Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 3:
QUANTIFICADORES E FÓRMULAS

Alfabeto da Lógica de Predicados

- É constituído por:
  - Símbolos de pontuação: (,);
  - Símbolos de verdade: *true*, *false*;
  - Conjunto enumerável de símbolos para variáveis: $x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, ..$;
  - Conjunto enumerável de símbolos para funções: $f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2 ...$;
  - Conjunto enumerável de símbolos para predicados: $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2 ...$;
  - Conjunto enumerável de símbolos para constantes: $a, b, c, ...$
  - Conectivos proposicionais: $\neg$, v, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, **$\forall$, $\exists$.**

Quantificadores

- Quantificação Universal
  - $\forall x\, p(x)$
  - $p(x)$ é um predicado.
  - $p(x)$ é verdadeiro para todo x do universo.

- Exemplo:
  - Todo numero natural par ao quadrado é par.

Quantificadores

- Quantificação Existencial
  - ∃x *p*(x)
  - *p*(x) é um predicado.
  - *p*(x) é verdadeiro para algum x do universo.

- Exemplo:
  - Existe um número natural que ao quadrado é igual a ele mesmo.

Aridade

- Associado a cada símbolo de função ou predicado, temos uma aridade:
  - Número inteiro, não-negativo k;
  - Indica o número de argumentos da função ou predicado.

  - p(x) k =1
  - p(x,y) k =2
  - a k = 0

Aridade

- Constantes e símbolos proposicionais:
  - Sempre tem k=0;
  - Funções $\longrightarrow$ constantes;
  - Predicados $\longrightarrow$ símbolos proposicionais.

Notação

- Constantes (funções zero-árias; aridade nula)
  - a, b, c, a1, b1, c1, a2, b2, ...
- Quantificadores
  - Universal: ∀ (para todo...)
  - Existencial: ∃ (existe...)
- Os conectivos →, ↔ e ^ são definidos em função do conjunto completo {¬, v}.

Consultas

- Na Linguagem da Lógica de Predicados ocorrem vários elementos básicos necessários à definição de fórmula:
  - "A capital de Roraima é Boa Vista?"
    - Deve retornar um símbolo de verdade;
    - Sentenças que representam símbolos de verdade, em Lógica de Predicados, são chamados de **átomos**.
  - "Qual a capital do Brasil?"
    - Deve retornar um objeto;
    - Sentenças que representam objetos são chamados de **termos**.

Termos

- São construídos a partir destas regras:
  - Variáveis são termos: representam objetos;
  - Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos: f é um símbolo de função n-ária, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ também é um termo.
- Exemplos:
  - **+(9, 10)**
    - Interpretado como: **9 + 10 = 19**
  - **-(9,5)**
    - Interpretado como: **9 – 5 = 4**
  - Notação prefixa.

Exemplo de Termos

- x (variável);
- a (constante, função zero-ária – aplicada a zero termo);
- f(x, a) se e somente se “f” é binária (pois “x” e “a” são termos);
- g(y, f(x,a), c) se e somente se “g” é ternária, e “f” é binária;
- x, 9, y, 10;

Átomos

- São construídos a partir destas regras:
  - O símbolo de verdade *false* é um átomo;
  - Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos: p é um símbolo de predicado n-ário, então $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um átomo.

- Exemplos:
  - **>(10,9)**
    - Interpretado como: **10>9**
  - **9 = +(5,4)**
    - Interpretado como: **9 = 5+4**
  - Interpretados como T.
    - Abusos de linguagem:
      - **> e = são predicados**
      - **+ e – são funções**

Exemplos de Átomos

- p (símbolo proposicional, predicado zero-ário – aplicado a zero termo);
- p (f(x,a),x) se e somente se "p" é binário;
- q(x,y,z) considerado implicitamente como ternário;

Fórmulas

- A construção das fórmulas é feita a partir da concatenação de átomos e conectivos;

- São construídas a partir destas regras:
  - Todo átomo é uma fórmula da Lógica de Predicados;
    - Porque os átomos sempre retornam um símbolo de verdade.
  - Se H é fórmula, então $(\neg H)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \wedge G)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \rightarrow G)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ também é;
  - Se H é fórmula e x variável, então: $(\forall x)H$ e $(\exists x)H$ são fórmulas.

Equivalência Lógica

- Duas proposições H e G são logicamente equivalentes ($H \equiv G$), se ambas possuem tabelas-verdade idênticas.

- Relembrando:
  - $H \rightarrow G$
    - *Denota* $(\neg H \vee G)$
  - $(H \rightarrow$ *false*$)$
    - *Denota* $\neg H$
  - $(H \leftrightarrow G)$
    - *Denota* $(H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$
  - $(H \wedge G)$
    - *Denota* $\neg(\neg H \vee \neg G)$

Equivalência Lógica

- Duas proposições H e G são logicamente equivalentes ($H \equiv G$), se ambas possuem tabelas-verdade idênticas.

- Relembrando:
  - $H \rightarrow G$
    - *Denota* $(\neg H \vee G)$
  - $H = V$ e $G = F$

  - $H \rightarrow G = V \rightarrow F = F$
  - $(\neg H \vee G) = \neg V \vee F = F \vee F = F$