Lógica Proposicional

Profª. Maely Moraes

Livro base: Souza, João Nunes, Lógica para Ciência da Computação, Editora Campus, 9ª tiragem.

Lógica Proposicional

Tableaux semânticos e resolução na Lógica Proposicional

Introdução

- **Definição 7.1 (elementos básicos de um sistema de tableaux semânticos)**

  Os elementos básicos do sistema de tableaux semânticos Tb_a, na Lógica Proposicional, são definidos pelos conjuntos:

  - o alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 1.1, sem os símbolos de verdade *false* e *true*;
  - o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;
  - um conjunto de regras de dedução.

- **Definição 7.2 (regras de inferência do *tableau* semântico)**

  Sejam A *e* B *duas fórmulas da Lógica Proposicional.*

  As regras de inferência do sistema de tableaux semânticos Tb_a*, na Lógica Proposicional, são* $R_1,\ldots,R_9$ *indicadas a seguir.*

$$
\begin{array}{lll}
R_1 = A \wedge B & R_2 = A \vee B & R_3 = A \rightarrow B \\
\qquad A & \quad \swarrow \; \searrow & \quad \swarrow \; \searrow \\
\qquad B & \quad A \qquad B & \quad \neg A \qquad B \\
 & & \\
R_4 = A \leftrightarrow B & R_5 = \neg\neg A & R_6 = \neg A \wedge B \\
\quad \swarrow \; \searrow & \qquad A & \quad \swarrow \; \searrow \\
A \wedge B \quad \neg A \wedge \neg B & & \quad \neg A \qquad \neg B \\
 & & \\
R_7 = \neg(A \vee B) & R_8 = \neg(A \rightarrow B) & R_9 = \neg(A \leftrightarrow B) \\
\qquad \neg A & \qquad A & \quad \swarrow \; \searrow \\
\qquad \neg B & \qquad \neg B & \neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B
\end{array}
$$

- **Heurística (aplicação de regras).**

  Aplique preferencialmente as regras

$$R_1, R_5, R_7 \text{ e } R_8,$$

que não bifurcam o *tableau*.

- **Definição 7.3 (construção de um *tableau* semântico)**

  Um *tableau* semântico no sistema Tb_a, na Lógica Proposicional, é construído como se segue.

  Seja $\{A_1,...,A_n\}$ um conjunto de fórmulas.

- A árvore tab_1, a seguir, com apenas um ramo, é um *tableau* iniciado com $\{A_1,...,A_n\}$.

1. A_1
2. A_2

. . .

n. A_n

Nesse *tableau*, as fórmulas $\{A_1,...,A_n\}$ podem ser escritas em qualquer ordem.

- **Definição 7.3 (construção de um *tableau* semântico)**
- Se tab_2 é a árvore resultante da aplicação de uma das regras ($R_1,\ldots,R_9$) à árvore tab_1, então tab_2 é também um *tableau* iniciado com $\{A_1,\ldots,A_n\}$.
- Seguindo esse procedimento, expandimos o *tableau* iniciado com $\{A_1,\ldots,A_n\}$.
- Seja tab_i , $i \geq 2$, um *tableau* iniciado com $\{A_1,\ldots,A_n\}$. Se tab_{i+1} é a árvore resultante da aplicação de uma das regras ($R_1,\ldots,R_9$) à árvore tab_i , então tab_{i+1} é também um *tableau* iniciado com $\{A_1,\ldots,A_n\}$.

- **Definição 7.4 (ramo)**

  No sistema Tb_a, um ramo em um tableau é uma seqüência de fórmulas $H_1,\ldots,H_n$, onde H_1 é a primeira fórmula do *tableau* e, nessa seqüência, H_{i+1} é derivada de H_i, $1 \leq i < n$, utilizando alguma regra de Tb_a.

- **Definição 7.5 (ramo fechado)**

  No sistema Tb_a, um ramo em um *tableau* é fechado se ele contém uma fórmula A e sua negação ¬A.

- **Definição 7.6 (ramo saturado)**

  No sistema Tb_a, um ramo em um *tableau* é saturado se para toda fórmula A, do ramo:

  - já foi aplicada alguma regra do sistema Tb_a à fórmula A,

    ou seja: A já foi expandida por alguma regra; ou
  - não é possível aplicar nenhuma regra do sistema Tb_a à fórmula A,

    isto é, A é igual a um literal e não é possível expandi-la por alguma regra.

- **Definição 7.7 (ramo aberto)** No sistema Tb_a, um ramo em um *tableau* é aberto se ele é saturado e não é fechado.

- **Definição 7.8 (tableau fechado)** No sistema Tb_a, um *tableau* é fechado quando todos os seus ramos são fechados.

- **Definição 7.9 (tableau aberto)** No sistema Tb_a, um *tableau* é aberto se ele possui algum ramo aberto.

- **Definição 7.10 (prova e teorema em tableaux semânticos)**

  Seja H uma fórmula.

  Uma prova de H, no sistema Tb_a, é um *tableau* fechado iniciado com a fórmula ¬H.

  Nesse caso, H é um teorema do sistema de *tableaux* semânticos Tb_a.

- **Teorema 7.1 (completude)**

  Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional.

  Se H é uma tautologia, então existe uma prova de H no sistema Tb_a.

- **Teorema 7.2 (correção)**

  Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional.

  No sistema Tb_a, se $\vdash$ H, então $\models$ H.

