



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Instituto Politécnico

Graduação em Engenharia da Computação

Gabriel Luiz Bezerra Ackermann de Souza

Relatório do projeto de Modelagem e controle de sistemas

Nova Friburgo

2024

Gabriel Luiz Bezerra Ackermann de Souza

Relatório do projeto de Modelagem e controle de sistemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Engenharia da computação, ao Graduação em Engenharia da Computação, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Joel Sanches

Nova Friburgo

2024

RESUMO

BEZERRA ACKERMANN DE SOUZA, G.L. **Relatório do projeto de Modelagem e controle de sistemas**. 2024. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia da computação) – Graduação em Engenharia da Computação, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2024.

O projeto da disciplina tem como objetivo realizar diversos experimentos com um sistema diferencial de segunda ordem do tipo massa-mola-amortecedor. Utilizando Scilab como plataforma para criar códigos que possam simular o sistema, verificar a estabilidade do mesmo e entre outros.

Palavras-chave: Sistemas. Modelagem e controle. Massa-mola-amortecedor.

ABSTRACT

BEZERRA ACKERMANN DE SOUZA, G.L. **Systems Modeling and Control project report**. 2024. [52](#) f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia da computação) – Graduação em Engenharia da Computação, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2024.

The course project aims to carry out several experiments with a second-order differential system of the mass-spring-damper type. Using Scilab as a platform to create codes that can simulate the system, check its stability, among others.

Keywords: Systems. Modeling and Control. Mass-spring-damper.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Sistema malha aberta	9
Figura 2	- Sistema malha fechada	10
Figura 3	- Sistema massa-mola-amortecedor	11
Figura 4	- Modelagem em diagrama XCOS.	21
Figura 5	- Sistema malha fechada	30
Figura 6	- Modelo controlado XCOS	33
Figura 7	- Diagrama do sistema com PID	36
Figura 8	- Diagramas de Bode	43
Figura 9	- Diagramas de Nyquist	44

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Posição ao longo do tempo.	15
Gráfico 2 - Velocidade ao longo do tempo.	16
Gráfico 3 - Posição ao longo do tempo.	17
Gráfico 4 - Velocidade ao longo do tempo.	18
Gráfico 5 - Posição ao longo do tempo.	19
Gráfico 6 - Velocidade ao longo do tempo.	20
Gráfico 7 - Gráfico da posição do teste XCOS	21
Gráfico 8 - Gráfico da velocidade do teste XCOS	22
Gráfico 9 - Gráfico da posição caso 1 XCOS	22
Gráfico 10 - Gráfico da velocidade caso 1 XCOS	23
Gráfico 11 - Gráfico da posição caso 2 XCOS	23
Gráfico 12 - Gráfico da velocidade caso 2 XCOS	24
Gráfico 13 - Gráfico da posição caso 2 XCOS	24
Gráfico 14 - Gráfico da velocidade caso 2 XCOS	25
Gráfico 15 - Gráfico da posição caso 2 XCOS	25
Gráfico 16 - Gráfico da velocidade caso 2 XCOS	26
Gráfico 17 - Posição do corpo com controlador $8/3$	33
Gráfico 18 - Posição do corpo com controlador $16/3$	34
Gráfico 19 - Posição do corpo com controlador em sistema estável	34
Gráfico 20 - Gráfico instável da posição do sistema com controlador	36
Gráfico 21 - Resultado do controlador PID	37
Gráfico 22 - Resultado do controlador PID (ampliado)	37
Gráfico 23 - Componente Integral com valor aumentado	38
Gráfico 24 - Componente Integral com valor reduzido	38
Gráfico 25 - Componente Derivativo com valor aumentado	39
Gráfico 26 - Componente Derivativo com valor reduzido	39
Gráfico 27 - Componente Proporcional com valor aumentado	40
Gráfico 28 - Componente Proporcional com valor reduzido	40
Gráfico 29 - Resultado PID manual	40
Gráfico 30 - LGR do sistema	41

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

m	massa
C	constante de amortecimento
K	constante elástica da mola
x	deslocamento
v	velocidade
a	aceleração

LISTA DE SÍMBOLOS

<i>simbolo1</i>	significado e/ou valor
<i>simbolo2</i>	significado e/ou valor
<i>simbolo3</i>	significado e/ou valor

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	MODELAGEM	11
1.1	Relação das propriedades do movimento	11
1.2	Forças	12
1.2.1	<u>Força dinâmica</u>	12
1.2.2	<u>Força de amortecimento</u>	12
1.2.3	<u>Força elástica</u>	13
1.2.4	<u>Força resultante</u>	13
2	SIMULAÇÃO DO PROBLEMA	14
2.1	Solucionador de equações diferenciais	14
2.1.1	<u>Caso 1</u>	15
2.1.2	<u>Caso 2</u>	17
2.1.3	<u>Caso 3</u>	19
2.2	Simulação por diagrama XCOS	20
2.2.1	<u>Caso 1</u>	22
2.2.2	<u>Caso 2</u>	23
2.2.3	<u>Caso 3</u>	24
2.2.4	<u>Condições iniciais nulas</u>	25
2.3	Sistema controlador proporcional	26
2.3.1	<u>Função de transferência</u>	26
2.3.2	<u>Controlador e sensor</u>	29
2.3.3	<u>estabilidade</u>	30
2.3.4	<u>controlador XCOS</u>	33
2.3.5	<u>controlador PID</u>	35
2.4	LGR Lugar Geométrico das Raízes	41
2.5	Diagrama de Bode	43
2.6	Diagrama de Nyquist	44
2.6.1	<u>Título da subseção</u>	45
2.6.1.1	<u>Título da subsubseção</u>	45
	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	47
	GLOSSÁRIO	48
	ANEXO A – Códigos	49

INTRODUÇÃO

Na engenharia é fundamental trabalhar com problemas físicos provenientes de sistemas de equações diferenciais, que podem ser trabalhados de diferentes formas.

Uma analogia para o curso de engenharia e suas disciplinas é uma caixa de ferramentas. Nessa semelhança o curso é a caixa, as disciplinas e seus conteúdos são os instrumentos, cabe ao engenheiro saber qual ferramenta utilizar para cada problema, considerando suas vantagens e desvantagens.

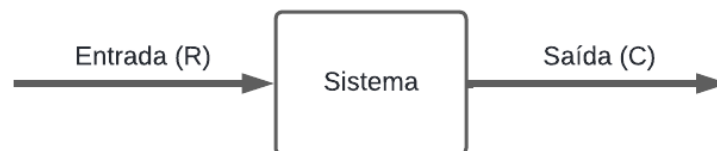
Para a modelagem matemática de problemas físicos, é necessário interpretar os fenômenos reais na forma de expressões, que em grande maioria são diferenciais. Com as expressões encontradas, é possível modelar sistemas e utilizar diversas ferramentas para interpretá-los.

Dentro do contexto de problemas físicos, existem aqueles que precisam ser controlados, a fim de se obter respostas específicas desejadas, para isso, surgem os sistemas de controle. Conceito no qual, o sistema físico, chamado de planta, recebe sinais de uma controladora, que utiliza um sensor para determinar a "situação" da resposta geral.

Como um exemplo clássico de sistema contínuo controlado temos os aquecedores, que por meio de sensores, são monitorados para manter uma temperatura ambiente constante.

Por existirem esses diferentes tipos de sistemas, eles possuem nomenclaturas próprias, os livres de controladoras, chamados de malha aberta e os que possuem sistema de controle de malha fechada. A figura 1 apresenta uma generalização de um sistema de malha aberta.

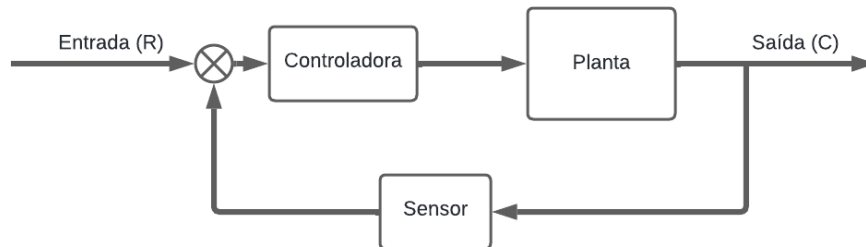
Figura 1 – Sistema malha aberta



Fonte: O autor, 2024

Já para os sistemas de tipo malha fechada, novos componentes são implementados, como o controlador (ou controladora) e o sensor, como pode ser observado pela figura 2.

Figura 2 – Sistema malha fechada



Fonte: O autor, 2024

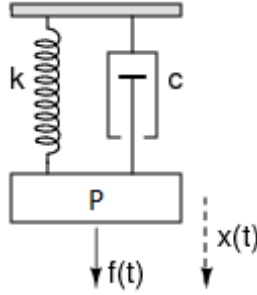
Em uma explicação mais detalhada do funcionamento dos sistemas de malha fechada podemos dizer que o controlador compara os sinais dos valores de saída, de realimentação e de referência desejado. A diferença entre os valores, chamado de sinal de erro, é utilizado para modificar o sinal de entrada a fim de manter uma boa precisão da relação do valor de saída com o valor da referência desejada (MURAYAMA, 2017).

Esses conceitos são utilizados no relatório do projeto, para estudo e simulação de um sistema massa-mola-amortecedor.

1 MODELAGEM

O modelo visual do sistema MMA pode ser visto na figura 3, com os componentes e seus respectivos valores, K para mola, C para amortecedor e P para o corpo.

Figura 3 – Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: Dominguez, J. 2024

O sistema se caracteriza pelo conceito de movimento de deslocamento do corpo, que tem características muito relacionadas entre si.

1.1 Relação das propriedades do movimento

Devido as leis da física, as propriedades da natureza do movimento podem ser relacionadas, a velocidade é a variação do deslocamento ao longo do tempo, enquanto a aceleração é a taxa de variação da velocidade ao longo do tempo.

Por razão dessa relação entre os conceitos do movimento, a matemática permite a realização de transformações nas expressões do modelo para que todas estejam em função do deslocamento. Essas expressões podem ser avaliadas nas relações 1, 2 e 3.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (1)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (3)$$

1.2 Forças

1.2.1 Força dinâmica

A expressão mais comum para forças na física, dada pela segunda lei de Newton, afirma que a força resultante sobre um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração, como avaliada na equação 4.

$$F(t) = m * a(t) \quad (4)$$

Dadas as relações físicas do movimento, a expressão 4 pode ser reescrita para estar relacionada com o deslocamento do corpo, aplicando as relações 1 e 3, gerando a equação 5.

$$Fp(t) = m * \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (5)$$

1.2.2 Força de amortecimento

A força de amortecimento surge devido à resistência de um fluido ou material ao movimento. Partindo do princípio de que a natureza do amortecedor é viscosa, a resistência ao deslocamento tem relação proporcional com a velocidade, como mostrada pela equação 6.

$$Fc(t) = C * v(t) \quad (6)$$

Sabendo das transformações caracterizadas pelas relações físicas do movimento, por meio das expressões 2 e 6 podemos transformar a velocidade em termos da distância, como mostrada pela equação 7.

$$Fc(t) = C * \frac{dx(t)}{dt} \quad (7)$$

1.2.3 Força elástica

A lei de Hooke, diz que uma mola tende a deformar quando forças são aplicadas à mesma, gerando uma força de resistência contrária proporcional à deformação, consequentemente, proporcional ao deslocamento do corpo como mostrado na expressão 8.

$$Fk(t) = K * x(t) \quad (8)$$

Como a força elástica já é em função ao próprio deslocamento, não há necessidade de aplicar transformações.

