ.

$$
\begin{array}{lcl}
1. & P \to Q & \\
2. & \neg(P \vee Q) & \\
3. & \neg(R \to P) & \\
4. & \neg P & R_7, 2. \\
5. & \neg Q & R_7, 2. \\
6. & R & R_8, 3. \\
7. & \neg P & R_8, 3. \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
8. & \neg P \qquad Q & R_3, 1.
\end{array}
$$

Figura 4.20: *Tableau* semântico associado a Φ.

1. Entender o significado de cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$;
2. Entender como as regras $R_1, \ldots, R_9$ são selecionadas e aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional;
3. Dada uma fórmula H, ou um conjunto de fórmulas, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H, ou do conjunto de fórmulas;
4. Analisar o *tableau* semântico obtido e entender como se podem deduzir propriedades semânticas.

Já resolvemos três tópicos. Só falta o último. Para analisar um *tableau* semântico e concluir sobre as propriedades semânticas de uma fórmula, ou do conjunto de fórmulas, a partir das quais o *tableau* semântico é desenvolvido, são necessárias algumas definições. Essas definições estabelecem algumas propriedades fundamentais dos *tableaux* semânticos.

Definição 4.3 (ramo) *Em um tableau semântico, um ramo corresponde a um ramo da árvore que descreve o tableau.*

Exemplo 4.17 (ramo de um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. O ramo mais à esquerda é dado pela sequência de fórmulas:

$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$$
$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$$
$$\neg\neg P$$
$$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$$
$$(P \leftrightarrow Q)$$
$$(P \rightarrow R)$$
$$P \wedge Q$$
$$\neg P$$
$$P$$
$$Q$$
$$P$$

E o ramo mais a direita pela sequência:

$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$$
$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$$
$$\neg\neg P$$
$$Q$$
$$P$$

■

Definição 4.4 (ramo fechado) *Em um tableau semântico, um ramo é fechado se ele contém uma fórmula H e sua negação $\neg H$.*

Exemplo 4.18 (ramo fechado em um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. O ramo mais a esquerda é fechado, pois ele contém as fórmulas $\neg P$ e P. Por outro lado, o ramo mais à direita não é fechado, pois ele não contém uma fórmula e sua negação. ■

Cuidado! Se um ramo não é fechado, então não necessariamente é aberto. O conceito de ramo aberto é definido a seguir.

Definição 4.5 (ramo saturado) *Em um tableau semântico, um ramo é saturado se para toda fórmula H, do ramo:*

1. *Já foi aplicada alguma regra à fórmula H, ou seja: H já foi expandida por alguma regra; ou*
2. *Não é possível aplicar nenhuma regra à fórmula H, isto é, H é igual a um literal e não é possível expandi-la por alguma regra.*

Exemplo 4.19 (ramo saturado em um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. Todos os ramos desse *tableau* são saturados. Isso porque não é possível aplicar mais nenhuma regra, a não ser que haja repetição de tal aplicação. ■

Definição 4.6 (ramo aberto) *Em um tableau semântico, um ramo é aberto se ele é saturado e não é fechado.*

Exemplo 4.20 (ramo fechado em um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. O ramo mais à esquerda não é aberto, pois ele é fechado. Por outro lado, o ramo mais à direita é aberto pois ele não é fechado e está saturado. Portanto, para que um ramo seja aberto ele precisa estar saturado, além de não ser fechado. ■

Definição 4.7 (*tableau* fechado) *Um tableau semântico é fechado quando todos os seus ramos são fechados.*

Definição 4.8 (*tableau* aberto) *Um tableau semântico é aberto se possui algum ramo aberto.*

Exemplo 4.21 (*tableau* fechado) Considere o *tableau* da Figura 4.7. Esse *tableau* é fechado pois todos os seus ramos são fechados. Confira. ■

Exemplo 4.22 (*tableau* aberto) Considere o *tableau* da Figura 4.12. Esse *tableau* é aberto pois ele contém um ramo aberto, o mais à direita. Confira. ■

Portanto, basta que um ramo seja aberto e então temos um *tableau* aberto. Para ser fechado, a exigência é maior. Todos os ramos devem ser fechados. Além disso, para um ramo ser fechado, não é necessário que ele seja saturado. Entretanto, apenas decidimos se um ramo é aberto, analisando ramos saturados.

$$
\begin{array}{lccl}
1. & \multicolumn{2}{c}{((P \land Q) \to R) \land ((P \land Q) \land \neg R)} & H \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(P \land Q) \to R} & R_1, 1. \\
3. & \multicolumn{2}{c}{(P \land Q) \land \neg R} & R_1, 1. \\
4. & \multicolumn{2}{c}{(P \land Q)} & R_1, 3. \\
5. & \multicolumn{2}{c}{\neg R} & R_1, 3. \\
 & \swarrow & \searrow & \\
6. & \neg (P \land Q) & R & R_3, 2. \\
 & \text{ramo} & \text{ramo} & \\
 & \text{fechado} & \text{fechado} &
\end{array}
$$

Figura 4.21: *Tableau* semântico iniciado com $((P \land Q) \to R) \land ((P \land Q) \land \neg R)$.

Exemplo 4.23 (*tableau* semântico fechado) O *tableau* semântico iniciado com a fórmula:

$$H = ((P \land Q) \to R) \land ((P \land Q) \land \neg R)$$

é mostrado na Figura 4.21. O *tableau* da Figura 4.21 é fechado. E, além disso, há nele outra característica importante. No ponto em que cada ramo se fecha, não prosseguimos com o seu desenvolvimento. A justificava de tal procedimento é objeto de nossa análise a seguir. ■

4.4.5 O teorema da correção

Agora estamos prontos para analisar a relação entre as propriedades semânticas da Lógica Proposicional e o método dos *tableaux* semânticos. Isto é, como utilizar esse método para determinar propriedades semânticas. O teorema da correção, considerado a seguir, estabelece a relação entre os *tableaux* semânticos e as tautologias.

Teorema 4.1 (correção dos *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H, da Lógica Proposicional,*

se existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia.

Antes de analisar o teorema da correção e também a razão de seu nome, considere alguns exemplos:

Exemplo 4.24 (tautologia em *tableaux* semânticos) Considere as sentenças:
"Guga é determinado.
Guga é inteligente.
Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
Guga é um atleta se é um fã de tênis.
Guga é fã de tênis se é inteligente."

Provamos, a seguir, utilizando *tableau* semântico, que a afirmação "Guga não é um perdedor." é uma consequência lógica das sentenças anteriores. Considere então as seguintes denotações:
$P =$ "Guga é determinado",
$Q =$ "Guga é inteligente",
$R =$ "Guga é atleta",
$P_1 =$ "Guga é um perdedor",
$Q_1 =$ "Guga é fã de tênis."

A partir de tais correspondências, provamos que $\neg P_1$ é uma consequência lógica das sentenças. E as sentenças são representadas pela conjunção:

$$P \ \wedge \ Q \ \wedge \ ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \ \wedge \ (Q_1 \rightarrow R) \ \wedge \ (Q \rightarrow Q_1)$$

Mas, sabemos que $\neg P_1$ é uma consequência dessa conjunção, se, e somente se, a fórmula H, a seguir, é uma tautologia.

$$H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1.$$

Para demonstrar que H é uma tautologia, utilizando o métodos dos *tableaux* semânticos, conforme o teorema da correção, Teorema 4.1, devemos verificar se é possível construir um *tableau* fechado a partir de $\neg H$. Considere, então, o *tableau* da Figura 4.22, a seguir: Como o *tableau* da Figura 4.22 é fechado, então pelo teorema da correção, Teorema 4.1, H é uma tautologia. Logo, é verdade que a afirmação "Guga não é um perdedor." é uma consequência das afirmações iniciais. ■

Os *tableaux* das Figuras 4.21 e 4.22 possuem uma importante característica em comum. No ponto em que cada ramo se fecha, não prosseguimos com o seu desenvolvimento. Por que deve ser assim? Conforme o teorema da correção, Teorema 4.1, se o *tableau* associado a $\neg H$ é fechado, então H é uma tautologia. Portanto, para concluir que H é uma tautologia, devemos obter um *tableau* com todos os ramos fechados. Ou seja, o objetivo é obter um *tableau* fechado. E dado que algum ramo se fecha, então não é mais necessário prosseguir com o seu desenvolvimento, pois as derivações subsequentes não modificam a natureza fechada do ramo. Nesse sentido, o *tableau* da Figura 4.7 pode ser modificado para o *tableau* da Figura 4.23, indicada a seguir. Além disso, como esse *tableau* é associado à fórmula

$$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P),$$

concluímos que $\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$ é uma tautologia.

