Lógica Proposicional

Profª. Maely Moraes

Livro base: Souza, João Nunes, Lógica para Ciência da Computação, Editora Campus, 9ª tiragem.

Lógica Proposicional

Um sistema axiomático formal na Lógica Proposicional

Introdução
O Sistema Axiomático P_a

- **Definição 6.1 (sistema axiomático** P_a**)** O sistema formal axiomático P_a da Lógica Proposicional é definido pela composição dos quatro elementos:
  - o alfabeto da Lógica Proposicional, na forma simplificada, Definição 5.4, sem o símbolo de verdade false;
  - o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;
  - um subconjunto das fórmulas, que são denominadas axiomas;
  - um conjunto de regras de dedução.

- **Definição 6.2 (axiomas do sistema** P_a**)** *Os axiomas*[1] *do sistema* P_a *são fórmulas da Lógica Proposicional determinadas pelos esquemas indicados a seguir. Nesses esquemas* E, G *e* H *são fórmulas quaisquer da Lógica Proposicional.*
  - $Ax_1 = \neg(H \vee H) \vee H$,
  - $Ax_2 = \neg H \vee (G \vee H)$,
  - $Ax_3 = \neg(\neg H \vee G) \vee (\neg(E \vee H) \vee (G \vee E))$.

- **Definição 6.2 (axiomas do sistema P_a)**
  - $Ax_1 = (H \lor H) \rightarrow H$,
  - $Ax_2 = H \rightarrow (G \lor H)$,
  - $Ax_3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \lor H) \rightarrow (G \lor E))$.

Notação. No sistema P_a são consideradas as correspondências a seguir, que definem os conectivos $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\land$.

$$H \rightarrow G \text{ denota } (\neg H \lor G).$$

$$(H \leftrightarrow G) \text{ denota } (H \rightarrow G) \land (G \rightarrow H).$$

$$(H \land G) \text{ denota } \neg(\neg H \lor \neg G).$$

- **Definição 6.3 (regra de inferência do sistema P_a, *modus ponens*)**

  Dadas as fórmulas H *e* G*, a regra de inferência do sistema* P_a*, denominada modus ponens* (MP)*, é definida pelo procedimento:*

$$\textit{tendo } H \textit{ e } (\neg H \lor G) \textit{ deduza } G.$$

- **Notação.** Para representar o esquema de regra de inferência *modus ponens*, a notação a seguir é considerada

$$MP = \frac{H, (H \to G)}{G}.$$

- Nessa notação, o "numerador" da equação é o antecedente.
- O "denominador" é o conseqüente.

Prova sintática em P_a

- **Definição 6.4 (prova sintática no sistema P_a)**

Sejam:

H uma fórmula e

β um conjunto de fórmulas denominadas por hipóteses.

Uma prova sintática de H a partir de β, no sistema axiomático P_a, é uma seqüência de fórmulas

$$H_1, H_2, \ldots, H_n,$$

onde temos:

- $H = H_n$.

Conseqüência lógica sintática em P_a

- **Definição 6.4 (prova sintática no sistema P_a)**

  E para todo i tal que $1 \leq i \leq n$,

  - H_i é um axioma ou
  - $H_i \in \beta$ ou
  - H_i é deduzida de H_j e H_k, utilizando a regra modus ponens, onde $1 \leq j < i$ e $1 \leq k < i$. Isto é,

$$MP = \frac{H_j \quad H_k}{H_i}$$

Observe que neste caso, necessariamente, $H_k = H_j \rightarrow H_i$.

- **Exemplo 6.1 (prova no sistema P_a)**

  Considere o conjunto de hipóteses

  $\beta = \{G_1,\ldots,G_9\}$ tal que

  - $G_1 = (P \land R) \rightarrow P$;
  - $G_2 = Q \rightarrow P_4$;
  - $G_3 = P_1 \rightarrow Q$;
  - $G_4 = (P_1 \land P_2) \rightarrow Q$;
  - $G_5 = (P_3 \land R) \rightarrow R$;
  - $G_6 = P_4 \rightarrow P$;
  - $G_7 = P_1$;
  - $G_8 = P_3 \rightarrow P$;
  - $G_9 = P_2$.

- **Exemplo 6.1 (prova no sistema P_a)**

  A seqüência de fórmulas $H_1,...,H_9$ é uma prova de $(S \vee P)$ a partir de β no sistema axiomático P_{a^a}.