1.2.4 Força resultante

A força resultante do sistema demonstrado na figura 3 é dado pela soma vetorial de todas as forças aplicadas sobre o corpo, como mostrado pela equação 9.

$$f(t) = m * \frac{d^2x(t)}{dt^2} + C * \frac{dx(t)}{dt} + K * x(t) \quad (9)$$

Os valores atribuídos para o autor foram as constantes do quadro 1.

m	C	K
8 kg	2 N-s/m	0,5 N/m

2 SIMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Solucionador de equações diferenciais

A primeira simulação do modelo foi pelo desenvolvimento de um código em scilab que fornecesse o comportamento do sistema para uma força de entrada nula, considerando diferentes condições iniciais propostas presentes no quadro 2.

$v(0)$	$x(0)$
4	0
0	2
$8/3$	$8/5$

O código escrito para a simulação utilizou o comando Ordinary Differential Solver, ODE(), que para equações de segunda ordem, retorna um vetor com os valores da variável e sua primeira derivada ao longo do tempo.

O plot() de um gráfico no scilab pode ser realizado de forma simples ao utilizar vetores com valores de duas variáveis. Na simulação, foi utilizado dois vetores, um com os valores da posição $x(t)$ e o outro com valores da velocidade $v(t)$, ao longo do vetor de tempo da simulação t .

Pelo funcionamento da ferramenta data-tip, pontos específicos podem ser marcados nos gráficos em termos de X e Y, que para o projeto, representam tempo de simulação (t) e posição do corpo [$x(t)$] respectivamente.

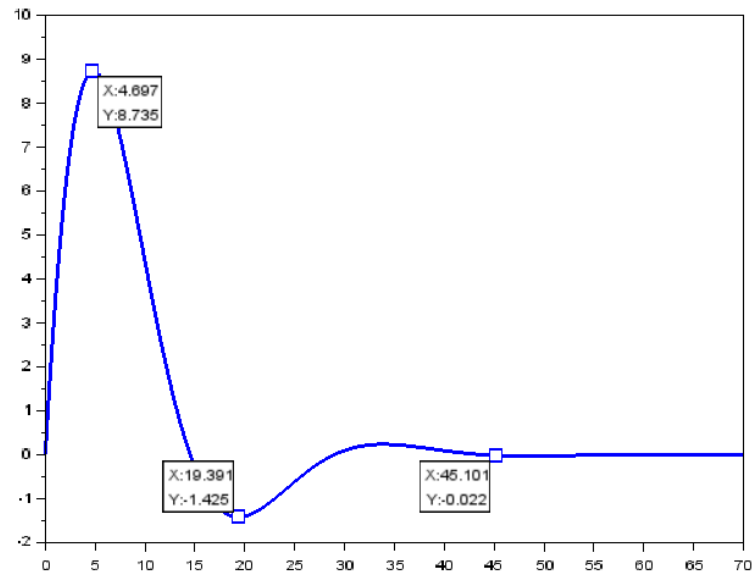
Para que fosse possível obter uma boa precisão, foi utilizado uma taxa de variação de tempo dt pequena, de 0,01 segundos, para a faixa de 0 a 70 segundos.

A modelagem matemática de propriedades e naturezas físicas exigem a utilização de valores positivos e negativos para representar direções e sentidos. Essa aplicabilidade foi utilizada no problema do projeto, posição e velocidade negativas, representam sentido oposto ao de valores positivos.

2.1.1 Caso 1

Para o primeiro caso, os resultados foram os plots da posição e da velocidade ao longo do tempo, gráficos 1 e 2 respectivamente.

Gráfico 1 – Posição ao longo do tempo.

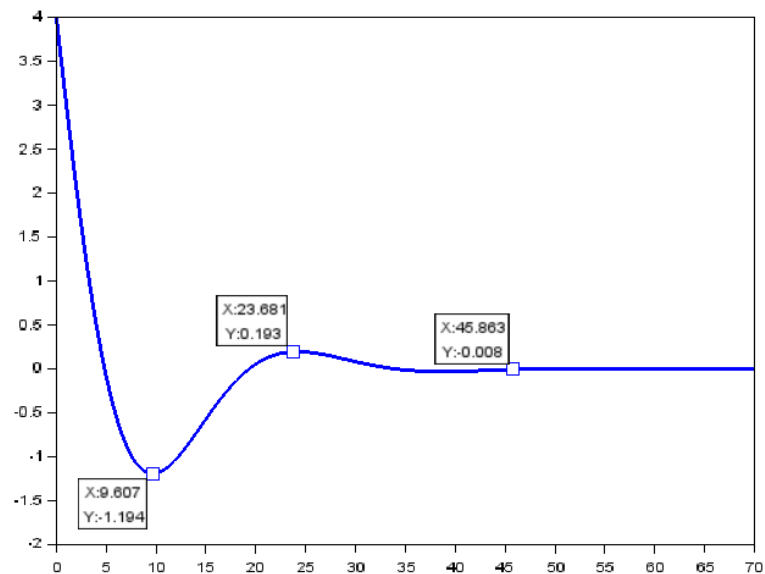


Fonte: O autor, 2024.

Pelo gráfico da posição ao longo do deslocamento do caso 1 é possível visualizar alguns pontos importantes, como o pico máximo $x(t) = 8,7$ metros em $t = 4,7$ segundos, o primeiro vale da oscilação dado por $x(t) = -1,4$ metros em $t = 19,4$ segundos e o estado estacionário que inicia em $x(t) = -0,022$ metros em $t = 45,1$ segundos.

Pelo comportamento do sistema, podemos afirmar que se trata de um sistema subamortecido, que oscila algumas vezes até estabilizar no estado estacionário.

Gráfico 2 – Velocidade ao longo do tempo.



Fonte: O autor, 2024.

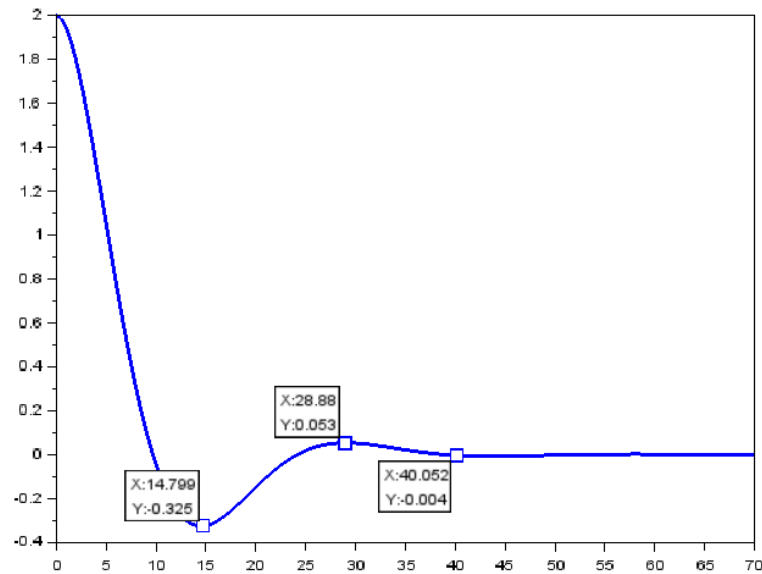
Pelo gráfico da velocidade ao longo do tempo do caso 1 pode-se afirmar que O pico de velocidade foi a própria velocidade inicial, porém, a segunda maior velocidade foi $v(t) = -1,2 \text{ m/s}$ em $t = 9,6$ segundos, que representa uma velocidade no sentido contrário ao da força $f(t)$. As oscilações da velocidade até o estado estacionário que inicia em $v(t) = -0,008 \text{ m/s}$ em $t = 45,9$ segundos e estabiliza em $v(t) = 0 \text{ m/s}$ nos próximos instantes de tempo.

A velocidade se comporta como deveria, tendendo a ser nula quanto mais próximo da estabilidade de posição do corpo o sistema está (estado estacionário).

2.1.2 Caso 2

Para o segundo caso, os resultados foram os plots da posição e da velocidade ao longo do tempo, gráficos 3 e 4 respectivamente.

Gráfico 3 – Posição ao longo do tempo.

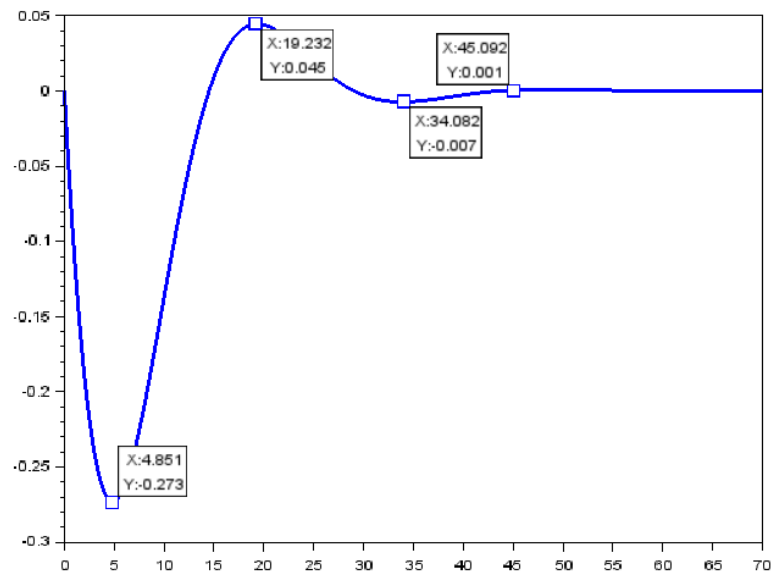


Fonte: O autor, 2024.

Pelo gráfico da posição ao longo do deslocamento do caso 2 é possível visualizar que O sistema já inicia em um estado extremo, já que a posição inicial é além da faixa de movimento de estabilização, ou seja, nenhuma oscilação faz o sistema se aproximar desse pico novamente. A posição do vale da oscilação ocorre em $x(t) = -0,325$ metros em $t = 14,8$ segundos e o estado estacionário que inicia em $x(t) = -0,004$ metros em $t = 40,1$ segundos.

Apesar de alterar os valores das condições iniciais da posição e da velocidade, as características e propriedades do sistema se mantém as mesmas, portanto, o sistema continua sendo subamortecido.

Gráfico 4 – Velocidade ao longo do tempo.



