CAPÍTULO 2

A SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

2.1 Introdução

Um conceito fundamental em Lógica é aquele que diferencia os objetos sintáticos de sua interpretação. Como exemplo, considere a palavra "rede". Essa palavra é formada por uma concatenação de letras do alfabeto da língua portuguesa. Sabemos que ela pertence a essa língua porque as pessoas que falam o português a utilizam. E a prova disso é que ela está contida em qualquer dicionário da língua portuguesa. Mas, qual é o significado da palavra "rede"? Temos vários: o objeto que pescadores utilizam para pescar, um conjunto de computadores interligados e outros mais. Portanto, não há uma correspondência, um a um, entre os significados semânticos das palavras e as palavras propriamente ditas. Certamente, há muito mais significados do que palavras para representá-los e nem sempre conseguimos expressar, de forma adequada, aquilo que pensamos. Tudo porque há uma diferença fundamental entre a ideia e o símbolo utilizado para representar tal ideia. A palavra "rede", por exemplo, é apenas uma concatenação de símbolos utilizada para representar algumas ideias. Este capítulo considera o início do estudo que diferencia, explicitamente, a semântica, ou significado, da sintaxe, ou símbolos. Como veremos a seguir, no contexto da Lógica Proposicional, associamos a cada objeto sintático um significado ou interpretação. Assim, quando escrevemos a fórmula $(P \wedge Q)$, dependendo das interpretações dos símbolos P e Q, essa fórmula pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Portanto, a fórmula pode ter diferentes interpretações, as quais dependem das interpretações de seus componentes.

Considere, por exemplo, que o símbolo sintático P representa a declaração: "Está chovendo" e Q representa a declaração: "A rua está molhada". Neste livro, escrevemos tais denotações como indicado a seguir: $P =$ "Está chovendo." $Q =$ "A rua está molhada." Nesse caso, os símbolos proposicionais P e Q representam duas declarações que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Suponha, então, que a interpretação do conectivo proposicional $\wedge$ seja o da inclusão dos fatos, isto é, para que a fórmula $(P \wedge Q)$ seja verdadeira, as interpretações de P e Q devem ser verdadeiras. Considerando tudo isso, a fórmula $(P \wedge Q)$ pode ou não ser verdadeira. Isso depende das condições climáticas atuais, que determinam se a interpretação de P é verdadeira ou falsa. Neste livro, a interpretação de P é denotada por $I[P]$. Isso significa que se está chovendo lá fora, então $I[P] = T$. Mas, se não está chovendo, então $I[P] = F$. Logo, podemos ter $I[P] = T$ ou $I[P] = F$ e também $I[Q] = T$ ou $I[Q] = F$. Em cada caso, o símbolo T indica que o resultado da interpretação é verdadeira e F que esse resultado é falso. Por exemplo, no caso em que $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $\wedge$ é interpretado como a conjunção dos fatos, então $I[(P \wedge Q)] = F$. No caso anterior, os símbolos P e Q representam as declarações "Está chovendo" e "A rua está molhada". Entretanto, tais símbolos podem representar outras declarações, e as interpretações podem ter resultados diferentes. Considere, por exemplo:

1. $P =$ "Há um rapaz inteligente no curso de Computação";
2. $Q =$ "Não há rapaz inteligente no curso de Computação";
3. o símbolo $\vee$ representa[1] a semântica da palavra "ou";
4. o símbolo $\wedge$ representa a semântica da palavra "e".

Nesse caso, se $I[P] = T$, então $I[Q] = F$. Por outro lado, se $I[P] = F$, então $I[Q] = T$. Logo, considerando que a interpretação do conectivo proposicional $\vee$ seja o da disjunção dos fatos, a fórmula $(P \vee Q)$ é interpretada como verdadeira e a fórmula $(P \wedge Q)$ é interpretada como falsa. Ou seja, $I[(P \vee Q)] = T$, $I[(P \wedge Q)] = F$. Observe que os símbolos sintáticos definem as fórmulas, que nesse caso estão associados a interpretações. Nesse contexto, cada fórmula sintática está associada a uma interpretação e, por isso, o mundo lógico é dividido em duas partes: o mundo sintático e o mundo semântico. O primeiro é construído a partir dos símbolos do alfabeto. Nesse mundo, as fórmulas são consideradas apenas como concatenações de símbolos, que representam declarações. Por outro lado, é no mundo semântico onde ocorre o resultado das interpretações dos símbolos e fórmulas do mundo sintático. Assim, para que tudo funcione bem, é fundamental que as declarações representadas pelos símbolos possam ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Por isso, na Lógica Proposional, não consideramos qualquer tipo de declaração, mas apenas aquelas que possam ser, efetivamente, interpretadas. Tais declarações são denominadas por proposições.

[1] Pelo menos, tenta representar.

Definição 2.1 (proposição) *Uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa.*

Portanto, uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Isso parece simples, mas não é. Ou seja, identificar o que é uma proposição pode ser bem complicado. Isso, porque para identificá-la é necessário saber, claramente, o que é ser verdadeiro ou falso. E, também, saber o que é declarar, sem ambiguidades, alguma coisa. Como sempre, aquilo que a princípio parece ser simples, pode não ser. Mas, neste livro introdutório, não vamos nos preocupar muito com isso. Nosso mundo será o mais simples possível e nosso objetivo é apenas apresentar os conceitos iniciais sobre sintaxe e semântica. Essa visão que diferencia sintaxe e semântica é importante nas Ciências em geral e também na Filosofia. Na Ciência da Computação, por exemplo, o computador é uma máquina estritamente sintática, sendo necessário dar uma interpretação, significado ou semântica, aos símbolos por ela manipulados. Isso significa que o ato de programar somente é bem entendido se a diferença entre sintaxe e semântica fica bem clara.

Este capítulo trata, de forma introdutória, da semântica das fórmulas da Lógica Proposicional. Para isso, consideramos uma análise, mais ou menos, análoga à que ocorre na língua portuguesa. Por exemplo, como sabemos, a palavra "rede" pode ter várias interpretações ou significados. Isso, porque dependendo da pessoa ou contexto, uma ou outra interpretação pode ser considerada. De forma parecida, dado um símbolo proposicional P, ele pode ser interpretado de duas formas, como sendo verdadeiro ou como falso. Observe que no caso da Lógica Proposicional, a situação é mais simples. O resultado de uma interpretação é verdadeiro ou falso. Na língua portuguesa pode ser muito mais que isso. Além disso, deve ficar claro que a concatenação sintática das letras "r", "e", "d", "e", nessa ordem, é diferente dos possíveis significados de cada letra individualmente. A palavra "rede" é um objeto sintático que é considerado como um todo. Na Lógica Proposicional, para interpretar uma fórmula do tipo $(P \wedge Q)$ devemos interpretar, individualmente, seus símbolos, o que é diferente do ato de interpretar, como um todo, uma palavra da língua portuguesa. Além disso, cada palavra é diferente de sua interpretação. E é claro que deve ser assim, pois a palavra "rede" é muito diferente de uma rede de computadores ou uma rede de pesca. Analogamente, na Lógica Proposicional, dizer que $P =$ "Está chovendo." $Q =$ "A rua está molhada." não significa dizer que o símbolo P é estritamente igual a "Está chovendo". Significa, sim, dizer que P representa a proposição "Está chovendo". Antes de terminar esta seção, vale a pena lembrar: uma análise profunda de temas que envolvem sintaxe e semântica não é fácil, sendo um importante tema de pesquisa filosófica [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. Neste livro, apresentamos apenas alguns conceitos fundamentais, de forma simplificada, sem considerar controvérsias filosóficas.

2.2 Interpretação

Como interpretar alguma coisa? Responder essa questão é um dos grandes desafios do ser humano. E não é simples fazê-lo, pois a todo momento, verificamos como nossas interpretações são falhas. Nesse sentido, para estudar o ato de interpretar na Lógica Proposicional, vamos simplificar bastante as coisas.

A primeira simplificação. Como veremos a seguir, a interpretação ou semântica dos elementos sintáticos da linguagem da Lógica Proposicional é determinada por uma função I denominada interpretação. Recorde a definição básica de função.

Definição 2.2 (função) *Uma operação I é uma função se, para cada elemento x de seu domínio, existe apenas um elemento y no seu contradomínio tal que $y = I(x)$.*

Portanto, se I é uma função e x um elemento do seu domínio, então não podemos ter: $y = I(x)$ e $z = I(x)$, tal que $y \neq z$. Isso significa que interpretar na Lógica Proposicional corresponde à execução de uma função, que para cada elemento do seu domínio, existe apenas um resultado para a interpretação propriamente dita. E seria estranho considerar de outra forma. Imagine que uma dada fórmula pudesse ter mais de uma interpretação. Entretanto, observe que no mundo real nem sempre isso acontece e o ato de interpretar pode ser complexo e não ter as características de uma função.

A segunda simplificação. A função que interpreta associa a cada fórmula da Lógica Proposicional um valor de verdade "verdadeiro" ou "falso", que é representado, respectivamente, por T e F. Isso significa que, na Lógica Clássica, as fórmulas possuem apenas dois tipos de interpretação. Devido a esse fato, ela é denominada lógica bivalente.[2] Ela possui apenas dois estados semânticos, o "verdadeiro" e o "falso". Esse princípio é denominado princípio de bivalência e estabelece que o resultado da interpretação de toda proposição é necessariamente verdadeiro ou falso. Observe que na língua portuguesa é possível ter mais de duas interpretações ou significados diferentes para a mesma palavra, o que não ocorre no contexto da Lógica Proposicional Clássica, em que as possíveis interpretações das declarações são T ou F. Portanto, a função I é uma função binária.

Definição 2.3 (função binária) *Uma função é binária se seu contradomínio possui apenas dois elementos.*

Na Lógica Proposicional é possível representar proposições como: "Meu tio mora em São Paulo", que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Entretanto, há sentenças declarativas cuja interpretação não é verdadeira e nem falsa. Considere, por exemplo, a sentença: "Esta sentença é falsa." Nesse caso, o resultado da interpretação da sentença não é verdadeiro e nem falso. Isso significa que não é possível representar esse tipo de conhecimento na Lógica Proposicional que estamos

[2]Há Lógicas não clássicas multivalentes, em que o resultado das interpretações podem ser diferentes de T e F.

estudando, a Lógica Clássica.[3] Além do princípio de bivalência, a semântica da Lógica Clássica é também uma semântica de condições de verdade, ou seja, a especificação da interpretação de uma proposição consiste em dizer como deve ser o mundo para que ela seja verdadeira. A proposição "Meu tio mora em São Paulo" somente será verdadeira se algumas condições forem satisfeitas. Nesse caso, é necessário definir vários conceitos como: "posse", "tio" e "morar" e também o que significa "cidade de São Paulo". Novamente, não é simples entender claramente o que significam tais condições de verdade, havendo muita controvérsia filosófica a respeito [Gabbay], [Goldstein] e [Haak].