  - $H_1 = G_7$, ou seja: $H_1 = P_1$;
  - $H_2 = G_3$, ou seja $H_1 = P_1$;
  - $H_3 = Q$ (resultado de MP em H_1 e H_2);
  - $H_4 = G_2$, ou seja: $H_4 = Q \longrightarrow P_4$;
  - $H_5 = P_4$ (resultado de MP em H_3 e H_4);
  - $H_6 = G_6$, ou seja: $H_6 = P_6 \longrightarrow P$;
  - $H_7 = P$ (resultado de MP em H_5 e H_6);
  - $H_8 = A_{x2}$, ou seja: $H_8 = P \longrightarrow (S \vee P)$;
  - $H_9 = (S \vee P)$ (resultado de MP em H_7 e H_8).

- **Definição 6.5 (conseqüência lógica sintática no sistema P_a)**

  Dada uma fórmula H *e um conjunto de hipóteses* β,

  então

  H *é uma conseqüência lógica sintática de* β *em* P_a,

  se

  existe uma prova de H *a partir de* β.

- **Definição 6.6 (teorema no sistema** Pa**)**

  Uma fórmula H *é um teorema em* Pa,

  se existe uma prova de H, *em* Pa, *que utiliza apenas os axiomas.*

  Nesse caso, o conjunto de hipóteses é vazio.

- **Notação.**

  Dada uma fórmula H,

  se H é conseqüência lógica sintática de um conjunto de hipóteses β tal que

  $$\beta = \{H1,H2,...,Hn,...\},$$

  então esse fato é indicado pela notação

  $$\beta \vdash H \text{ ou}$$

  $$\{H1,H2,...,Hn,...\} \vdash H.$$

- No caso em que H é um teorema, isto é, β é vazio,

  então utilizamos a notação $\vdash H$.

- **Proposição 6.1**

  Sejam: β *um conjunto de fórmulas, e* A, B *e* C *três fórmulas da Lógica Proposicional. Temos que*

  Se

  $\vDash \{\beta \quad (A \rightarrow B) \vDash$ e $\beta \quad (C \vee A)\}$,

  então

  $\vDash \{\beta \quad (B \vee C)\}$.

- **Proposição 6.2**

  Temos que $\vDash \quad (P \vee \neg P)$.

- **Proposição 6.3 (regra de substituição)**

  Sejam β *um conjunto de fórmulas e* H *uma fórmula da Lógica Proposicional tais que* $\beta \vdash H$.

  - *Considere* $\{P_1,\ldots,P_n\}$ *um conjunto de símbolos proposicionais que ocorrem em* H*, mas não ocorrem nas fórmulas de* β *.*
  - *Seja* G *a fórmula obtida de* H*, substituindo os símbolos proposicionais* $P_1,\ldots,P_n$ *pelas fórmulas* $E_1,\ldots,E_n$*, respectivamente.*
  - *Então, temos que* $\beta \vdash G$.

- **Proposição 6.4** *Temos que* $\vdash$ (P ⟶ ¬¬P).
- **Proposição 6.5** *Temos que* $\vdash$ (P ⟶ P).
- **Proposição 6.6**
  Temos que $\vdash$ (A ⋁ B) ⟶ (B ⋁ A).
- **Demonstração.**

1.	$\vdash (P \rightarrow P)$	$pr6.5$
2.	$\vdash (B \rightarrow B)$	$pr6.3, 1.$
3.	$\vdash (B \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (B \vee A))$	Ax_3
4.	$\vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$	$MP, 2., 3.$

cqd

- **Proposição 6.7 (transitividade)**

  Se $\vdash$ $(A_1 \longrightarrow A_2)$ *e* $\vdash$ $(A_2 \longrightarrow A_3)$*, então* $\vdash$ $(A1 \longrightarrow A3)$.

- **Demonstração.**

1.	$\beta \vdash (\neg A_1 \vee A_2)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (A_2 \rightarrow A_3)$	*hip*
3.	$\beta \vdash (A_3 \vee \neg A_1)$	$pr6.1, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (A_3 \vee \neg A_1) \rightarrow (\neg A_1 \vee A_3)$	$pr6.6$
5.	$\beta \vdash (\neg A_1 \vee A_3)$	$MP, 3., 4.$
5.	$\beta \vdash (A_1 \rightarrow A_3)$	reescrita de 5.

cqd

- **Proposição 6.8**

  Se $\beta \vdash (A \rightarrow C)$ e $\beta \vdash (B \rightarrow C)$, então $\beta \vdash ((A \vee B) \rightarrow C)$.