Definição 4.9 (prova) *Um tableau fechado associado a uma fórmula $\neg H$ é uma prova de H.*

O *tableau* da Figura 4.23, que é fechado, é uma prova de

$$\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P).$$

$$
\begin{array}{lcl}
1. & \neg(((P \land Q) \land ((P \land R) \to \neg P_1) & \\
 & \quad \land (Q_1 \to R) \land (Q \to Q_1)) \to \neg P_1) & \neg H \\
2. & P \land Q \land ((P \land R) \to \neg P_1) \land (Q_1 \to R) \land (Q \to Q_1) & R_8,\ 1. \\
3. & \neg\neg P_1 & R_8,\ 1. \\
4. & P & R_1,\ 2. \\
5. & Q & R_1,\ 2. \\
6. & (P \land R) \to \neg P_1 & R_1,\ 2. \\
7. & (Q_1 \to R) & R_1,\ 2. \\
8. & (Q \to Q_1) & R_1,\ 2. \\
9. & P_1 & R_5,\ 3. \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
10. & \neg Q \qquad\qquad Q_1 & R_3,\ 8. \\
 & \text{fechado} \qquad \swarrow \quad \searrow & \\
11. & \neg Q_1 \qquad\qquad R & R_3,\ 7. \\
 & \text{fechado} \qquad \swarrow \quad \searrow & \\
12. & \neg(P \land R) \qquad \neg P_1 & R_3,\ 6. \\
 & \swarrow \quad \searrow \qquad \text{fechado} & \\
13. & \neg P \qquad\qquad \neg R & R_6, \\
 & & 12. \\
 & \text{fechado} \qquad \text{fechado} &
\end{array}
$$

Figura 4.22: *Tableau* semântico fechado associado a $\neg H$.

1.	$\neg\neg(((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P)$			H
2.	$((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P$			$R_5, 1.$
3.	$(P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)$			$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$			$R_1, 2.$
5.	$(P \to Q)$			$R_1, 3.$
6.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$			$R_1, 3.$
7.	P			$R_5, 4.$
8.	$\neg P$ fechado	Q		$R_3, 5.$
9.		$(\neg P \land Q)$	$(P \land \neg Q)$	$R_9, 6.$
10.		$\neg P$	P	$R_1, 9.$
11.		Q	$\neg Q$	$R_1, 9.$
		fechado	fechado	

Figura 4.23: *Tableau* semântico fechado associado a H.

Observe que o *tableau* é iniciado com a negação dessa fórmula. Após a aplicação das regras, todos os seus ramos são fechados, o que constitui uma prova da fórmula

$$\neg(((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P).$$

Ou seja, essa fórmula é uma tautologia. A partir disso, concluímos que

$$((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P$$

é contraditória.

Definição 4.10 (consequência lógica em *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses*[5] $\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$, *então H é uma consequência lógica de β, se existe uma prova de $(A_1 \land \ldots, \land A_n) \to H$.*

Exemplo 4.25 (consequência lógica em *tableaux* semânticos) Considere as sentenças:
"Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato."
"Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato."
A sentença:

[5] Neste livro consideramos apenas conjuntos finitos de hipóteses.

1.	$\neg(((P \to (R \to Q)) \land (P \to R)) \to (P \to Q))$	$\neg G$
2.	$(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)$	R_8, 1.
3.	$\neg(P \to Q)$	R_8, 1.
4.	P	R_8, 3.
5.	$\neg Q$	R_8, 3.
6.	$P \to (R \to Q)$	R_1, 2.
7.	$P \to R$	R_1, 2.
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P \qquad (R \to Q)$	R_3, 6.
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
9.	$\neg P \qquad R$	R_3, 7.
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
10.	$\neg R \qquad Q$	R_3, 8.
	fechado fechado	

Figura 4.24: *Tableau* semântico fechado associado a $\neg G$. ■

"Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece."
é uma consequência lógica das afirmações anteriores? Para representar as sentenças na Lógica Proposicional, considere as seguintes correspondências: $P =$ "Guga joga uma partida de tênis"; $Q =$ "A torcida comparece"; $R =$ "O ingresso é barato". A partir delas, o argumento é traduzido para a Lógica Proposicional como:

$$G = ((P \to (R \to Q)) \land (P \to R)) \to (P \to Q).$$

Devemos, então, provar se G é ou não uma tautologia, ou seja, se a sentença "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica das afirmações anteriores. Como o *tableau* da Figura 4.24 é fechado, então pelo teorema da correção, Teorema 4.1, G é uma tautologia. Portanto, a consequência lógica ocorre. Isto é, a sentença "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica das afirmações anteriores.

As conclusões dos exemplos anteriores se fundamentam nos resultados do teoremas da correção, Teorema 4.1. Por isso, vale a pena analisá-lo com mais cuidado.

Nota. A demonstração do teorema da correção utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro. A demonstração pode ser encontrada em [Fitting].

Entretanto, mesmo não o demonstrando, rigorosamente, é possível compreender seu significado.

O porquê do nome "correção". O teorema da correção diz que se há uma prova de uma fórmula, utilizando *tableaux* semânticos, então essa fórmula é, necessariamente, uma tautologia.

Se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia.

E, como sabemos, tautologia é um conceito forte, muito mais que a veracidade. Pois se uma fórmula é uma tautologia, ela é verdadeira para todas as interpretações. Então, nesse contexto, podemos dizer que a fórmula provada é correta, dado que ela é uma tautologia. Portanto, como o teorema da correção nos *tableaux* semânticos é válido, então o resultado de toda prova, utilizando *tableaux* semânticos, é uma fórmula correta. Ou seja, o método dos *tableaux* semânticos somente prova o que é correto. Nesse método, não se prova aquilo que pode ser falso, ou que não é correto. Isto é, se existe algum *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia, ou seja, é uma fórmula correta, que sempre é interpretada como verdadeira.

A validade do teorema da correção em um caso particular. Como já foi dito, não provamos formalmente neste livro o teorema da correção. Isso porque nosso texto é apenas uma introdução. Mas, mesmo assim, apresentamos uma análise que justifica informalmente a validade do teorema da correção em um caso particular. Logo, por ser um caso particular, a análise que se segue não prova o caso geral. Uma prova da fórmula G, apresentada no Exemplo 4.25, é o *tableau* desenvolvido na Figura 4.24. Nesse caso:

$$G = ((P \to (R \to Q)) \land (P \to R)) \to (P \to Q)$$

e sua prova possui os quatro ramos fechados indicados na Figura 4.25. Observe que cada ramo inicia com a fórmula $\neg G$, que é a primeira fórmula do *tableau*. Entretanto, cada ramo é constituído de uma sequência diferente de fórmulas. Além disso, como cada ramo é fechado, ele possui uma fórmula e sua negação. Os ramos 1 e 2, por exemplo, são fechados porque contêm, cada um, as fórmulas P e $\neg P$. O ramo 3 contém R e $\neg R$ e o ramo 4 contém Q e $\neg Q$.

