



## **Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro**

Curso de Engenharia da Computação

**Guilherme Cagide Fialho**

**Projeto de Modelagem e Controle de Sistemas em Scilab**

**Nova Friburgo**

**2024**



## **Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro**

Graduação em Engenharia da Computação

Guilherme Cagide Fialho

### **Projeto de Modelagem e Controle de Sistemas em Scilab**

Projeto de Conclusão da Disciplina  
Modelagem e Controle de Sistemas

Orientador: Prof. Joel Sánchez Domínguez

Nova Friburgo

2024

## RESUMO

## **ABSTRACT**

# 1 Atividade 1

## 1.1 Descrição do Modelo

O sistema modelado é um oscilador massa-mola-amortecedor, onde a massa está sujeita à força restauradora de uma mola e ao amortecimento proporcional à velocidade. A equação diferencial que descreve o movimento do sistema é dada por:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

onde  $x$  representa o deslocamento da massa  $m$  da sua posição de equilíbrio,  $\dot{x}$  é a velocidade,  $\ddot{x}$  é a aceleração,  $C$  é o coeficiente de amortecimento, e  $K$  é a constante da mola. A força de entrada é considerada nula, indicando que não há forças externas atuando sobre o sistema após o instante inicial.

## 1.2 Parâmetros do Sistema

Os parâmetros utilizados no modelo do sistema são especificados como segue:

- Massa ( $m$ ): 10 kg
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m
- Constante da mola ( $K$ ): 5 N/m

## 1.3 Condições Iniciais para a Simulação

As condições iniciais para a simulação são detalhadas na tabela a seguir, baseadas nos parâmetros especificados acima:

Caso	Velocidade Inicial $V_0$	Posição Inicial $X_0$
1	5 m/s	0 m
2	0 m/s	2.5 m
3	3.33 m/s	2 m

Esta tabela reflete os valores numéricos para cada caso, facilitando a compreensão e a aplicação direta dos parâmetros na simulação.

## 1.4 Código Scilab para simular a resposta do sistema massa-mola-amortecedor

Código Scilab utilizado para as análises que serão feitas subsequentes

```
1 // Definicao das principais variaveis do sistema fisico
2 m = 10; // massa
3 c = 7; // coeficiente de amortecimento
4 k = 5; // constante da mola
5
6 // Funcao que define o sistema de equacoes diferenciais (EDO)
7 // para o modelo massa-mola-amortecedor
8 function dxdt = sistema(t, x)
9 // x(1) representa o deslocamento, x(2) representa a
10 // velocidade
11 // Esta funcao retorna a derivada da velocidade e do
12 // deslocamento, respectivamente
13 dxdt = [x(2); -c/m * x(2) - k/m * x(1)];
14 endfunction
15
16 // Configuracao do intervalo de tempo para a simulacao
17 t0 = 0; // Tempo inicial (s)
18 tf = 20; // Tempo final (s)
19 t = linspace(t0, tf, 1000); // Cria um vetor de tempo
20 // linearmente espacado para a simulacao
21
22 // Definicao das condicoes iniciais para cada caso de
23 // simulacao
24 condicoes_iniciais = [
25 m/5, m/3; // Caso 3: posicao inicial (m) e velocidade inicial
26 // (m/s)
27 m/4, 0; // Caso 2: posicao inicial (m) e velocidade inicial
28 // (m/s)
```

```

22     0, m/2; // Caso 1: posicao inicial (m) e velocidade inicial
           (m/s)
23     ];
24
25     // Cores designadas para cada caso de simulacao para facilitar
           a visualizacao
26     cores = ['#007bff', '#dc3545', '#8B4513']; // Azul, vermelho,
           marrom
27
28     // Loop para executar e plotar cada caso de simulacao
           separadamente
29     for i = 1:3
30         x0 = condicoes_iniciais(i, :); // Transpoe as condicoes
           iniciais para a formatacao correta
31         sol = ode(x0, t0, t, sistema); // Resolve a EDO usando o
           metodo de ODE
32
33         scf(i); // Cria uma nova figura para cada iteracao
34         plot(t, sol(1, :), 'color', cores(i), 'LineWidth', 2);
           // Plot do deslocamento x(t)
35         xlabel('Tempo (s)'); // Etiqueta do eixo X
36         ylabel('Deslocamento x(t)'); // Etiqueta do eixo Y
37         title(['Resposta do Sistema para o Caso ', string(i)]); //
           Titulo do grafico
38         legend('x(t)', "location", "best"); // Legenda
39         xgrid(); // Ativa a grade no grafico
40     end
41
42     // Preparacao do grafico combinado
43     scf(); // Cria uma nova figura
44     clf(); // Limpa a figura atual
45     xlabel('Tempo (s)');
46     ylabel('Deslocamento x(t)');
47     title('Resposta do Sistema para Todos os Casos');
48     xgrid(); // Ativando a grade
49
50     // Execucao da simulacao para cada caso e plotagem no mesmo
           grafico
51     for i = 1:3
52         x0 = condicoes_iniciais(i, :); // Condicoes iniciais para o
           caso i (transposto para coluna)
53         sol = ode(x0, t0, t, sistema); // Resolvendo a equacao
           diferencial
54
55         // Plotando os resultados com cores definidas
56         plot(t, sol(1, :), 'color', cores(i), 'LineWidth', 2);
57     end
58
59     // Criar a legenda detalhando cada caso
60     legend(['Caso 1: x0 = 0, v0 = m/2', 'Caso 2: x0 = m/4, v0 = 0',
           'Caso 3: x0 = m/5, v0 = m/3'], "location", "best");

```

Listing 1: Código Scilab para simular a resposta do sistema massa-mola-amortecedor

## 1.5 Análise dos Resultados

Cada um dos casos de simulação foi configurado com condições iniciais distintas para explorar como o sistema responde a diferentes estados iniciais de deslocamento e velocidade.

### 1.5.1 Caso 1: Velocidade Inicial Elevada

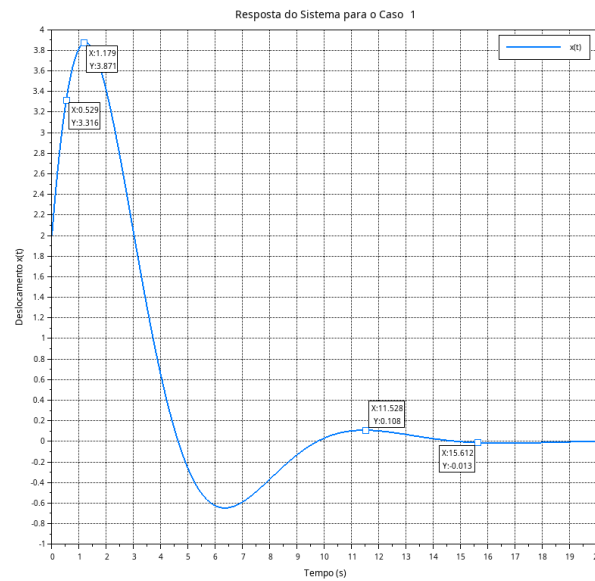


Figure 1: Resposta do sistema para o Caso 1

No Caso 1, o sistema é inicialmente impulsionado com uma alta velocidade (5 m/s), partindo do repouso ( $X_0 = 0$ ). Esta condição inicial leva a uma resposta inicialmente enérgica, onde a massa oscila com uma amplitude elevada, seguida de um rápido decaimento energético devido ao amortecimento significativo ( $C = 7 \text{ Ns/m}$ ). O amortecimento não só reduz a amplitude das oscilações rapidamente, mas também garante que o sistema não persista em um estado de oscilação prolongada, estabilizando-se em um tempo curto.

