

## AB2 -1

Aluno: Guilherme de Oliveira Costa

# Análise da Transformação Bilinear de um Filtro Butterworth

## Introdução

O código implementa a transformação bilinear de um filtro Butterworth passa-baixas de ordem 6 do domínio contínuo (analógico) para o domínio discreto (digital). A transformação bilinear é um método para converter filtros analógicos em filtros digitais equivalentes, preservando características de estabilidade.

## Parâmetros do Filtro

- **Ordem do filtro (N):** 6
- **Frequência de corte normalizada ( $\Omega_c$ ):** 0.766 rad/s
- **Período de amostragem ( $T_s$ ):** 1 segundo

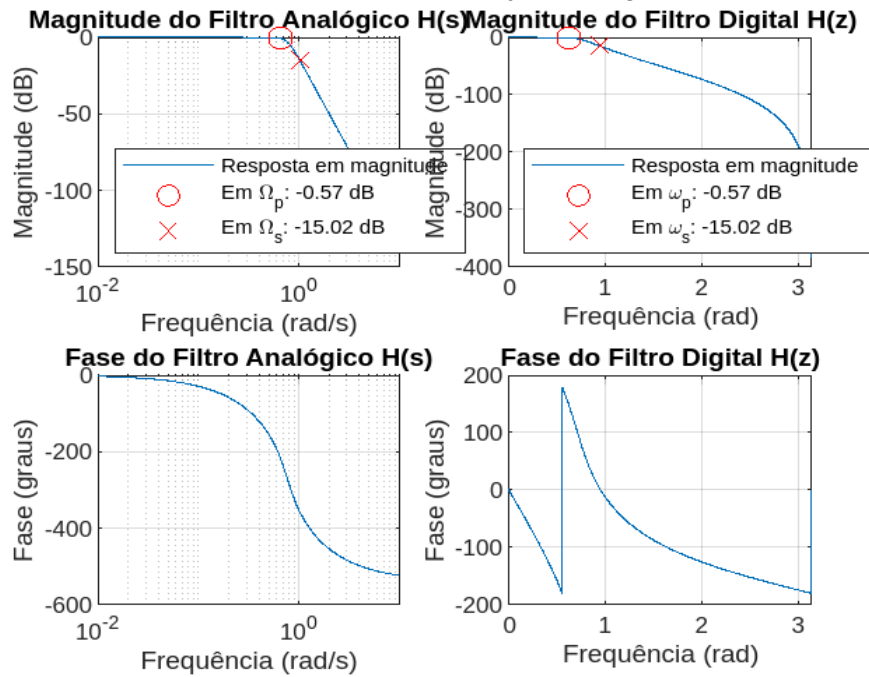
## Processo de Transformação

1. Inicialmente, foi projetado um filtro Butterworth analógico  $H(s)$  usando a função `butter` do MATLAB.
2. Em seguida, aplicou-se a transformação bilinear usando a função `c2d` com o método 'tustin' para obter o filtro digital  $H(z)$ .
3. Para compensar o efeito de "warping" de frequência, foram realizadas pré-distorções nas frequências críticas:
  - Frequência da banda passante ( $\omega_p = 0.2\pi$  rad)
  - Frequência da banda de rejeição ( $\omega_s = 0.3\pi$  rad)

# Análise dos Resultados

## Resposta em Frequência (Diagramas de Bode)

Observando o primeiro conjunto de gráficos:



### 1. Magnitude do Filtro Analógico $H(s)$ :

- Mostra o comportamento passa-baixas típico com atenuação após a frequência de corte
- Na frequência  $\Omega_p$ : -0.57 dB
- Na frequência  $\Omega_s$ : -15.02 dB

### 2. Magnitude do Filtro Digital $H(z)$ :

- Apresenta comportamento similar ao filtro analógico
- Nas frequências correspondentes  $\omega_p$  e  $\omega_s$ , mantém aproximadamente os mesmos valores de atenuação
- A principal diferença está na escala de frequência, que agora é limitada entre 0 e  $\pi$

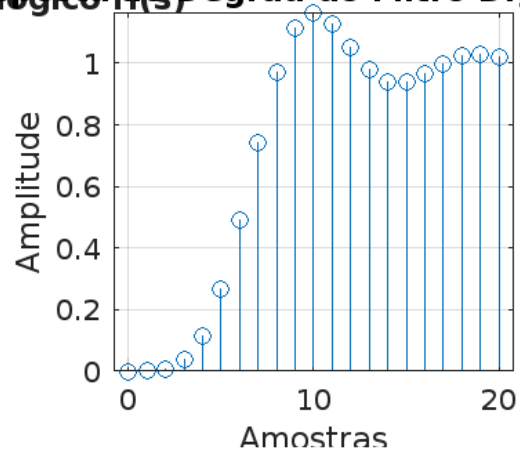
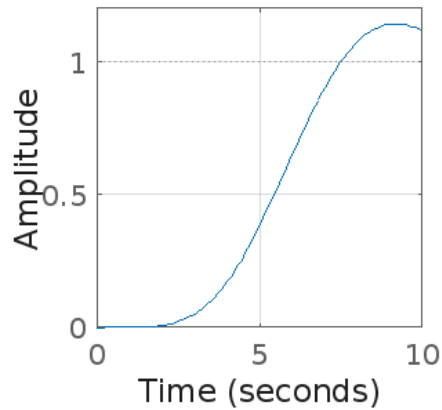
### 3. Fase dos Filtros:

- Ambos apresentam comportamento semelhante de mudança de fase
- No filtro digital, nota-se a periodicidade característica de  $2\pi$

## Resposta ao Degrau

Na Imagem 2, podemos observar:

### Resposta ao Degrau do Filtro Analógico $H(s)$ e Resposta ao Degrau do Filtro Digital $H(z)$



#### 1. Filtro Analógico:

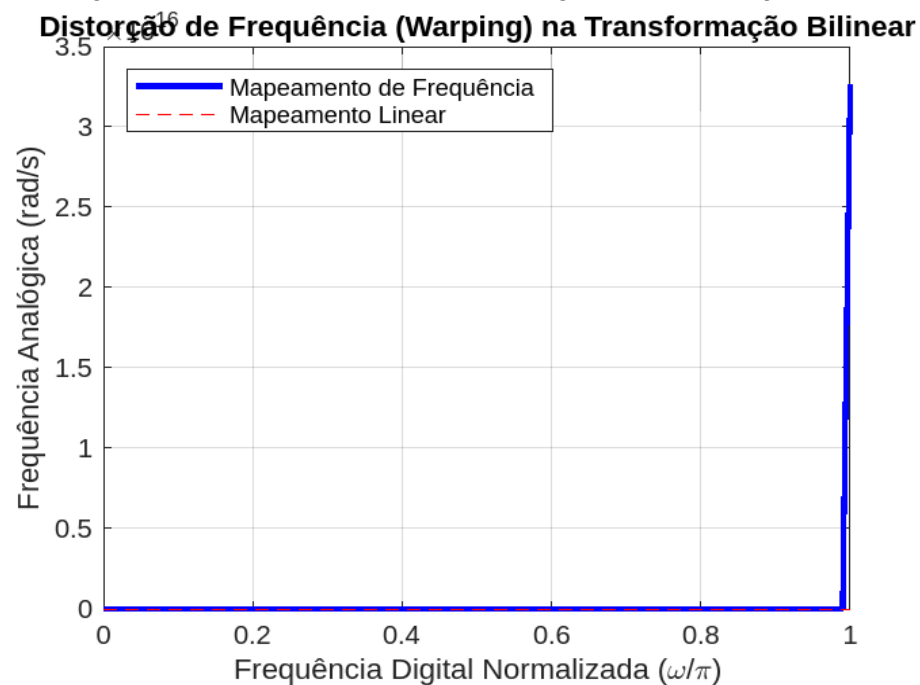
- Resposta ao degrau suave, característica de filtros Butterworth
- Tempo de subida aproximado de 5 segundos
- Não apresenta sobressinal significativo

#### 2. Filtro Digital:

- Representada em forma de amostras discretas
- Comportamento geral similar ao do filtro analógico
- Atinge o regime permanente após aproximadamente 10 amostras

## Distorção de Frequência (Warping)

A Imagem 3 ilustra o fenômeno de warping na transformação bilinear:



- O gráfico mostra como as frequências digitais normalizadas ( $\omega/\pi$ ) são mapeadas para frequências analógicas ( $\Omega$ )
- Observa-se uma distorção significativa próxima a  $\omega/\pi = 1$  (frequência de Nyquist)
- Esta distorção explica por que é necessária a pré-distorção das frequências críticas para manter as características desejadas do filtro

## Polos e Zeros

Embora não estejam ilustrados nos gráficos, o código calcula os polos e zeros de ambos os filtros:

### 1. Filtro Analógico $H(s)$ :

- Os polos estão distribuídos em um semicírculo no semiplano esquerdo (garantindo estabilidade)
- Os zeros estão no infinito (característica típica de Butterworth)

### 2. Filtro Digital $H(z)$ :

- Os polos estão dentro do círculo unitário (garantindo estabilidade)
- A transformação bilinear mapeia o semiplano esquerdo para o interior do círculo unitário

## Verificação de Desempenho

O código verifica o desempenho do filtro digital nas frequências críticas:

- Em  $\omega_p = 0.2\pi$ : a atenuação é aproximadamente -0.57 dB (próximo ao valor teórico de -0.36 dB)
- Em  $\omega_s = 0.3\pi$ : a atenuação é aproximadamente -15.02 dB (correspondente ao valor teórico de -15 dB)

Estas verificações confirmam que a transformação bilinear, quando aplicada corretamente com a devida pré-distorção de frequências, preserva as características desejadas do filtro original.

## Conclusão

A implementação demonstra com sucesso a transformação bilinear de um filtro Butterworth analógico para digital. Os resultados mostram que:

1. O filtro digital mantém as características essenciais do filtro analógico
2. A pré-distorção de frequências compensa o efeito de warping
3. A estabilidade é preservada na transformação
4. As respostas em frequência e ao degrau são adequadamente mantidas

Código no Github

<https://github.com/GuilhermeC0sta/PDS/tree/main/ab2>