Fonte: O autor, 2024.

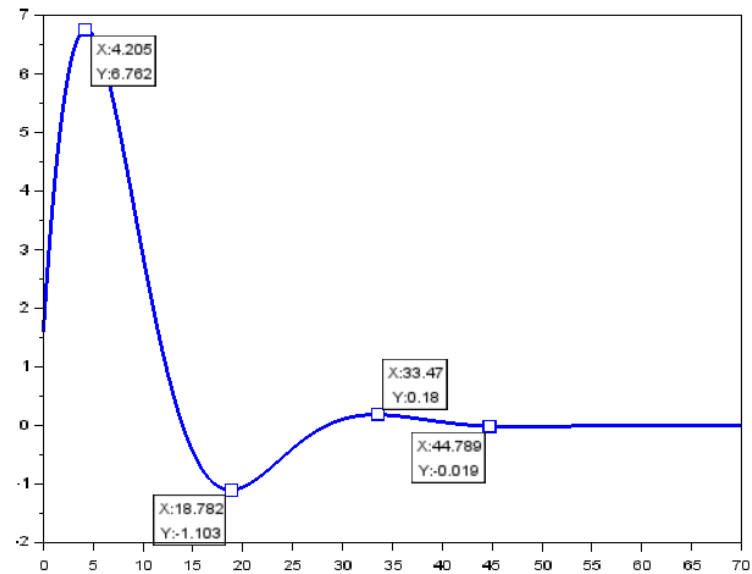
Pelo gráfico da velocidade ao longo do deslocamento do caso 2 é visível que o pico de velocidade $v(t) = -0,273$ m/s ocorre em $t = 4,9$ segundos, as oscilações da velocidade até o estado estacionário que inicia em $v(t) = 0,001$ m/s em $t = 45,1$ segundos.

Diferente do caso 1, a velocidade inicial foi nula e o pico de velocidade foi atingido durante as oscilações do sistema até a estabilização.

2.1.3 Caso 3

Para o terceiro caso, os resultados foram os plots da posição e da velocidade ao longo do tempo, gráficos 3 e 4 respectivamente.

Gráfico 5 – Posição ao longo do tempo.

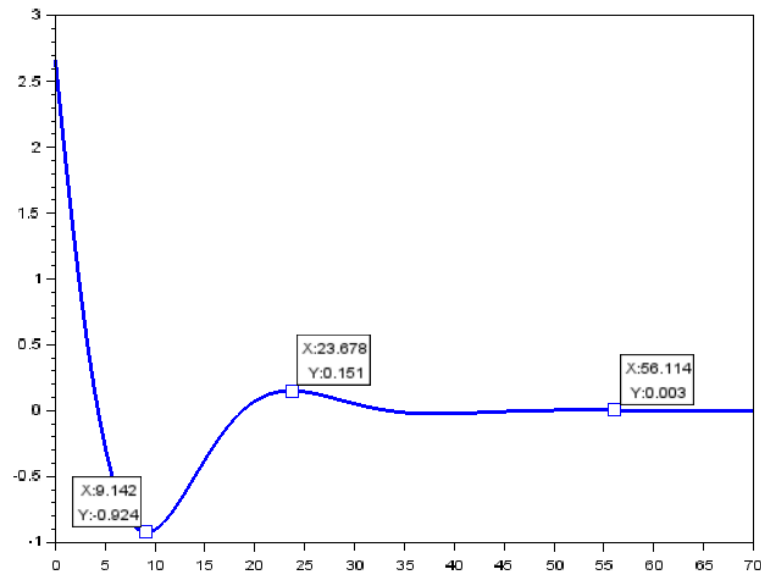


Fonte: O autor, 2024.

Pelo gráfico da posição, podemos observar que as características do sistema se mantêm as mesmas, com o pico de posição ocorrendo em $x(t) = 6,762$ para $t = 4,2$

Para a velocidade, observa-se que a velocidade inicial foi a maior velocidade atingida pelo sistema.

Gráfico 6 – Velocidade ao longo do tempo.



Fonte: O autor, 2024.

2.2 Simulação por diagrama XCOS

O XCOS é uma ferramenta de simulação gráfica integrada na linguagem interpretada Scilab, ferramenta a qual permite a criação de modelos de sistemas dinâmicos.

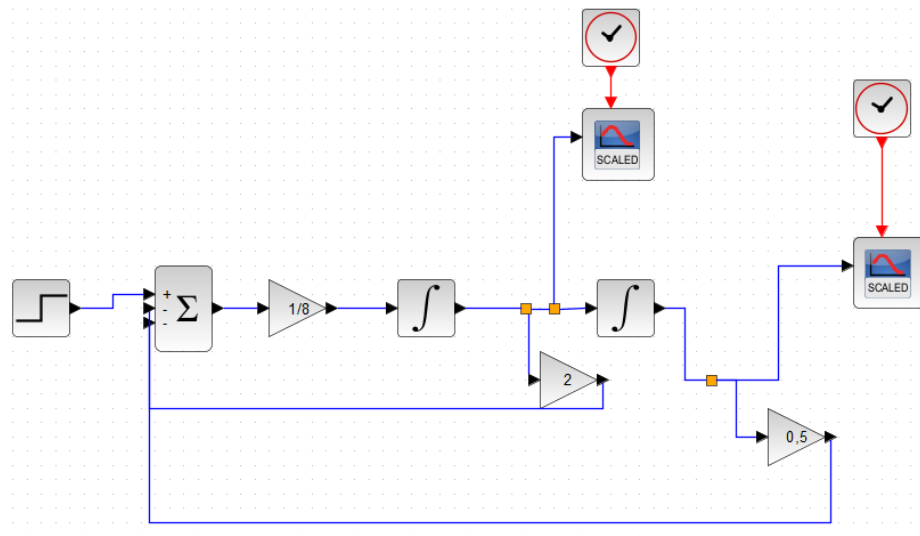
Tal ferramenta conta com uma biblioteca ampla de blocos, permitindo a criação do modelo e simulação em tempo real, facilitando a análise dos resultados para diversos cenários.

O modelo do problema, projetado em diagrama de blocos do XCOS pode ser visto na figura 4.

Para essa projeção em diagrama, foi configurado todos os valores similares à primeira simulação realizada via código, a fim de, verificar a precisão do modelo. A força de entrada foi considerada nula, as condições iniciais de $V_0 = 0$ e $X_0 = 8/5$.

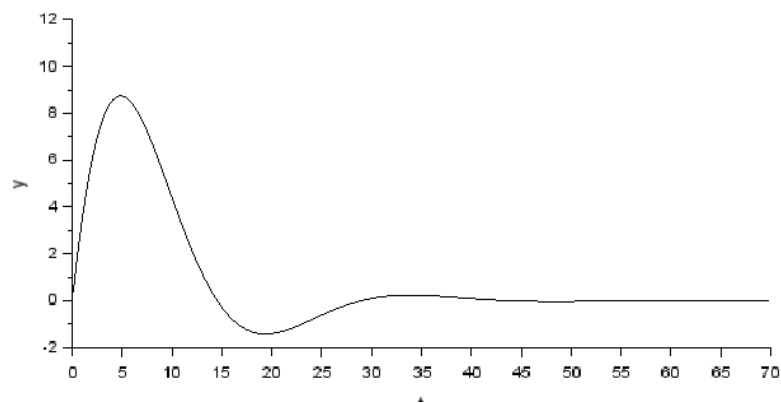
Os resultados para a posição e velocidade podem ser avaliados pelos gráficos 7 e 8 respectivamente.

Figura 4 – Modelagem em diagrama XCOS.



Fonte: O autor, 2024.

Gráfico 7 – Gráfico da posição do teste XCOS

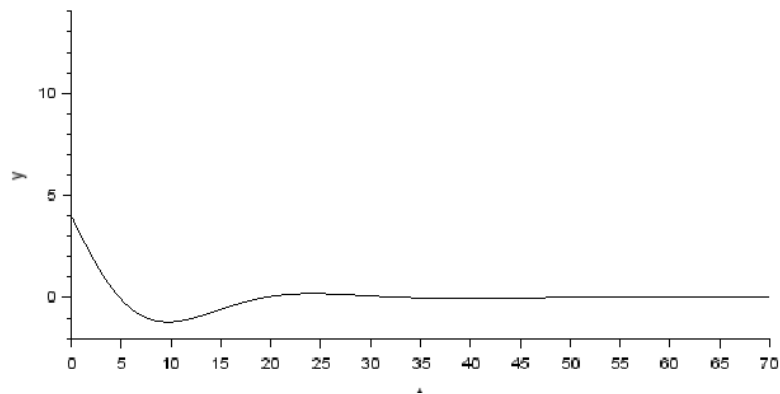


Fonte: O autor, 2024.

Como esperado os gráficos foram bem precisos quando comparados com os resultados das simulações matemáticas via código, portanto, podemos dizer que o modelo de simulação via blocos do sistema está funcionando como esperado.

Aplicando um valor de força de entrada $8/5$ e testando novamente para as três condições iniciais testadas anteriormente na simulação de código, foram obtidos alguns resultados, que podem ser avaliados separadamente abaixo.

Gráfico 8 – Gráfico da velocidade do teste XCOS

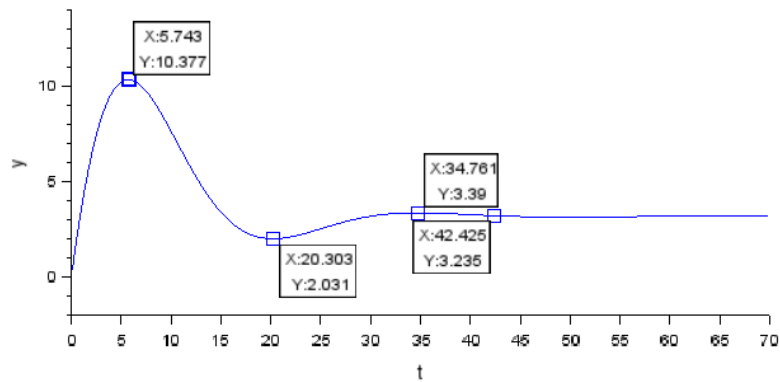


Fonte: O autor, 2024.

2.2.1 Caso 1

Para o primeiro caso, os resultados obtidos foram os gráficos 9 e 10.

Gráfico 9 – Gráfico da posição caso 1 XCOS

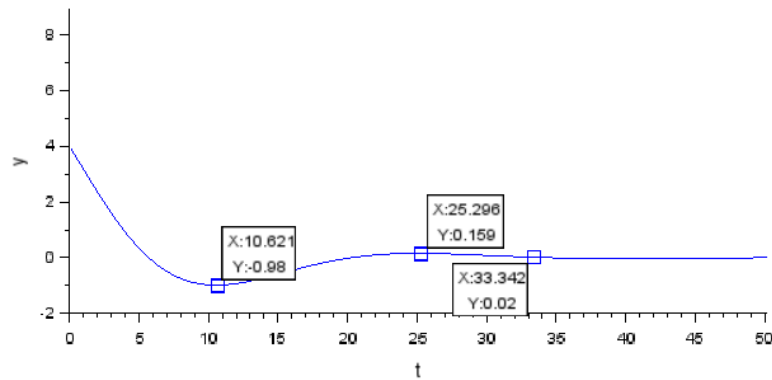


Fonte: O autor, 2024.