O método dos *tableaux* semânticos é um método similar ao método da negação. No método da negação, para provar que G é uma tautologia, supomos inicialmente que G é falsa, ou seja, que existe uma interpretação I tal que $I[\neg G] = T$[6]. Analogamente, no método dos *tableaux* semânticos, para provar que G é uma tautologia, iniciamos o *tableau* com a negação de G, ou seja, $\neg G$. Isso significa que estamos supondo que existe uma interpretação I tal que $I[\neg G] = T$. Isto é, estamos supondo que existe uma interpretação I que interpreta a primeira fórmula do *tableau* como verdadeira. No desenvolvimento do *tableau* semântico, aplicamos uma sequência de regras nas quais temos duas situações possíveis: a regra bifurca ou não. No caso em que a regra não bifurca, se a primeira fórmula da regra é verdadeira, então as fórmulas escritas abaixo também são verdadeiras. Na regra R_1, por exemplo, se $I[A \land B] = T$, então temos: $I[A] = T$ e $I[B] = T$. Quando a regra bifurca, se a

[6] Devido a esse fato, tal sistema também é denominado sistema de refutação.

ramo 1
$\neg G$
$(P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)$
$\neg(P \rightarrow Q)$
P
$\neg Q$
$P \rightarrow (R \rightarrow Q)$
$P \rightarrow R$
$\neg P$

ramo 2
$\neg G$
$(P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)$
$\neg(P \rightarrow Q)$
P
$\neg Q$
$P \rightarrow (R \rightarrow Q)$
$P \rightarrow R$
$(R \rightarrow Q)$
$\neg P$

ramo 3
$\neg G$
$(P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)$
$\neg(P \rightarrow Q)$
P
$\neg Q$
$P \rightarrow (R \rightarrow Q)$
$P \rightarrow R$
$(R \rightarrow Q)$
R
$\neg R$

ramo 4
$\neg G$
$(P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)$
$\neg(P \rightarrow Q)$
P
$\neg Q$
$P \rightarrow (R \rightarrow Q)$
$P \rightarrow R$
$(R \rightarrow Q)$
R
Q

Figura 4.25: Ramos fechados da prova de G.

interpretação do ramo 1
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[\neg P] = T$

interpretação do ramo 2
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[(R \to Q)] = T$
$I[\neg P] = T$

interpretação do ramo 3
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[(R \to Q)] = T$
$I[R] = T$
$I[\neg R] = T$

interpretação do ramo 4
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[(R \to Q)] = T$
$I[R] = T$
$I[Q] = T$

Figura 4.26: Interpretação do ramos fechados da prova de G.

primeira fórmula da regra é verdadeira, então pelo menos uma das fórmulas escritas abaixo é verdadeira. Na regra R_2, por exemplo, se $I[A \vee B] = T$, então temos: $I[A] = T$, ou $I[B] = T$.

Dados tais fatos, no caso do *tableau* da Figura 4.24, concluímos que se $I[\neg G] = T$, então todas as fórmulas de pelo menos um ramo da árvore são interpretadas como verdadeiras. Em outras palavras, se $I[\neg G] = T$, então pelo menos uma das situações indicadas na Figura 4.26 ocorre. Mas veja o que ocorre na interpretação de cada ramo. Nos ramos 1 e 2, temos que $I[P] = T$ e $I[\neg P] = T$. No ramo 3, temos $I[R] = T$ e $I[\neg R] = T$, enquanto no ramo 4 temos $I[Q] = T$ e $I[\neg Q] = T$. Em todos os casos, ocorrem absurdos. Isso significa que se $I[\neg G] = T$, então ocorrem absurdos em todos os ramos, ou seja, em todas as possibilidades. Conclusão: não existe interpretação I tal que $I[\neg G] = T$. Logo, para toda interpretação I, $I[\neg G] = F$. Isto, é, para toda interpretação I, $I[G] = T$. Portanto, G é uma tautologia. Esse método dos *tableaux* semânticos é, de fato, muito simpático.

1.	$\neg((P \leftrightarrow Q) \lor \neg P)$		$\neg G$
2.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$		R_7, 1.
3.	$\neg\neg P$		R_7, 1.
4.	P		R_5, 3.
	$\swarrow$	$\searrow$	
5.	$P \land \neg Q$	$\neg P \land Q$	R_9, 2.
6.	P	$\neg P$	R_1, 5.
7.	$\neg Q$	Q	R_1, 5.
	aberto	fechado	

Figura 4.27: *Tableau* semântico aberto associado a $\neg G$.

4.4.6 O teorema da completude

Iniciamos esta seção, considerando um exemplo:

Exemplo 4.26 (*tableau* semântico aberto) Considere a fórmula G a seguir:

$$G = ((P \leftrightarrow Q) \lor \neg P).$$

Nesse caso, não é possível obter um *tableau* fechado associado a $\neg G$, conforme indicado na Figura 4.27.

Portanto, o *tableau* da Figura 4.27 não é uma prova de G. E, por mais que tentemos, não é possível desenvolver o *tableau* e fechar todos os seus ramos. Dada uma fórmula H, um ramo aberto no *tableau* semântico a partir de $\neg H$ define um contraexemplo, ou uma interpretação I, tal que $I[H] = F$. Este fato é analisado neste exemplo. ■

No Exemplo 4.26, conforme a Figura 4.27, não é possível desenvolver o *tableau* e obter, ao final, todos os ramos fechados. Dessa informação, concluímos que o *tableau* da Figura 4.27 não é uma prova para a fórmula G. Tem-se, então, uma questão importante. Se não há uma prova de G, usando *tableau*, então podemos concluir que G não é uma tautologia? Nesse caso estamos questionando o inverso da implicação do teorema da correção, Teorema 4.1, que diz:

Se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia.

Agora, estamos questionando o contrário. Isto é:

Se não existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H não é uma tautologia?

A resposta a essa questão é afirmativa, conforme o teorema da completude, Teorema 4.2, a seguir.

Teorema 4.2 (completude dos *tableaux* semânticos) *Seja uma fórmula H, da Lógica Proposicional:*

Se não existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$,
então H não é uma tautologia.

Ou, equivalentemente:

Se H é uma tautologia, então existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$.

Nota. A demonstração do teorema da completude não é considerada neste livro. A demonstração pode ser encontrada em [Fitting].

Entretanto, consideramos a seguir uma demonstração, informal, do teorema da completude e também a razão de seu nome. Antes, porém, considere mais um exemplo.

Exemplo 4.27 (*tableau* aberto e contraexemplo) A Figura 4.27 é um *tableau* associado à fórmula:

$$\neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P).$$

Nesse *tableau*, o ramo à esquerda é aberto. Esse ramo contém os literais: $\neg Q$ e P. A partir desses literais, como Q é negado e P não é negado, definimos uma interpretação I tal que $I[Q] = F$ e $I[P] = T$. A interpretação I é tal que $I[((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)] = F$, ou seja, I é uma interpretação contraexemplo para a fórmula $((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$. No Exemplo 4.14 temos um *tableau* aberto na Figura 4.14. Esse *tableau* se inicia com a fórmula:

$$G = (((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P.$$

Logo, nesse caso, o ramo aberto determina uma interpretação contraexemplo para a fórmula:

$$\neg G = \neg((((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P)$$

Preste atenção! Se o *tableau* começa com G, ele tenta provar que $\neg G$ é uma tautologia, ou estabelece um contraexemplo para $\neg G$. Fique atento às negações das fórmulas. No segundo ramo, da esquerda para a direita, temos os literais: Q, P e R. A partir desses literais, como P, Q e R não são negados, definimos uma interpretação I tal que $I[P] = T$, $I[Q] = T$ e $I[R] = T$. A interpretação I é tal que $I[\neg G] = F$. Isto é:

$$I[\neg((((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P)] = F,$$

ou seja, I é uma interpretação contraexemplo para a fórmula $\neg G$. ■

Como já foi dito, o teorema da completude, Teorema 4.2, é um resultado fundamental no método dos *tableaux* semânticos. Portanto, vale a pena analisá-lo melhor. O teorema da completude afirma o seguinte.

