UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2021.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 7:

SEMÂNTICA NA LÓGICA DE PREDICADOS

Semântica na Lógica de Predicados

- Associa significados semânticos aos símbolos sintáticos;
- Interpretações são mais elaboradas;
  - Devido à presença de quantificadores, variáveis, funções e predicados.
- $H=(\forall x)(\exists y)p(x,y)$
  - De que depende a interpretação da fórmula acima?
    - Em 1º lugar, do significado do símbolo de predicado p.
- Suposição: se I[p]= < (“menor que”)
- Então: $I[p(x,y)] = T \leftrightarrows I[x]<I[y] \leftrightarrows x_i < y_i$

Interpretações em Lógica de Predicados

- Interpretando informalmente os quantificadores, temos que:
  - I[H] = “para todo x_i”, “existe um y_i”, tal que $x_i<y_i$
- I[H] é verdadeira ou falsa??
  - Depende dos valores das variáveis.
- Ainda não dá pra determinar...
  - Que números x_i e y_i estão sendo considerados?
  - Ou seja, qual o domínio U dos números x_i e y_i?

Interpretações em Lógica de Predicados

- Se U =[0,∞)
  - Então I[H]=T.
  - "Para todo x_i", $x_i \in$ U, "existe um y_i", $y_i \in$ U, tal que $x_i<y_i$.

- E a interpretação J, com U=(-∞,0], J[p]= <.
  - J[H]=???
  - Falsa!
  - Porque se x_J=0, não existe y_J tal que $y_J \in$ U e $x_J<y_J$;

Interpretações em Lógica de Predicados

- Não é preciso ter as interpretações de x_J e y_J para se ter I[H] ou J[H];

- Por que?
  - Porque x e y não são símbolos livres em H;
  - Neste caso, é necessário definir apenas a interpretação do símbolo livre p.

Interpretações em Lógica de Predicados

- G=(∀x)p(x,y)
  - J[G]=???
- Para determinar J[G]:
  - Quais os valores de J[p] e J[y]?
  - y é um símbolo livre;
  - U=(-∞,0]
    - Se J[p] = ≤ e J[y]=-5:
      - "para todo x_J", $x_J \in U$, então ($x_J \leq -5$)
      - J[G]= F
    - Porém, se $y_J=0$, então J[G]=T.

Interpretações em Lógica de Predicados

- Para interpretar uma fórmula H com quantificadores, é necessário observar:
  - Domínio de interpretação;
  - Valor das interpretações dos símbolos livres.

Formalização

- Extensão da interpretação proposicional;
- Há interpretações para termos e expressões;
- Se U é um conjunto não-vazio, uma interpretação I na Lógica de Predicados é uma função tal que:
  - O domínio de I é o conjunto de símbolos de função, predicados e expressões;
  - Para toda variável x, se $I[x]=x_I$, então $x_I \in U$;
  - Para todo símbolo de função n-ário f, se $I[f]=f_I$, então f_I é uma função n-ária em U:
    - f_I: U**n → U.

Interpretação de Fórmulas – Não Quantificadas

- Se E é uma expressão, I uma interpretação sobre o domínio U. I[E] é dada por:
  - Se E = *false*, I[E] = I[*false*] = F (o mesmo com *true*);
  - Se E = $f(t_1, \ldots, t_n)$, um termo, então:
    - I[E] = $I[f(t_1, \ldots, t_n)] = f_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[f] = f_I$ e para todo termo t_i, $I[t_i] = t_{iI}$.
  - Se E = $p(t_1, \ldots, t_n)$, um átomo, então:
    - I[E] = $I[p(t_1, \ldots, t_n)] = p_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[p] = p_I$ e para todo termo t_i, $I[t_i] = t_{iI}$.

Interpretação de Fórmulas – Não Quantificadas

- Se H é uma fórmula e E = ¬H, então:
  - I[E]=I[¬H]=T se I[H]=F e
  - I[E]=I[¬H]=F se I[H]=T

- Se H e G são fórmulas, e E = (H v G), então:
  - I[E]=I[H ˆ G]=T se I[H]=T e/ou I[G]=T e
  - I[E]=I[H v G]=F se I[H]=F e I[G]=F

Domínio de Interpretação

- Seja I uma interpretação sobre N onde:
  - I[a]=25, I[b]=5, I[f(x,y)]=x_I/y_I;
  - I interpreta a constante "a" como 25, "b" como 5;
  - I interpreta "f" como a função divisão;
  - Desta forma, f(a, b)=5. Então I[f(a,b)]=5, pois I[f]=f_I, onde fI: U*U → U.

- Porém, se I[c]=0, I[f(x,c)] não está definida! Então o domínio de f é NxN* → Q (racionais);

- Se o domínio de I for N, não se pode definir I[f] como a função divisão.