Como podemos observar por ambos, a velocidade máxima independente do sentido, foi menor do que a velocidade quando não existia força de entrada aplicada. Porém, mesmo assim, a distância máxima alcançada (pico) foi levemente maior do que com entrada nula, aumentando a oscilação também.

Mesmo assim, o tempo para atingir o estado estacionário foi bem próximo.

Gráfico 10 – Gráfico da velocidade caso 1 XCOS

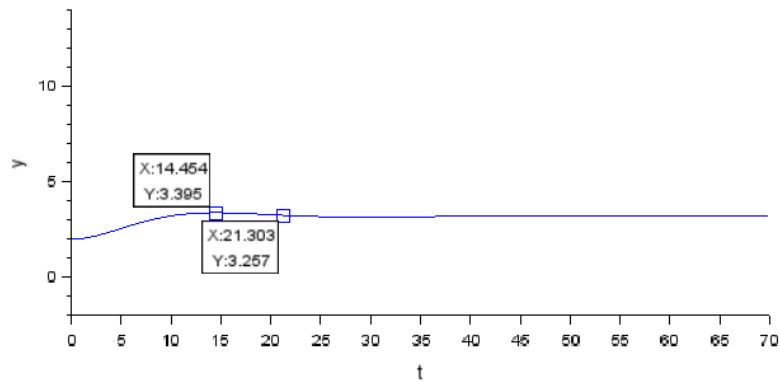


Fonte: O autor, 2024.

2.2.2 Caso 2

Para o segundo caso, os gráficos 11 e 12 representam os resultados da simulação.

Gráfico 11 – Gráfico da posição caso 2 XCOS

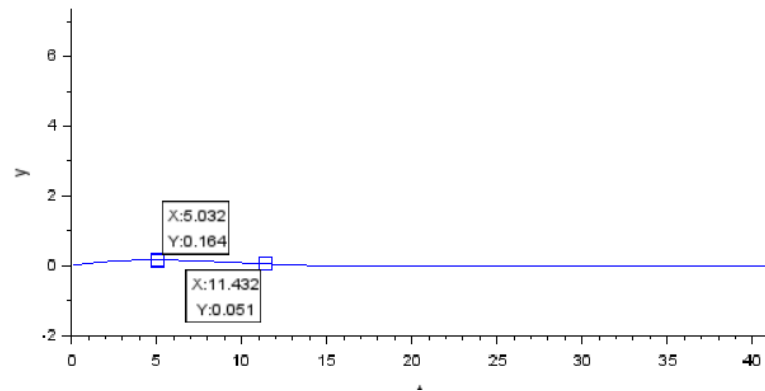


Fonte: O autor, 2024.

Para o caso 2, a adição de uma entrada constante da força externa, fez com que o sistema tivesse menos oscilações e atingisse o ponto de convergência (ponto estacionário) mais rapidamente.

Como o sistema rapidamente convergiu para o estado estacionário, a velocidade do sistema também quase não teve nenhuma oscilação.

Gráfico 12 – Gráfico da velocidade caso 2 XCOS

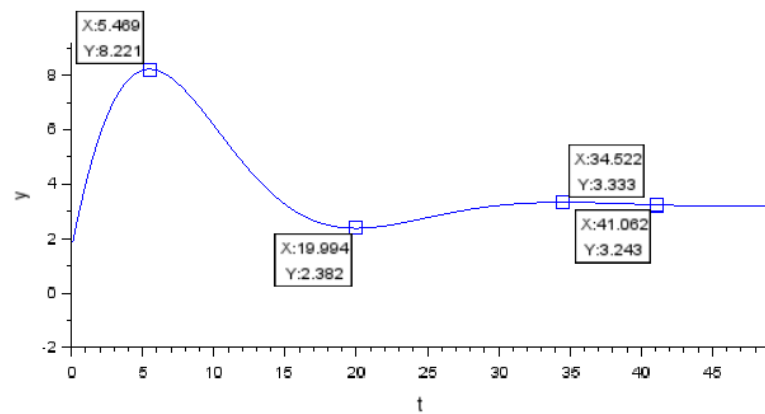


Fonte: O autor, 2024.

2.2.3 Caso 3

Para o terceiro caso, os resultados obtidos foram:

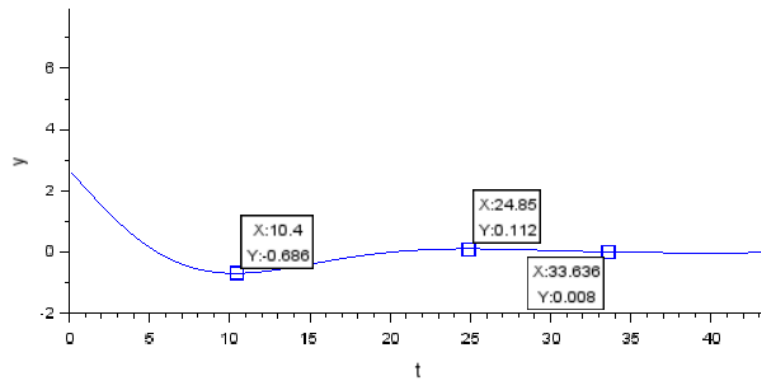
Gráfico 13 – Gráfico da posição caso 2 XCOS



Fonte: O autor, 2024.

Diferentemente do caso 2, no qual a adição de força de entrada fez o sistema convergir mais rapidamente, o caso 3 se comportou como o caso 1, porém, com o pico sendo em uma distância maior do que no caso 1.

Gráfico 14 – Gráfico da velocidade caso 2 XCOS

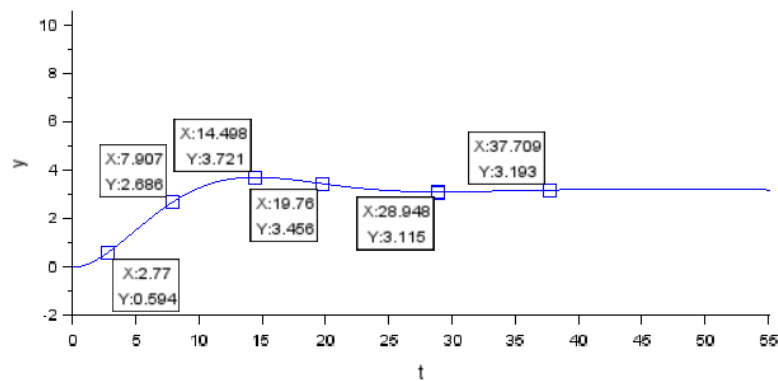


Fonte: O autor, 2024.

2.2.4 Condições iniciais nulas

A fim de exaltar algumas propriedades de sistemas dinâmicos, foi realizado um teste para as condições nulas de velocidade e posição inicial, os resultados foram os gráficos 15 e 16.

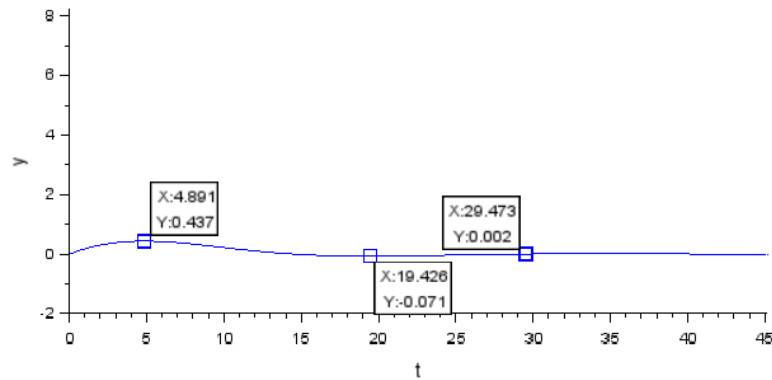
Gráfico 15 – Gráfico da posição caso 2 XCOS



Fonte: O autor, 2024.

Para o gráfico da posição (15), podemos destacar alguns pontos interessantes, o tempo de subida, que indica 10-90% do valor do estado estacionário, aproximadamente 2,4 segundos, o tempo de pico que ocorreu em $t = 3,72$ e tempo de estabelecimento que começa em $t = 19,76$ aproximadamente.

Gráfico 16 – Gráfico da velocidade caso 2 XCOS



Fonte: O autor, 2024.

2.3 Sistema controlador proporcional

2.3.1 Função de transferência

Na engenharia de controle, diversas ferramentas que descrevem comportamentos físicos são utilizadas, uma das mais importantes possibilita a descrição de comportamentos físicos complexos de forma simplificada, as funções de transferência, encontradas por meio das transformadas de Laplace.

De forma simplificada, essas funções são representações matemáticas que relacionam a entrada com a saída de um sistema, capturando a transformação do primeiro para o segundo.

Por meio dessas funções, também é possível realizar estudos de estabilidade, verificando se o determinado sistema se comporta de maneira previsível.

Uma função $G(s)$ é a razão entre a transformada de Laplace da saída $Y(s)$ com a transformada de Laplace da entrada $R(s)$, como demonstrado na expressão 10.

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} \quad (10)$$

Considerando uma equação diferencial de segunda ordem, a expressão 11 pode ser transformada por Laplace representada pela equação 12.

$$d * r(t) = a * \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b * \frac{dx(t)}{dt} + c * x(t) \quad (11)$$

$$dR(s) = a * s^2 X(s) + b * sX(s) + cX(s) \quad (12)$$

Por meio de tal, podemos aplicar as transformadas de Laplace para a equação do modelo, apresentadas pelas expressões 13, 14 e 15.

$$dR(s) = 8 * s^2 X(s) + 2 * sX(s) + 0,5X(s) \quad (13)$$

$$dR(s) = (8s^2 + 2s + 0,5)X(s) \quad (14)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{d}{8s^2 + 2s + 0,5} \quad (15)$$

A variável d é influenciada pela força de entrada aplicada, para uma força externa nula, d = 1, como mostrada pela equação 16.

$$G(s) = \frac{1}{8s^2 + 2s + 0,5} \quad (16)$$

A forma padrão de uma equação de transferência em função dos parâmetros de um sistema é dada em 17. A manipulação do modelo 16 pode ser vista nas expressões 18, .

$$G(s) = \frac{Kp}{t^2 s^2 + 2ets + 1} \quad (17)$$

$$G(s) = \frac{2}{16s^2 + 4s + 1} \quad (18)$$

$$G(s) = \frac{2}{4^2 s^2 + 2 * e * 4s + 1}, \quad Kp = 2, t = 4 \quad (19)$$

Para satisfazer a equação 18, o valor do coeficiente de amortecimento (e) precisa ser 0,5. Sabendo que Wn é a razão de 1 por t, como apresentado em 20.

$$Wn = \frac{1}{t} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad (20)$$

Os pólos de uma função de transferência são os valores de s que resultem em um

denominador zerado, ou seja, as raízes do polinômio no denominador.