- **Notação.** Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{A_1,\dots,A_n\},$$

  - no sistema Tb_a, então esse fato é indicado pela notação

$$\beta \vDash H \text{ ou } \{A_1,\dots,A_n\} \vDash H.$$

  - Observe que essa notação é análoga àquela utilizada para conseqüência sintática no sistema P_a. O sistema que estiver sendo considerado, P_a ou Tb_a, deve ficar claro no contexto.

O Sistema de Resolução Rs_a

- **Definição 7.11 (cláusula)**

  Uma cláusula, na Lógica Proposicional, é uma disjunção de literais.

  No caso de uma disjunção de zero literal, temos a cláusula vazia.

  - **Notação.**

    A disjunção de zero literal é a cláusula vazia.

    Tal cláusula é representada, na notação de conjunto, por {}.

- **Definição 7.12 (literais complementares)**
  Dois literais são complementares se um é a negação do outro. Isto é, P e $\neg P$ são literais complementares.

- **Definição 7.13 (resolvente de duas cláusulas)** Considere duas cláusulas $C_1 = \{A_1,\dots,A_n\}$,e $C_2 = \{B_1,\dots,B_n\}$, que possuem literais complementares.
  - Suponha λ um literal em C_1 tal que seu complementar, $\neg\lambda$, pertence a C_2.
  - O resolvente de C_1 e C_2, denominado por $Res(C_1,C_2)$, é definido por: $Res(C_1,C_2)=(C_1 - \{\lambda\}) \cup (C_2 - \{\neg\lambda\})$. Se $Res(C_1,C_2)= \{\}$, temos um resolvente vazio.

- **Definição 7.14 (elementos básicos da resolução)** Os elementos básicos do sistema de resolução Rs_a, na Lógica Proposicional, são definidos pelos conjuntos:
  - o alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 1.1, sem os símbolos de verdade *false* e *true*;
  - o conjunto das cláusulas da Lógica Proposicional;
  - a regra de resolução.
-

- **Definição 7.15 (regra de resolução)**

  No sistema de resolução Rs_a, *dadas duas cláusulas*

$$C_1 = \{A_1,\ldots,A_n\}, C_2 = \{B_1,\ldots,B_n\},$$

- *a regra de resolução aplicada a* C_1 *e* C_2 *é definida pelo procedimento a seguir:*

$$\textit{tendo } C_1 \textit{ e } C_2\textit{, deduza } Res(C_1,C_2)\ .$$

- **Definição 7.16 (construção de uma expansão por resolução)**
  No sistema de resolução Rs_a, uma expansão por resolução é construída como se segue.
- Seja $\{A_1,...,A_n\}$ um conjunto de cláusulas.
- A estrutura a seguir é uma expansão por resolução sobre $\{A_1,...,A_n\}$.

1. A_1
2. A_2

. . .

n. A_n

Nessa expansão, as fórmulas $\{A_1,...,A_n\}$ podem ser escritas em qualquer ordem.

- **Definição 7.16 (construção de uma expansão por resolução)**
- Seja Exp_2 uma expansão por resolução sobre

$$\{A_1,\ldots,A_n\},$$

obtida pela adição de

$$Res(A_i,A_j),\ i,\ j \leq n,\ i \neq j,$$

à expansão Exp_1.

A expansão Exp_2 é também uma expansão por resolução sobre

$$\{A_1,\ldots,A_n\}.$$

Seguindo esse procedimento, a expansão por resolução sobre

$$\{A_1,\ldots,A_n\}$$

é incrementada.

- **Definição 7.16 (construção de uma expansão por resolução)**
- Seja Exp_k, $k > 1$, uma expansão por resolução sobre

  $$\{A_1,\ldots,A_n\}.$$

  Considere Exp_{k+1} a expansão por resolução obtida pela adição de

  $$Res(H_i,H_j) \text{ tal que } H_i,H_j \in Exp_k \text{ e } i,j \leq k,\ i \neq j,$$

  à expansão Exp_k.

  A expansão Exp_{k+1} é também uma expansão por resolução sobre

  $$\{A_1,\ldots,A_n\}.$$

Conseqüência Lógica na Resolução

- **Definição 7.17 (forma clausal)**

  Dada uma fórmula H,

  uma forma clausal associada a H é uma fórmula H_c tal que

  H_c é uma conjunção de cláusulas e

  H_c equivale a H.

- **Definição 7.18 (prova por resolução)**

  Seja H uma fórmula e $\neg H_c$ a forma clausal associada a $\neg H$.

  No sistema de resolução Rs_a, uma prova de H é uma expansão por resolução fechada sobre o conjunto de cláusulas de $\neg H_c$.

  Nesse caso, H é um teorema do sistema de resolução.

- **Teorema 7.3 (completude)**

  Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional.

  No sistema de resolução Rs_a, se H é uma tautologia, então existe uma prova de H.

- **Teorema 7.4 (correção)**

  Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional.

  No sistema de resolução Rs_a, se existe uma prova de H, então H é uma tautologia.

- **Definição 7.19 (conseqüência lógica por resolução)**

  Dada uma fórmula H *e um conjunto de hipóteses*

$$\beta = \{A1,\ldots,An\},$$

  então H *é uma conseqüência lógica de* β, *no sistema de resolução* Rs_a, *se existe uma prova de*

$$(A1 \wedge \ldots \wedge An) \rightarrow H.$$

- **Notação.**

  Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{A_1,\ldots,A_n\},$$

- no sistema de resolução Rs_a, então esse fato é indicado pela notação

$$\beta \vdash H \text{ ou } \{A1,\ldots,An\} \vdash H.$$