### 1.5.2 Caso 2: Deslocamento Inicial Sem Velocidade

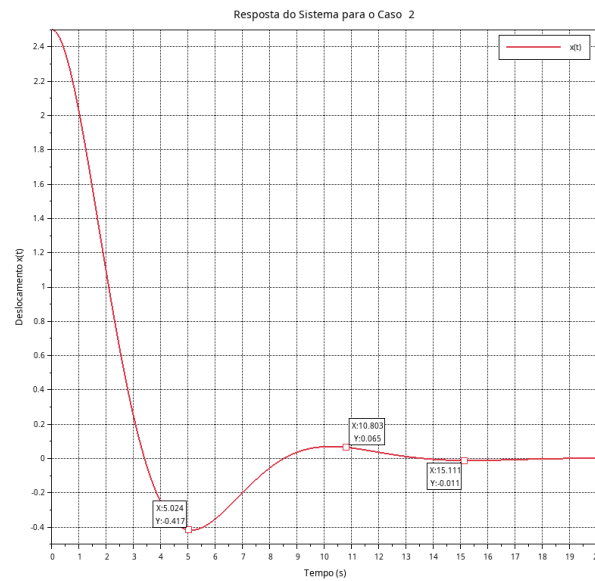


Figure 2: Resposta do sistema para o Caso 2

O Caso 2 é caracterizado por um deslocamento inicial (2.5 m) sem impulso inicial de velocidade ( $V_0 = 0$ ). Aqui, observamos uma resposta típica de um sistema oscilatório subamortecido onde o sistema retorna ao equilíbrio através de oscilações que decaem gradativamente. Este caso destaca como a energia potencial armazenada na mola é convertida em energia cinética e dissipada pelo amortecedor. As oscilações decrescem em amplitude mais gradualmente do que no Caso 1, demonstrando uma transferência de energia mais prolongada antes da estabilização.



### 1.5.3 Caso 3: Velocidade e Deslocamento Iniciais

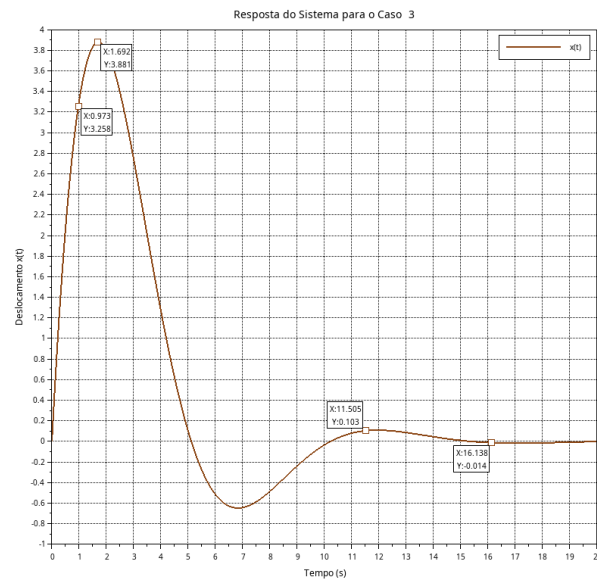


Figure 3: Resposta do sistema para o Caso 3

No Caso 3, o sistema inicia com condições iniciais moderadas tanto de velocidade (3.33 m/s) quanto de deslocamento (2m). Esta configuração produz uma resposta dinâmica complexa, onde a interação entre energia cinética e potencial é mais evidente. A amplitude inicial é significativa, com uma taxa de decaimento que ilustra eficientemente o papel do amortecimento. As oscilações observadas são mais sustentadas que no Caso 1, mas menos intensas do que no Caso 2, refletindo um equilíbrio entre as energias cinética e potencial no início da simulação.

### 1.5.4 Comparação Unificada dos Casos

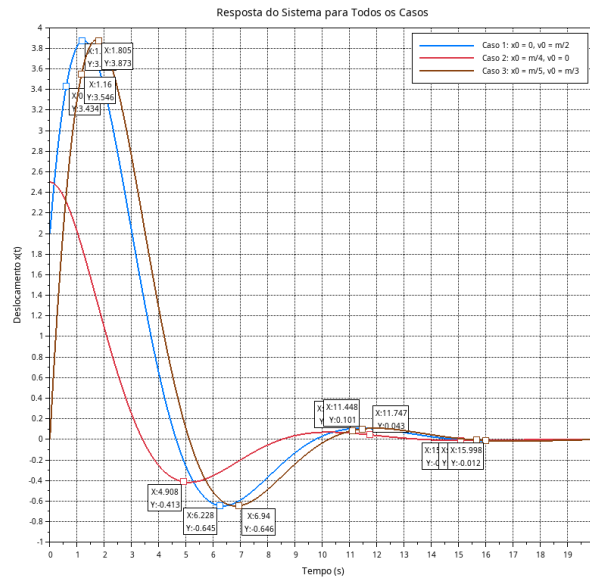


Figure 4: Resposta unificada do sistema para os Casos 1, 2 e 3

A análise unificada dos três casos demonstra de forma clara as diferenças significativas nas respostas do sistema decorrentes de diversas condições iniciais. A seguir, discutiremos detalhadamente cada resposta e suas implicações para a compreensão do comportamento dinâmico do sistema:

- **Caso 1 (Azul Escuro):** Iniciado com uma alta velocidade inicial (5 m/s) e sem deslocamento inicial, este caso exibe a maior amplitude de oscilação observada. A energia cinética inicial é rapidamente convertida em energia potencial pela mola, resultando em oscilações de grande amplitude que são rapidamente amortecidas. Este caso ilustra o efeito de um forte amortecimento, onde a energia é dissipada rapidamente, levando a um retorno rápido à posição de equilíbrio sem oscilações residuais prolongadas. Esta configuração é ideal em situações onde a rápida estabilização após distúrbios é crucial, como em sistemas de suspensão de veículos.
- **Caso 2 (Vermelho):** Com um deslocamento inicial (2.5 m) e sem velocidade inicial, o sistema mostra uma resposta clássica de um oscilador subamortecido. A energia potencial armazenada na mola é convertida gradualmente em energia cinética, com a energia sendo dissipada ao longo do tempo pelo amortecedor. As oscilações decaem suavemente, refletindo uma conversão mais lenta de energia que é típica em aplicações onde é necessário manter uma certa quantidade de movimento ou onde oscilações graduais são preferíveis, como em alguns tipos de sensores mecânicos.
- **Caso 3 (Marrom):** Este caso combina condições iniciais moderadas de velocidade (3.33 m/s) e deslocamento (2 m), resultando numa resposta dinâmica mais complexa que engloba características dos dois primeiros casos. A amplitude inicial é significativa, mas as oscilações são mais controladas e decaem de maneira gradual. Este caso destaca a importância do equilíbrio entre rigidez da mola e amortecimento no projeto de sistemas mecânicos, onde é necessário um compromisso entre estabilidade rápida e manutenção de energia dinâmica.

Esta comparação detalhada destaca não apenas a influência das condições iniciais na resposta do sistema, mas também o papel crítico do amortecimento e da rigidez da mola na determinação da natureza da resposta dinâmica. A análise fornece insights valiosos para o design e a otimização de sistemas mecânicos em engenharia, sublinhando a necessidade de uma seleção cuidadosa de parâmetros de acordo com os requisitos específicos de cada aplicação.