Para o denominador em 18, os polos encontrados foram os representados em 21.

$$s = -\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{3}}{8}i = -0,125 \pm 0,127i \quad (21)$$

2.3.2 Controlador e sensor

Como explicado na introdução, e demonstrado na figura 2, um controlador e um sensor podem ser adicionados ao modelo para manter resultados mais próximos aos esperados.

Um controlador do tipo proporcional, possui valor igual ao próprio ganho K , como mostrado na expressão 22. Aplicar um ganho de $8/3$, resultaria em um controlador com valor $8/3$, como avaliado em 23.

$$Gc(s) = K \quad (22)$$

$$Gc(s) = \frac{8}{3} \quad (23)$$

Existem diferentes tipos de sensores, com expressões de sistema diferentes, alguns exemplos são os sensores de primeira ordem, de segunda ordem, com atraso e não-lineares.

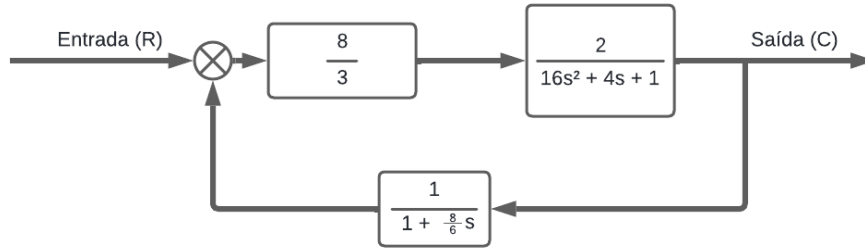
O sensor utilizado para o modelo será um sensor de primeira ordem, com ganho $KS = 1$ e constante de tempo $TS = 8/6$. A expressão padrão de um sensor de primeira ordem pode ser avaliado em 24 e os valores aplicados a essa formulação em 25.

$$Hs(s) = \frac{KS}{1 + TSs} \quad (24)$$

$$Hs(s) = \frac{1}{1 + \frac{8}{6}s} \quad (25)$$

A representação do sistema com controlador por meio de diagrama de blocos pode ser observada na figura 5.

Figura 5 – Sistema malha fechada



Fonte: O autor, 2024

Para calcular a expressão da função de transferência total do sistema, precisamos utilizar o modelo apresentado em 26, considerando que $G_p(s)$ é a função da planta, que já foi demonstrada na expressão 18

$$T(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} \quad (26)$$

Calculando primeiro o produto de $G_c(s)G_p(s)$ que é utilizado em ambos, numerador e denominador, foi obtido o resultado em 27.

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{2}{16s^2 + 4s + 1} * \frac{8}{3} = \frac{16}{48s^2 + 12s + 3} \quad (27)$$

$$T(s) = \frac{\frac{16}{48s^2 + 12s + 3}}{1 + \frac{16}{48s^2 + 12s + 3} * \frac{1}{1 + \frac{8}{6}s}} = \frac{16(1 + \frac{4}{3}s)}{64s^3 + 64s^2 + 16s + 19} \quad (28)$$

2.3.3 estabilidade

O critério de Routh-Hurwitz foi desenvolvido pelos matemáticos Adolf Hurwitz e Edward John Routh, um método analítico de verificara estabilidades de sistemas utilizando os coeficientes das equações características dos mesmos.

De acordo com Ogata, para que o sistema seja considerado estável, as raízes da equação devem ter partes reais negativas. O método permite, de forma prática, determinar se as raízes possuem essa propriedade, sem necessitarem de ser calculadas diretamente (Ogata, 2010).

Para formar a tabela do critério, a primeira linha contém os termos de ordem

ímpar da equação característica e a segunda, de ordem par. A partir da segunda linha, os valores são calculados utilizando determinantes formados pelos coeficientes encontrados nas linhas anteriores.

Para o sistema ser estável, pelo método, os elementos da primeira coluna precisam ser positivos.

O Scilab possui uma função própria para o cálculo da matriz de Routh-Hurwitz, por meio dele, foi possível gerar os coeficientes para a função de transferência do sistema controlado.

s^0	64	16
s	64	19
s^2	-3	0
s^3	19	0

Como comentado anteriormente, o sistema é considerado estável, pois a primeira coluna da matriz foi inteiramente positiva.

Para avaliarmos os valores de ganho do controlador para qual o sistema seja considerado estável podemos calcular utilizando uma variável como ganho do controlador e configurando o código do cálculo da matriz de Routh-Hurwitz.

Para o ganho do controlador K, colocamos a equação de transferência do modelo sem a função do controlador (29) e aplicamos a multiplicação por k no código posteriormente.

$$T(s) = \frac{k \cdot \frac{2}{16s^2 + 4s + 1}}{1 + \left(k \cdot \frac{2}{16s^2 + 4s + 1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{8}{6}s}\right)} = \frac{2k(3 + 4s)}{6k + 64s^3 + 64s^2 + 16s + 3} \quad (29)$$

Utilizando essa nova equação de transferência no código para gerar a matriz de Routh, obtemos o seguinte resultado:

s^0	64	$16 + 1,3k$
s	64	$9 + k$
s^2	$\frac{448 + 21,3k}{64}$	0
s^3	$9 + k$	0

Com esses valores, considerando a coluna da esquerda sendo maior ou igual a 0 para termos um sistema estável, k precisa seguir as seguintes condições:

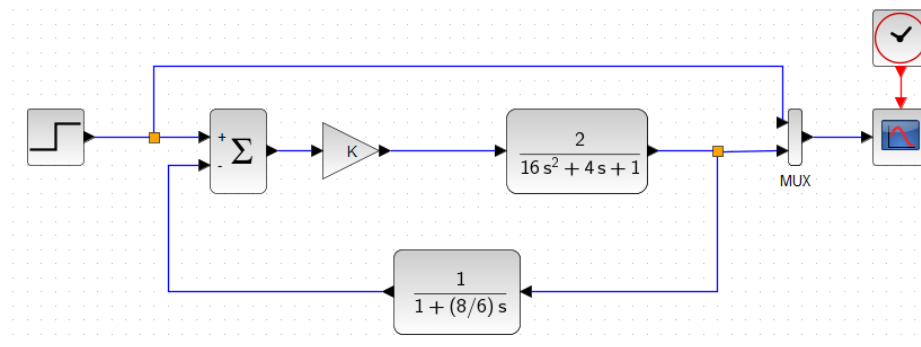
$$9 + k > 0, \text{ logo : } k > -9 \quad (30)$$

$$448 + 21,3k > 0, \text{ logo : } k > -\frac{448}{21,3} \quad (31)$$

2.3.4 controlador XCOS

Assim como foi possível realizar protótipos do modelo de malha aberta no XCOS, também é possível simular o sistema controlado (malha fechada), como mostrado na figura 6.

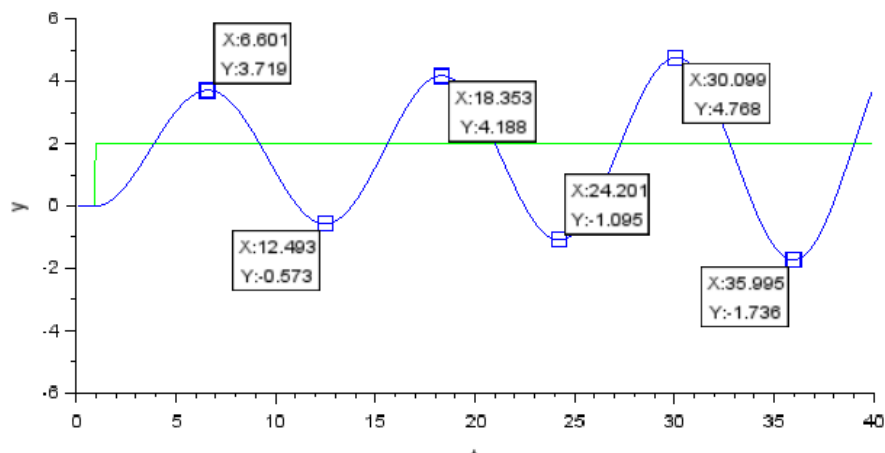
Figura 6 – Modelo controlado XCOS



Fonte: O autor, 2024

Para realizar a simulação do modelo, utilizou-se o ganho K do controlador como anteriormente, a razão 8 por 3. Com essas configurações, o resultado obtido foi o gráfico 17.

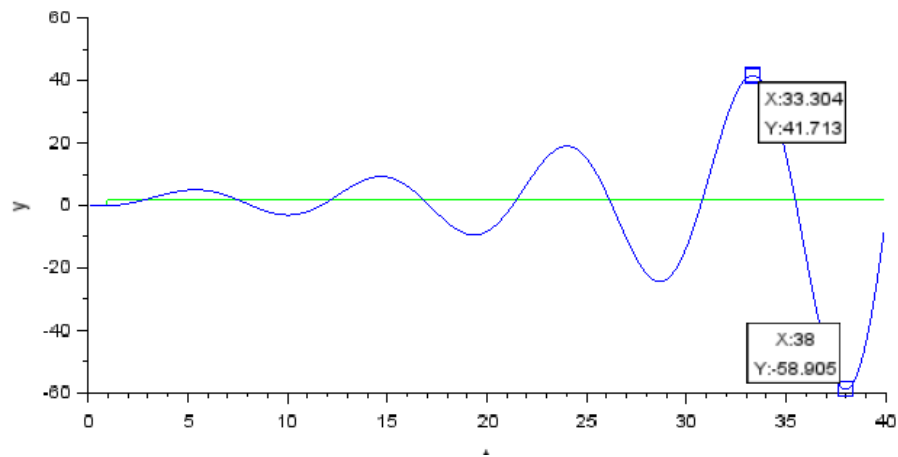
Gráfico 17 – Posição do corpo com controlador 8/3



Como observado pelo gráfico, o sistema está instável, com o passar do tempo, a posição tende a oscilar mais do que no início da simulação.