Se não existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$,
então H não é uma tautologia.

Uma implicação que equivale a:

Se H é uma tautologia, então existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$.

Entretanto, como no caso do teorema da correção, ainda que ele não seja demonstrado rigorosamente, é possível compreender algo de seu significado.

O porquê do nome "completude". O teorema da completude diz que se uma fórmula é uma tautologia, então há uma prova dessa fórmula, utilizando *tableaux* semânticos. Nesse sentido, o método é completo, ou seja, ele prova todas as tautologias. O método não deixa escapar nenhuma tautologia, pois todas possuem, pelo menos, uma prova. Por isso, ele é completo.

A validade do teorema da completude em um caso particular. Novamente, como no caso do teorema da correção, não provamos neste livro, formalmente, o teorema da completude. Apresentamos apenas uma justificativa, informal, da validade do teorema da completude, em um caso particular. De novo, por ser um caso particular, a análise que se segue não prova o caso geral. Isto é, ela não prova o teorema da completude. Conforme o Exemplo 4.26, a Figura 4.27 determina um contraexemplo para a fórmula $\neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$. O contraexemplo é determinado pelo ramo à esquerda do *tableau*, que é aberto. Esse ramo contém os literais: $\neg Q$ e P. Por isso, a interpretação I tal que $I[Q] = F$ e $I[P] = T$ interpreta a fórmula como sendo falsa. Isto é, I é tal que $I[((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)] = F$. Portanto, dada uma fórmula H, se o *tableau* associado a $\neg H$ possui algum ramo aberto, podemos, a partir desse ramo aberto, definir uma interpretação que interpreta H como falsa. Logo:

Se não existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$,
então todo *tableau* semântico associado a $\neg H$ possui algum ramo aberto.

Então, considerando o ramo aberto, é possível definir uma interpretação contraexemplo para H. Logo, H não é uma tautologia. Conclusão: se todo *tableau* semântico associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então em todo *tableau* semântico associado a H é possível definir uma interpretação contraexemplo para H. Por isso, H não é uma tautologia.

4.4.7 Satisfatibilidade de conjunto de fórmulas

Até agora usamos o método dos *tableaux* semânticos para determinar se uma fórmula é ou não uma tautologia. O Exemplo 4.28 utiliza o método para determinar se um conjunto de fórmulas é ou não satisfatível.

Exemplo 4.28 (conjunto não satisfatível) Este exemplo demonstra, utilizando *tableaux* semânticos, que o conjunto de fórmulas a seguir não é satisfatível:

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}.$$

Seja H a fórmula definida pela conjunção das fórmulas de β:

$$H = (\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \rightarrow P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1)$$

$$
\begin{array}{lcr}
1. & \neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg(Q \lor \neg R) \land (R \to P_1) \land \neg(\neg P \lor P_1)) & \neg\neg H \\
2. & (\neg P \lor Q) \land \neg(Q \lor \neg R) \land (R \to P_1) \land \neg(\neg P \lor P_1) & R_5,\ .1 \\
3. & \neg P \lor Q & R_1,\ 2. \\
4. & \neg(Q \lor \neg R) & R_1,\ 2. \\
5. & R \to P_1 & R_1,\ 2. \\
6. & \neg(\neg P \lor P_1) & R_1,\ 2. \\
7. & \neg Q & R_7,\ 4. \\
8. & \neg\neg R & R_7,\ 4. \\
9. & \neg\neg P & R_7,\ 6. \\
10. & \neg P_1 & R_7,\ 6. \\
11. & R & R_5,\ 8. \\
12. & P & R_5,\ 9. \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
13. & \neg R \qquad P_1 & R_3,\ 5. \\
 & \text{fechado} \qquad \text{fechado} &
\end{array}
$$

Figura 4.28: *Tableau* semântico fechado associado a $\neg\neg H$.

Então, observe que:

$$
\begin{array}{lll}
\beta \text{ é insatisfatível,} & \Leftrightarrow & \text{não existe interpretação } I;\ I[H] = T, \\
 & \Leftrightarrow & \text{não existe interpretação } I;\ I[\neg H] = F, \\
 & \Leftrightarrow & \text{para toda interpretação } I;\ I[\neg H] = T, \\
 & \Leftrightarrow & \neg H \text{ é uma tautologia,} \\
 & \Leftrightarrow & \neg H \text{ tem uma prova utilizando } \textit{tableaux} \text{ semânticos,} \\
 & \Leftrightarrow & \text{existe um } \textit{tableau} \text{ semântico fechado associado a } \neg\neg H.
\end{array}
$$

Portanto, para demonstrar que β é insatisfatível, basta verificar se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg\neg H$. A Figura 4.28 é um *tableau* associado a $\neg\neg H$. Como o *tableau* da Figura 4.28 é fechado, então, pelo teorema da correção, $\neg H$ é uma tautologia. Logo, o conjunto de fórmulas β é insatisfatível. Observe que no *tableau* desse exemplo, Figura 4.28, não foi aplicada nenhuma regra à fórmula 3. Isso significa que a fórmula $\neg H$ sem a subfórmula $\neg P \lor Q$ também é uma tautologia. Portanto, o conjunto de fórmulas:

$$\{\neg(Q \lor \neg R), (R \to P_1), \neg(\neg P \lor P_1)\}$$

também é insatisfatível. Usando o mesmo raciocínio, é possível verificar também que:

$$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg(Q \lor \neg R) \land \neg(\neg P \lor P_1))$$

$$
\begin{array}{lccccl}
1. & & (P \vee \neg P) \vee (P \to Q) & & & H \\
 & & \swarrow \quad \searrow & & & \\
2. & (P \vee \neg P) & & (P \to Q) & & R_2,\ 1. \\
 & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \\
3. & P \quad \neg P & & \neg P \quad Q & & R_2, 2.;\ R_3,\ 2. \\
 & \text{aberto} \quad \text{aberto} & & \text{aberto} \quad \text{aberto} & &
\end{array}
$$

Figura 4.29: *Tableau* semântico aberto.

é tautologia e concluir que o conjunto:

$$\{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é insatisfatível. Finalmente, observe que as fórmulas 3, 4, 5 e 6 do *tableau* da Figura 4.28 correspondem exatamente às fórmulas de β. Isso significa que, para demonstrar que β é insatisfatível, basta iniciar o *tableau* com as fórmulas de β. ■

4.4.8 Algumas observações

A prova utilizando *tableaux* semânticos é feita seguindo um método análogo ao da negação, ou redução ao absurdo. Para provar, por exemplo, que uma fórmula H é uma tautologia, consideramos inicialmente a sua negação $\neg H$. Em seguida, construímos um *tableau* semântico, iniciado com $\neg H$. O absurdo corresponde à obtenção, em todos os ramos do *tableau*, de uma fórmula A e sua negação $\neg A$. O que ocorre se o *tableau* é construído a partir da fórmula H e não de sua negação? Nesse caso, se o *tableau* obtido é fechado, então $\neg H$ é uma tautologia. Isto é, H é contraditória. Em outras palavras, se o *tableau* iniciado com H é fechado, então um *tableau* iniciado com $\neg\neg H$ também é fechado. Logo, $\neg H$ é uma tautologia, isto é, H é contraditória. Analisemos, ainda, outra questão. Considere a tautologia H a seguir, $H = (P \vee \neg P) \vee (P \to Q)$. Nesse caso, dado que H é uma tautologia, todo *tableau* iniciado com $\neg H$ é fechado. Por outro lado, conforme a Figura 4.29, o *tableau* iniciado com H não é fechado.