- **Demonstração.**

1.	$\beta \vdash (B \rightarrow C)$	hip
2.	$\beta \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (C \vee A))$	Ax_3
3.	$\beta \vdash (A \vee B) \rightarrow (C \vee A)$	$MP, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (A \rightarrow C)$	hip
5.	$\beta \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee C))$	Ax_3
6.	$\beta \vdash (C \vee A) \rightarrow (C \vee C)$	$MP, 4., 5.$
7.	$\beta \vdash (A \vee B) \rightarrow (C \vee C)$	$pr6.7, 3., 6.$
8.	$\beta \vdash (C \vee C) \rightarrow C$	Ax_1
9.	$\beta \vdash (A \vee B) \rightarrow C$	$pr6.7, 7., 8.$

cqd

- **Proposição 6.9** *Se*

  $\beta \vdash (A \longrightarrow C)$ *e* $\beta \vdash (\neg A \longrightarrow C)$, *então* $\beta \vdash C$.
- **Demonstração.**

1.	$\beta \vdash (A \to C)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (\neg A \to C)$	*hip*
3.	$\beta \vdash (A \vee \neg A) \to C$	*pr*6.8, 1., 2.
4.	$\beta \vdash (A \vee \neg A)$	*pr*6.2
5.	$\beta \vdash C$	*MP*, 3., 4.

cqd

- **Proposição 6.10**

  Se $\beta \vdash (A \rightarrow B)$

  então $\beta \vdash (A \rightarrow (C \vee B))$ *e* $\beta \vdash (A \rightarrow (B \vee C))$.

- **Demonstração.**

1.	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$	*hip*
2.	$\beta \vdash B \rightarrow (C \vee B)$	Ax_2
3.	$\beta \vdash A \rightarrow (C \vee B)$	$pr6.7, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	$pr6.3, pr6.6$
5.	$\beta \vdash A \rightarrow (B \vee C)$	$pr6.7, 3., 4.$

cqd

- **Proposição 6.11 (associatividade)**

  Temos que $\vdash ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$.

- **Demonstração.**

1.	$\vdash (P \rightarrow P)$	$pr6.5$
2.	$\vdash A \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	$pr6.3, 1., pr6.10$
3.	$\vdash B \rightarrow (B \vee C)$	$pr6.3, 1., pr6.10$
4.	$\vdash B \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	$pr6.10, 3.$
5.	$\vdash (A \vee B) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	$pr6.8, 2., 4.$
6.	$\vdash C \rightarrow (B \vee C)$	$pr6.3, 2., pr6.10$
7.	$\vdash C \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	$pr6.10, 6.$
8.	$\vdash ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	$pr6.8, 5., 7.$

cqd

- **Proposição 6.12**

  Se $\beta \vdash ((A \lor B) \lor C)$ *então* $\beta \vdash (A \lor (B \lor C))$.

- **Demonstração.**

1.	$\beta \vdash (A \lor B) \lor C$	*hip*
2.	$\beta \vdash ((A \lor B) \lor C) \to (A \lor (B \lor C))$	*pr*6.11
3.	$\beta \vdash (A \lor (B \lor C))$	$MP, 1., 2.$

cqd

- **Proposição 6.13**
- *Se* $\beta \vdash (A \longrightarrow B)$ *e* $\beta \vdash (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$*, então* $\beta \vdash (A \longrightarrow C)$.
- **Demonstração.**

1.	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (\neg A \vee (\neg B \vee C))$	*hip*
3.	$\beta \vdash ((\neg B \vee C) \vee \neg A)$	$pr6.6, 2.$
4.	$\beta \vdash (\neg B \vee (C \vee \neg A))$	$pr12, 3.$
4.	$\beta \vdash (B \rightarrow (C \vee \neg A))$	reescrita
5.	$\beta \vdash (A \rightarrow (C \vee \neg A))$	$pr6.7, 1., 4.$
5.	$\beta \vdash (\neg A \vee (C \vee \neg A))$	reescrita
6.	$\beta \vdash ((C \vee \neg A) \vee \neg A)$	$pr6.6, 5.$
7.	$\beta \vdash (C \vee (\neg A \vee \neg A))$	$pr12, 6.$
8.	$\beta \vdash (\neg A \vee C)$	$pr6.1, Ax_1, 7.$
8.	$\beta \vdash (A \rightarrow c)$	reescrita

cqd

- **Lema 6.1** *Suponha que*

$$\beta \cup \{A\} \vdash B$$

- *e que* B $\in$ β, *ou* B = A, *ou* B *é axioma. Temos, então, que*

$$\beta \quad (A \rightarrow B).$$

- **Teorema 6.1 (teorema da dedução - forma sintática)**

Se

$$\beta \cup \{A\} \vdash B,$$

então

$$\vdash \beta \quad (A \rightarrow B).$$

- **Proposição 6.14**

  Temos que $\vdash (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \lor B)))$.

