UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2021.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 9:
VALIDADE DE FÓRMULAS

Exemplo da Aula Anterior

- Demonstrar se a fórmula abaixo é satisfatível ou não:
- $H = \neg(\forall x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$
- Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais N:
  - $I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_1$ e y_1 são números pares;
  - $I[y] = 4$;
  - $I[z] = 6$;
  - $I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg((\forall x)p(x,y))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))]$.

Validade de Fórmulas

- Uma fórmula H é uma tautologia ou válida quando todas interpretações I em H são verdadeiras, tal que $I[H_1]=T$, $I[H_2]=T$, $I[H_3]=T$ ... $I[H_n]=T$.

- **Lema (Igualdade e Interpretação)**
  - Sejam H e G duas fórmulas da lógica de predicados, e I uma interpretação;
  - $\{I[H] = I[G]\} \Leftrightarrow \{I[H]=T \Leftrightarrow I[G]=T\}$

Validade de Fórmulas

- Uma fórmula H é refutável ou contraditória quando existe pelo menos uma interpretaçãox I tal que I[H]=F.

- **Corolário (Igualdade e Interpretação)**
  - Sejam H e G duas fórmulas da lógica de predicados, e I uma interpretação;
  - {I[H] = I[G]} ⇔ {I[H]=F ⇔ I[G]=F}

Validade de Fórmulas - Exemplo

- $H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$
- Por definição, H é uma tautologia se e somente se $\forall$ interpretação J, $J[H]=T$;
- $J[H]=T \Leftrightarrow J[\neg((\forall x)p(x,y))] = J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$.

Validade de Fórmulas - Exemplo

- $J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,y)] = F;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N; <x \leftarrow d> J[p(x,y)] = F;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N; p_j(d,y_j)$ é falso.

- $J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \Leftrightarrow \exists\, d \in N; <x \leftarrow d> J[\neg p(x,z)] = T;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N; <x \leftarrow d> J[p(x,z)] = F;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N; p_j(d,z_j)$ é falso.

◦ $J[\neg((\forall x)p(x,y))]$ é diferente de $J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$. Portanto, as fórmulas não são válidas.

Validade de Fórmulas - Exemplo

- H = $\neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,\mathbf{y}))$
- Por definição, H é uma tautologia se e somente se $\forall$ interpretação J, J[H]=T;
- J[H]=T $\Leftrightarrow$ J[$\neg((\forall x)p(x,y))$] = J[$(\exists x)(\neg p(x,\mathbf{y}))$].

Validade de Fórmulas - Exemplo

- $J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,y)] = F;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N; \langle x \leftarrow d \rangle J[p(x,y)] = F;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N;\ p_j(d,y_j)$ é falso.

- $J[(\exists x)(\neg p(x,y))] = T \Leftrightarrow \exists\, d \in N; \langle x \leftarrow d \rangle J[\neg p(x,y)] = T;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N; \langle x \leftarrow d \rangle J[p(x,y)] = F;$

  $\Leftrightarrow \exists\, d \in N;\ p_j(d,y_j)$ é falso.

- $J[\neg((\forall x)p(x,y))]$ é ígual de $J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$.
- Portanto, as fórmulas são equivalentes (possuem o mesmo valor verdade).

Implicações entre Fórmulas

- $H=(\forall x)p(x)$ implica $G=p(a)$
- H implica G $\Leftrightarrow \forall I$, se $I[H]=T$ então $I[G]=T$;
- Seja uma interpretação I, sobre um domínio U, tal que $I[H]=T$. É demonstrado a seguir que $I[G]=T$.
  - $I[H]=T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)]=T$
  - $\Leftrightarrow \forall\ d \in U; <x \leftarrow d>I[p(x)]=T$
  - $\Leftrightarrow \forall\ d \in U; p_I(d)=T$
  - $\Leftrightarrow p_I(a_I)=T$
  - $\Leftrightarrow I[p(a)]=T$
  - $\Leftrightarrow I[G]=T$
- Portanto, se $I[H]=T$, então $I[G]=T$. Logo H implica G.