UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2021.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 4:
CONSTRUÇÃO DE FÓRMULAS

Construção de Fórmulas

- Átomos: p(x), R e *false* são fórmulas;
- ¬p(x) v R;
  - Que equivale a (p(x) → R)
    - Também fórmula
- (∀x) p(x) → R;

- **Uma expressão na lógica de predicados é** uma concatenação válida de símbolos do alfabeto, podendo ser **um termo ou uma fórmula.**

Subtermo

- Se E = x, então a variável x é sub-termo de E;
- Se E = $f(t_1,t_2,...,t_n)$ então t_i e $f(t_1,t_2,...,t_n)$ são sub-termos de E;
- Se t_1 é sub-termo de t_2 e t_2 de E, então t_1 também é sub-termo de E.

Subfórmula

- Se H é fórmula:
  - H é uma sub-fórmula;
  - Se H=(¬G), então (¬G) é sub-fórmula de H;
  - Se H é do tipo (E v G), (E ^ G), (E→G) ou (E↔G), então H, G e E são sub-fórmulas de H;
  - Se x é uma variável e Q um quantificador (∀ ou ∃), H=(Qx)G, então G e (Qx)G são sub-fórmulas de H;
  - Se G é sub-fórmula de H, então toda sub-fórmula de G também é sub-fórmula de H.

Exercício

- Deseja-se saber as subfórmulas da fórmula H.

$H = (\forall x)\, p(x) \rightarrow (p(x) \wedge (\forall y)\, r(y))$

$(\forall x)\, p(x) \rightarrow (p(x) \wedge (\forall y)\, r(y))$

$(\forall x)\, p(x)$

$p(x)$

$(p(x) \wedge (\forall y)\, r(y))$

$(\forall y)\, r(y)$

$r(y)$

Exercício

- Deseja-se saber as subfórmulas da fórmula G.
- $G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
- $(\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
- $(\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
- $(\forall z)\ p(x,y,w,z)$
- $p(x,y,w,z)$
- $(\forall y)q(z,y,x,z_1)$
- $q(z,y,x,z_1)$

Próprios e Sub-Expressões

- Se t é sub-termo de E, e t é diferente de E, então t é sub-termo próprio de E;
- Se G é sub-fórmula de H e G e H são diferentes, então G é sub-fórmula própria de H;
- Todo sub-termo ou sub-fórmula é uma sub-expressão.

Literais e Formas Normais

- Literal em lógica de predicados é um átomo ou sua negação;
- Uma fórmula está na forma normal disjuntiva (fnd ou DNF, em inglês) se é uma **disjunção** de conjunções de literais;
- Uma fórmula está na forma normal conjuntiva (fnc ou CNF, em inglês) se é uma **conjunção** de disjunções de literais.

Ordem de Precedência de Quantificadores

- Os parênteses das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre suas interpretações;

- Da ordem maior para a menor:

  $\neg$

  $\forall, \exists$

  $\rightarrow, \leftrightarrow$

  $\wedge, \vee$

Exercício

- Insira os parênteses na fórmula a seguir, conforme a ordem de precedência de quantificadores.
  - $G = (\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y) \rightarrow (\exists z)\ \neg q(z) \wedge r(y)$
  - $(\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y) \rightarrow (\exists z)\ (\neg q(z)) \wedge r(y)$
  - $((\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y)) \rightarrow (\exists z)\ (\neg q(z)) \wedge r(y)$
  - $((\forall x)\ ((\exists y)\ p(x,y))) \rightarrow (\exists z)\ (\neg q(z)) \wedge r(y)$
  - $(((\forall x)\ ((\exists y)\ p(x,y))) \rightarrow (\exists z)\ (\neg q(z))) \wedge r(y)$
  - $((((\forall x)\ ((\exists y)\ p(x,y))) \rightarrow (\exists z)\ (\neg q(z))) \wedge r(y))$

Correspondência Entre Quantificadores

- Lógica Proposicional:
  - Os conectivos →, ↔ e ^ podem ser definidos a partir dos conectivos ¬ e v;

- Lógica de Predicados:
  - É possível definir ∃ a partir de ∀ e vice-versa;
    - $(\forall x)\ H = \neg(\exists x)\neg\ H$
    - $(\exists x)\ H = \neg(\forall x)\neg\ H$

- Qualquer quantificador pode ser definido a partir do outro.

Escopo de Quantificador

- Abrangência de seu uso nas sub-fórmulas;

- Se E é uma fórmula na Lógica de Predicados:
  - Se $(\forall x)H$ é subfórmula de E;
    - O escopo de $(\forall x)$ é H.
  - Se $(\exists x)H$ é subfórmula de E;
    - O escopo de $(\exists x)$ é H.

Exercício

- Defina o escopo dos quantificadores da fórmula G.

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)\ q(z,y,x,z_1))$$

Exercício

- Defina o escopo dos quantificadores da fórmula G.

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)\ q(z,y,x,z_1))$$

- O escopo de $(\forall x)$ é:
  - $(\exists y)\ ((\forall z)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
- O escopo de $(\exists y)$ é:
  - $((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
- O escopo de $(\forall z)$ é:
  - $p(x,y,w,z)$
- O escopo de $(\forall y)$ é:
  - $q(z,y,x,z_1)$

Ocorrência Livre e Ligada

- Se x é uma variável e E uma fórmula, uma ocorrência de x em E é:
  - Ligada, se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E;
  - Livre, se não for ligada;

- Ex.: $G = (\forall x)(\exists y)((\forall z)\, p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$

$$(\forall x)(\exists y)((\forall z)\, p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

Variável Livre e Ligada

- Se x é uma variável e E uma fórmula que contém x, x é:
  - Ligada em E, se existir uma ou mais ocorrências ligadas de x em E;
  - Livre em E, se existir uma ou mais ocorrências livres de x em E.

Exercício

- Na fórmula abaixo, quais variáveis são livres e quais são ligadas?

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \to (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

Exercício

- Na fórmula abaixo, quais variáveis são livres e quais são ligadas?

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

  - As variáveis x, y e z são ligadas em G;
  - As variáveis w e z_1 são livres em G;
  - A variável z é livre e ligada.

Exercício

1. Considere as fórmulas a seguir:

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

$$H = (\exists w)\ (\exists z)\ (\exists z_1)\ (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall x)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

a) Quais são as variáveis livres? E as ligadas?

b) Quais são as subfórmulas de G e H?

Exercício

2. Considere as fórmulas a seguir:

$E = (\exists z)p(z) \leftrightarrow \neg q(y)$ $\qquad$ $F = (\exists x)(\forall x)\neg p(x)$

a) Reescreva os parênteses das fórmulas;

b) Determine todas as subfórmulas de E e F;

c) Determine o escopo dos quantificadores.

Exercício

3. Na fórmula abaixo, quais variáveis são livres e quais são ligadas?

- H = $(\forall w)\ (\exists z)\ (\forall z_1)\ (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall x)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\exists y)q(z,y,x,z_1))$