Exercício

- Dados:
  - **H = $\neg p(x,y,a,b) \rightarrow r(f(x), g(y))$**
  - G = $p(x,y,a,b) \rightarrow (q(x,y) \wedge r(y,a))$
  - A interpretação I, onde U=[0,∞), tal que:
    - I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1
    - $I[p(x,y,a,b)] = T \leftrightarrows x_I * y_I > a_I * b_I$
    - $I[q(x,y)] = T \leftrightarrows x_I < y_I$
    - $I[r(y,a)] = T \leftrightarrows y_I > a_I$
    - $I[f(x)] = x_I + 1$
    - $I[g(x)] = x_I - 2$
    - $I[g(y)] = y_I - 2$

Exercício

- **H = ¬ p(x,y,a,b) → r(f(x), g(y))**
  - A interpretação I, onde U=[0,∞), tal que:
    - I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1
    - I[p(x,y,a,b)] = T ⇆ $x_I * y_I > a_I * b_I$
    - I[p(x,y,a,b)] = T ⇆ 3*2 > 0*1 = 6 > 0 = T
    - **¬ p(x,y,a,b) = ¬ T = F**

Exercício

- **H = ¬ p(x,y,a,b) → r(f(x), g(y))**
  - A interpretação I, onde U=[0,∞), tal que:
    - I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1
    - I[q(x,y)] = T ⇆ $x_I < y_I$
    - I[r(y,a)] = T ⇆ $y_I > a_I$
    - I[f(x)] = $x_I + 1 = 3 + 1 = 4$
    - I[g(x)] = $x_I – 2$
    - I[g(y)] = $y_I – 2 = 2 – 2 = 0$
    - r(f(x), g(y)) = r(4, 0) = 4 > 0 = T

Exercício

- $H = \neg p(x,y,a,b) \rightarrow r(f(x), g(y))$
- $\neg p(x,y,a,b) = \neg T = F$
- $r(f(x), g(y)) = r(4, 0) = 4 > 0 = T$
- $I[H] = F \rightarrow T = T$

Exercício

- Dados:
  - **G = p(x,y,a,b) → (q(x,y) ^ r(y,a))**
  - A interpretação I, onde U=[0,∞), tal que:
    - I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1
    - I[p(x,y,a,b)] = T ⇆ $x_I * y_I > a_I * b_I$
    - I[q(x,y)] = T ⇆ $x_I < y_I$
    - I[r(y,a)] = T ⇆ $y_I > a_I$
    - I[f(x)] = $x_I + 1$
    - I[g(x)] = $x_I - 2$
    - I[g(y)] = $y_I - 2$

Exercício

- Observe que I[x]=3, I[y]=2,..., I[H]=T, I[G]=F;
- As interpretações de f e g são elementos do domínio de I (N);
- As interpretações de H e G e dos átomos p(x,y,a,b), q(x,y) e r(y,a) são valores de verdade.

Sintaxe	x	y	a	b	p(x,y,a,b)	f(x)	g(y)	q(x,y)	r(y,a)	H	G
Semântica	3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F

Interpretação de Fórmulas Quantificadas

- Se H é uma fórmula, “x” uma variável, I uma interpretação sobre um domínio U:
  - $I[(\forall x)H]=T \leftrightarrows \forall\ d \in U; <x \leftarrow d> I[H]=T$
  - $I[(\forall x)H]=F \leftrightarrows \exists\ d \in U; <x \leftarrow d> I[H]=F$
  - $I[(\exists x)H]=T \leftrightarrows \exists\ d \in U; <x \leftarrow d> I[H]=T$
  - $I[(\exists x)H]=F \leftrightarrows \forall\ d \in U; <x \leftarrow d> I[H]=F$
    - Onde $<x \leftarrow d>$ significa “interpretação de x como d” ou
    - $<x \leftarrow d>$ $I[x]=d$.

Exemplo

- I é uma interpretação sobre o conjunto de alunos-CC, tal que:
  - I[p(x)]=T ⇆ x_I é inteligente
- H_1= (∀x)p(x). O que é I[H_1]=T?
  - Todo aluno de Ciência da Computação é inteligente.
- I[H_1]=T ⇆ I[(∀x)p(x)]=T
  - ⇆ ∀ d ∈ aluno-CC; d é inteligente
  - ⇆ ∀ d ∈ aluno-CC; p_I(d)=T
  - ⇆ ∀ d ∈ aluno-CC; <x ← d>I[p(x)]=T
- ∀ d ∈ aluno-CC, se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como T.

Exemplo

- $I[H_1]=F$?
  - Significa dizer que é falso que todo aluno de CC é inteligente. Isto significa que existe algum aluno burro.
- $I[H_1]=F \leftrightarrows I[(\forall x)p(x)]=F$
  - $\leftrightarrows \exists$ d $\in$ aluno-CC; d é burro
  - $\leftrightarrows \exists$ d $\in$ aluno-CC; $p_I(d)=F$
  - $\leftrightarrows \exists$ d $\in$ aluno-CC; $<x \leftarrow d>I[p(x)]=F$
- Nem todo aluno-CIn é inteligente
  - $\exists$ d $\in$ aluno-CC; $<x \leftarrow d>I[p(x)]=F$
- $\exists$ d $\in$ aluno-CC, se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como F.

Exercício

- Seja I uma interpretação sobre domínio dos números naturais N, tal que:
  - I[x]=3, I[a]=5, I[y]=4, I[f]=+, I[p]=<
  - Considere: G=(∀x)p(x,y)
  - Prove que I[G]=F, para todo número natural x, x<4.

Exercício

- Seja I uma interpretação sobre os números naturais N, tal que I[a] = 1, I[x] = 1, I[p] = <, I[f] = f_I, onde $f_I(d) = d + 1$, I[q(x)] = T $\leftrightarrow$ x_I é par. Além disso, o valor de I[y] é desconhecido.
- Seja J uma interpretação sobre os números inteiros Z, tal que: J[a] = 0, J[x] = -1, J[y] = 0, J[p] = < e J[f] = $f_j(d) = d + 1$.
- Determine, quando for possível, as interpretações da fórmula a seguir conforme I e J.

$$(\forall y)(p(y, a) \lor p(f(y), y))$$