A terceira simplificação. Na Lógica Proposicional, uma interpretação I é uma função total e, portanto, está necessariamente definida em todos os elementos de seu domínio.

Definição 2.4 (função total) *Uma função total é uma função definida em todos os elementos de seu domínio.*

No caso da Lógica Proposicional, como veremos, o domínio da função I é o conjunto de todas as fórmulas. Então, dado o símbolo $\breve{P}$, que representa qualquer símbolo proposicional, tal símbolo está contido no domínio de I. Isso significa que, dada a proposição $\breve{P}$, então necessariamente ocorre uma das possibilidades $I[\breve{P}] = T$ ou $I[\breve{P}] = F$. Esse é um princípio da Lógica Clássica denominado princípio da bivalência ou do terceiro excluído. Por esse princípio, toda proposição é verdadeira ou falsa. Nesse sentido, a Lógica Clássica simplifica a interpretação das sentenças e estabelece como pontos de partida o princípio da bivalência ou terceiro excluído e o fato de a função interpretação ser uma função total. Mas, se tais simplificações ajudam por um lado, elas também podem dificultar por outro. Considere, por exemplo, a sentença: "O atual rei da França é calvo." Como dizer se essa sentença é verdadeira ou falsa se não há rei na França atualmente? Do fato de esse rei não existir, será que podemos concluir que a sentença é falsa? Ou que a sentença não é nem verdadeira e nem falsa? Enfim, dizer se uma declaração é verdadeira ou falsa pode não ser tão fácil. Considere a seguinte situação, na qual Zé está com sua amiga Maria. Zé é um mentiroso incorrigível e Maria detesta esse defeito. Para tentar ajudá-lo, Maria tenta um tipo de psicologia comportamental. Ela diz a Zé que todas as vezes que ele falar uma verdade ganhará um real. Mas, se falar alguma mentira, levará um soco no nariz. Imediatamente Zé diz a Maria: "Isso é muito generoso de sua parte. Você é uma ótima pessoa". Dada tal afirmação, Maria o retribui com um real. Em seguida, Zé diz: "Dois mais dois é igual a quatro" e Maria lhe dá outro real. Zé fica animado e diz: "Agora, ganharei outro real" e a retribuição é um belo soco no nariz. Para Maria, que não quer dar outro real a Zé, a afirmação é falsa, ou seja: é mentira que Zé ganhará outro real. Portanto, ela lhe soca o nariz. Mas Zé, que não é bobo e está com o nariz vermelho, diz: "Agora, você me dará um soco no nariz." Maria fica indecisa. Dá o segundo soco no nariz de Zé, ou um real? Questões sobre

[3]Fatos como estes podem ser representados em outros tipos de Lógica.

a veracidade das declarações, como as apresentadas anteriormente, são importantes na Lógica e no debate filosófico. Tais questões são denominadas paradoxos e ao final deste capítulo apresentamos algumas, na forma de exercícios. Para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. Portanto, tendo essas simplificações como ponto de partida, a definição da interpretação dos símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional é considerada a seguir.

Definição 2.5 (função interpretação) *Uma interpretação I, na Lógica Proposicional, é uma função binária total na qual:*

1. *o domínio de I é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;*
2. *o contradomínio de I é o conjunto $\{T, F\}$.*

2.3 Interpretação de Fórmulas

A seção anterior define, de forma simplificada, o que é uma interpretação na Lógica Proposicional: uma função binária total cujo domínio é o conjunto das fórmulas e o contradomínio é o conjunto $\{T, F\}$. A seguir, definimos como I interpreta as fórmulas da Lógica Proposicional, o que é dado por um conjunto de regras. Observe que isso é muito melhor do que aquilo que ocorre na língua portuguesa, na qual não temos um conjunto de regras para interpretar as sentenças. Ou seja, na Lógica, nesse sentido, o ato de interpretar é bem mais simples. Como as fórmulas são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto, a sua interpretação é feita a partir da interpretação dos seus símbolos. Isto é, a interpretação de uma fórmula como $P \rightarrow Q$ é obtida a partir da interpretação dos símbolos P e Q. Na língua portuguesa não é assim. A interpretação da sentença "Eu vi José com uma luneta". não é obtida a partir da interpretação das palavras "Eu", "vi", "José", "com", "uma" e "luneta". Portanto, na Lógica Proposicional, a interpretação das fórmulas é feita segundo um conjunto de regras semânticas, obtidas a partir das interpretações dos símbolos proposicionais e dos conectivos proposicionais. Os procedimentos para interpretar as fórmulas da Lógica Proposicional a partir dos elementos que as constituem são considerados a seguir.

Definição 2.6 (interpretação de fórmulas) *Dadas uma fórmula E e uma interpretação I, então a interpretação de E, indicado por $I[E]$, é determinada pelas regras:*

1. *se E é do tipo $\check{P}$, então $I[E] = I[\check{P}]$ e $I[\check{P}] \in \{T, F\}$;*
2. *se E é do tipo $\neg H$, então*
   $I[E] = I[(\neg H)] = T$ *se* $I[H] = F$ *e*
   $I[E] = I[(\neg H)] = F$ *se* $I[H] = T$;
3. *se E é do tipo $(H \vee G)$, então*
   $I[E] = I[H \vee G] = T$ *se* $I[H] = T$ *e/ou* $I[G] = T$ *e*
   $I[E] = I[H \vee G] = F$ *se* $I[H] = F$ *e* $I[G] = F$;

4. *se* E *é do tipo* $(H \wedge G)$, *então*
   $I[E] = I[H \wedge G] = T$ *se* $I[H] = T$ *e* $I[G] = T$ *e*
   $I[E] = I[H \wedge G] = F$ *se* $I[H] = F$ *e/ou* $I[G] = F$;
5. *se* E *é do tipo* $(H \rightarrow G)$, *então*
   $I[E] = I[H \rightarrow G] = T$ *se* $I[H] = F$ *e/ou* $I[G] = T$ *e*
   $I[E] = I[H \rightarrow G] = F$ *se* $I[H] = T$ *e* $I[G] = F$;
6. *se* E *é do tipo* $(H \leftrightarrow G)$, *então*
   $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = T$ *se* $I[H] = I[G]$ *e*
   $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = F$ *se* $I[H] \neq I[G]$.

A visualização das regras semânticas fica muito mais fácil se elas são representadas por tabelas, denominadas tabelas-verdade. As tabelas-verdade associadas aos conectivos proposicionais são definidas pela Tabela 2.1 a seguir. A tabela indica, por exemplo, que dada uma interpretação I, se $I[H] = T$ e $I[G] = F$, então $I[\neg H] = F$. Analogamente:
se $I[H] = T$ e $I[G] = F$, então $I[H \vee G] = T$.
e assim por diante, como indicado na segunda linha da Tabela 2.1.

H	G	$\neg H$	$H \vee G$	$H \wedge G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Tabela 2.1: Tabela-verdade associada a conectivos.

Nota. Para simplificar nossas referências sobre uma tabela-verdade, consideramos que a primeira linha da tabela, correspondenete à linha na qual estão escritas as fórmulas da tabela-verdade, não é contada. Nesse sentido, após a linha inicial, onde estão escritas as fórmulas, temos a linha 1, depois a linha 2 e assim por diante.

Exemplo 2.1 (interpretação) Considere uma interpretação I dada por:

$$I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = T,\ I[S] = F.$$

Nesse caso, temos, por exemplo:

$$I[\neg P] = F,\quad I[\neg Q] = T, I[\neg R] = F,\ \ I[\neg S] = T, I[P \vee Q] = T,\ \ I[Q \vee S] = F,$$
$$I[P \wedge Q] = F, I[P \wedge R] = T,\ \ I[P \rightarrow Q] = F,\ \ I[S \rightarrow R] = T,$$
$$I[P \leftrightarrow Q] = F,\ I[Q \leftrightarrow S] = T.$$

A Tabela 2.2, representa, de forma esquemática, alguns desses resultados.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	F	T	F	F	F

Tabela 2.2: Tabela-verdade associada a conectivos.

■

Conforme as regras semânticas vistas na Definição 2.6, que determinam a interpretação das fórmulas, temos:

Regra 1. As interpretações dos símbolos proposicionais seguem o principio de bivalência e são iguais a T ou F. Essa é uma limitação, pois nem tudo pode ser interpretado como sendo verdadeiro ou falso.[4]

Nota. A interpretação dos símbolos de verdade é fixa. Isto é, para qualquer interpretação I, $I[true] = T$ e $I[false] = F$, ou seja, todas as interpretações têm a mesma "opinião" sobre essas interpretações. Nesse sentido, eles podem ser vistos como símbolos proposicionais especiais, com interpretação fixa.

Regra 2. A segunda regra estabelece uma regra para a interpretação da negação. Se consideramos que T é o oposto de F e vice-versa, então o valor de verdade de $I[\neg H]$ é o oposto de $I[H]$. Além disso, observe que nessa definição o símbolo H é um símbolo da metalinguagem e representa quaisquer fórmulas. Ou seja, a regra diz, por exemplo, que:

se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$, se $I[(P \wedge Q)] = F$, então $I[\neg(P \vee Q)] = T$.

Regra 3. A terceira regra diz que o valor de $I[H \vee G]$ é igual a T se, e somente se, $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$. Nesse caso, $I[H \vee G] = T$ se as interpretações de H e de G são iguais a T ou apenas uma delas igual a T.

Observe que, de novo, como ocorre na regra 2, os símbolos H e G são símbolos da metalinguagem e representam quaisquer fórmulas. Nesse sentido, a regra diz, por exemplo, que:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \vee Q)] = T$;

Se $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \rightarrow Q) \vee (\neg Q \leftrightarrow R))] = T$.

Regra 4. A quarta regra estabelece que o valor de $I[H \wedge G]$ é igual a T, somente quando $I[H] = T$ e $I[G] = T$. Então a regra diz, por exemplo, que:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \wedge Q)] = F$;

Se $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \leftrightarrow R))] = F$.

Regra 5. Conforme a regra 5, o valor de $I[H \rightarrow G]$ é verdadeiro se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$. Além disso, $I[H \rightarrow G]$ é falso, somente se $I[H] = T$ e $I[G] = F$. Portanto:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \rightarrow Q)] = F$;

[4] O estudo e a aplicação de outros tipos de Lógica em que são consideradas diferentes formas de semântica é uma importante área de pesquisa em Computação.