## 1.6 Comentários Gerais e Conclusão

Os gráficos e análises ilustram claramente como as condições iniciais impactam a resposta dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor. A energia inicial, seja como deslocamento ou velocidade, define a resposta imediata do sistema, mostrando a complexidade do comportamento de sistemas dinâmicos lineares. Observamos que o amortecimento é essencial para reduzir as oscilações e trazer o sistema de volta ao repouso de maneira eficiente, sublinhando sua importância no design de componentes mecânicos.

A adequação do coeficiente de amortecimento e da rigidez da mola é crucial para otimizar sistemas para suas funções específicas, como a absorção de choques em suspensões de veículos ou a precisão em instrumentos de medição. Além disso, a análise das condições iniciais é vital no planejamento e teste de sistemas mecânicos, onde engenheiros e designers devem antecipar cenários variados de operação.

Este estudo destaca a necessidade de um entendimento profundo das dinâmicas de sistemas para inovação em engenharia, proporcionando uma base sólida para a compreensão dos princípios de mecânica e dinâmica que são fundamentais no design de sistemas controlados e mecanismos em geral.

## 2 Atividade 2: Simulação com Xcos

### 2.1 Descrição do Modelo e Ferramentas

Nesta atividade, utilizamos o Xcos, uma ferramenta gráfica do Scilab para a simulação de sistemas dinâmicos. O Xcos permite a construção de diagramas de blocos que facilitam a visualização e implementação do sistema massa-mola-amortecedor com diferentes entradas e condições iniciais.

### 2.2 Parâmetros do Sistema

O sistema é descrito pelos seguintes parâmetros, que são consistentes com os usados na Atividade 1:

- Massa ( $m$ ): 10 kg
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m
- Constante da mola ( $K$ ): 5 N/m

### 2.3 Condições Iniciais de Simulação

As simulações foram executadas sob várias condições iniciais para explorar a resposta do sistema sob diferentes estados iniciais. A seguir estão as condições iniciais utilizadas, incluindo uma condição inicial adicional específica para esta atividade (Caso 0):

Caso	Velocidade Inicial $V_0$	Posição Inicial $X_0$
0	0 m/s	0 m
1	5 m/s	0 m
2	0 m/s	2.5 m
3	3.33 m/s	2 m

Esta tabela facilita a referência rápida às condições iniciais para cada caso simulado, permitindo uma comparação mais direta entre os diferentes cenários testados.

## 2.4 Diagrama de Blocos no Xcos

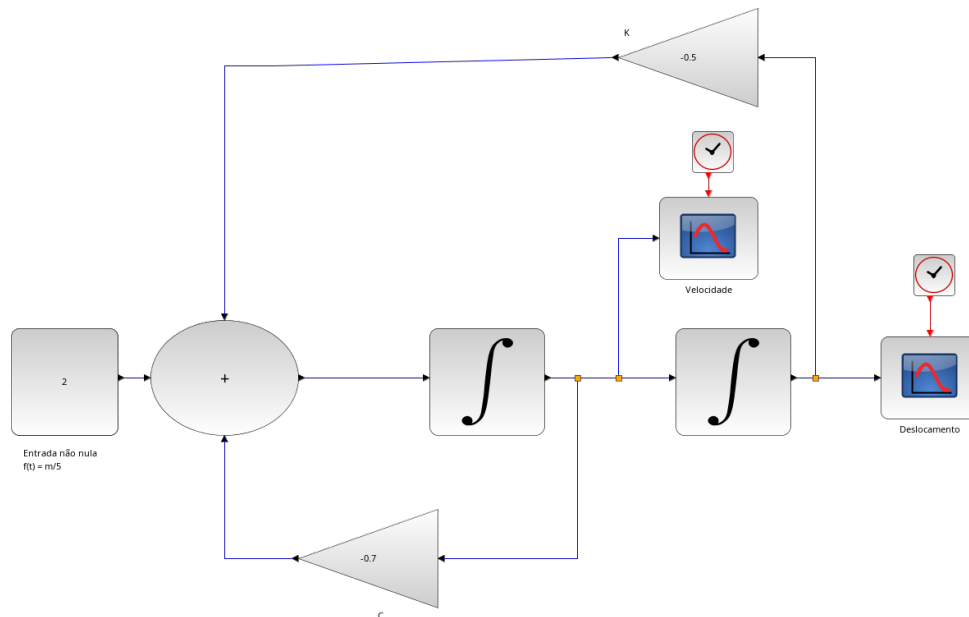


Figure 5: Diagrama de blocos utilizado na simulação no Xcos.

## 2.5 Resultados e Análise

### 2.5.1 Análise dos Resultados para o Caso 0

No Caso 0, analisamos a resposta do sistema quando ele parte de condições completamente estáticas ( $V_0 = 0\text{ m/s}$  e  $X_0 = 0\text{ m}$ ). Esta configuração é vital para avaliar a resposta pura do sistema a uma entrada controlada sem influência inicial de deslocamento ou velocidade.

## Deslocamento

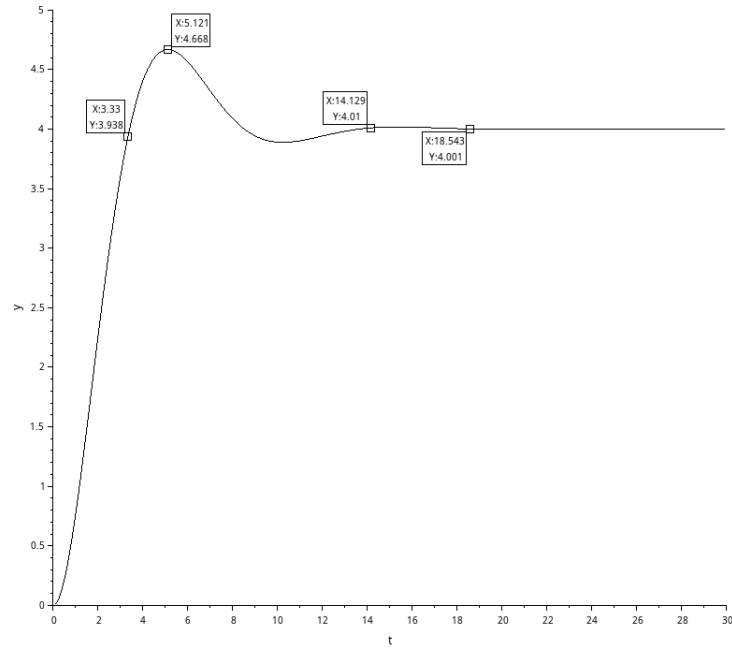


Figure 6: Gráfico de deslocamento para o Caso 0.

O gráfico de deslocamento revela um pico máximo de aproximadamente 4.7 unidades aos 5.1 segundos, marcando o tempo de pico. O tempo de subida, definido como o intervalo para atingir o primeiro pico máximo a partir do repouso, é, portanto, cerca de 5.1 segundos. Após atingir o pico, o sistema exibe oscilações amortecidas que rapidamente reduzem em amplitude. O tempo de estabelecimento, onde as oscilações ficam dentro de uma faixa de  $\pm 2\%$  do valor final, é aproximadamente de 18 segundos, após o qual o sistema entra em uma zona estacionária, indicando estabilidade.