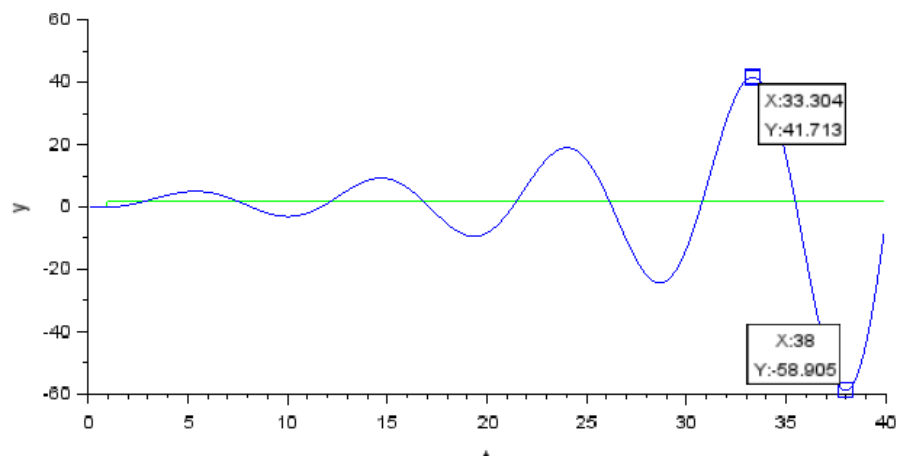
Ao duplicar o valor do ganho do controlador, o resultado obtido, como esperado, foi mais instável ainda, como avaliado no gráfico 18.

Gráfico 18 – Posição do corpo com controlador 16/3



Como visto em ambos os gráficos, a instabilidade do sistema seguiu o esperado pelo cálculo de K na matriz de Rough-Hurwitz, para termos um sistema estável, o valor de k substituído para ... Assim, obtendo o resultado do gráfico 19.

Gráfico 19 – Posição do corpo com controlador em sistema estável



2.3.5 controlador PID

Diferentemente dos controladores proporcionais, que ajustam a saída do sistema em proporção ao erro atual, os controladores PID utilizam três componentes, proporcional, integral e derivativo.

Os controladores PID são muito utilizados dada sua aplicabilidade e eficiência. Como dito anteriormente, esses sistemas utilizam três conceitos diferentes para gerar melhores resultados, cada um com uma função diferente.

O componente proporcional assim como o controlador proporcional puro, ele ajusta a saída em proporção ao erro, buscando reduzir o valor de saída com o valor esperado.

O componente integral busca corrigir o erro que o componente proporcional não consegue reduzir, acumulando e integrando o erro ao longo do tempo.

O último componente desse tipo de sistema, o derivativo, é responsável por fazer previsões de alterações do erro, buscando evitar que a saída seja prejudicada por essas alterações.

A expressão padrão de um controlador PID pode ser vista na equação 32.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(T) dT + K_d \frac{d e(t)}{dt} \quad (32)$$

O método de Ziegler-Nichols, desenvolvido por John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols, é um método eficaz para sintonizar os parâmetros dos controladores PID, fornecendo valores para o ganho K_p , K_i e K_d do sistema PID.

Os valores de K_p , K_i e K_d são tabelados, considerando a estabilidade do sistema.

K_p	K_i	K_d
$0,6K_c$	$\frac{2}{P_c}$	$0,125P_c$

O valor dado como K_c , é conhecido como ganho crítico, o ganho no qual o valor desestabiliza o sistema, seja para valores menores ou maiores que o ganho crítico. Já o P_c , é o período crítico, o tempo entre as oscilações.

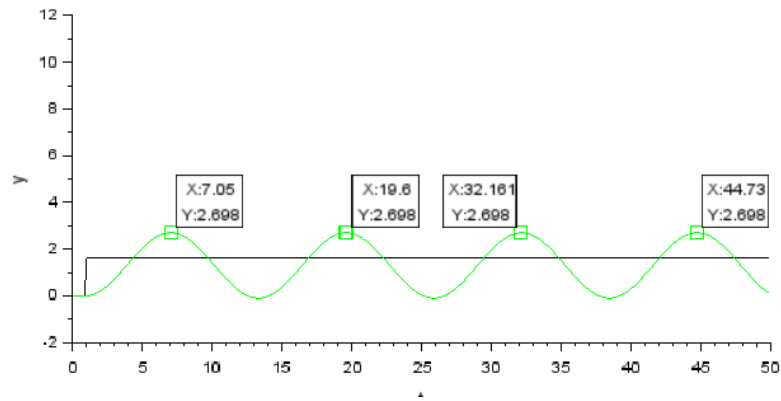
Como avaliado manualmente também, o valor de ganho crítico do controlador proporcional foi 2,1675, quaisquer valores maiores desestabilizaram o sistema, como visto no gráfico abaixo:

Por meio desse gráfico, também foi possível avaliar o período entre as oscilações, 12,55 segundos, esse valor será utilizado para aplicar o critério de Ziegler-Nichols para configurar um PID para o sistema.

Considerado o valor para o componente proporcional K_p :

$$K_p = 0,6 \cdot K_c = 0,6 \cdot 2,1675 = 1,31 \quad (33)$$

Gráfico 20 – Gráfico instável da posição do sistema com controlador

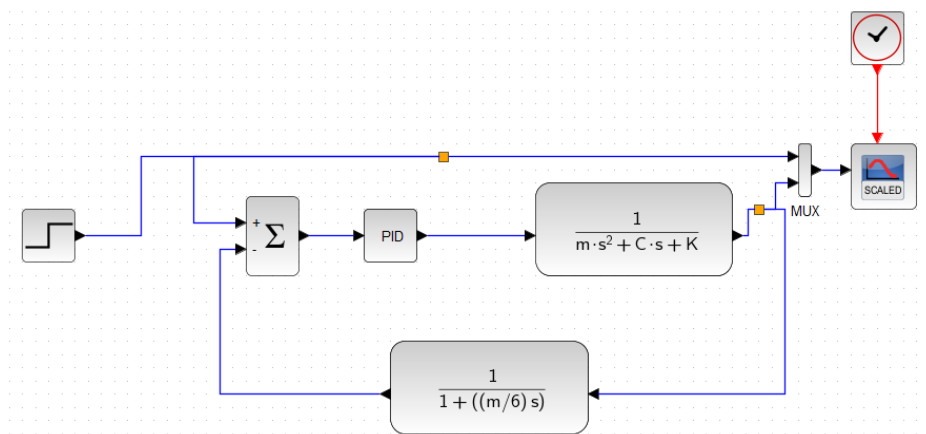


$$Ki = \frac{2}{Pc} = \frac{2}{12,55} = 0,16 \quad (34)$$

$$Kd = 0,125 \cdot Pc = 0,125 \cdot 12,55 = 1,57 \quad (35)$$

Para esses valores, o modelo da implementação foi o diagrama demonstrado em 7.

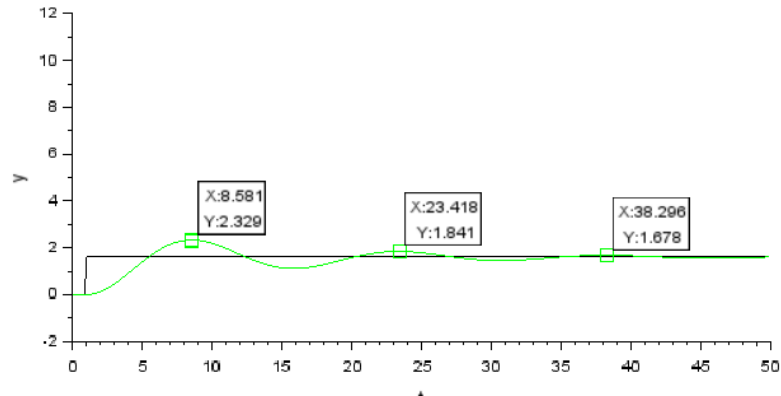
Figura 7 – Diagrama do sistema com PID



Fonte: O autor, 2024

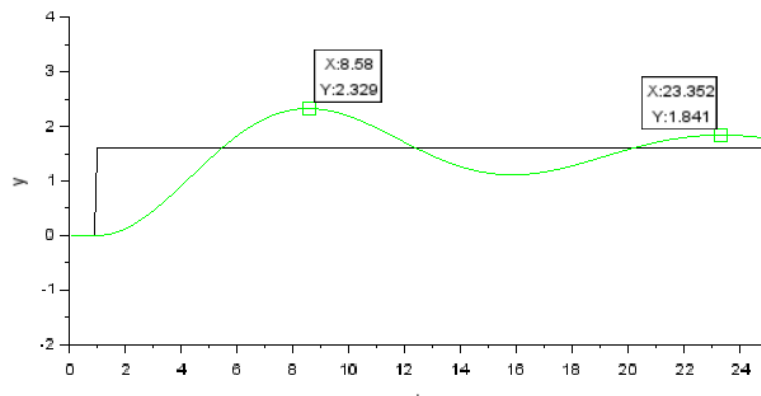
O diagrama de blocos do sistema gerou o resultado mostrado pelo gráfico 21.

Gráfico 21 – Resultado do controlador PID



O mesmo resultado, ampliado para fins de comparação, presente no gráfico 22.

Gráfico 22 – Resultado do controlador PID (ampliado)



Um estudo interessante para os controladores PID, é a influência de cada componente para o resultado do modelo. Para fins de teste, todos os componentes tiveram seus valores aumentados e diminuídos, em duas vezes.

Para a primeira modificação manual no PID, o valor do componente integral foi alterado, os resultados foram os apresentados nos gráficos 23 e 24, para o valor ampliado e reduzido respectivamente.

Gráfico 23 – Componente Integral com valor aumentado

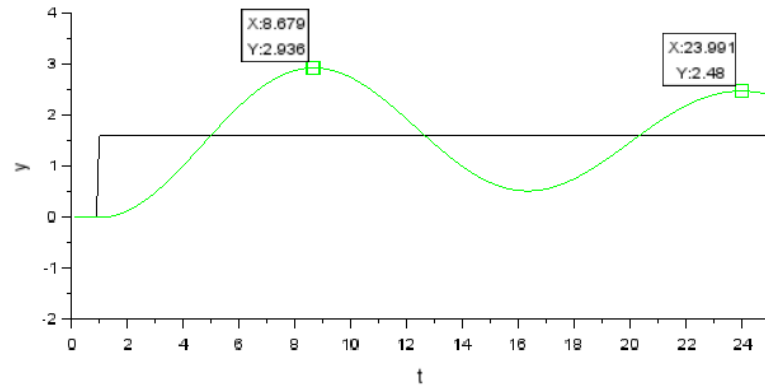
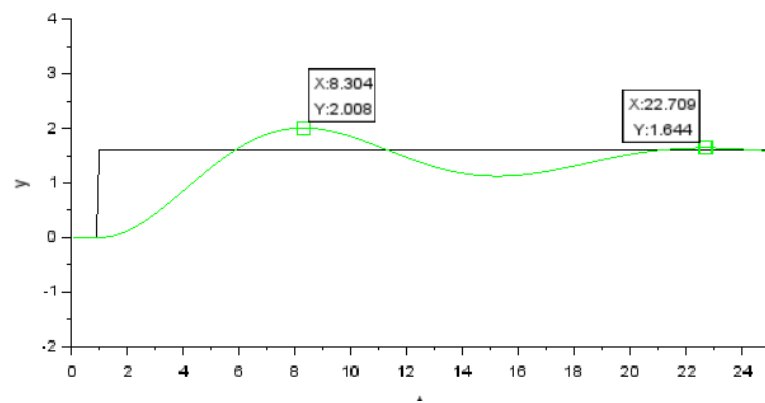


Gráfico 24 – Componente Integral com valor reduzido



A segunda modificação, foi a alteração no valor do componente derivativo, com resultados presentes nos gráficos 25 e 26, para o valor aumentado e reduzido respectivamente.