Se $I[(P \to Q)] = F$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \to Q) \to (\neg Q \leftrightarrow R))] = T$.

Regra 6. Finalmente, para determinar o valor de $I[H \leftrightarrow G]$, conforme a regra 6, basta checar se $I[H] = I[G]$. Em caso afirmativo, o resultado é $I[H \leftrightarrow G] = T$, caso contrário, $I[H \leftrightarrow G] = F$. Logo:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \leftrightarrow Q)] = F$;

Se $I[(P \to Q)] = F$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \leftrightarrow R))] = T$.

As regras semânticas, de acordo com a Definição 2.6, determinam a interpretação de $(H \wedge G)$ a partir de $I[H]$ e $I[G]$. Observe que não definimos isoladamente a interpretação apenas do conectivo $\wedge$ ou seja, não definimos $I[\wedge]$, que seria a interpretação do conectivo $\wedge$. A definição determina a interpretação da fórmula $(H \wedge G)$, que contém o conectivo $\wedge$ como um todo. Portanto, na Lógica Proposicional, não temos a interpretação dos conectivos considerados isoladamente. Isso ocorre porque tais conectivos não pertencem ao domínio da função interpretação I. Lembre que o domínio de I é o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional. Entretanto, para simplificar, abusando da forma de expressar, a interpretação de $(H \wedge G)$ é denotada como a interpretação de $\wedge$. Nesse sentido, as regras semânticas estabelecem interpretações fixas para os conectivos e símbolos de verdade. Já os símbolos proposicionais não possuem interpretações fixas e a única restrição é que se I é uma interpretação, então $I[\breve{P}] \in \{T, F\}$. Dada uma fórmula H, as tabelas-verdade associadas aos conectivos são utilizadas na construção de uma tabela-verdade associada a H. Veja, no exemplo a seguir, a Tabela 2.3.

Exemplo 2.2 (tabela-verdade) Considere a fórmula

$$H = ((\neg P) \vee Q) \to (Q \wedge P).$$

A tabela-verdade associada a H é dada pela Tabela 2.3.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Tabela 2.3: Tabela-verdade associada a fórmulas H.

Observe que a coluna da fórmula H é obtida a partir das colunas intermediárias associadas a $\neg P$, $\neg P \vee Q$ e $Q \wedge P$. ■

A definição das interpretações dos conectivos está relacionada com o significado semântico de algumas palavras da língua portuguesa. A interpretação do conectivo $\neg$, por exemplo, confere-lhe um significado semântico que lembra o significado da palavra “não”. Ou seja, $I[\neg \breve{P}]$ tem como resultado a negação, ou “não”, do significado do símbolo $\breve{P}$. Da mesma forma, os conectivos $\lor$, $\land$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ têm interpretações que correspondem aproximadamente à disjunção, conjunção, implicação e equivalência, respectivamente. Nesse sentido, os conectivos são símbolos sintáticos, que possuem interpretações que correspondem a operadores lógicos da língua portuguesa. Mas tal correspondência não é exata, conforme é analisado a seguir.

A semântica do conectivo $\neg$. Conforme a Definição 2.6, $I[\neg P] = F$ se $I[P] = T$, ou seja, se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$. O conectivo $\neg$ é uma tentativa de formalização da negação na Lógica Proposicional. Em português, geralmente essa negação é indicada pela palavra "não". Isso significa que se $P =$ "Zé é inteligente", então $\neg P =$ "Zé não é inteligente." Nesse caso, se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$. Observe que, em português, a negação "não" é escrita no interior da sentença "Zé não é inteligente", enquanto na Lógica o conectivo $\neg$ é escrito no início da fórmula $\neg P$. Isso não significa necessariamente que há uma correspondência entre a posição da negação em português e na Lógica. Além disso, em português é possível negar utilizando palavras diferentes de "não", como, por exemplo: "não é verdade que", "é falso que" ou ainda utilizando prefixos como "in-" e "a-". Um problema nas linguagens naturais, como o português, é que nem sempre existe uma correspondência entre esses tipos de negação. Dizer, por exemplo, que alguém não é feliz não significa necessariamente dizer que essa pessoa seja infeliz. Há vários graus de felicidade. Suponha, por exemplo, que $P =$ "Maria é namorada de Zé". Observando os fatos, ou seja, a relação amorosa de Zé e Maria, suponha que a conclusão é: $I[P] = F$. Nesse caso, $\neg P =$ "Maria não é namorada de Zé". e, portanto, $I[\neg P] = T$. Mas, observando atentamente as informações, é possível também concluir que $I[\neg P] = F$. Isto é, não é verdade que Maria seja namorada de Zé, mas também não é verdade que Maria não seja namorada de Zé. Eles estão naquela fase do "estar com", "ficar com", etc. Maria é apenas mais ou menos namorada de Zé. Esses problemas com a negação são frequentes também em outras situações. É comum, por exemplo, aceitar que não ser rico não implique necessariamente ser pobre. Se eu não sou rico, não necessariamente significa que sou pobre. Há um meio-termo: a classe média. Tais situações não são consideradas na Lógica Clássica, na qual, por definição, se $I[P] = F$, então $I[\neg P] = T$.[5] Portanto, devemos ter muito cuidado na representação da negação do português para a linguagem da Lógica. A negação na Lógica Clássica não corresponde exatamente à negação na linguagem natural. Nesse processo, o objetivo é preservar, ao máximo, o significado da expressão original da linguagem natural.

A semântica do conectivo $\lor$. A interpretação do conectivo $\lor$ é a da disjunção de duas proposições. Nesse sentido, ele é um operador binário, diferente da negação, que é um operador unário. Em português, essa disjunção é expressa pelas palavras "ou .... ou ...", "ora ... ora ...", etc. Suponha, por exemplo, que $P =$ "Está chovendo" e $Q =$ "Está fazendo sol". Além disso, considere que $I[P \lor Q] = T$. Pela Definição 2.6, se $I[P \lor Q] = T$, então há três possibilidades: 1) $I[P] = T$ e $I[Q] = T$;

[5] Há Lógicas não clássicas multivalentes em que o resultado de uma interpretação pode ser diferente de T ou F.

2) $I[P] = T$ e $I[Q] = F$; 3) $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Em outras palavras, se é verdade que está chovendo ou fazendo sol, então há três possibilidades: "está chovendo e está fazendo sol"; "está chovendo e não está fazendo sol;" e "não está chovendo e está fazendo sol". A semântica do conectivo $\vee$ determina que se $I[P \vee Q] = T$, então é possível ocorrer $I[P] = T$ e $I[Q] = T$. Ao dizer que é verdade que está chovendo ou que está fazendo sol, então é possível que esteja chovendo e fazendo sol ao mesmo tempo. Na língua portuguesa, a palavra "ou" nem sempre tem esse significado. Suponha que $P =$ "Vou ao cinema" e $Q =$ "Vou ao teatro" e que $I[P \vee Q] = T$. Em português, dizer que é verdade que vou ao cinema ou ao teatro é o mesmo que dizer que seguramente irei a um desses lugares, mas não a ambos. Nesse caso, há apenas duas possibilidades: "irei ao cinema e não irei ao teatro" e "não irei ao cinema e irei ao teatro". Portanto, na Lógica Proposicional, a semântica do conectivo $\vee$ não corresponde, exatamente, à semântica da palavra "ou" utilizada em português. Observe que essa é uma das razões para se utilizar a expressão "e/ou" na Definição 2.6, que define a regra para que se tenha $I[H \vee G] = T$.

Considere, agora, uma outra situação. Suponha que $P =$ "Ulan Bator é a capital da Mongólia" e $Q =$ "Zé é bom de bola". Nesse caso, se I é uma interpretação "razoável",[6] então $I[P \vee Q] = T$, pois $I[P] = T$. Portanto, "Ulan Bator é a capital da Mongólia ou Zé é bom de bola" é considerada verdadeira apesar de não haver alternativa legítima ou relação entre as proposições que compõem a sentença. Portanto, na Lógica, para que uma disjunção seja verdadeira, não é necessária nenhuma relação entre suas alternativas. Por outro lado, na linguagem natural, quando expressamos uma disjunção, geralmente esperamos alguma relação entre as alternativas apresentadas.

A semântica do conectivo $\wedge$. A interpretação do conectivo $\wedge$ é a da conjunção de duas proposições. Como a disjunção, temos novamente um operador binário. Em português, a conjunção é expressa pelas palavras "e", "mas", "todavia", etc. Suponha que $P =$ "Maria é inteligente". e $Q =$ "Maria é preguiçosa". Nesse caso, a fórmula $P \wedge Q$ representa as sentenças: "Maria é inteligente e preguiçosa", "Maria é inteligente, mas é preguiçosa", "Maria é inteligente, todavia é preguiçosa", etc. Observe que, em português, os significados de "e", "mas", "todavia" não são exatamente os mesmos. As nuances que diferenciam tais significados são perdidas quando as sentenças são traduzidas para a Lógica Proposicional.

Considere um outro caso em que $P =$ "Tiago pulou na piscina" e $Q =$ "Tiago se molhou". Nesse caso, a fórmula $P \wedge Q$ representa a sentença: "Tiago pulou na piscina e se molhou". Mas, conforme a semântica do conectivo $\wedge$, se $I[P \wedge Q] = T$, então $I[Q \wedge P] = T$. Observe que o conectivo $\wedge$ é comutativo. Entretanto, se é verdade que "Tiago pulou na piscina e se molhou", nada podemos concluir a respeito da sentença "Tiago se molhou e pulou na piscina". Isso ocorre porque a interpretação do conectivo $\wedge$ não considera as relações temporais presentes no português.[7] As

[6] Interpretação razoável quer dizer: tem conhecimento de geografia e sabe que Ulan Bator é realmente a capital da Mongólia.

[7] As relações temporais são consideradas na Lógica Temporal.

representações na Lógica Proposicional fazem abstrações dos elementos temporais. Analogamente, como ocorre com os conectivos $\neg$ e $\vee$, o conectivo $\wedge$ não corresponde exatamente à semântica da conjunção na linguagem natural.