## Velocidade

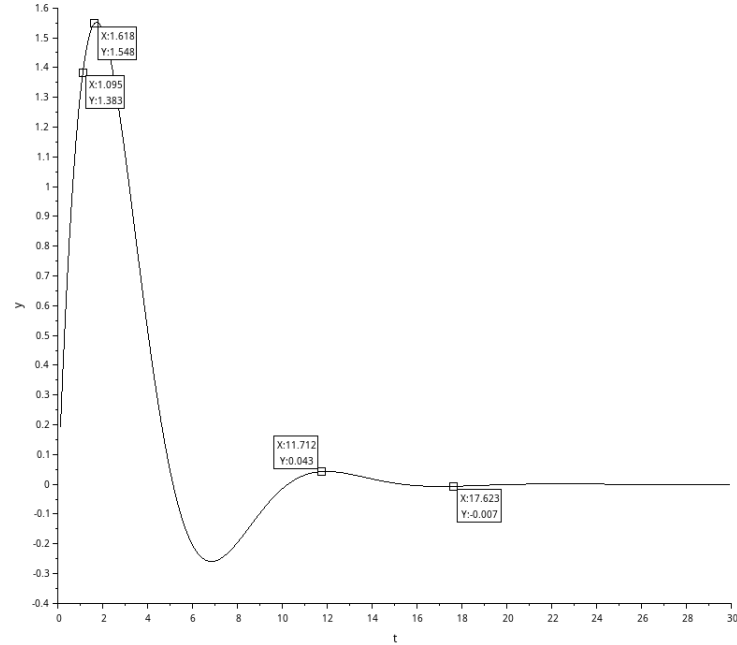


Figure 7: Gráfico de velocidade para o Caso 0.

O gráfico de velocidade reflete a resposta imediata do sistema à força aplicada. A velocidade atinge um pico negativo de cerca de -1.54 unidades em torno de 6.2 segundos, o que corresponde ao tempo de pico para a velocidade. A velocidade oscila abaixo e acima de zero, indicando a resposta oscilatória do sistema ao deslocamento. As oscilações diminuem progressivamente e o sistema alcança a zona estacionária por volta de 18 segundos, estabilizando-se completamente em zero.

### Comentários Gerais

A análise do Caso 0 mostra como o sistema responde a um estímulo externo na ausência de condições iniciais de energia. Os parâmetros transitórios, como tempo de subida, pico, e de estabelecimento, juntamente com a observação da zona estacionária, são cruciais para entender a dinâmica do sistema e a eficácia do amortecimento em trazer o sistema de volta ao repouso, minimizando oscilações excessivas. Este caso estabelece uma base comparativa para outros casos com condições iniciais variadas.

### 2.5.2 Análise dos Resultados para o Caso 1

No Caso 1, analisamos a resposta do sistema quando ele parte com uma velocidade inicial significativa ( $V_0 = 5 \text{ m/s}$ ) e sem deslocamento inicial ( $X_0 = 0 \text{ m}$ ). Esta condição inicial permite avaliar como uma energia cinética inicial afeta a resposta dinâmica do sistema, especialmente em termos de deslocamento máximo e oscilações resultantes.

## Deslocamento

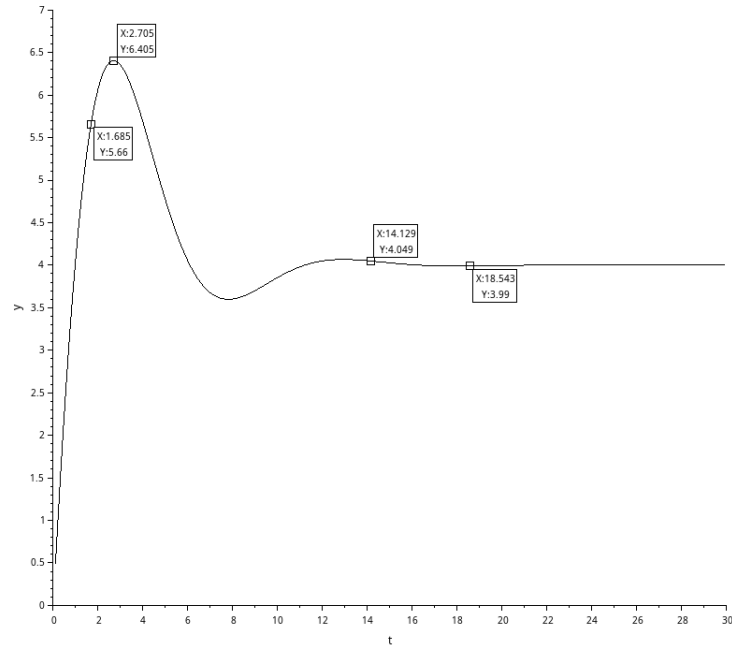


Figure 8: Gráfico de deslocamento para o Caso 1.

O gráfico mostra que o sistema parte de zero e rapidamente atinge um pico de aproximadamente 6.5 unidades ao redor de 2.7 segundos, refletindo uma resposta aguda à velocidade inicial. Esse pico é seguido por uma diminuição significativa, que desce abaixo do zero antes de estabilizar. O tempo de subida é rapidamente alcançado, enquanto o tempo de estabelecimento, onde as oscilações permanecem dentro de uma faixa de  $\pm 2\%$  do valor estacionário final, é observado por volta de 18 segundos.

## Velocidade

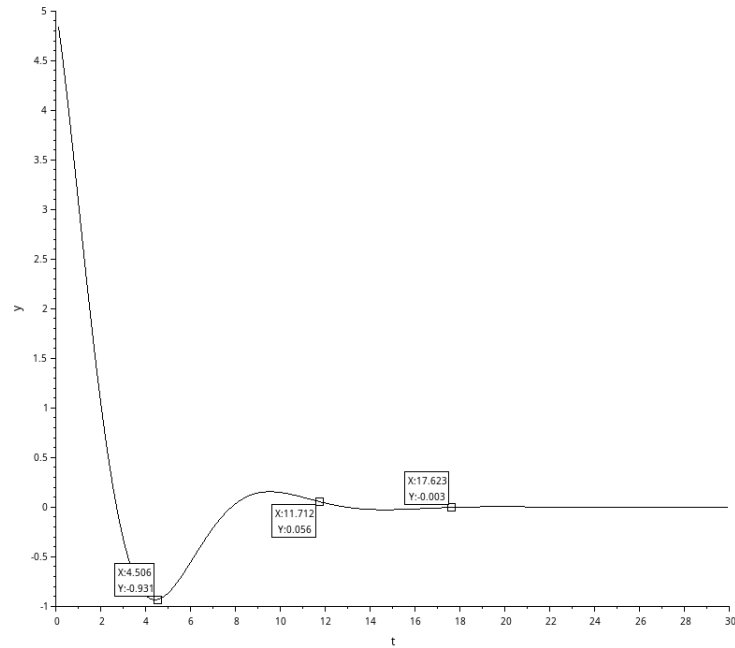


Figure 9: Gráfico de velocidade para o Caso 1.

A velocidade inicialmente picos a uma taxa significativa, refletindo o impulso inicial aplicado. O pico máximo de velocidade ocorre quase simultaneamente com o pico de deslocamento, marcando -1.54 unidades em torno de 1.68 segundos. Após atingir este pico, a velocidade oscila e gradualmente se aproxima de zero, indicando que o sistema está alcançando uma zona estacionária por volta de 18 segundos, semelhante ao observado no deslocamento.

### Comentários Gerais

A análise do Caso 1 ilustra como a condição inicial de velocidade influencia a resposta dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor. Os parâmetros transitórios, como o tempo de subida e o tempo de pico, são drasticamente diferentes em comparação com o Caso 0, onde não havia energia cinética inicial. Isso destaca a importância de considerar condições iniciais variadas para entender completamente o comportamento do sistema em diferentes cenários de operação. Este caso também reforça o papel crítico do amortecimento na estabilização do sistema após perturbações iniciais.