O *tableau* da Figura 4.29 possui todos os seus ramos abertos. Poderíamos, então, concluir, de forma incorreta, que se um *tableau* iniciado com H possui apenas ramos abertos, então H é tautologia. Isso, porém, é falso! A fórmula
$G = (Q \wedge \neg Q) \vee (P \to P)$ é uma tautologia, e um *tableau* iniciado com G, dado pela Figura 4.30, tem um ramo fechado e dois abertos.

Portanto, dada uma tautologia H, o *tableau* iniciado com H pode conter ramos abertos e fechados. Além disso, utilizando como premissas os teoremas da completude e da correção, Teoremas 4.1 e 4.2, seguem algumas conclusões.

1. Dada uma fórmula H, se existe um *tableau* semântico fechado associado a H, então todos os *tableaux* semânticos associados a H são fechados.

$$
\begin{array}{lcccl}
1. & \multicolumn{3}{c}{(Q \wedge \neg Q) \vee (P \to P)} & G \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
2. & (Q \wedge \neg Q) & & (P \to P) & R_2,\ 1. \\
3. & Q & \swarrow & \searrow & R_1,\ 2. \\
4. & \neg Q & \neg P & P & R_1,\ 2.,\ R_3,\ 2. \\
5. & \text{fechado} & \text{aberto} & \text{aberto} &
\end{array}
$$

Figura 4.30: *Tableau* semântico com ramos fechado e aberto.

2. Dada uma fórmula H, se existe um *tableau* semântico aberto associado a H, então todos os *tableaux* semânticos associados a H são abertos.

3. Dada uma fórmula H, se H é uma tautologia, então todos os *tableaux* semânticos associados a $\neg H$ são fechados.

4. Dada uma fórmula H, se H não é uma tautologia, então todos os *tableaux* semânticos associados a $\neg H$ são abertos.

5. Dada uma fórmula H, se H não é uma tautologia, então os *tableaux* semânticos associados a H podem conter ramos abertos e fechados.

6. Dada uma fórmula H, se H é uma tautologia, então os *tableaux* semânticos associados a H podem conter ramos abertos e fechados.

7. Dada uma fórmula H, se existe *tableau* semântico fechado associado a H, então H é contraditória.

8. Dada uma fórmula H, se existe *tableau* semântico associado a H, com todos os ramos abertos, então H não é tautologia e nada se pode concluir além disso.

9. A ordem de aplicação das regras no desenvolvimento de um *tableau* não influencia no resultado final. Isto é, mesmo mudando as ordem de aplicação das regras em um *tableau* fechado, ele continuará fechado. O mesmo ocorre se o *tableau* é aberto.

10. A ordem de aplicação das regras no desenvolvimento de um *tableau* influencia no tamanho final, ou número de bifurcações do *tableau*.

11. Dada uma fórmula H, utilizando o método dos *tableaux* semânticos, sempre é possível concluir se H é ou não uma tautologia.

12. Dada uma fórmula H, utilizando o método dos *tableaux* semânticos, sempre é possível mostrar que existe uma prova de H, ou que essa prova não existe[7].

[7]Pode parecer estranho, mas existem sistemas de prova nos quais nem sempre é possível mostrar a existência de uma prova de H, ou de $\neg H$.

4.4.9 Complexidade e decidibilidade

Apresentamos neste capítulo três métodos semânticos: da tabela-verdade, da negação ou redução ao absurdo e dos *tableaux* semânticos. E, em vários aspectos, eles são equivalentes.

Complexidade. Os métodos semânticos, apresentados neste capítulo, possuem a mesma complexidade computacional[8]. Isto é, para determinar, por exemplo, a satisfatibilidade de uma fórmula da Lógica Proposicional, todos eles têm uma complexidade exponencial. Por exemplo, para determinar se uma fórmula H de comprimento n é satisfatível ou não, o custo de tal tarefa é da ordem de 2^n. Além disso, em relação a esse grau de complexidade computacional, até hoje ninguém conseguiu coisa melhor. Um método mais eficiente para determinar a satisfatibilidade de fórmulas da Lógica Proposicional. Lembre-se: caso você, que está lendo este livro, consiga algo melhor, tenha certeza, ganhará um milhão de dólares. Existe uma instituição americana que oferece um milhão de dólares para quem resolver o problema $P = NP$. Nesse contexto, decidir se ocorre a igualdade entre P e NP e desenvolver um método mais eficiente para a satisfatibilidade das fórmulas da Lógica Proposicional têm muito em comum. Além disso, a solução desses problemas têm outras inúmeras consequências, além da fama que você terá ao resolvê-lo.

Decidibilidade. Os três métodos apresentados são mecanismos de decisão. Isso significa que dada uma fórmula H, utilizando o método da tabela-verdade, da negação, ou dos *tableaux* semânticos é possível decidir se H é ou não satisfatível. Nesse sentido, dizer que um método decide significa dizer que ele responde à questão sobre a satisfatibilidade de H, sem entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações. Ou seja, o método responde necessariamente depois de um tempo finito de execução. Por isso dizemos que tais métodos são mecanismos de decisão. Eles sempre fornecem uma decisão sobre a pergunta: H é ou não é satisfatível?

Portanto, os métodos semânticos definem algoritmos que não entram em loop, ou entram por um conjunto sem fim de operações. Isso porque são definidos por uma sequência não ambígua de instruções, que é executada até que determinada condição se verifique. Mais especificamente, eles constituem um conjunto de processos (e símbolos que os representam) para efetuar uma sequência finita de cálculos. Isto é, os métodos definem algoritmos porque são mecânicos e cada passo é bem determinado por um conjunto de instruções. E, além disso, não entram em loop, ou por um conjunto sem fim de operações [9]. No caso do método da tabela-verdade, por exemplo, o conjunto de instruções determina como cada tabela-verdade deve ser construída e analisada. Dessa forma, após um número finito de passos é possível decidir se H é, ou não, satisfatível. Além disso, as instruções definem um algoritmo, pois os passos utilizados na construção da tabela são mecânicos. E a execução do procedimento, por sua vez, sempre termina e retorna uma resposta, sendo, portanto, um procedimento de decisão. Dada uma fórmula H, ele sempre decide sobre qual

[8]Consulte [Cooper], [Sipser] e [Cormen], para a definição formal de complexidade.
[9]Consultar [Cooper] e [Sipser], para um estudo sobre algoritmos e decidibilidade.

resposta deve ser dada: H é ou não satisfatível. Devido a tais fatos, dizemos que o conjunto das tautologias é efetivamente decidível. Ele é efetivamente decidível porque existem métodos, ou algoritmos de decisão, que identificam quais são os elementos do conjunto das tautologias.[10] A definição de decidibilidade de propriedades e funções é considerada a seguir.

Definição 4.11 (decidibilidade) *Definimos, a seguir, a decidibilidade de uma propriedade e de uma função:*

1. *Uma propriedade é decidível, ou efetivamente decidível, se, e somente se, existe um algoritmo que decide em um número finito de passos quando a propriedade é, ou não, satisfeita;*
2. *Uma função é decidível, ou efetivamente decidível, se, e somente se, existe um algoritmo que decide em um número finito de passos o resultado da função aplicada a um determinado argumento.*

Prova do sim e do não. Dada uma fórmula H, a aplicação de qualquer um dos três métodos apresentados, decide se H é satisfatível, ou se H não é satisfatível. Isto é, dada uma fórmula da Lógica Proposicional, os métodos decidem o "sim", caso a fórmula seja satisfatível, ou decidem o "não", caso ela não seja satisfatível.