A semântica do conectivo $\rightarrow$. A interpretação do conectivo $\rightarrow$ é a da implicação material de duas proposições. Em português, há várias maneiras de expressar a implicação entre as proposições "Está chovendo" e "A rua está molhada". Podem ser: "se está chovendo, então a rua está molhada"; "se está chovendo, a rua está molhada'; "a rua está molhada, se está chovendo"; "estar chovendo é condição suficiente para que a rua esteja molhada"; "a rua molhada é condição necessária para que esteja chovendo". Todos esses casos podem ser representados por $P \rightarrow Q$, se $P =$ "Está chovendo" e $Q =$ "A rua está molhada". Entretanto, é importante observar que na Lógica Proposicional, a fórmula $P \rightarrow Q$ representa uma implicação material entre P e Q, que é diferente da implicação que utilizamos na língua portuguesa. Em outras palavras, ao dizer que P implica Q não, necessariamente, estamos dizendo que haja alguma conexão causal ou temporal entre P e Q. Na Lógica, quando escrevemos a fórmula $P \rightarrow Q$, não necessariamente pretendemos dizer que P é uma causa de Q. O objetivo é dizer que se é verdade que P, ou seja, $I[P] = T$, então também é verdade que Q, isto é, $I[Q] = T$. Conforme a definição da interpretação do conectivo $\rightarrow$, Definição 2.6, a tabela associada à fórmula $(H \rightarrow G)$ é dada pela Tabela 2.4.

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tabela 2.4: Tabela-verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

Entretanto, essa definição poderia ser diferente, e a Tabela 2.4 poderia ser substituída por outra tabela, como, por exemplo, a Tabela 2.5. Observe a diferença entre a Tabela 2.5 e a Tabela 2.4, que define $I[H \rightarrow G]$. Os valores de verdade, que estão na coluna da fórmula $(H \rightarrow G)$ nas duas últimas linhas, são modificados.

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Tabela 2.5: Tabela-verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

Mas, se na definição for considerada a Tabela 2.5 no lugar da Tabela 2.4, algumas consequências indesejadas aparecem. A seguir, consideramos alguns argumentos a favor da interpretação do conectivo $\rightarrow$ conforme a Tabela 2.4 e não a 2.5.

Primeiro argumento a favor da Tabela 2.4. Conforme a Tabela 2.4:

$$I[H \rightarrow G] = T \text{ quando } I[H] = T \text{ e } I[G] = T$$

o que é "razoável", pois, dado que a implicação seja verdadeira, $I[H \rightarrow G] = T$, se H é verdadeira, devemos ter G verdadeira. Em outras palavras, dado que a implicação seja verdadeira, então um antecedente verdadeiro implica no consequente verdadeiro. Nesse caso, se as interpretações de H e G são verdadeiras, então a interpretação da fórmula $(H \rightarrow G)$ também é verdadeira. Observe que $I[H \rightarrow G]$ representa a interpretação da fórmula $(H \rightarrow G)$ como um todo. Isto é, a interpretação de toda a inferência é verdadeira quando as interpretações das fórmulas H e G são verdadeiras. Além disso, também não estamos supondo uma relação causal entre H e G.

Segundo argumento a favor da Tabela 2.4. Conforme a segunda linha da Tabela 2.4, $I[H \rightarrow G] = F$ quando $I[H] = T$ e $I[G] = F$. Nesse caso, é falso concluir uma declaração falsa a partir de outra verdadeira. Isso é "intuitivamente" correto, pois uma inferência que conclui um falso a partir de um verdadeiro é uma inferência falsa. Suponha que: $P =$ "Está chovendo" e $Q =$ "A rua está molhada". A implicação: "Se está chovendo, então a rua está molhada" é verdadeira, pois se P é verdadeiro (está chovendo), então necessariamente[8] Q é verdadeiro (a rua está molhada). Caso ocorresse P verdadeiro (está chovendo) e Q falso (a rua não está molhada), então a implicação: "Se está chovendo então a rua está molhada" seria uma implicação falsa. Portanto, se um enunciado falso é concluído a partir de outro verdadeiro, então a implicação é falsa.

Terceiro argumento a favor da Tabela 2.4. A análise das outras linhas da tabela-verdade, que definem $I[H \rightarrow G]$, não é tão imediata como as primeiras linhas analisadas anteriormente. Nas linhas 3 e 4, $I[H \rightarrow G] = T$, dado que $I[H] = F$, independentemente do valor de $I[G]$. Uma justificativa, informal, é que, com base em uma declaração falsa é possível concluir qualquer tipo de declaração. Em outras palavras, a partir de um antecedente falso, uma inferência que conclui fatos verdadeiros ou falsos é uma inferência verdadeira. Parece que isso não é tão imediato. E se você está um pouco incomodado a respeito do fato de se ter $I[H \rightarrow G] = T$ partindo apenas do fato de que $I[H] = F$, você tem razão. Certamente, temos que explicar um pouco mais, pois é estranho supor verdadeira a conclusão de fatos falsos a partir de fatos falsos. Há uma história curiosa a esse respeito [Goldstein]. Contam que, certo dia, um aluno pediu ao famoso lógico e filósofo Bertrand Russell que provasse que qualquer coisa segue da contradição, ou seja, de uma sentença falsa. E o aluno completou: "É possível provar que do enunciado $2 + 2 = 5$, segue que o senhor é o Papa?" Russell apresentou a seguinte prova:

[8] Estamos considerando um mundo razoável, no qual as ruas são descobertas e os pingos d'água caem do céu, no chão da rua.

Suponha que $2+2=5$. Subtraia 2 de ambos os lados da igualdade e obtenha: $2=3$. Inverta os termos da igualdade, e obtenha $3=2$. Subtraia 1 de ambos os lados da igualdade, e obtenha $2=1$. E ele prosseguiu. "O Papa e eu somos dois. Mas, dado que dois é igual a um, então eu e o Papa somos um. Logo, eu sou igual ao Papa."

Quarto argumento a favor da Tabela 2.4. Uma outra justificativa para a Tabela 2.4 é a seguinte. Considere a fórmula: $(P \rightarrow (P \vee Q))$. Informalmente, essa fórmula diz que P implica (P ou Q). E é bastante razoável admitir que qualquer proposição deva implicar a si mesma ou qualquer outra coisa. Considerando esse fato, então a fórmula anterior deve ser verdadeira, independentemente das interpretações de P e Q. Nesse caso, P deve implicar P ou outra proposição qualquer. Assim, na Tabela 2.6, a coluna da fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ deve ser uma coluna que possui apenas valores iguais a T.

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
			T
			T
			T
			T

Tabela 2.6: Tabela-verdade associada à fórmula $P \rightarrow (P \vee Q)$.

Considere que a Tabela 2.4, que define a interpretação de $(H \rightarrow G)$, seja modificada para a Tabela 2.5. Se a semântica da fórmula $(H \rightarrow G)$ fosse definida conforme a Tabela 2.5 e as correspondências a seguir fossem utilizadas, $H = P$ e $G = (P \vee Q)$, então a tabela-verdade associada à fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ seria preenchida como na Tabela 2.7, a seguir:

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

Tabela 2.7: Tabela-verdade associada à fórmula $P \rightarrow (P \vee Q)$.

Logo, a interpretação da fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ não seria verdadeira, não importando as interpretações de P e Q. O que está acontecendo? A modificação da definição de $I[H \rightarrow G]$, da Tabela 2.4 para a Tabela 2.5, faz com que $I[P \rightarrow (P \vee Q)]$ seja igual a F nas linhas 3 e 4 da Tabela 2.7. Portanto, o correto é considerar a

Tabela 2.4 como definição da semântica do conectivo $\rightarrow$. Nesse caso, utilizando a Tabela 2.4 e as correspondências: $H = P$ e $G = (P \lor Q)$, obtemos a Tabela 2.8, que está de acordo com o fato intuitivo de que a fórmula $(P \rightarrow (P \lor Q))$ deve ter uma interpretação verdadeira, independentemente das interpretações de P e Q.

P	Q	$P \lor Q$	$P \rightarrow (P \lor Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Tabela 2.8: Tabela-verdade associada à fórmula $P \rightarrow (P \lor Q)$.

Quinto argumento a favor da Tabela 2.4. Considere uma outra análise da semântica do conectivo $\rightarrow$. Suponha que estamos considerando números reais x, y tais que P = "$x > 10$" e Q = "$x^2 > 100$". Nesse caso, $I[P \rightarrow Q] = T$, pois, considerando números reais, se $I[P] = T$, então $I[Q] = T$. Ou seja, se é verdade que o número real x é tal que $x > 10$, então também é verdade que $x^2 > 100$. Em outras palavras, é impossível $x > 10$ ser verdadeiro e $x^2 > 100$ ser falso. Portanto, nesse caso, $I[P \rightarrow Q] = T$. Logo, conforme a Tabela 2.4, os símbolos P e Q somente podem ser interpretados conforme as linhas 1, 3 e 4 da tabela, que são as linhas nas quais temos $I[P \rightarrow Q] = T$. A segunda linha não ocorre, pois nesse caso $I[P \rightarrow Q] = F$. E dado que $I[P \rightarrow Q] = T$, então se $I[P] = T$, concluímos, pela primeira linha da Tabela 2.4, que $I[Q] = T$. Em outras palavras, se $x > 10$ e tendo que $I[P \rightarrow Q] = T$, então $x^2 > 100$. Mas o que ocorre se é falso que $x > 10$, ou seja, $I[x > 10] = I[P] = F$? Nesse caso, x é um número real menor, ou igual a 10. Isto é, $x \leqslant 10$. É possível ter, por exemplo, $x = 5$ ou $x = -20$. Suponha, então, que $x = 5$. Nesse caso, $I[x > 10] = I[P] = F$ e temos $x^2 = 25$. Logo, $x^2 \leq 100$ e $I[x^2 > 100] = I[Q] = F$. Suponha o outro caso, no qual $x = -20$. Nesse caso, também temos $I[x > 10] = I[P] = F$. Entretanto, diferentemente do caso anterior, $x^2 = 400$. Logo, $x^2 > 100$ e $I[x^2 > 100] = I[Q] = T$. Portanto, dado que $I[P \rightarrow Q] = T$, se $I[x > 10] = F$, nada podemos concluir a respeito de $I[x^2 > 100]$. É possível ter $I[x^2 > 100] = T$, ou $I[x^2 > 100] = F$, dependendo do valor de x. Tais casos são expressos na Tabela 2.4, do conectivo $\rightarrow$, nas duas últimas linhas.

A causalidade e a semântica do conectivo $\rightarrow$. Conforme a Tabela 2.4, temos dois fatos importantes.