Gráfico 25 – Componente Derivativo com valor aumentado

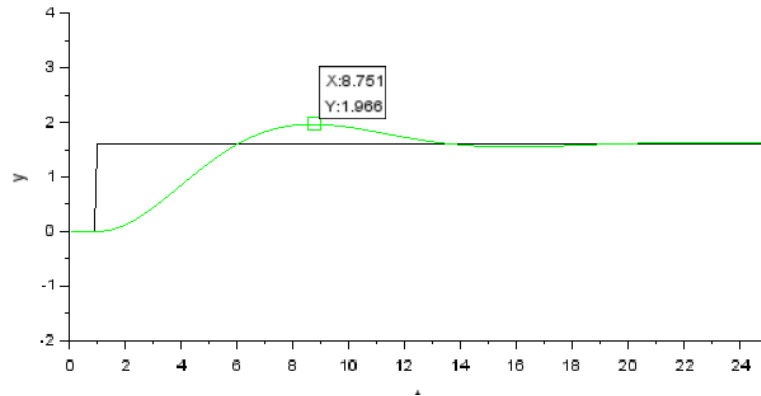
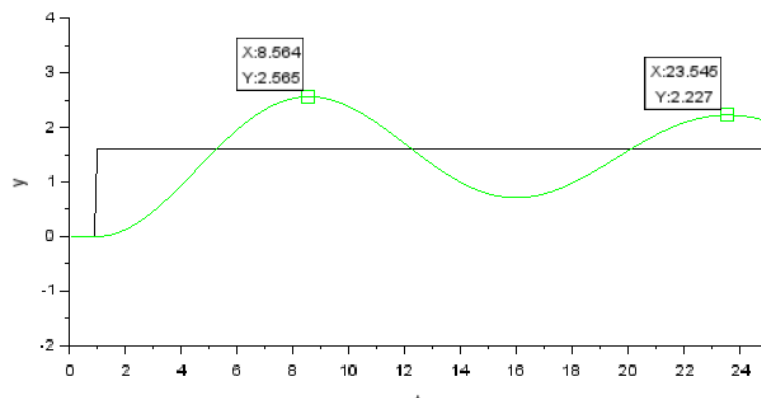


Gráfico 26 – Componente Derivativo com valor reduzido



O último componente modificado, foi o proporcional, o qual os resultados foram os gráficos 27 e 28. Porém, para o componente proporcional, o valor do ganho não pode ser inferior a 1, pois o sistema gera erro e não simula.

Aplicando os melhores resultados para cada componente em um único PID, foi obtido um resultado interessante, presente no gráfico 29.

Quando comparados os gráficos dos resultados com o PID pelo método de Ziegler-Nichols (15), o PID ajustado manualmente (22) e o controlador proporcional puro (10), podemos ver alguns aspectos interessantes. O controlador proporcional puro foi instável, enquanto que o método de Ziegler-Nichols forneceu valores ótimos para o controlador PID, porém, ainda não foi o mais otimizado, quando comparado com o ajustado manualmente.

Gráfico 27 – Componente Proporcional com valor aumentado

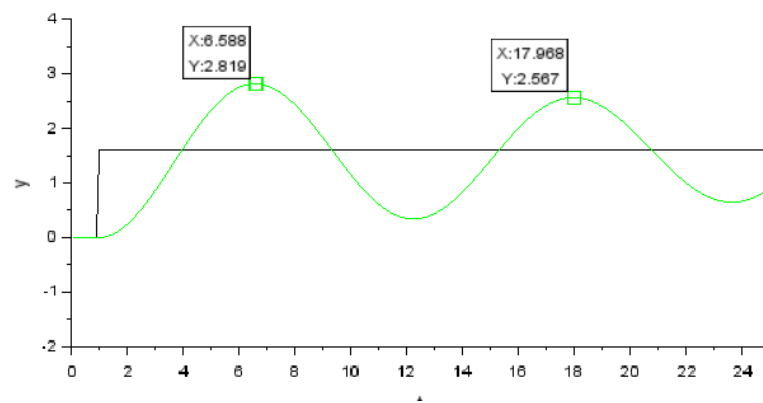


Gráfico 28 – Componente Proporcional com valor reduzido

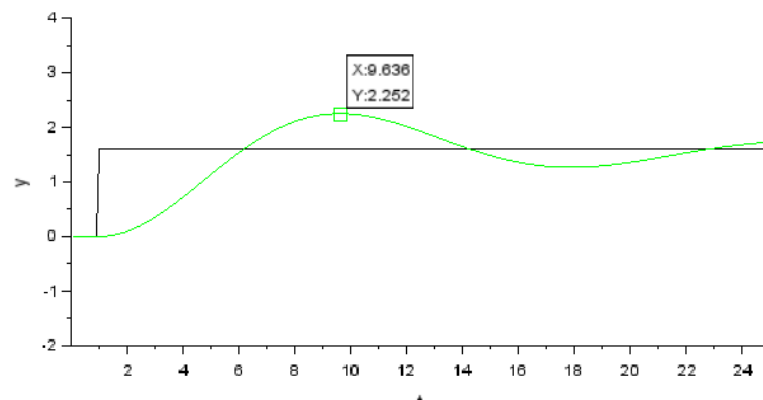
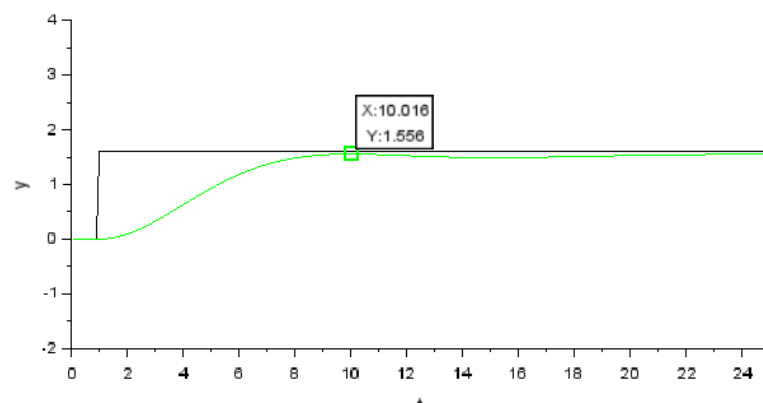


Gráfico 29 – Resultado PID manual



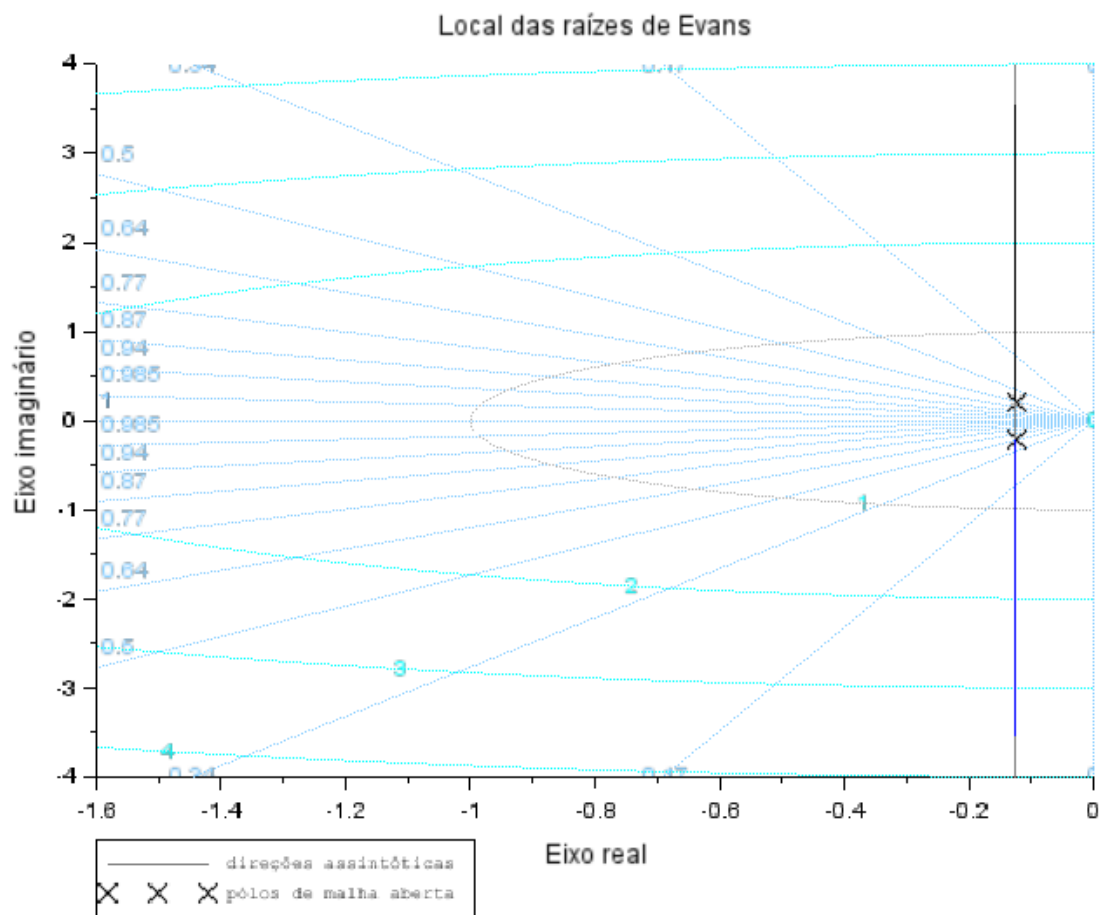
2.4 LGR Lugar Geométrico das Raízes

O método de análise do lugar geométrico das raízes é uma técnica de visualização dos pólos da função de transferência de um sistema de malha fechada em função da variação do valor de um parâmetro específico.

Apesar disso, também pode ser utilizado em malha aberta, ou seja, sem a influência de ganhos externos, como controladores ou sensores.

Por meio do LGR é possível avaliar algumas propriedades do sistema, como o overshoot, tempo de pico, tempo de estabilização, entre outros.

Gráfico 30 – LGR do sistema



Para o gráfico encontrado, temos os pólos definidos em 36, que são os mesmos pólos obtidos em 21.

$$s = -0,125 \pm 0,217i \quad (36)$$

Como o sistema não gera nenhum zero, somente pólos, temos que o número de assíntonas do sistema é igual ao número de pólos, portanto, duas.