Cuidado! Nem todo método tem esse tipo de característica. A propriedade de provar o "sim", como também o "não". No próximo capítulo, por exemplo, estudamos um método sintático que prova apenas o "sim", caso a prova exista. E, caso não exista a prova do "sim", não podemos concluir, desse fato, a prova do "não".

Generalização para esquemas de fórmulas. Utilizamos qualquer um dos métodos semânticos para determinar propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Podemos provar, por exemplo, que a fórmula $(P \vee \neg P)$ é uma tautologia. Utilizando a mesma demonstração, é possível concluir que $(Q \vee \neg Q)$ também é uma tautologia. Observe que as estruturas sintáticas dessas fórmulas são idênticas. A única diferença é a troca de P por Q. Assim, a prova de que $(Q \vee \neg Q)$ é uma tautologia é análoga à prova de que $(P \vee \neg P)$ é uma tautologia. A nova demonstração é obtida trocando o símbolo P por Q. Nesse sentido, as provas podem ser generalizadas e no lugar das fórmulas podemos considerar esquemas de fórmulas, que representam conjuntos de fórmulas. Dessa forma, as fórmulas $(P \vee \neg P)$ e $(Q \vee \neg Q)$ são representadas pelo esquema $(H \vee \neg H)$ no qual H é uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional. E isso é uma generalização, pois observe que o esquema de fórmula anterior representa, por exemplo, as fórmulas $((P \rightarrow Q) \vee (\neg(P \rightarrow Q)))$, ou $((P \wedge R) \vee (\neg(P \wedge R)))$. A demonstração de propriedades semânticas de um esquema de fórmula segue os mesmos passos indicados pelos métodos analisados neste capítulo. Quando demonstramos que o esquema de fórmula $(H \vee \neg H)$ é uma tautologia, estamos demonstrando que inúmeras[11] fórmulas também são.

[10] Diferentemente do conjunto das tautologias, como veremos na segunda parte deste livro, o conjunto das fórmulas válidas da Lógica de Predicados não é decidível.

[11] Na verdade, infinitas fórmulas.

Nota. Neste livro, os esquemas de fórmulas são denominados simplesmente como "fórmulas".

A equivalência dos métodos semânticos

A rigor, os métodos apresentados neste capítulo são equivalentes. Quando construímos uma árvore semântica, por exemplo, um ramo dessa árvore corresponde a uma linha da tabela-verdade. Da mesma forma, no método da negação ou redução ao absurdo, quando iniciamos com o símbolo F sob a fórmula e continuamos preenchendo os valores de verdade dos seus símbolos, o que estamos fazendo é identificar ramos da árvore semântica ou linhas da tabela-verdade que interpretam a fórmula como F. Entretanto, mesmo que, sob tal ponto de vista, os métodos sejam equivalentes, é importante ter essas diferentes visões do mesmo problema, ou seja: como determinar as propriedades semânticas de uma fórmula. Isso, porque, mesmo sendo equivalentes do ponto de vista conceitual, eles não são equivalentes do ponto de vista de implementações computacionais. Além disso, o método dos *tableaux* semânticos pode ser estendido para fórmulas da Lógica de Predicados, o que não ocorre com os outros métodos.

4.4.10 Dedução de conhecimento

Um dos principais objetivos da Lógica é o estudo de estruturas que possam ser utilizadas na representação e dedução de conhecimento. E justamente por isso esse estudo é relevante para a Ciência da Computação. Por exemplo, o ato de programar corresponde a, pelo menos dois passos:

Passo 1. Inicialmente o programador deve representar em uma máquina conceitos semânticos que ele observa em sua volta e que formam o objeto da programação. Nessa atividade, o programador procura por linguagens que possam representar e estruturar o que ele observa. E, em geral, as linguagens utilizadas possuem como fundamento a sintaxe da Lógica.

Passo 2. Não basta apenas ter o conhecimento representado no computador. É necessário que a máquina, a partir das perguntas feitas pelos usuários, por si só, deduza respostas para tais perguntas. Nesse sentido, o ato de responder corresponde a uma dedução lógica a partir de premissas representadas na máquina.

Portanto, além da Lógica estabelecer uma linguagem útil para representação de conhecimento, o que tem grande aplicação em Computação, ela também estuda métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou argumentos válidos. Neste Capítulo estudamos três desses métodos: tabela-verdade, redução ao absurdo e *tableaux* semânticos. Se, por um lado, a Lógica estabelece uma linguagem útil, ela também analisa como o conhecimento é deduzido formalmente a partir do conhecimento dado *a priori*. Veja bem, isso também tem aplicações em Computação. A execução de um programa, por exemplo, pode ser vista como a dedução de um novo conhecimento a partir daquele representado *a priori*. Considere, por exemplo, a dedução efetuada no Exemplo 4.24. Nesse exemplo, a partir das sentenças "Guga é determinado," "Guga é inteligente," "Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor," "Guga é um atleta se é um amante do tênis." "Guga é amante do tênis se é inteligente." deduzimos um novo conhecimento. Ou seja, a partir dessas sentenças, deduzimos, utilizando *tableau* semântico, a seguinte afirmação "Guga não é um perdedor." E para que tal dedução seja efetuada de forma mecânica, basta implementar o método dos *tableaux* semânticos em um computador. Em seguida, representar na linguagem do programa as fórmulas que representam as sentenças acima. Por fim, o programa é executado para se obter a resposta. Lembre-se agora, dos três passos básicos que estamos seguindo no estudo da Lógica:

1) Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Tal representação considera os conceitos de sintaxe e semântica associados à linguagem.

2) Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos válidos. A verificação do conceito semântico de tautologia, ou validade, de fórmulas sintáticas da linguagem é um exemplo desse estudo.

3) Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de conhecimento a partir daquele representado previamente, o que também define a noção de consequência lógica.

No Capítulo 1 tratamos do primeiro item dessa lista. O segundo item consideramos neste Capítulo, no qual estudamos alguns métodos semânticos. Mas lembre: tudo isso no contexto da Lógica Proposicional. Finalmente, observe que a prova, definida nos métodos semânticos como os *tableaux* semânticos, estabelece procedimentos semânticos de dedução de conhecimento, que pode ser mecanizado em linguagens de programação em Lógica, como $PROLOG$, [Ait-Kaci], [Casanova], [Chang] e [Lloyd].

4.5 Exercícios

Demonstre, utilizando qualquer um dos métodos estudados neste capítulo, que as fórmulas a seguir são tautologias.

1. $(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$, $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \wedge (\neg G))$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$.
2. $(H \vee G) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow G)$, $(H \vee G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$, $(H \wedge G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$.
3. $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \vee G)$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(H \wedge \neg G)$.
4. $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg G \rightarrow \neg H)$.
5. $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$.