- **Demonstração.**

1.	$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$	$pr6.3, pr6.4$
2.	$\vdash B \rightarrow \neg\neg B$	$pr6.3, pr6.4$
3.	$\vdash A \rightarrow (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$	$pr6.10, 1.$
4.	$\vdash B \rightarrow (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$	$pr6.10, 2.$
5.	$\vdash (A \lor B) \rightarrow (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$	$pr6.8, 3., 4.$
6.	$\vdash (\neg\neg A \lor \neg\neg B) \lor \neg(A \lor B)$	$pr6.6, 5.$
7.	$\vdash \neg\neg A \lor (\neg\neg B \lor \neg(A \lor B))$	$pr12, 6.$
7.	$\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \lor B))$	reescrita

cqd

- **Proposição 6.15**

  Temos que $\vdash A \longrightarrow (A \vee B) \vdash \neg A \longrightarrow (\neg A \vee B)$.

- **Demonstração.**

Prova de $\vdash A \to (A \vee B)$.

1.	$\vdash A \to A$	$pr6.3, pr6.5$
2.	$\vdash A \to (A \vee B)$	$pr6.10, 1.$

Prova de $\vdash \neg A \to (\neg A \vee B)$.

1.	$\vdash \neg A \vee \neg\neg A$	$pr6.3, pr6.4$
2.	$\vdash (\neg A \vee \neg\neg A) \to (\neg\neg A \vee \neg A)$	$pr6.3, pr6.6$
3.	$\vdash (\neg\neg A \vee \neg A)$	$MP, 1., 2.$
3.	$\vdash \neg A \to \neg A$	reescrita
4.	$\vdash \neg A \to (\neg A \vee B)$	$pr6.10, 3.$

cqd

Completude do Sistema Axiomático P_a

- **Teorema 6.2 (teorema da correção)**

  Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional,

  se $\vdash$ H então H é tautologia.

- **Teorema 6.3 (teorema da completude)**

  Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional.

  Se H é tautologia, então $\vdash$H.

Demonstração do Teorema da Completude

- **Definição 6.7 (base associada a uma fórmula.)**
  Seja H uma fórmula e $P_1,\ldots,P_n$ os símbolos proposicionais contidos em H.
  Dada uma interpretação I, então a base associada a H conforme I,
  denotada por B[H, I],
  é um conjunto de literais,
  definidos a partir de $P_1,\ldots,P_n$ como se segue:
  - se $I[P_i]= T$, então $P_i \in B[H, I]$;
  - Se $I[P_i]= F$, então $\neg P_i \in B[H, I]$.

- **Lema 6.2**

  Seja H *uma fórmula e* $P_1, \ldots, P_n$ *os símbolos proposicionais contidos em* H.

  Dada uma interpretação I, *então:*

  - *a)* $I[H] = T \Rightarrow B[H, I] \vdash H$.
  - *b)* $I[H] = F \Rightarrow B[H, I] \vdash \neg H$.

- **Definição 6.8 (consistência de um sistema axiomático)**

  Um sistema axiomático é consistente

  se, e somente se,

  dada uma fórmula H*, não se pode ter* $\vdash$ H *e* $\vdash$ ¬H.

  Isto é, H *e* ¬H *não podem ser teoremas ao mesmo tempo.*

- **Teorema 6.4 (consistência)**

  O sistema axiomático P_a *é consistente.*

- **Definição 6.9 (consistência de um conjunto de fórmulas)**

  Um conjunto de fórmulas Γ *é consistente se,*

  e somente se,

  não existe fórmula H *tal que*

  $\Gamma \vdash H$ *e* $\Gamma \vdash \neg H$.

  Isto é, H *e* $\neg$H *não podem ser provadas a partir de* Γ .

- **Teorema 6.5 (consistência e satisfatibilidade)**

  Um conjunto de fórmulas Γ é consistente

  se, e somente se, é satisfatível.