Pela expressão padrão das assíntonas dada em 37 é possível calcular os valores para o sistema do projeto, representados em 38.

$$\alpha_k = \frac{(2k + 1) 180^\circ}{num(a)} \quad (37)$$

$$\alpha_k = \frac{(2k + 1) 180^\circ}{2} = \quad \alpha_0 = \frac{(1) 180^\circ}{2} \text{ e } \alpha_1 = \frac{(2 + 1) 180^\circ}{2} \quad (38)$$

Então encontramos os valores das assíntonas para o nosso sistema sendo 39 e 40.

$$\alpha_0 = 90^\circ \quad (39)$$

$$\alpha_1 = 270^\circ = -90^\circ \quad (40)$$

Além disso, dado o gráfico LGR, podemos afirmar a simetria no eixo real, o que indica que a parte imaginária aparece em pares conjugados, cada trajetória se repete no superior e inferior.

Considerando o sistema de malha aberta estudado, ele permanece estável por si, já que, pelo gráfico não é possível visualizar nenhuma instabilidade, pois nenhuma trajetória dos pólos cruzam o eixo imaginário.

Por se manter inteiramente estável nesse gráfico, por meio deste, não é possível avaliar um possível ganho crítico.

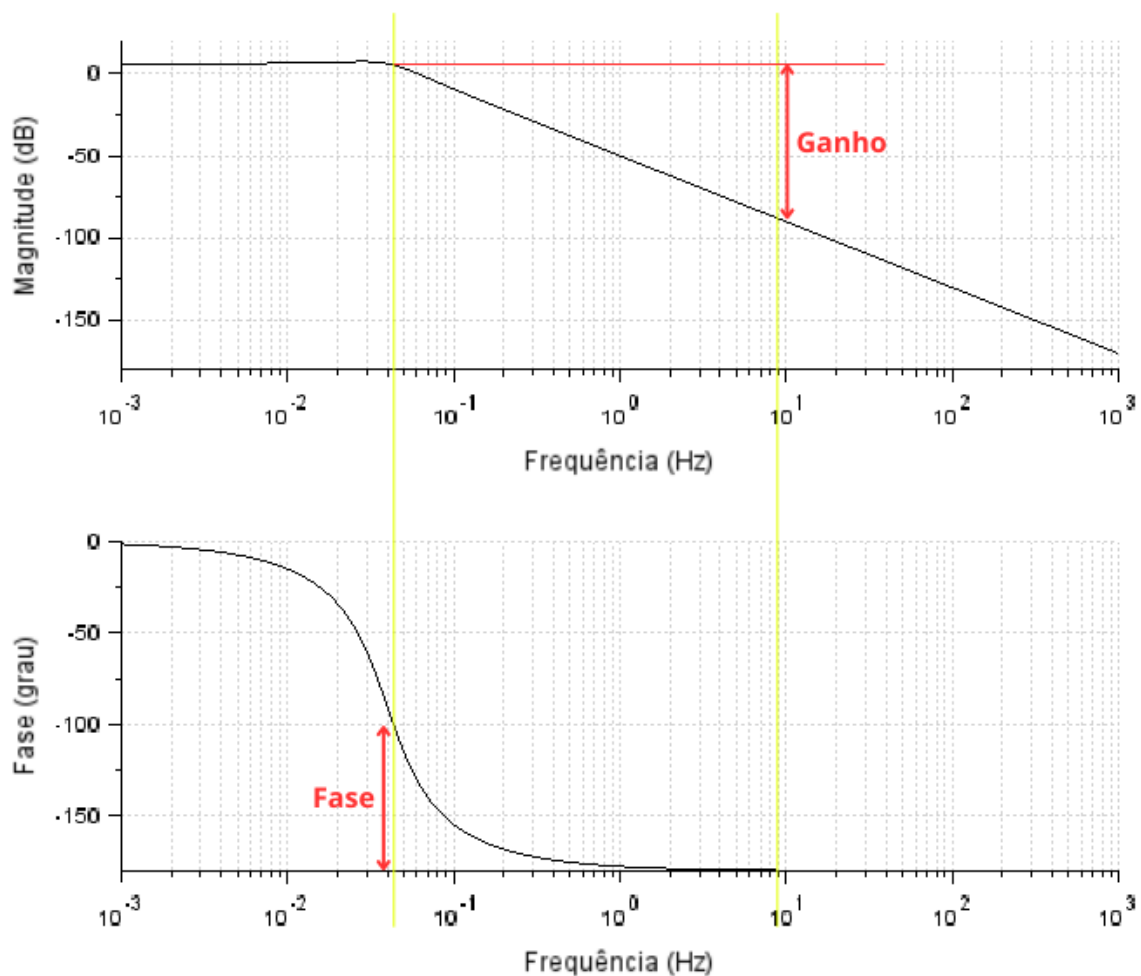
2.5 Diagrama de Bode

Introduzido por Hendrik Wade Bode, o método dos diagramas de Bode é uma ferramenta visual para analisar modelos de sistemas lineares, dividido em duas partes, diagrama de magnitude e diagrama de fase.

Os diagramas são utilizados para verificar o desempenho do modelo e a estabilidade, além de auxiliar na implementação de sistemas de controle, facilitando o ajuste da sintonia de controladores.

Os diagramas de Bode encontrados para a função de transferência da planta do sistema está demonstrado nos gráficos presentes na figura 8.

Figura 8 – Diagramas de Bode



Fonte: O autor, 2024

A margem de ganho, representa o ganho que um sistema pode suportar, mantendo a estabilidade em malha fechada, esse valor é medido no ponto em que a frequência de fase cruza por 180 graus.

A margem de fase, apresenta o quanto a fase do sistema pode ser atrasada sem que o sistema perca estabilidade, também em malha fechada, esse valor é medido quando o valor da frequência cruza por 0 dB.

Pelos diagramas gerados pelo código Scilab, podemos observar que o sistema é estável, pois ambas as margens de ganho e fase são maiores que zero.

2.6 Diagrama de Nyquist

O método de Nyquist é um importante critério para o estudo da estabilidade de sistemas de controle. Por meio de tal, é possível avaliar a estabilidade em malha fechada de um sistema por meio da sua função em malha aberta.

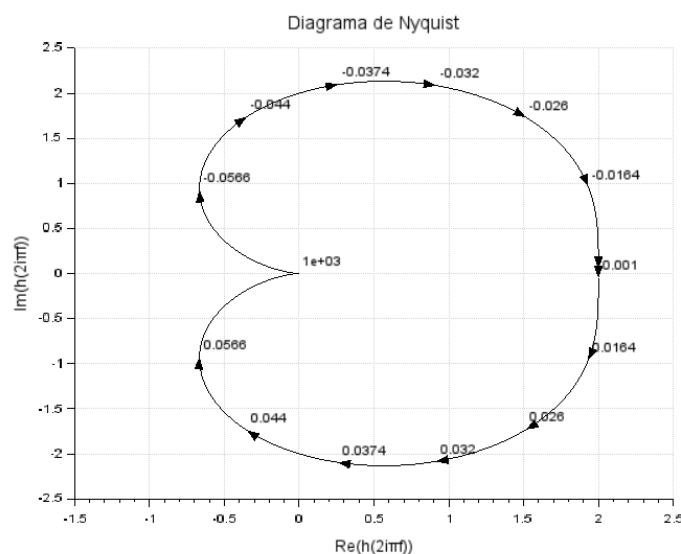
O método se baseia na análise de diagramas da resposta em frequência de uma função de transferência.

Para esse critério, alguns pontos são cruciais, o plano s , para os valores reais é dividido nos semi-planos esquerdo e direito, a partir do ponto zero. Quanto ao plano dos valores imaginários, o ponto $-1 + j0$ é essencial para a aplicação do método.

Para o plano real, a quantidade de pólos presentes no semi-plano direito deve ser contabilizada. Além disso, se a curva do sistema contornar o ponto crítico citado anteriormente, deve-se contabilizar a quantidade de voltas.

Para o sistema ser considerado estável por Nyquist, o valor da soma desses valores deve ser zero.

Figura 9 – Diagramas de Nyquist



Fonte: O autor, 2024

No gráfico de Nyquist, podemos observar que o ponto $-1 + j0$, está isolado e longe das curvas traçadas, portanto, o número de curvas (N) é nulo. Para os pólos da equação de transferência dados em 21 ou em 36, podemos afirmar que estão ao semi-plano esquerdo do plano real, ou seja, o número de pólos (P) no semi-plano direito, também é nulo.

Como definido anteriormente, para um sistema ser dado estável, Z precisa ser 0, como ambos N e P são nulos, a regra é verdadeira, então o sistema é considerado estável em malha fechada.

2.6.1 Título da subseção

Texto da subseção

2.6.1.1 Título da subsubseção

Texto da subsubseção

CONCLUSÃO

Texto da conclusão.

REFERÊNCIAS

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2015.

MURAYAMA, N. *Introdução os sistemas de controle*. PMR-EPUSP, 2017. Disponível em: http://endereco.eletronicohttps://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4183182/mod_resource/content/1/Aula1V2017.pdf. Acesso em: 29 Maio 2024.

WIKIPÉDIA. *Amortecimento* — *Wikipédia, a enciclopédia livre*. 2023. [Online; accessed 20-março-2023]. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Amortecimento&oldid=65527065>.

WIKIPÉDIA. *Lei de Hooke* — *Wikipédia, a enciclopédia livre*. 2023. [Online; accessed 14-novembro-2023]. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Lei_de_Hooke&oldid=66963243.

GLOSSÁRIO

termo 1	significado
termo 2	significado
termo 3	significado

ANEXO A – Códigos

A.1 Código ODE()

```
clc; clear; clf;  
global m C K; m = 8; C = 2; K = 0.5;  
function xp = f(t,x) xp(1) = x(2); xp(2) = (-C*x(2) - K*x(1))/m; endfunction  
t0 = 0 ; x0 = m/5 ; v0 = m/3; t = 0:0.01:70; y = ode([x0; v0], t0, t, f);  
plot(t,y(2,:), 'linewidth', 3);
```

A.2 Matriz de Routh-Hurwitz

```

clear; clc;
m = 8;
s = poly(0, 's');
//num = 16*(1+((4/3)*s)); //den = 64*s^3 + 64 * s^2 + 16 * s + 19; eq = (16 * (1 +
((4/3) * s)))/(64 * s^3 + 64 * s^2 + 16 * s + 1)
ft = syslin([], eq);
k = m/5; r = routh_t(ft, k); printf("Matriz de Routh - Hurwitz : "); disp(r);

```

A.3 Matriz de Routh-Hurwitz para ganho K

```

clear; clc;
s = poly(0, 's'); k = poly(0, 'k');
num = ((1+((4/3)*s))); den = (64*s^3 + 64 * s^2 + 16 * s + 9);
//eq = (6*(1+((4/3)*s)))/(64*s^3 + 64 * s^2 + 16 * s + 9)
funcaoTransferencia = syslin([], num./den);
r = routh_t(funcaoTransferencia, k); printf("Matriz de Routh-Hurwitz : "); disp(r);

```

A.3.1 Título da subseção

Texto da subseção.

A.3.1.1 Título da subsubseção

Texto da subsubseção.