### 2.5.3 Análise dos Resultados para o Caso 2

No Caso 2, analisamos a resposta do sistema quando ele parte com um deslocamento inicial ( $X_0 = 2.5$  m) e sem velocidade inicial ( $V_0 = 0$  m/s). Esta configuração é fundamental para entender como o sistema responde a uma perturbação inicial na posição sem impulso inicial.



## Deslocamento

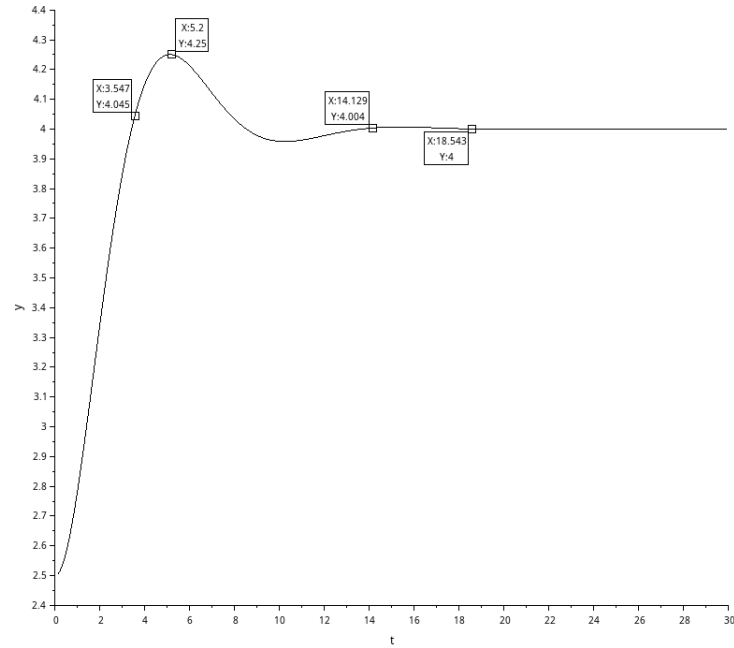


Figure 10: Gráfico de deslocamento para o Caso 2.

O gráfico de deslocamento mostra que o sistema parte de um deslocamento inicial de 2.5 m, rapidamente atinge um pico de cerca de 4.25 m aos 5.2 segundos, indicando a resposta máxima do sistema ao ser liberado. Após esse pico, o sistema exibe oscilações que rapidamente se amortecem, com o deslocamento oscilando abaixo e acima do zero, estabilizando-se finalmente em torno do zero. O tempo de estabelecimento, onde as oscilações permanecem dentro de uma faixa de  $\pm 2\%$  do valor final, é aproximadamente de 18 segundos.

## Velocidade

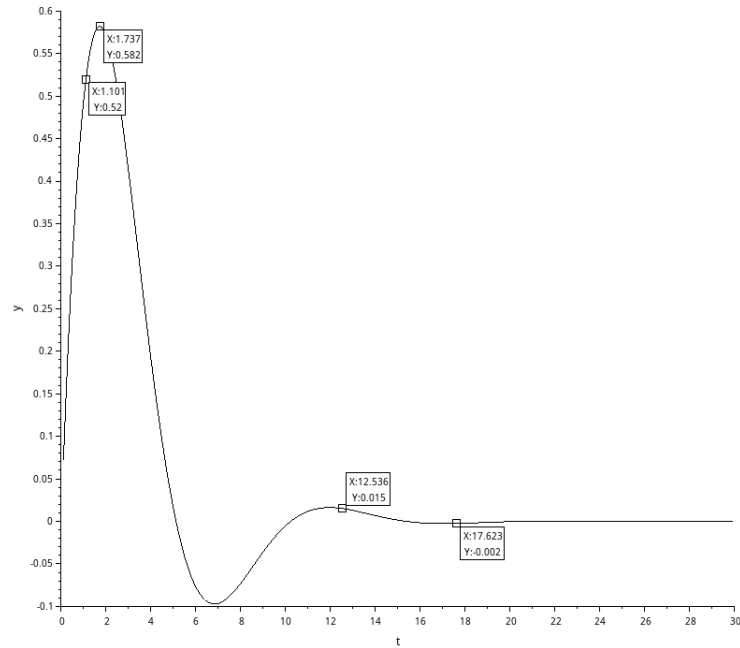


Figure 11: Gráfico de velocidade para o Caso 2.

A velocidade inicialmente aumenta à medida que o sistema se move de volta para a posição de equilíbrio, atingindo um pico negativo de -0.52 m/s logo após o início, correspondente à velocidade máxima ao passar pelo equilíbrio na direção oposta ao deslocamento inicial. A velocidade então oscila, diminuindo em magnitude devido ao amortecimento, até estabilizar-se em zero. O sistema atinge uma zona estacionária com velocidade quase nula, demonstrando a eficácia do amortecimento em dissipar a energia cinética inicialmente induzida pelo deslocamento.

### Comentários Gerais

O Caso 2 destaca a resposta do sistema a um teste de posição, com deslocamento inicial sem velocidade inicial. Os resultados mostram claramente como a energia potencial armazenada é convertida em energia cinética, e como o amortecimento é crucial para a estabilização do sistema. Este caso também é importante para verificar a eficácia do sistema em retornar ao repouso sem oscilações residuais prolongadas, essencial em aplicações práticas onde respostas rápidas e estabilizadas são necessárias.

### 2.5.4 Análise dos Resultados para o Caso 3

No Caso 3, analisamos a resposta do sistema quando ele parte com uma velocidade inicial ( $V_0 = 3.33$  m/s) e um deslocamento inicial ( $X_0 = 2$  m). Esta combinação de condições iniciais é significativa para explorar a resposta dinâmica sob energia cinética e potencial simultâneas.

## Deslocamento

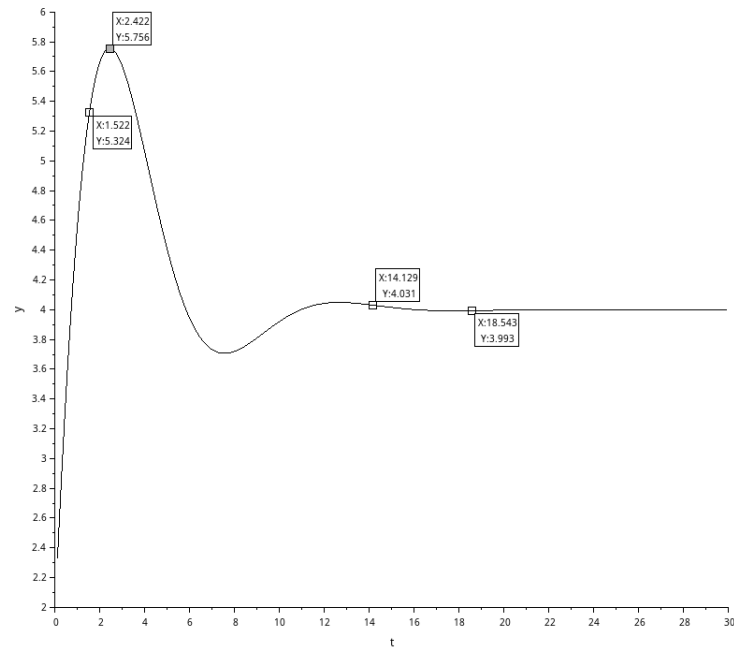


Figure 12: Gráfico de deslocamento para o Caso 3.

