



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2021.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 8:

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA
LÓGICA DE PREDICADOS

Funções e Predicados Computáveis

- ❖ Predicados comuns: `pai(jose, maria);`
- ❖ Predicados computáveis “`maior_que`” e “`menor_que`”;
- ❖ Funções computáveis: `maior_que(mais(2; 3); 1).`

Fórmulas ou Predicados

❖ Predicados unários:

- brasileiro(João);

❖ Predicados binários:

- maior(3,4);
- matou(João,Maria);

❖ Predicados ternários:

- deu(Maria,livro,João).

Semântica da Lógica Proposicional

❖ Seja α uma atribuição de valores-verdade. A função de avaliação para $I(\alpha)$ induzida por α é a função:

❖ $v : I(\alpha) = \{F;V\}$ definida da seguinte forma:

- $v(p) = a(p)$, se p é um símbolo proposicional
- $v(\neg p) = V$, se $v(p) = F$
 - $= F$, se $v(p) = V$
- $v(p \wedge q) = V$, se $v(p) = v(q) = V$
 - $= F$, em caso contrário
- $v(p \vee q) = F$, se $v(p) = v(q) = F$
 - $= V$, em caso contrário
- $v(p \rightarrow q) = F$, se $v(p) = V$ e $v(q) = F$
 - $= V$, em caso contrário
- $v(p \leftrightarrow q) = V$, se $v(p) = v(q)$
 - $= F$, em caso contrário

Propriedades Semânticas

❖ Tautologia

❖ As relações entre tais propriedades são análogas:

- $(H \rightarrow G)$ é uma tautologia \Leftrightarrow H implica G;
 - Se $I[H]=T$, então $I[G]=T$.
- $(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia \Leftrightarrow H equivale a G;
 - $I[H]=I[G]$.
- Satisfatibilidade;
- Implicação;
- Equivalência...

Satisfatibilidade de Fórmula

- ❖ **Válida** (tautológica): é verdadeira em toda interpretação;
- ❖ **Satisfatível** (contingente): quando existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H]=T$;
 - Um *conjunto de fórmulas* é $B=\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é satisfatível se e somente se existe uma interpretação I tal que $I[H_1]=I[H_2]=\dots=I[H_n]=T$;
- ❖ **Insatisfatível** (contraditória): quando para toda interpretação I , $I[H]=F$.

Exercício

- ❖ Verificar se o conjunto de fórmulas H_1 , H_2 , H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:
- $H_1 = p(x,y)$, I_1 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_1[p] = "<"$, $I_1[x] = 5$ e $I_1[y] = 9$;
 - $H_2 = (\forall x)p(x,y)$, I_2 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_2[p] = "\geq"$ e $I_2[y] = 0$;
 - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$, I_3 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_3[p] = "<"$;
 - $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)$, I_4 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_4[p] = "<"$, $I_4[x] = 5$ e $I_4[y] = 9$.

Exercício

❖ Verificar se o conjunto de fórmulas H_1 , H_2 , H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:

- $H_1 = p(x,y)$, I_1 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que:
 $I_1[p] = "<"$, $I_1[x] = 5$ e $I_1[y] = 9$;
- $H_1 = p(x,y) = <(5,9) = 5 < 9 = T$
- $H_2 = (\forall x)p(x,y)$, I_2 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que:
 $I_2[p] = "\geq"$ e $I_2[y] = 0$;
- $H_2 = (\forall x)p(x,y) = (\forall x) \geq (x,0) = x \geq 0 = T$

Exercício

- ❖ Verificar se o conjunto de fórmulas H_1 , H_2 , H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:
- $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$, I_3 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_3[p] = "<";$
 - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) = (\forall x)(\exists y)<(x,y) = T$

Exercício

❖ Verificar se o conjunto de fórmulas H_1 , H_2 , H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:

- $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)$, I_4 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_4[p] = "<"$, $I_4[x] = 5$ e $I_4[y] = 9$.

❖ $I[H_4] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)] = F$

$$\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) = T \text{ e } I[p(x,y)] = F$$

$$\Leftrightarrow \forall d \in N; \langle x \leftarrow d \rangle I[(\exists y)p(x,y)] = T \text{ e } I[p(x,y)] = F$$

$$\Leftrightarrow \forall d \in N, \exists c \in N; \langle y \leftarrow c \rangle \langle x \leftarrow d \rangle I[p(x,y)] = T \text{ e } I[p(x,y)] = F$$

$$\Leftrightarrow \forall d \in N, \exists c \in N; (d < c) \text{ é verdadeiro e } (5 < 9) \text{ é falso.}$$

A última afirmação é falsa, pois é falso dizer que $(5 < 9) = F$.

Logo $I[H_4] = T$, e H_4 é satisfatível.

Exercício

- $H_5 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)p(x,y)$, I_4 é uma interpretação sobre os naturais N , tal que: $I_4[p] = "<"$, $I_4[x] = 5$ e $I_4[y] = 9$.

$$\begin{aligned} \diamond I[H_5] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)p(x,y)] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) = T \text{ e } I[(\forall x)p(x,y)] = F \\ &\Leftrightarrow \forall d \in N, \exists c \in N; <y \leftarrow c> <x \leftarrow d> I[p(x,y)] = T \\ &\quad \exists d \in N; <x \leftarrow d> I[p(x,y)] = F \\ &\Leftrightarrow \forall d \in N, \exists c \in N; (d < c) \text{ é verdadeiro} \\ &\quad \exists d \in N; (d < 9) = \text{falso (ABSURDO)} \end{aligned}$$

$I[H_5]$ = verdadeira pois a última afirmação é um absurdo.

Exercício

❖ As fórmulas H_1 , H_2 , H_3 e H_4 são **satisfatíveis**, pois as interpretações I_1 , I_2 , I_3 e I_4 são tais que: $I_1[H_1]=I_2[H_2]=I_3[H_3]=I_4[H_4]=T$.

- $H_1 = p(x,y) = \langle 5,9 \rangle = 5 < 9 = T$
- $H_2 = (\forall x)p(x,y) = (\forall x) \geq (x,0) = x \geq 0 = T$
- $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) = (\forall x)(\exists y) \langle x,y \rangle = T$
- $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y) = T$

Satisfatibilidade de Fórmula

- ❖ Demonstrar se a fórmula abaixo é satisfatível ou não:
- ❖ $H = \neg(\forall x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$
- ❖ Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais N :
 - $I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_1 \text{ e } y_1 \text{ são números pares};$
 - $I[y] = 4;$
 - $I[z] = 6;$
 - $I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg((\forall x)p(x,y))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))].$