Se $I[G] = T$, então $I[H \rightarrow G] = T$,

independentemente do valor de $I[H]$. Analogamente,

se $I[H] = F$, então $I[H \rightarrow G] = T$,

independentemente do valor de $I[G]$. Isso significa que o conectivo $\rightarrow$ não necessariamente expressa a causalidade, sendo, por essa razão, frequentemente denominado implicação material. Não é necessária a relação de causa e efeito entre

H e G para que se tenha $I[H \rightarrow G] = T$. Por exemplo, as linhas 3 e 4 da Tabela 2.4 determinam uma semântica toda própria do conectivo $\rightarrow$, sendo um pouco diferente daquela que ocorre nas linguagens naturais. Considere a implicação: "Se $2+2=5$, a lua é feita de queijo." Considerando que é falso que $2+2=5$, então pela linha 4 da Tabela 2.4, essa implicação é verdadeira. Isso causa um mal-estar, pois a implicação é verdadeira apesar de não haver relação alguma entre 2 mais 2 ser igual a 5 e a lua ser feita de queijo. Analogamente, pela linha 4 da Tabela 2.4 a implicação: "Se o mar é doce, então $3+3=6$" também é verdadeira. Isso é estranho, porém correto, pois a semântica do conectivo $\rightarrow$ não expressa a causalidade. E sem a causalidade, essa semântica foge ao senso comum, como ocorre no caso a seguir. Suponha: "O sol é redondo" e que I seja uma interpretação razoável tal que $I[Q] = T$. Nesse caso, $I[P \rightarrow Q] = T$ para qualquer proposição que P esteja representando. Até mesmo no caso em que temos: $P =$ "Todo político é honesto." Nesse caso $I[P \rightarrow Q] = T$ e não há relação de causa e efeito entre P e Q. Suponha, ainda, que $R =$ "O quadrado é redondo." Seja I uma interpretação, que obedece os conceitos usuais da geometria. Logo, $I[R] = F$. Nesse caso, $I[R \rightarrow S] = T$ para qualquer proposição que S esteja representando. Suponha agora que $S =$ "A lua é redonda." Neste caso $I[R \rightarrow S] = T$ e também não há relação de causa e efeito entre R e S. Esse problema todo que ocorre com a implicação é porque, a rigor, temos duas implicações: uma representada pelo conectivo $\rightarrow$ e outra da linguagem natural. E na linguagem natural, em português, por exemplo, ela geralmente está associada a uma relação de causa e efeito, o que não necessariamente ocorre na Lógica. A semântica dada ao conectivo $\rightarrow$ na Lógica Proposicional não corresponde exatamente ao significado dado às implicações que ocorrem nas linguagens naturais como o português. Essa semântica corresponde ao significado da implicação presente na matemática.[9] Há ainda outros problemas com o se-então das linguagens naturais. Qual o significado da implicação a seguir? "Se Zé é bom de bola, eu sou um astronauta" Na verdade, apesar dessa sentença utilizar "se ... então ... ", ela é apenas uma forma alternativa de dizer que Zé não é bom de bola. Portanto, a rigor, essa sentença não é uma implicação, apesar de ser expressa utilizando o "se ... então ... ".

A semântica do conectivo $\leftrightarrow$. O conectivo $\leftrightarrow$ é denominado bi-implicação ou bicondicional. Como o nome sugere, a semântica de $\leftrightarrow$ é um condicional nas duas direções e corresponde às expressões "... se, e somente se, ..." e "... equivale a ...". Suponha que: $P =$ "Maria é aprovada em Lógica" e $Q =$ "Maria totaliza mais de 60 pontos em Lógica". A fórmula $P \leftrightarrow Q$ representa: "Maria é aprovada em Lógica se, e somente se, ela totaliza mais de 60 pontos." Nesse caso, há dois condicionais envolvidos: "Se Maria é aprovada em Lógica, então ela totalizou mais de 60 pontos"[10] e "Se Maria totaliza mais de 60 pontos em Lógica, ela é aprovada". Portanto, o

[9] A maioria dos lógicos que desenvolveram a Lógica contemporânea eram também matemáticos.

[10] Observe que os tempos verbais são desconsiderados nesta representação. "Maria totaliza 60 pontos" se transforma em "ela totalizou mais de 60 pontos". Na Lógica Clássica os tempos verbais geralmente são desconsiderados.

significado da expressão "... se, e somente se, ..." corresponde ao significado de "se ... então ..." nas duas direções. Logo, todos os problemas indicados na análise da semântica do conectivo $\rightarrow$ também ocorrem na semântica de $\leftrightarrow$.

Uma outra forma de entender a semântica do conectivo $\leftrightarrow$ é pensar que se a interpretação de $H \leftrightarrow G$ é verdadeira, então H equivale a G. As interpretações de H e G devem ser iguais a T ou a F. Em outras palavras, as duas fórmulas têm interpretações iguais a T, ou as duas fórmulas têm interpretações iguais a F. No caso em que as interpretações de H e G são diferentes, a interpretação de $H \leftrightarrow G$ deve ser igual a F.

A Definição 2.6 determina interpretações fixas para os conectivos. Por outro lado, os símbolos proposicionais não têm interpretações fixas. Dado um símbolo proposicional $\check{P}$, e uma interpretação I, necessariamente $I[\check{P}] = T$ ou $I[\check{P}] = F$. Dada uma fórmula H, para determinar o valor de verdade de $I[H]$ é necessário especificar a interpretação dos símbolos proposicionais que ocorrem em H. Isso quer dizer que, para determinar o significado de uma sentença declarativa, basta dizer como o mundo interpreta as proposições que constituem a sentença. Este é um dos princípios básicos da Lógica Clássica: os conectivos são operadores ou funções de verdade cujo valor pode ser calculado a partir de seus componentes mais simples.[11]

Nota. Geralmente os símbolos com interpretações fixas são denominados símbolos lógicos e aqueles que não têm interpretação fixa são os símbolos não lógicos.

Os Exemplos 2.3 e 2.4 a seguir consideram a interpretação de fórmulas a partir de seus símbolos proposicionais. Esse princípio é denominado Princípio da Composicionalidade ou Princípio de Frege. Ele estabelece que o significado de uma sentença declarativa complexa é uma função do significado de suas partes e da forma como essas partes se combinam. O resultado da interpretação de uma fórmula é uma função da interpretação dos símbolos proposicionais e de como eles se combinam com os símbolos de verdade e os conectivos. Nas linguagens naturais, como o português, a interpretação das sentenças também depende de como as palavras são combinadas. Em português, o significado de uma sentença depende do significado das palavras envolvidas e de como elas estão dispostas na sentença. Por exemplo, "Zé ama Maria" expressa um conteúdo que não depende apenas do que entendemos, separadamente, por "Zé", "ama", e "Maria". A sentença "Zé ama Maria" pode até significar, dependendo do contexto, o oposto, ou seja que "Zé não ama Maria". Assim, uma dada sentença pode ser interpretada de várias formas. Observe que na Lógica Proposicional isso não ocorre.

Exemplo 2.3 (interpretação de uma fórmula) Considere a fórmula:

$$H = ((\neg P) \vee (\neg Q)) \rightarrow R$$

e uma interpretação I dada por: $I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = T, I[S] = F$. Para determinar a interpretação de H conforme I, isto é, $I[H]$, observamos que

[11] Há Lógicas não clássicas, como a Lógica Modal, em que esse princípio não é satisfeito.

$I[\neg P] = F, I[\neg Q] = T$ e $I[\neg P \vee \neg Q] = T$. Logo, $I[H] = T$ Observe que para determinar a interpretação de H, as interpretações são feitas passo a passo, utilizando as regras semânticas definidas anteriormente. De início, são interpretados os símbolos proposicionais; em seguida, as subfórmulas que ocorrem em H, até que obtemos a interpretação de H.

Finalmente, observe que definimos $I[S] = F$ e o símbolo S não ocorre na fórmula H. Entretanto, isso não interfere no resultado da interpretação de H, visto que $I[S] = F$ representa apenas a interpretação de algo que não ocorre na fórmula. Ou seja, I interpreta mais do que o necessário para interpretar H. ■

Exemplo 2.4 (interpretação de fórmulas) Considere as fórmulas:

$$E = ((\neg P) \wedge Q)) \rightarrow (R \vee P),\ H = (false \rightarrow P)$$

e as interpretações I e J definidas a seguir: $I[P] = T$, $I[Q] = F$, $I[R] = T$, $I[P_1] = F$, $J[P] = F$, $J[Q] = T$, $J[R] = F$. Nesse caso, I interpreta a fórmula E conforme a Tabela 2.9 a seguir.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
T	F	T	F	F	T	T

Tabela 2.9: Tabela-verdade associada à fórmula E e interpretação I.

A interpretação J interpreta E conforme a Tabela 2.10.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
F	T	F	T	T	F	F

Tabela 2.10: Tabela-verdade associada à fórmula E e interpretação J.

As interpretações I e J interpretam o antecedente da fórmula H como sendo F. Devido a esse fato, são obtidos os resultados $I[H] = T$ e $J[H] = T$. Lembre-se que esse fato é geral. Isto é, quando uma interpretação interpreta o antecedente de uma implicação como sendo F, então a implicação é interpretada como sendo T. Isso significa que independentemente dos valores de $I[P]$ e $J[P]$, os resultados $I[H] = T$ e $J[H] = T$ são obtidos. ■

O número de interpretações. Quantas interpretações existem? Uma interpretação na Lógica Proposicional, conforme exposto na Definição 2.5, é uma função binária cujo domínio é o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional e o contradomínio é $\{T, F\}$. Como o conjunto das fórmulas é enumerável, e o contradomínio possui apenas dois elementos, o conjunto de todas as interpretações é enumerável. É, portanto, infinita e enumerável a quantidade de possíveis interpretações. Isto ocorre porque temos uma quantidade infinita e enumerável de símbolos proposicionais no alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional. Logo, há infinitas formas de interpretar o conjunto de todos os símbolos proposicionais. Observe que, dado P, há apenas duas formas possíveis de interpretá-lo. P pode ser interpretado como verdadeiro ou falso. Logo, o conjunto de todas as interpretações pode ser subdividido em dois subconjuntos: as interpretações que interpretam P como T e aquelas que o interpretam como F. Considere agora P, Q e R. Nesse caso, há oito formas diferentes de interpretar P, Q e R, como é indicado na Tabela 2.11, a seguir.