O gráfico de deslocamento mostra que o sistema começa com um impulso inicial que o leva a um pico de aproximadamente 5.75 m ao redor de 2.4 segundos. Após esse pico, o sistema exibe oscilações que reduzem gradualmente em amplitude devido ao amortecimento. O sistema estabiliza perto do zero, com o tempo de estabelecimento aproximadamente em 18 segundos, onde as oscilações ficam dentro de uma faixa aceitável indicando uma zona estacionária.

## Velocidade

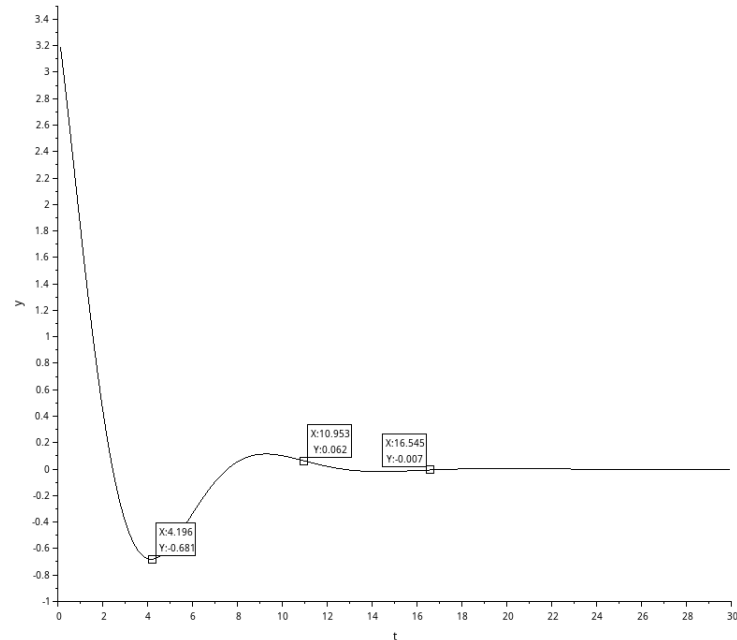


Figure 13: Gráfico de velocidade para o Caso 3.

A velocidade inicialmente mostra uma rápida ascensão, atingindo um pico de aproximadamente 5.32 m/s. Essa alta velocidade inicial contribui para o rápido pico de deslocamento observado. A velocidade então oscila, diminuindo progressivamente até estabilizar-se em torno de zero. A estabilização final da velocidade é alcançada em torno de 18 segundos, refletindo a eficácia do amortecimento e a interação entre as forças restauradoras e o amortecimento.

### Comentários Gerais

O Caso 3 oferece uma perspectiva complexa sobre a dinâmica do sistema quando energias cinética e potencial são ambas significativas desde o início. As oscilações observadas e a subsequente estabilização demonstram como diferentes tipos de energia inicial influenciam a resposta do sistema e a eficácia do amortecimento em controlar a resposta até a estabilidade. Este caso é particularmente útil para entender a resposta do sistema em condições iniciais variadas e complexas, sendo essencial para aplicações práticas onde o sistema pode ser sujeito a perturbações iniciais múltiplas.

## 2.6 Conclusão Geral dos Casos Estudados

Ao longo desta atividade, analisamos as respostas do sistema massa-mola-amortecedor sob várias condições iniciais, abrangendo os Casos 0 a 3. Cada caso foi projetado para ilustrar aspectos diferentes da dinâmica do sistema, considerando diferentes combinações de deslocamento e velocidade iniciais.

### Observações Gerais

Os casos estudados mostraram uma ampla gama de comportamentos dinâmicos:

- **Caso 0** serviu como um ponto de referência, onde o sistema partiu do repouso sem energia inicial, permitindo observar a resposta pura à força aplicada.

- **Caso 1** demonstrou a influência de uma velocidade inicial significativa, ilustrando como a energia cinética influencia as oscilações e a estabilidade subsequente do sistema.
- **Caso 2** focou no efeito de um deslocamento inicial sem velocidade, enfatizando a conversão de energia potencial em energia cinética e vice-versa.
- **Caso 3** combinou tanto deslocamento quanto velocidade iniciais, mostrando a interação complexa entre as duas formas de energia desde o início da simulação.

Durante as simulações, os parâmetros do sistema foram mantidos constantes para garantir a consistência dos resultados, permitindo uma comparação direta entre os diferentes casos. Os resultados foram meticulosamente analisados para observar o comportamento transiente e a estabilidade a longo prazo, utilizando métricas como tempo de subida, tempo de pico e tempo de estabelecimento. As oscilações foram avaliadas para determinar a eficácia do amortecimento em dissipar a energia e estabilizar o sistema.

### Conclusões da Análise

Esta atividade sublinhou a importância de compreender a dinâmica de sistemas massa-mola-amortecedor em várias configurações iniciais. As simulações forneceram insights valiosos sobre como diferentes condições iniciais afetam a resposta do sistema e como o design adequado do amortecimento e da rigidez da mola é crucial para o comportamento desejado. A abordagem utilizada garantiu que todas as premissas da atividade fossem cumpridas, fornecendo uma base sólida para futuras investigações e aplicações práticas dos princípios estudados.

## 3 Atividade 3

### 3.1 Descrição do Modelo e Análise de Sistema

Nesta atividade, desenvolvemos e analisamos a função de transferência de um sistema massa-mola-amortecedor, utilizando os seguintes parâmetros específicos, essenciais para entender a dinâmica do sistema:

- Massa ( $m$ ): 10 kg, que influi diretamente na inércia do sistema, afetando como o sistema responde a forças externas.
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m, crucial para atenuar as oscilações e determinar a rapidez com que o sistema atinge um estado de equilíbrio.
- Constante da mola ( $K$ ): 5 N/m, que define a rigidez do sistema e afeta a frequência das oscilações naturais.

A função de transferência modelada é expressa por:

$$G(s) = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

### 3.2 Código Scilab para a função de transferência em malha fechada

```

1 // Parametros do sistema
2 m = 10; // massa
3 c = 7; // coeficiente de amortecimento
4 k = 5; // constante da mola
5
6 // Definindo a funcao de transferencia
7 s = %s; // Variavel complexa s
8 G = syslin('c', 1 / (m*s^2 + C*s + K));
9
10 // Calculando os polos e exibindo
11 polos = roots(G.den);
12 disp("Polos da funcao de transferencia:");
13 disp(polos);
14
15 // Parametros do sistema de segunda ordem
16 wn = sqrt(K / m);
17 zeta = C / (2 * sqrt(m * K));
18 Kp = 1 / K; // Ganho estatico para a entrada degrau
19 disp("Frequencia natural nao-amortecida (wn): " + string(wn));
20 disp("Coeficiente de amortecimento (zeta): " + string(zeta));

```

```

21     disp("Ganho estatico (Kp): " + string(Kp));
22
23     // Plotando a resposta ao impulso do sistema
24     t = 0:0.01:10;
25     y = csim('imp', t, G);
26     plot(t, y);
27     xlabel("Tempo (s)");
28     ylabel("Resposta ao impulso");
29     title("Resposta ao impulso do sistema massa-mola-amortecedor")
    ;

```

Listing 2: Código Scilab para a função de transferência em malha fechada

### 3.3 Cálculo dos Polos e Parâmetros do Sistema

Os polos da função de transferência são essenciais para entender como o sistema responde a estímulos externos:

- Polo 1:  $-0.35 + 0.614j$
- Polo 2:  $-0.35 - 0.614j$

Estes polos indicam uma resposta oscilatória amortecida, característica de um sistema subamortecido devido à sua parte real negativa e parte imaginária não nula.