6. $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \land G) \lor (\neg H \land \neg G))$.
7. $(\neg(H \leftrightarrow G)) \leftrightarrow ((H \land \neg G) \lor (\neg H \land G))$.
8. $(H \land (G \lor E)) \leftrightarrow ((H \land G) \lor (H \land E))$,$(H \lor (G \land E)) \leftrightarrow ((H \lor G) \land (H \lor E))$.
9. $(H \land G) \leftrightarrow (G \land H)$, $(H \lor G) \leftrightarrow (G \lor H)$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$.
10. $((H \land G) \land H) \leftrightarrow (H \land (G \land H))$,$((H \lor G) \lor H) \leftrightarrow (H \lor (G \lor H))$, $((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$.
11. $((H \to G) \land (G \to H)) \to (H \to H)$, $((H \leftrightarrow G) \land (G \leftrightarrow H)) \to (H \leftrightarrow H)$.
12. $(H \lor (H \land G)) \leftrightarrow H$, $(H \land (H \lor G)) \leftrightarrow H$.
13. $(\neg H) \lor H$, $H \to H$, $H \leftrightarrow H$, $H \leftrightarrow (H \land H)$, $H \leftrightarrow (H \lor H)$, $H \leftrightarrow (H \land (H \lor G))$, $H \leftrightarrow (H \lor (H \land G))$.
14. $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H) \leftrightarrow (\neg G))$, $((H \land G) \to H) \leftrightarrow (H \to (G \to H))$, $H \to (G \to (H \to H))$.
15. $H \to (H \land G)$,$(H \land G) \to H$.
16. $(((H \to G) \to H) \to H)$, $(\neg H \to (H \to G))$.
17. $((H \land G) \to E) \leftrightarrow ((H \land \neg E) \to \neg G)$.
18. Considere G uma das fórmulas indicadas a seguir:
    (a) $\neg P \lor Q$
    (b) $\neg Q \to P$
    (c) $P \leftrightarrow Q$
    (d) $P \to Q$
    (e) $\neg P \to \neg Q$
    (f) $P \land \neg Q$

    Determine, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, os casos em que:
    i) $P \land Q \vDash G$
    ii) $P \to Q \vDash G$
    iii) $P \lor Q \vDash G$
    iv) $P \leftrightarrow Q \vDash G$
19. Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias.
    $H = P_1 \to (P_2 \to (P_3 \to (P_4 \to (P_5 \to (P_6 \to (P_7 \to P_1))))))$;
    $A = (((P \land S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \to P_1)) \to ((((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor R) \leftrightarrow R)) \to P)$;
    $E = P_1 \to ((P_2 \land P_3) \to ((P_4 \land P_5) \to ((P_6 \land P_7) \to P_8)))$;
    $G = P_1 \leftrightarrow ((P_2 \lor P_3) \leftrightarrow ((P_4 \lor P_5) \leftrightarrow ((P_6 \lor P_7) \leftrightarrow P_1)))$.
20. Considere a fórmula H:

$$H = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

(a) Construa um *tableau* semântico associado a H e identifique se é possível, a partir desse *tableau*, determinar se H é uma tautologia, é satisfatível ou é contraditória.

(b) Quantas linhas têm a tabela-verdade associada a H?

21. (a) Demonstre, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, se as fórmulas a seguir são tautologias ou não.

$$G = (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \wedge (P \vee R))$$

$$H = (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

$$G_1 = H_1 \leftrightarrow (H_1 \vee G_2)$$

(b) Na demonstração de que G_1 não é tautologia, quando consideramos $I[H_1] = T$ obtemos um absurdo. Mas, quando $I[H_1] = F$, não é observado nenhum absurdo. Comente o significado de tais fatos.

22. Demonstre, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, se a fórmula a seguir é uma tautologia:

$$(P \rightarrow P_1) \wedge (Q \rightarrow Q_1) \vDash (P \rightarrow Q_1) \vee (Q \rightarrow P_1)$$

23. Considere as fórmulas a seguir:

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S),$$

$$\neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

(a) Construa um *tableau* semântico associado a cada fórmula.

(b) Identifique, caso possível, a partir dos *tableaux* semânticos, determinados no item anterior, uma interpretação I tal que $I[H] = F$ e uma interpretação J tal que $J[H] = T$, para cada fórmula.

24. (a) Considere as fórmulas a seguir:
$H = (\neg(P \vee \neg Q) \vee R) \vee (R \rightarrow (Q \rightarrow P))$
$E = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \wedge R) \leftrightarrow R) \rightarrow P)$
$G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
Utilize o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar se tais fórmulas são tautologias. No caso em que a fórmula não for uma tautologia, utilize o resultado do método para identificar uma interpretação, que interpreta a fórmula como sendo falsa.

(b) Suponha que $I[P] = T$, o que podemos concluir a respeito de $I[H]$, $I[G]$, onde
$H = ((((P \wedge S) \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P_1) \wedge ((P_5 \wedge R_1) \leftrightarrow R) \rightarrow P)) \rightarrow ((P_4 \wedge P) \leftrightarrow P_4)$
$G = (((R \vee (S \leftrightarrow P_1)) \rightarrow ((P_2 \vee S_1) \leftrightarrow R_3)) \rightarrow P) \wedge (\neg P \leftrightarrow (\neg P \rightarrow ((R_5 \rightarrow P) \leftrightarrow (S \wedge P))))$?

25. Conforme a lei da contraposição, temos:

$$(P \rightarrow Q) \text{ equivale a } (\neg Q \rightarrow \neg P).$$

Demonstre, a partir desse fato, utilizando o teorema da dedução, que:

$$P \vDash Q, \text{ se, e somente se, } \neg Q \vDash \neg P.$$

26. (Zé indeciso) Considere as três afirmações a seguir.

H_1: Se Zé toma vinho e a bebida está ruim, ele fica com ressaca.

H_2: Se Zé fica com ressaca, então fica triste e vai para casa.

H_3: Zé vai ao seu encontro romântico com Maria ou fica triste e vai para casa.

Suponha que as três afirmações anteriores sejam verdadeiras. A partir desse fato, qual das afirmações a seguir também é verdadeira.

G_1: Se Zé toma vinho e a bebida está ruim, então ele perde seu encontro romântico com Maria.

G_2: Se Zé fica com ressaca e vai para casa, então ele não perde seu encontro romântico com Maria.

G_3: Se o vinho está ruim, então Zé não o toma ou não fica com ressaca.

G_4: Se o vinho está ruim ou Zé fica com ressaca, então ele fica triste.

G_5: Se Zé toma vinho e vai para casa, então ele não fica triste se o vinho está ruim.

27. (Grandes amores) Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder às seguintes questões.

i) Suponha que as duas afirmações a seguir são verdadeiras.

a) Zé ama Maria ou Elaine.
b) Se Zé ama Maria, então ele também ama Elaine.

Conclui-se necessariamente que Zé ama Maria?
Conclui-se necessariamente que Zé ama Elaine?

ii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta a Zé:

a) É realmente verdade que se você ama Maria, então você também ama Elaine?

Suponha que Zé responda o seguinte:

b) Se isso é verdade, então amo Maria.
Conclui-se, desse diálogo, que Zé ama Maria?
Conclui-se, desse diálogo, que Zé ama Elaine?

iii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta a Zé.

a) É realmente verdade que se você ama Maria, então você também ama Elaine?

Suponha que Zé responda o seguinte:

b) Se isso é verdade, então amo Maria e se eu amo Maria, então isso é verdade.
Conclui-se, desse diálogo, que Zé necessariamente ama Maria?
Conclui-se, desse diálogo, que Zé necessariamente ama Elaine?

iv) Suponha que Clotilde, aquela que sabe da vida de todos, faça a seguinte afirmação.

d) Com certeza Zé ama Maria e Elaine.

É possível, a partir da afirmação de Clotilde, concluir a afirmação a seguir?

Dizer que Zé ama Maria equivale a dizer que;

se Zé ama Maria então ele também ama Elaine.

v) Suponha que Clotilde modifique sua opinião e afirme:

e) Zé ama Maria ou Elaine.

Podemos concluir que a afirmação de Clotilde equivale à afirmação a seguir?

Se Zé não ama Maria então ele ama Elaine.

vi) A partir desse instante, há mais uma pessoa, Patrícia. Há três meninas: Maria, Elaine e Patrícia. Suponha que os fatos sejam verdadeiros:

a) Zé ama pelo menos uma das três meninas.
b) Se Zé ama Maria, mas não Patrícia, então ele também ama Elaine.
c) Zé ama Patrícia e Elaine, ou não ama nenhuma das duas.
d) Se Zé ama Patrícia, então também ama Maria.
A partir desses fatos, qual das meninas Zé necessariamente ama?

28. Considere as sentenças a seguir:

H_1: Se Maria não é inteligente, então Francisca é linda.

H_2: Se Francisca não é loura, então Dinalva é interessante.