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

Tabela 2.11: Tabela-verdade associada aos símbolos P, Q e R

Isso significa que o conjunto de todas as interpretações pode ser subdividido em oito subconjuntos, cada um correspondendo a uma das linhas da Tabela 2.11. As oito possibilidades de interpretação de P, Q e R correspondem aos oito subconjuntos do conjunto de todas as interpretações. Em uma tabela-verdade, cada possibilidade é indicada por uma linha da tabela. A Tabela 2.11 possui oito linhas, que correspondem às diferentes possibilidades de interpretação de P, Q, e R. Para simplificar, cada linha da tabela é identificada como sendo uma interpretação. Observe que, na verdade, cada linha da Tabela 2.11 corresponde a um conjunto infinito, enumerável, de interpretações que coincidem nos símbolos P, Q e R. Para finalizar, é importante ter em mente o princípio da composicionalidade e a natureza das funções de verdade. São dois fatores que fundamentam a semântica da Lógica Clássica.

O princípio da composicionalidade. A interpretação de uma fórmula na Lógica é função da interpretação de suas partes e do modo como elas se combinam. Essa propriedade da interpretação é denominada princípio da composicionalidade. Algo semelhante ocorre nas linguagens naturais. Para interpretar as proposições "O cavalo carrega Zé" e "Zé carrega o cavalo", é necessário dar um significado para as palavras que definem essas sentenças e também como tais palavras são combinadas. Apesar de utilizarem as mesmas palavras, as proposições têm interpretações diferentes. Isso ocorre porque as palavras que as compõem se combinam de forma diferente. Entretanto, em geral, o princípio da composicionalidade não se aplica nas linguagens naturais. Por exemplo, suponha que alguem fale: "Todo político é honesto." Afinal, é verdadeiro, ou falso, que "Todo político é honesto"? Nesse caso, essa sentença pode ser um deboche que expressa o contrário: "Os políticos são desonestos."

Funções de verdade Na Lógica Clássica, o valor de verdade de uma fórmula é calculado a partir dos valores de verdade de suas subfórmulas. Um cálculo dessa forma só é possível porque os conectivos se comportam como funções de verdade, que tomam como argumentos valores de verdade e retornam valores de verdade.[12]

2.4 Representação de sentenças na Lógica Proposicional

Tudo que foi apresentado desde o início deste livro, pode até parecer bonito. O alfabeto e as fórmulas da Lógica Proposicional. Em seguida, a interpretação dessas fórmulas. Mas, isso, certamente, tem mais valor se existir alguma ligação com a realidade. Ou seja, as ideias semânticas do nosso dia a dia possuem alguma correspondência com as fórmulas da Lógica Proposicional e suas interpretações. Infelizmente, nem todo conceito semântico pode ser traduzido, adequadamente, em uma fórmula da Lógica Proposicional. Isso ocorre porque tal lógica tem uma linguagem bastante restrita. Entretanto, vários tipos de sentenças do nosso uso ainda podem ser bem traduzidas em fórmulas da Lógica Proposicional. E entender a técnica dessas traduções é um importante tema da lógica.

Exemplo 2.5 (representação de sentenças) Este exemplo considera a representação de uma sentença simples da língua portuguesa para a linguagem da Lógica Proposicional. Preste atenção no processo que se segue para obter a representação final. Tal processo é, em geral, utilizado para representar sentenças mais elaboradas. Considere, então, a sentença simples:

Se eu sou feliz, então você é feliz.

Para traduzir essa sentença, inicialmente, identifique as declarações, contidas nela, que são proposições. Tais proposições aparecem sublinhadas na sentença a seguir:

Se <u>eu sou feliz</u>, então <u>você é feliz</u>.

Em seguida, represente cada proposição por um símbolo proposicional. Considere: $P =$ "eu sou feliz" e $Q =$ "você é feliz". Utilizando tais representações, a sentença acima pode ser escrita como: "Se P, então Q." E, finalmente, o "se ... então ..." é representado pelo conectivo $\rightarrow$. Dessa forma, o resultado da representação da sentença anterior é a fórmula: $P \rightarrow Q$. ■

[12] Há Lógicas não clássicas que contêm conectivos que não agem como funções de verdade.

Exemplo 2.6 (tempo verbal na representação) Este exemplo mostra que nem sempre o tempo verbal é desconsiderado na representação de uma sentença da língua portuguesa para a linguagem da Lógica Proposicional. Considere a sentença: "Se eu era feliz, então você e eu somos felizes." Para traduzir essa sentença, identifique as proposições contidas nela:

Se <u>eu era feliz</u>, então <u>você e eu somos felizes</u>.

Em seguida, represente cada proposição por um símbolo proposicional. Considere: $P =$ "Eu era feliz" $P_1 =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz". Utilizando tais representações, o resultado da representação é: $P \rightarrow (P_1 \wedge Q)$. Observe que nessa representação o tempo verbal foi levado em conta. Ou seja, "eu era feliz" foi representado de forma diferente de "eu sou feliz". Entretanto, nem sempre o tempo verbal é considerado. E, para simplificar, em geral consideramos a mesma representação para "eu era feliz" e "eu sou feliz". Nesse caso, se $P =$ "Eu era feliz", $P =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz", então, a representação final é dada por $P \rightarrow (P \wedge Q)$. Dessa forma, é claro, a primeira representação é mais fiel à semântica da linguagem natural. ■

Exemplo 2.7 (traduções para o conectivo $\rightarrow$) Este exemplo considera diferentes sentenças que podem ser traduzidas, utilizando o conectivo $\rightarrow$. Considere as sentenças: "Se eu sou feliz, então você é feliz", "Se eu sou feliz, você é feliz", "Dado que eu sou feliz, então você é feliz", "Dado que eu sou feliz, você é feliz", "Você é feliz, se sou feliz", "Você é feliz, pois sou feliz", "Você é feliz, dado que sou feliz" e "Sou feliz, portanto você é feliz". Todas essas sentenças têm a mesma representação para a Lógica Proposicional. Se $P =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz", elas são todas traduzidas na fórmula: $P \rightarrow Q$. ■

Exemplo 2.8 (tradução para o conectivo $\neg$) Este exemplo considera a tradução de uma sentença que contém negações. Considere: "Se eu sou feliz, você é infeliz, e se você é infeliz, eu não sou feliz". Identifique as declarações, contidas nela, que são proposições.

"Se <u>eu sou feliz</u>, <u>você é infeliz</u>, e se <u>você é infeliz</u>, <u>eu não sou feliz</u>."

Nesse caso, há pares de proposições em que uma nega a outra. Então, não há sentido em considerar, por exemplo: $P =$ "Eu sou feliz" e $P_1 =$ "Eu não sou feliz". Temos uma representação melhor, quando consideramos: $P =$ "Eu sou feliz" e $\neg P =$ "Eu não sou feliz". Seguindo esse raciocínio, seja: $P =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz". Nesse caso, uma primeira representação da sentença é dada por:

"Se P, então $(\neg Q)$, e se $(\neg Q)$, $(\neg P)$".

O próximo passo é efetuar a tradução para o conectivo "se ... então ...", obtendo:

"$(P \rightarrow (\neg Q))$, e $((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$".

O passo final é traduzir para o conectivo $\wedge$, obtendo-se a fórmula:
$(P \rightarrow (\neg Q)) \wedge ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$. ■

Exemplo 2.9 (representação de sentenças) Considere a sentença:

1. = "Irei ao teatro se for uma peça de comédia"

e as representações $P =$ "Irei ao teatro" e $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia". Nesse caso, a sentença é traduzida pela fórmula $Q \rightarrow P$. Observe que se a sentença 1 é modificada para a sentença 2, tal que

2. = "Se eu for ao teatro, a peça será de comédia",

então, desconsiderando os tempos verbais, a representação é $P \rightarrow Q$. Percebeu a diferença quando o "se" ocorre no meio e no fim da sentença? No caso da sentença 1, se $I[Q] = T$, ou seja, a peça é de comédia, então irei ao teatro. Mas, se eu for ao teatro, não necessariamente podemos concluir que a peça é de comédia. Pode acontecer que eu também queira assistir a um drama. Nesse caso, irei ao teatro, mesmo que a peça não seja de comédia. Já no caso da sentença 2, se $I[P] = T$, então concluo, necessariamente, que a peça seja de comédia. Considere agora a sentença 1 com uma pequena modificação:

3. = "Irei ao teatro <u>somente</u> se for uma peça de comédia".

A sentença 3 diz algo diferente da sentença 1. Ela diz que irei ao teatro somente se a peça for de comédia. Caso não seja comédia, não irei ao teatro. Nesse caso, a sentença 3 equivale a:

"Se a peça não é de comédia, então não irei ao teatro".

Essa sentença é representada como $\neg Q \rightarrow \neg P$. Mas, como é analisado no próximo capítulo, as fórmulas $\neg Q \rightarrow \neg P$ e $P \rightarrow Q$ são equivalentes. Conclusão: a terceira 3 é representada pela fórmula $P \rightarrow Q$. Vamos colocar mais um "se" na sentença 3 e considerar:

4. = "Irei ao teatro <u>se</u>, e somente se, for uma peça de comédia."

Nesse caso, a representação é $P \leftrightarrow Q$. Observe que a sentença 1 tem apenas um "se" no seu interior. Em seguida, um "somente se" ocorre no interior da sentença 3. Finalmente, na sentença 4 temos "se, e somente se" no seu interior. Nessa ordem, as sentenças 1, 3 e 4 são traduzidas por: $Q \rightarrow P$, $P \rightarrow Q$ e $Q \leftrightarrow P$. Olhando dessa forma, é como se o "se, e somente se" fosse a "soma" de um "se" e de um "somente se". Em outras palavras, é como se o conectivo $\leftrightarrow$ fosse a "soma" de dois conectivos $\rightarrow$. Mais adiante, veremos que pensar dessa forma tem certo fundamento, pois $(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$ equivale a $Q \leftrightarrow P$. Podemos, ainda, ter um pouco mais de informação e considerar a sentença:

5. = "Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia".

Considerando as representações: $P =$ "Irei ao teatro", $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia" e $R =$ "Minha namorada virá", temos a representação inicial:

"Se R, P somente se Q".

Nesse caso, pode ocorrer a seguinte dúvida, afinal, qual das duas fórmulas a seguir é a representação correta da sentença anterior? $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$ ou $(R \rightarrow P) \rightarrow Q$?

Decidir entre essas duas fórmulas depende de uma atenção especial à semântica da língua portuguesa. Observe que, devido à vírgula depois do símbolo R, a representação correta é $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$. Desconsiderando os tempos verbais e com uma pequena variação na sentença 5, temos:

6. = "Minha namorada veio. Fui ao teatro. Portanto, a peça é de comédia".

Considerando, novamente, as representações: $P =$ "Irei ao teatro", $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia" e $R =$ "Minha namorada virá" e, equivalentemente, $P =$ "Fui ao teatro", $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia" e $R =$ "Minha namorada veio", temos a representação inicial:

"R. P. Portanto, Q".