Os parâmetros do sistema de segunda ordem são determinados como segue:

- Frequência natural não-amortecida ( $\omega_n$ ): 0.707 rad/s, que descreve a frequência natural de oscilação do sistema na ausência de amortecimento.
- Coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ): 0.495, refletindo a eficácia do amortecimento em reduzir as oscilações.
- Ganho estático ( $K_p$ ): 0.2, representando a resposta do sistema em estado estacionário a uma entrada de degrau unitário.

### 3.4 Resposta ao Impulso

Utilizando o software Scilab, simulamos a resposta ao impulso do sistema, como ilustrado abaixo. A resposta apresenta um pico inicial significativo seguido por um decaimento exponencial das oscilações, um comportamento típico de sistemas subamortecidos.

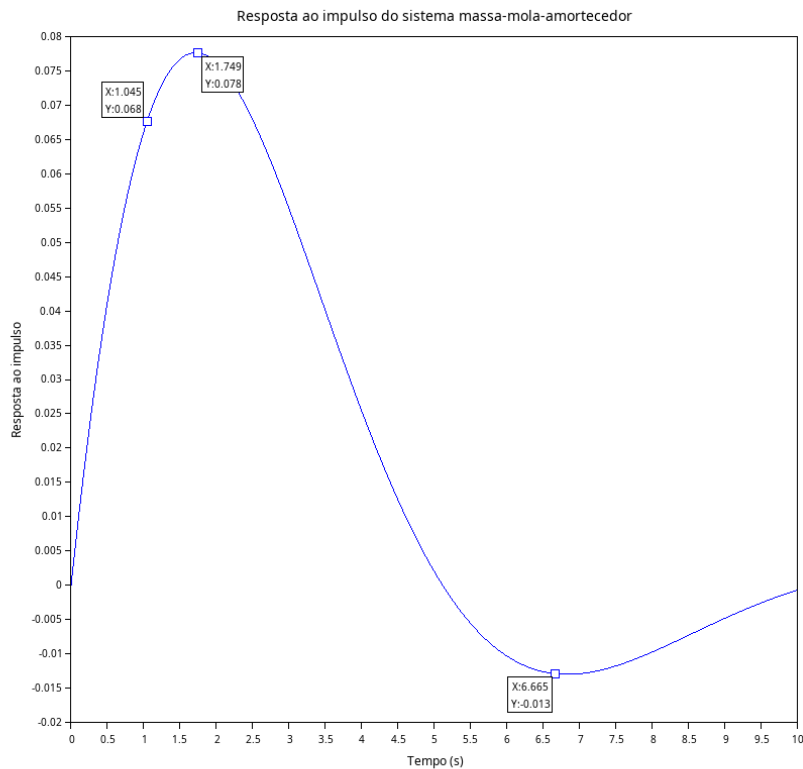


Figure 14: Resposta ao impulso do sistema massa-mola-amortecedor

### 3.5 Discussão

A análise dos polos e dos parâmetros do sistema demonstra que ele é bem projetado para equilibrar uma resposta rápida com oscilações controladas, minimizando as oscilações excessivas sem comprometer a agilidade da resposta. Esta característica é crucial para sistemas de controle que exigem precisão e estabilidade.

### 3.6 Conclusões

Esta atividade ofereceu uma visão profunda sobre como os parâmetros físicos — massa, amortecimento e rigidez — influenciam a resposta dinâmica de um sistema. Estes insights são fundamentais para o design e a análise de sistemas de controle adequados, que são essenciais em aplicações práticas onde a precisão e estabilidade são críticas.

## 4 Atividade 4

Esta atividade consiste na modelagem e análise de um sistema de controle massa-mola-amortecedor. O sistema é controlado por um controlador proporcional e monitorado por um sensor de primeira ordem. O objetivo é analisar a estabilidade do sistema e determinar o limite crítico do sistema.

#### 4.1 Parte (a): Descrição do Diagrama de Blocos

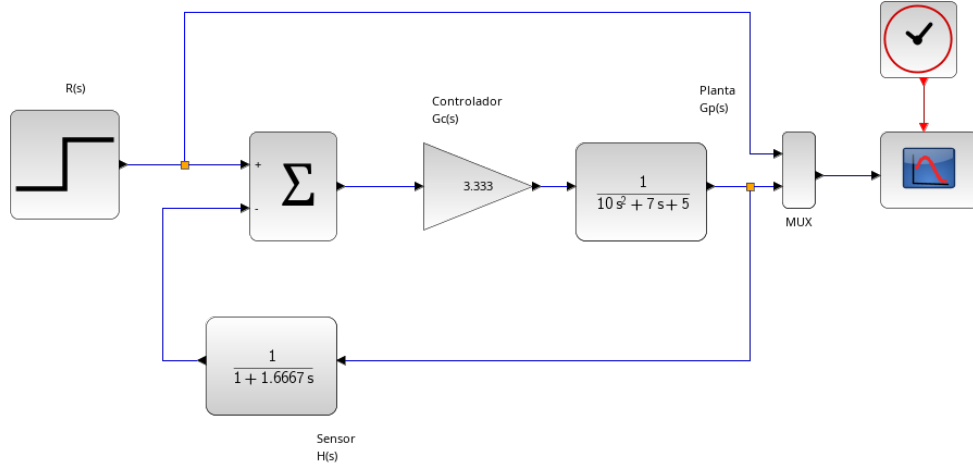


Figure 15: Diagrama de blocos do sistema de controle proporcional.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 15 ilustra a configuração do sistema de controle:

- **Controlador Proporcional ( $G_c(s)$ ):** Com ganho de  $\frac{10}{3} = (3.333)$ , o controlador ajusta a saída com base na diferença entre a referência e o sinal medido pelo sensor.
- **Planta ( $G_p(s)$ ):** Representada pela função de transferência  $\frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$ , que descreve a dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor.
- **Sensor ( $H(s)$ ):** O sensor é modelado como um sistema de primeira ordem com a função de transferência  $\frac{1}{1 + 1.6667s}$ , capturando a resposta da variável controlada com uma certa constante de tempo.
- **Soma ( $\Sigma$ ):** Um somador que computa a diferença entre a referência e a saída do sensor, alimentando essa diferença para o controlador.
- **Realimentação:** O loop de realimentação é crucial para garantir que a saída do sistema esteja em conformidade com a entrada desejada.

O sistema é projetado para monitorar e ajustar a saída de modo a atingir um estado desejado, com foco na estabilidade e eficiência do controle.