H_3: Se Dinalva é linda ou interessante, então Maria é inteligente.

H_4: Se Luciana não é inteligente, então Dinalva é interessante.

H_5: Se Luciana é linda, então Dinalva é interessante.

Suponha que essas sentenças são verdadeiras. A partir desse fato, deduza o atributo de cada uma das meninas. Considere na solução as restrições a seguir.

(a) Há uma correspondência biunívoca entre pessoas e atributos.

(b) Na solução, conclui-se que Francisca é loura.

29. Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder a seguinte questão. Suponha que a afirmação a seguir é verdadeira:

    Se Zé ama Maria,
    então Zé é um sortudo.

    A partir desse fato, o que podemos concluir a respeito da afirmação a seguir?

    Se Zé não ama Maria ou é um sortudo,
    então ele ama Maria ou é um sortudo.

30. Considere os conjuntos de fórmulas a seguir. Determine, utilizando o método dos *tableaux* semânticos, quais conjuntos são satisfatíveis.

    (a) $\{P, \neg P\}$.
    (b) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$.
    (c) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$.
    (d) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$.
    (e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, S \rightarrow P\}$.
    (f) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$.
    (g) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$.
    (h) $\{\neg((\neg Q \wedge R) \rightarrow P),\ \neg(Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R)),\ P \leftrightarrow \neg R\}$
    (i) $\{\neg(P \rightarrow Q), Q \rightarrow R, \neg(R \rightarrow S), S \leftrightarrow P\}$
    (j) $\{P \rightarrow Q, \neg((P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)), \neg((Q \vee R) \vee S)\}$
    (k) $\{\neg(P \rightarrow Q), \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \leftrightarrow P)\}$

31. Quatro detetives, Ana, Teresa, Maria e Zé, estão investigando as causas de um assassinato, e cada um deles concluiu uma das afirmações a seguir:

    Ana: Se há pouco sangue na cena do crime, então o assassino é um profissional.

    Teresa: Houve poucos ruídos no momento do crime ou o assassino não é um profissional.

    Maria: A vítima estava toda ensanguentada ou houve muitos ruídos no momento do crime.

    Zé: Houve pouco sangue na cena do crime.

    Determine se o conjunto de conclusões dos detetives é satisfatível.

32. Os quatro detetives do exercício anterior modificam suas opiniões e concluem:

    Ana: Se há sangue na cena do crime, então o assassino é um profissional.

    Teresa: É falso que há sangue na cena do crime e o assassino não é um profissional.

    Maria: O assassino não é um profissional e há sangue na cena do crime.

    Zé: Há sangue na cena do crime.

(a) Determine se o conjunto de conclusões dos detetives é satisfatível.

(b) Determine se, a partir das conclusões de Teresa e Zé, podemos concluir que o assassino é profissional.

(c) Determine se as conclusões das detetives Ana e Teresa são equivalentes.

33. Identifique, justificando sua resposta, se os argumentos a seguir são válidos ou não. Atenção! As justificativas devem ser dadas utilizando as definições formais de tautologia e implicação semântica.

 i) Se Irani me beija, fico louco(a)!
    Irani não me beijou.
    Portanto, não fiquei louco(a).

 ii) Se Irani me beija, fico louco(a)!
    Não fiquei louco(a).
    Portanto, Irani não me beijou.

34. Determine, entre as afirmações a seguir, quais estão logicamente corretas.

(a) Se Fidel é comunista, é ateu. Fidel é ateu, portanto ele é comunista.

(b) Se a temperatura e os ventos permanecerem constantes, não choverá. A temperatura não permaneceu constante. Logo, se chover, significa que os ventos não permaneceram constantes.

(c) Se Fernandinho (aquele das Alagoas) ganhar as eleições, a corrupção aumentará se a impunidade permanecer alta. Se Fernandinho ganhar as eleições, a impunidade permanecerá alta. Portanto, se Fernandinho ganhar as eleições, a corrupção aumentará.

(d) Se os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, os gastos da prefeitura aumentarão ou crescerá o desemprego. Se os gastos da prefeitura não aumentarem, os impostos municipais poderão ser reduzidos. Se os impostos municipais forem reduzidos e os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, não haverá desemprego. Portanto, os gastos da prefeitura não aumentarão.

(e) Se x é positivo, então y é negativo. Se z é negativo, então y é negativo. Portanto, se x é positivo ou z é negativo, então y é negativo.

(f) Se Zé ama Maria e Maria é bonita, inteligente e sensível, então Zé é feliz. Logo, se Zé não é feliz, então Maria não é bonita, inteligente e sensível.

(g) Se Maria está bonita, então Zé está feliz e se Zé está feliz, Chico está preocupado. Se Chico está preocupado, então Maria está bonita. Portanto, não é verdade que se Chico está preocupado, então Zé está feliz.

35. Considere o seguinte:
    Se Godofredo ama Gripilina,
    então é possível concluir que:
    Se Gripilina é bonita, inteligente e sensível,
    então Godofredo é feliz.

    Demonstre, utilizando conceitos da Lógica Proposicional, se, a partir desse argumento, podemos concluir que:
    Godofredo não ama Gripilina, ou
    Gripilina não é bonita, não é inteligente e nem sensível, ou
    Godofredo é feliz.
36. Considere cinco alunas de Ciência da Computação: Letícia, Fernanda, Flávia, Lívia, Marília e as afirmações:
    (a) Se Letícia não é linda, Fernanda não é inteligente.
    (b) Se Flávia não é sensível, Lívia é charmosa.
    (c) Se Marília é sensível, Letícia não é linda.
    (d) Se Lívia é charmosa, Fernanda é inteligente.
    (e) Flávia e Marília possuem as mesmas qualidades.
    (f) Se Fernanda não é linda, Lívia não é charmosa.
    Encontre pelo menos um conjunto de qualidades para as quatro meninas, que sejam coerentes com as afirmações.
37. Zé e Chico afirmam o seguinte:
    Chico: Se o que vale é a emoção, então vivo a vida.
    Zé: O que vale é a emoção e não vivo a vida.
    Qual das duas situações ocorre?
    (a) As afirmações de Chico e Zé são equivalentes.
    (b) A afirmação de Zé equivale à negação da afirmação de Chico.
38. Considere o argumento: presença de Ricardão.

    Ricardão existe em sua vida.
    Mas, se Ricardão existe, isso significa que sua namorada não pode evitá-lo, ou então que ela não quer evitá-lo.
    Se sua namorada não pode evitar Ricardão, então ela não tem personalidade.
    Sua namorada não é sincera, se ela não quer evitar Ricardão.
    Portanto, ou sua namorada não tem personalidade, ou ela não é sincera.

    Responda, utilizando métodos da Lógica, se o argumento anterior é logicamente correto.
39. Demonstre se o argumento a seguir é válido ou não[12].

[12]Este argumento foi incluído neste livro por sugestão de vários alunos.

Se o Curingão caiu para a segundona e sua torcida chorou, então ficamos com pena deles.

Portanto:

Dado que a torcida chorou se o Curingão caiu para a segundona, podemos concluir que ficamos com pena deles se o Curingão caiu para a segundona.

40. Considere os conjuntos de sentenças indicados a seguir. Que conjuntos de sentenças são satisfatíveis?

    (a) Marcos não está feliz, ou se Sílvia foi ao baile, então Marcos também foi ao baile. Se Marcos está feliz, então Sílvia não foi ao baile. Se Marcos foi ao baile, então Sílvia também foi ao baile.

    (b) Um casamento é feliz, se, e somente se, os noivos têm objetivos comuns. Os noivos têm objetivos comuns se, e somente se, os noivos cursam disciplinas em áreas comuns. Há divórcio se, e somente se, o casamento é infeliz. Há divórcio se, e somente se, os noivos não cursam disciplinas em áreas comuns.