Nesse caso, a questão é decidir como representar as sentenças: "Minha namorada veio. Fui ao teatro." Essas duas sentenças parecem ser independentes. Apenas parecem, pois, na verdade, quando expressamos dessa forma, estamos considerando a conjunção das sentenças. Nesse sentido, a representação de "Minha namorada veio. Fui ao teatro." é $R \wedge P$. Logo, a representação da sentença 6 é $(R \wedge P) \rightarrow Q$. ■

2.5 Representação de argumentos lógicos

Frequentemente utilizamos argumentos para nos convencer ou convencer os outros de nossas opiniões. E os outros também fazem o mesmo: apresentam-nos argumentos sobre diferentes fatos, cujo objetivo é nos convencer. Mas o que é um argumento? É uma afirmação ou conjunto de afirmações utilizadas para convencer alguém. E, se são utilizados para convencer, esse conjunto de afirmações ou argumentos deve ser bom. Entretanto, nem todos os argumentos são bons. Utilizamos a seguir as propriedades semânticas da Lógica Proposicional como um fundamento da análise dos argumentos lógicos. Por enquanto, use sua intuição e responda: entre os argumentos a seguir, quais você considera que são bons?

1. = "Quem tem dinheiro é feliz. Zé tem dinheiro. Portanto, Zé é feliz."

Dizer que esse argumento é bom significa se convencer que Zé é feliz a partir das premissas de que quem tem dinheiro é feliz e de que Zé tem dinheiro. O que você acha? Esse é um bom argumento?

Podemos, ainda, utilizar conceitos metafísicos para formular outros argumentos[13].

2. = "Deus fez o homem. Deus é perfeitamente bom. Tudo o que é feito por alguém perfeitamente bom é perfeitamente bom. Tudo o que é perfeitamente bom não contém pecado. Portanto, o homem não tem pecado."

Afinal, a partir desse argumento, concluios que o homem não tem pecado? O argumento a seguir é denominado Argumento do Desígnio.

[13]Alguns dos argumentos que se seguem, e muitos outros, podem ser encontrados em [Nolt].

3. = "Deus existe pois a natureza e a vida são perfeitas e toda casa precisa de um arquiteto."

Ainda, mais dois argumentos sobre a existência de Deus.

4. = "Tudo que existe tem uma causa, logo é preciso existir uma causa primordial. Essa causa primordial é Deus."

5. = "O fato de termos ideia de Deus, significa que ele existe."

Outros exemplos de argumentos, que não são metafísicos são:

6. = "Existem mais pessoas no mundo do que fios de cabelos na cabeça de uma pessoa. Ninguém é careca. Portanto, pelo menos duas pessoas tem um mesmo número de fios de cabelos."

7. = "No interior da Antárctida, as temperaturas oscilam entre -50^oC e -20^oC. Se a água está a uma temperatura abaixo de 0^oC, então ela se congela. Portanto, a água no interior da Antárctida está congelada."

Não basta ficar apenas com a intuição. Temos que prosseguir e classificar de maneira mais formal tais argumentos. Antes, porém, preste atenção. "Argumentar" significa muitas vezes "discutir", "contender". Porém, na Lógica, a palavra "argumentar" não tem essa conotação. A Argumentação Lógica não tem como objetivo a discussão, sendo seus argumentos utilizados apenas para justificar uma conclusão, havendo ou não discordância. Na busca pela solução de uma divergência, os argumentos lógicos devem ser utilizados de forma inteligente, na justificação de uma ou outra ideia. Nesse sentido, os argumentos têm como principal função, o convencimento das partes envolvidas. E não interessa à Lógica o poder persuasivo, do ponto de vista psicológico, do argumento, mas, sim a relação objetiva entre as premissas e a conclusão expressas pelo argumento. Tudo isso significa que, por exemplo, o objetivo do argumento

"Quem tem dinheiro é feliz. Zé tem dinheiro. Portanto, Zé é feliz."

é nos convencer de que podemos concluir que Zé é feliz, dado que ele tem dinheiro e que toda pessoa de posses é feliz. É só isso, não se busca uma discussão e nem uma persuasão psicológica. Mas é função da Lógica a relação objetiva entre as premissas "Quem tem dinheiro é feliz", "Zé tem dinheiro" com a conclusão "Zé é feliz". Enfim, é função da Lógica dizer se um argumento é válido; correto ou incorreto; forte ou fraco. A nossa intuição nos diz que esse argumento não é um bom argumento, pois há pessoas ricas que não são felizes. Na verdade, a análise lógica prova que ele é incorreto. Além de provar a não correção de argumentos como esse, a análise lógica também compara os argumentos. E comparar argumentos pode não ser tão simples, dado que o conjunto dos argumentos não é um conjunto ordenado como o conjunto dos números inteiros. Mas os argumentos têm algo em comum. Todos eles correspondem a uma implicação, em que as premissas formam o antecedente; e a conclusão, o consequente. Temos uma implicação da forma:

$$\textbf{premissas} \rightarrow \textbf{conclusão.}$$

Além disso, as premissas são formadas por várias sentenças que são conjuntamente consideradas. Em outras palavras, as premissas são formadas pela conjunção de um conjunto de proposições. No caso do argumento anterior, as premissas são formadas pela conjunção: "Quem tem dinheiro é feliz" e "Zé tem dinheiro". Considere as representações: $P =$ "Quem tem dinheiro é feliz", $Q =$ "Zé tem dinheiro" e $R =$ "Zé é feliz". Nesse caso, as premissas são representadas por $P \wedge Q$ e a conclusão por R. Logo, o argumento é representado por $(P \wedge Q) \rightarrow R$. Observe que, nesse caso, o conectivo $\rightarrow$ é a representação, na linguagem da Lógica, do termo: "portanto".

Dificilmente, a não ser nos livros de Lógica, encontraremos os argumentos escritos de forma padronizada:

premissas portanto **conclusão.**

É necessário, portanto, aprender a identificar um argumento, quando ele é escrito ou falado de maneira informal. O primeiro passo é identificar as premissas e a conclusão do argumento, dados que não costumam estar explicitamente rotulados. Além disso, nem sempre as premissas vêm antes da conclusão. O argumento anterior, por exemplo, pode ser escrito, equivalentemente, na forma: "Zé é feliz. Isso, porque ele tem dinheiro e toda pessoa que tem dinheiro é feliz." Nesse caso, temos:

conclusão porque **premissas.**

Observe que as premissas e a conclusão continuam separadas. Entretanto, pode ocorrer até mesmo uma mistura de premissas e conclusões, como

"Uma vez que todo rico é feliz, Zé é feliz, pois ele tem dinheiro."

Quando apresentamos algum argumento, usualmente utilizamos algumas palavras para indicar que uma declaração está funcionando como premissa e outra como conclusão. Considere o argumento:

"Todo rico é feliz. Zé é rico. **Logo**, Zé é feliz."

Nesse caso, a palavra "logo" faz a ligação entre as premissas e a conclusão. As premissas estão escritas antes da palavra "logo" e a conclusão, após. No lugar da palavra "logo" podemos utilizar outras como: "daí decorre que", "em consequência disso". Outras expressões, como "assim" e "se segue que", também podem ser utilizadas para ligar premissas a conclusões, como nos argumentos anteriores. Em todos esses casos, as premissas antecedem as expressões indicadas e a conclusão vem após.

Quando queremos caracterizar que uma declaração constitui uma premissa, utilizamos expressões como "desde que" e "uma vez que". As sentenças que se seguem a essas expressões são as premissas. A conclusão vem logo após. Veja os exemplos: "Desde que todo rico é feliz e Zé é rico, Zé é feliz." "Uma vez que todo rico é feliz e Zé é rico, Zé é feliz." Outras palavras que podem ser utilizadas são: "pois" e "porque". Nesse caso, expressamos inicialmente a conclusão e em seguida, após a palavra, a premissa. Observe os argumentos a seguir, em que utilizamos algumas das expressões e palavras anteriores. "Zé é feliz, pois todo rico é feliz e Zé é rico." "Zé é feliz, porque todo rico é feliz e Zé é rico." Observe que independentemente das palavras utilizadas, "pois", "desde que", "portanto", a representação do argumento na Lógica é sempre a mesma:

premissas portanto **conclusão.**

De tudo isso, como numa argumentação, concluímos que identificar e analisar os argumentos pode não ser fácil. Eles são constituídos de diferentes palavras, em diferentes combinações. Nessa representação, quando escrevemos um argumento para expressar um conceito, alguma informação pode se perder. Como o ato da comunicação é difícil e obscuro, nem sempre o argumento é uma representação fiel daquilo que gostaríamos de expressar. Muitas vezes, até omitimos alguma premissa relevante para o entendimento do argumento. Considere o argumento: "Zé é feliz porque é rico." Nesse caso, o argumento é escrito omitindo uma premissa. A sua forma completa é: "Zé é feliz, porque todo rico é feliz e Zé é rico." Nesse caso, não há dificuldades em reconstruir o argumento completo a partir daquele incompleto. Entretanto, nem sempre isso é tão imediato. Nesse sentido, devemos enfatizar a necessidade dos argumentos serem apresentados de forma completa, sem a omissão de premissas. Quando alguém expõe um argumento, tem todo o direito de expressá-lo de forma incompleta. Mas, dessa forma, também corre o risco de não ser compreendido e o argumento poderá ter efeitos diversos. Frequentemente, a premissa omitida é uma declaração óbvia e talvez nem valha a pena ter o trabalho de a formular. Entretanto, isso pode ser uma grande cilada, pois o que é óbvio para alguém, pode não o ser para os outros. Assim, na Argumentação Lógica, quando fazemos a análise do discurso ou da fala de alguém, geralmente, seguimos três passos:

1. reconhecemos os argumentos;
2. quando encontramos um argumento, devemos identificar as premissas e a conclusão;
3. se um argumento é incompleto, devemos reconstituí-lo, fornecendo a premissa omitida.

Observe um exemplo:

"As mulheres devem ter, no máximo, um filho. Pois atualmente elas trabalham em casa e fora de casa."

Esse argumento tem a premissa: "Atualmente as mulheres trabalham em casa e fora de casa" e a conclusão: "As mulheres devem ter, no máximo, um filho". Observe que o argumento pretende nos convencer sobre a necessidade das mulheres terem no máximo um filho. Para isso, ele considera apenas uma premissa: a que diz que as mulheres trabalham em casa e fora de casa. Entretanto, esse argumento deve ser melhorado, pois, apenas a partir dessa premissa, talvez não seja convincente concluir que as mulheres devem ter poucos filhos. Isso ocorre porque podemos ter situações em que a mulher trabalha apenas 5 minutos por dia fora de casa. Ou ainda, outras razões diferentes da quantidade de trabalho que não implicam na necessidade de as mulheres terem poucos filhos.

2.6 Exercícios

1. No contexto deste livro, qual a diferença entre os símbolos?
   (a) $true$ e T
   (b) $false$ e F
   (c) $\rightarrow$ e $\Rightarrow$
   (d) $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$
   Os símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são aqueles utilizados frequentemente em demonstrações na Matemática.
2. Comente, do ponto de vista lógico, a diferença entre sintaxe e semântica.
3. A interpretação do conectivo $\vee$, na Lógica Proposicional, corresponde ao exato significado da palavra "ou"? Justifique sua resposta. Nessa análise, considere, por exemplo, o significado da sentença: "Vou ao teatro OU ao cinema" como sendo verdadeiro. Desse fato, é possível concluir que irei ao teatro e ao cinema ao mesmo tempo? Faça uma análise análoga para os outros conectivos.
4. Sejam I uma interpretação e a fórmula $H = (P \rightarrow Q)$.
   (a) Se $I[H] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[P]$ e $I[Q]$?
   (b) Se $I[H] = T$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de I[Q]?
   (c) Se $I[Q] = T$, o que se pode concluir a respeito de I[H]?
   (d) Se $I[H] = T$ e $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de I[Q]?
   (e) Se $I[Q] = F$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
5. Considere as fórmulas a seguir:
   (a) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
   (b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
   (c) $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$
   (d) $(Q \rightarrow \neg P)$
   (e) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
   (f) $(R \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \wedge R)$
   (g) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$
   (h) $(false \rightarrow Q) \leftrightarrow R$
   (i) $true \rightarrow Q$
   (j) $(P \rightarrow false) \leftrightarrow R$
   (k) $P \rightarrow true$

   - Determine a tabela-verdade associada a cada fórmula.

- Seja I uma interpretação tal que $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $I[R] = F$, o que podemos concluir a respeito do valor de verdade de cada fórmula?
- Seja J uma interpretação que interpreta todas as fórmulas anteriores como sendo verdadeiras. Além disso, $J[P] = T$. O que podemos concluir a respeito de $J[Q]$ e $J[R]$, em cada um dos casos?

6. Seja I uma interpretação tal que: $I[P \to Q] = T$. O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

   (a) $I[(P \lor R) \to (Q \lor R)]$

   (b) $I[(P \land R) \to (Q \land R)]$

   (c) $I[(\neg P \lor Q) \to (P \lor Q)]$

   Repita este exercício supondo $I[P \to Q] = F$.

7. Seja I uma interpretação tal que: $I[P \leftrightarrow Q] = T$. O que podemos deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

   (a) $I[\neg P \land Q]$

   (b) $I[P \lor \neg Q]$

   (c) $I[Q \to P]$

   (d) $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)]$

   (e) $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)]$

   Repita este exercício supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$.

8. Seja H a fórmula a seguir e I uma interpretação.

$$H = ((P \to Q) \to (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow Q))) \to P$$

   (a) Se $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?

   (b) Se $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?

9. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Analise a afirmação a seguir. "Cada linha da tabela-verdade associada a H corresponde a infinitas interpretações diferentes para H".

10. Escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Utilize símbolos proposicionais para representar proposições.

    (a) José virá à festa e Maria não gostará, ou José não virá à festa e Maria gostará da festa.

    (b) A novela será exibida, a menos que seja exibido o programa político.

    (c) Se chover, irei para casa, caso contrário, ficarei no escritório.

    (d) Se Maria é bonita, inteligente e sensível e se Rodrigo ama Maria, então ele é feliz.

(e) Se sr. Oscar é feliz, sra. Oscar é infeliz, e se sra. Oscar é feliz, sr. Oscar é infeliz.

(f) Maurício virá à festa e Kátia não virá ou Maurício não virá à festa e Kátia ficará infeliz.

11. Formule cinco argumentos sobre temas de seu interesse. Em seguida, melhore cada um dos seus argumentos.

12. A sentença "Todo homem é mortal" pode ser representada na Lógica Proposicional, simplesmente fazendo: $P =$ "Todo homem é mortal". Assim, nesse caso, a sentença é representada pelo símbolo P. Entretanto, podemos dizer que essa não é uma representação que considera os detalhes da sentença, pois ela representa a sentença como um todo.

    Represente as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Em cada caso, a sua representação considera elementos internos da sentença? Nos casos em que não for, justifique.

    (a) Possivelmente, irei ao cinema.

    (b) Fui gordo, hoje sou magro.

    (c) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.

    (d) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.

    (e) Existe aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas.

    (f) Necessariamente algum político é desonesto.

    (g) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.

    (h) Quase todo político é desonesto.

    (i) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.

    (j) Toda regra tem exceção.

    (k) Quase todo funcionário da Sigma é um talento.

    (l) Poucos funcionários da Sigma não são empreendedores.

    (m) O presidente da Sigma é admirado por seus colaboradores.

    Os exercícios a seguir são curiosidades que utilizam raciocínio lógico na solução.

13. (Após a morte) Após a morte, o espírito de um homem foi conduzido às portarias do céu e do inferno.

    Nesse local, havia duas portas exatamente iguais, uma para o céu e outra para o inferno. Havia também dois porteiros, um perfeitamente honesto e outro completamente mentiroso. Os porteiros se conheciam, isto é, o mentiroso sabia que o outro era honesto e vice-versa. Entretanto, o espírito do homem que morreu não os conhecia.

Como o espírito descobriu a porta do céu fazendo uma única pergunta para um dos porteiros?

Após a descoberta da porta do céu, o espírito não necessariamente foi para o céu. Atualmente há inúmeros espíritos que gostam de um inferninho.

14. (Proposta complicada) O senhor Justino, apesar de trabalhador, não estava indo bem nos negócios. Devia muito dinheiro a um agiota da cidade.

    O agiota, um sucesso na vida profissional, era baixinho, barrigudo e careca. Tinha mau hálito, dentadura amarelada e um par de óculos bem grossos. Estava sempre usando um terno preto, com os ombros esbranquiçados pela caspa.

    No fim de semana, o agiota foi ao encontro de Justino. Queria um acerto de contas. O agiota, Justino e sua filha, uma linda moça no esplendor de sua juventude, saíram andando por uma estrada cheia de pedras brancas e pretas.

    Naquele momento, o agiota dirigiu-se a Justino. “Sr. Justino, quero fazer-lhe uma proposta. Caso aceite o jogo determinado pela proposta, perdoarei a dívida. Caso contrário, terá de pagá-la integralmente e à vista. A proposta consiste em colocar duas pedras, uma preta e uma branca, no interior deste saco de pano. Em seguida, sua filha retirará uma pedra. Se a pedra for preta, ela se casará comigo. Caso contrário, estará livre. Quero deixar claro que sua dívida será perdoada pelo simples fato de aceitar o jogo.”

    O senhor Justino pensou por um momento e aceitou o jogo. Mas o agiota trapaceou e pegou duas pedras pretas e as colocou no saco. Entretanto, a bela filha do senhor Justino percebeu a trapaça do agiota. Mais inteligente que o sujeito, ela usou o fato de haver apenas pedras pretas no interior do saco. Fez *alguma coisa* e se saiu muito bem. O que a filha do senhor Justino fez para se livrar daquele casamento? Lembre-se de que a filha do Sr. Justino estudava Lógica desde o jardim de infância.

15. (Perdido na floresta) Um colecionador de borboletas andava pela floresta à procura dos belos insetos. De repente, foi capturado por índios antropófagos e levado ao centro da aldeia. Lá, os índios prepararam um caldeirão com tempero à vontade. Salsa, pimenta-do-reino, alho, cebola, etc.

    Ao lado do caldeirão se encontrava o chefe da tribo, que aprendera Lógica pela internet. Ele se dirigiu ao colecionador, fazendo a seguinte proposta: “Senhor Colecionador, faça uma afirmação! Se a sua afirmação for verdadeira, então o senhor será cozido em fogo brando neste caldeirão e em seguida devorado pelos companheiros da tribo. Por outro lado, se sua afirmação for falsa, então o senhor será comido vivo.”

    O colecionador ficou aflito. Mas ele, assim como o chefe da tribo, também sabia um pouco de Lógica. Então fez uma afirmação e foi libertado pelo chefe. Qual a afirmação feita por ele? Esta questão mostra que nem toda afirmação pode ser interpretada como verdadeira ou falsa, como ocorre na Lógica Proposicional clássica.

16. (Nem tudo é verdadeiro ou falso) Na Lógica Proposicional, as fórmulas são interpretadas como sendo verdadeiras ou falsas. Entretanto, há sentenças, escritas em português, que não são verdadeiras e nem falsas. Não é possível interpretar todos os fatos como verdadeiros ou falsos. Escreva uma sentença que não é verdadeira e nem falsa.

17. (Na terra dos honestos e mentirosos) Um turista estava andando pela terra dos homens honestos e mentirosos. Lá, as pessoas são radicais e se classificam em duas categorias. São perfeitamente honestas ou completamente mentirosas. Elas só falam mentiras ou só falam verdades.

    Chegou a hora do almoço e o turista se encontrava em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nessa encruzilhada havia duas estradas: uma para um restaurante e a outra para *"lugar-algum"*. Ali, havia também um homem nativo. Naturalmente, o turista não sabia se aquele homem era honesto ou mentiroso.

    Como o turista descobre o caminho para o restaurante fazendo uma única pergunta ao homem da encruzilhada?

18. (Trabalhadores, capitalistas e estudantes) O turista do exercício anterior continuou suas férias. Dessa vez ele estava em um país onde cada pessoa é classificada como trabalhador, capitalista ou estudante. Os trabalhadores são honestos e só falam a verdade. Os capitalistas, ao contrário, são desonestos e mentem sempre. Os estudantes agem como trabalhadores e capitalistas. Às vezes, são honestos, mas podem agir de forma desonesta também.

    Como no exercício anterior, chegou a hora do almoço, e o turista se encontrava em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nessa encruzilhada havia duas entradas: uma para um restaurante e a outra para um abismo. Ali, havia um trabalhador, um capitalista e um estudante.

    Apenas olhando para aqueles nativos não era possível ao turista identificá-los. Portanto, ele não sabia quem era honesto ou mentiroso.

    Como o turista descobriu o caminho para o restaurante fazendo apenas duas perguntas? Cada pergunta devia ser dirigida a uma única pessoa de cada vez, mas a pergunta pode ser repetida para mais de um indivíduo.