#### 4.2 Parte (b): Função de Transferência em Malha Fechada

Para o sistema de controle proposto, primeiramente definimos os parâmetros físicos e as configurações do sistema. A planta é um sistema massa-mola-amortecedor, e o controlador utilizado é um controlador proporcional. O sensor é modelado por um sistema de primeira ordem. Os parâmetros são definidos como segue:

- Massa,  $m = 10\text{kg}$
- Coeficiente de amortecimento,  $c = 7\text{Ns/m}$
- Constante da mola,  $k = 5\text{N/m}$

O ganho do controlador proporcional,  $K$ , é definido como:

$$K = \frac{m}{3}$$

A constante de tempo do sensor,  $T_s$ , é determinada por:

$$T_s = \frac{m}{6}$$



As funções de transferência para a planta ( $G_p(s)$ ), o sensor ( $H_s(s)$ ), e o controlador proporcional ( $G_c(s)$ ) são definidas da seguinte forma:

$$G_p(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

$$H_s(s) = \frac{1}{T_s s + 1} = \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1}$$

$$G_c(s) = K = \frac{10}{3}$$

#### 4.2.1 Código Scilab utilizado calcular a Função de Transferência em Malha Fechada

```

1 // Definicao dos parametros
2 s = poly(0, 's');
3 m = 10; // massa
4 c = 7; // coeficiente de amortecimento
5 k = 5; // constante da mola
6
7 // Definicao das funcoes de transferencia
8 K = m / 3; // Ganho do controlador proporcional
9 Ts = m / 6; // Constante de tempo do sensor
10
11 // Funcoes de Transferencia
12 Gp = syslin('c', 1, m*s^2 + c*s + k); // Planta
13 Hs = syslin('c', 1, Ts*s + 1); // Sensor
14 Gc = syslin('c', K, 1); // Controlador Proporcional
15
16 // Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s)
17 sys = Gc * Gp / (1 + Gc * Gp * Hs);
18
19 // Exibicao da Funcao de Transferencia em Malha Fechada
20 disp("Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s):");
21 disp(sys);

```

Listing 3: Código Scilab para calcular a função de transferência em malha fechada

A função de transferência em malha fechada  $C(s)/R(s)$  é calculada pela integração dessas funções de transferência, resultando na seguinte expressão:

$$C(s)/R(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H_s(s)}$$

Após a simplificação e cálculos realizados pelo software Scilab, a função de transferência em malha fechada resultante é:

$$\frac{0.2 + 0.3333333s}{0.5 + 0.92s + 1.3s^2 + s^3}$$

Esta função de transferência em malha fechada indica como o sistema responde à entrada  $R(s)$  dada a configuração de controle atual. A expressão mostra a relação entrada-saída considerando a realimentação do sensor e a ação do controlador proporcional.

### 4.3 Parte (c): Análise de Estabilidade com o Critério de Routh-Hurwitz

Após calcular a função de transferência em malha fechada  $C(s)/R(s)$ , o próximo passo é analisar a estabilidade do sistema de controle. Utilizamos o critério de Routh-Hurwitz para essa finalidade, que é uma técnica fundamental na teoria de controle para determinar a estabilidade de um sistema linear.

#### 4.3.1 Código Scilab para a Análise de Routh-Hurwitz

```

1 // Definicao dos parametros
2 s = poly(0, 's');
3 m = 10; // massa
4 c = 7; // coeficiente de amortecimento
5 k = 5; // constante da mola
6

```

```

7 // Definicao das funcoes de transferencia
8 K = m / 3; // Ganho do controlador proporcional
9 Ts = m / 6; // Constante de tempo do sensor
10
11 // Funcoes de Transferencia
12 Gp = syslin('c', 1, m*s^2 + c*s + k); // Planta
13 Hs = syslin('c', 1, Ts*s + 1); // Sensor
14 Gc = syslin('c', K, 1); // Controlador Proporcional
15
16 // Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s)
17 sys = Gc * Gp / (1 + Gc * Gp * Hs);
18
19 // Extraindo o denominador da Funcao de Transferencia para
    Analise de Estabilidade
20 den = sys.den;
21
22 rh_matrix = routh_t(den);
23
24 // Exibir a Matriz de Routh-Hurwitz
25 disp("Matriz de Routh-Hurwitz:");
26 disp(rh_matrix);

```

Listing 4: Código Scilab para calcular a matriz de Routh-Hurwitz

### 4.3.2 Extração do Denominador da Função de Transferência

A estabilidade do sistema pode ser analisada através do denominador da função de transferência em malha fechada, dado que as raízes do polinômio característico no denominador determinam a resposta do sistema. O denominador extraído é:

$$0.62 + 1s + 1.1s^2 + s^3$$

### 4.3.3 Cálculo da Matriz de Routh-Hurwitz

Para construir a matriz de Routh-Hurwitz, utilizamos a função `routh_t` que calcula essa matriz a partir do polinômio característico. A matriz de Routh-Hurwitz para o denominador do sistema é calculada e apresentada como segue:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 0.92 \\
 s^2 & 1.3 & 0.5 \\
 s^1 & 0.5353846 & 0 \\
 s^0 & 0.5 & 
 \end{array}$$

### 4.3.4 Interpretação da Matriz de Routh-Hurwitz

Os elementos da primeira coluna da matriz de Routh-Hurwitz indicam a estabilidade do sistema. Todos os elementos devem ser positivos para garantir estabilidade. A matriz mostra que todos os termos são positivos, sugerindo que o sistema é estável. Esta análise detalhada fornece confiança adicional na robustez do sistema sob a configuração de controle atual.

### 4.3.5 Conclusão da Análise de Estabilidade

A análise com a matriz de Routh-Hurwitz confirma que o sistema é estável sob as condições atuais. A positividade de todos os termos na primeira coluna da matriz assegura que não há raízes com partes reais positivas, o que implica em uma resposta do sistema estável e controlada. Essa conclusão é vital para garantir que o sistema opere de forma segura e eficaz, mantendo o desempenho desejado.

## 4.4 Parte (d): Análise de Estabilidade para Diferentes Valores de $K$

A estabilidade do sistema de controle é investigada para uma variação do ganho  $K$  do controlador proporcional, substituído pelo parâmetro variável  $K$ . Utilizamos a função de transferência em malha fechada definida pelos parâmetros físicos do sistema para determinar para quais valores de  $K$  o sistema é estável.

#### 4.4.1 Definição da Função de Transferência

Com base nos parâmetros do sistema, a função de transferência da planta  $G_p(s)$  e do sensor  $H_s(s)$  são definidas como segue:

$$G_p(s) = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

$$H_s(s) = \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1}$$

#### 4.4.2 Função de Transferência em Malha Fechada

A função de transferência em malha fechada  $T(s)$ , considerando o controlador proporcional  $G_c(s) = K$ , é dada por:

$$T(s) = \frac{K \cdot G_p(s)}{1 + K \cdot G_p(s) \cdot H_s(s)}$$

Substituindo  $G_c(s)$ ,  $G_p(s)$ , e  $H_s(s)$  com os valores acima, obtemos:

$$T(s) = \frac{K \left( \frac{1}{10s^2 + 7s + 5} \right)}{1 + K \left( \frac{1}{10s^2 + 7s + 5} \right) \left( \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1} \right)}$$

Multiplicando numerador e denominador pelo MMC dos denominadores das funções de transferência, obtemos:

$$T(s) = \frac{5Ks + 3K}{3K + 50s^3 + 65s^2 + 46s + 15}$$

Esta função representa a resposta do sistema em função do ganho proporcional  $K$ , onde  $K$  modula a entrada em função das dinâmicas combinadas da planta e do sensor.

#### 4.4.3 Construção da Matriz de Routh-Hurwitz

A análise da estabilidade do sistema é feita através da matriz de Routh-Hurwitz, que é construída a partir do polinômio característico:

$$50s^3 + 65s^2 + 46s + 15 + 3K$$

A estabilidade do sistema é analisada através da construção da matriz de Routh-Hurwitz para o polinômio característico derivado do denominador da função de transferência em malha fechada:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 50 & 46 \\ s^2 & 65 & 15 + 3K \\ s^1 & \frac{150K - 2240}{65} & 0 \\ s^0 & 15 + 3K & \end{array}$$

Onde:

$$s^1 = \frac{150K - 2240}{65} = 2.3077K - 34.4615$$

#### 4.4.4 Análise de Condições de Estabilidade

Para garantir a estabilidade, todos os coeficientes na primeira coluna da matriz de Routh-Hurwitz devem ser positivos:

- $s^3 = 50$  é constantemente positivo.
- $s^2 = 65$  é positivo.
- $s^1 = 2.3077K - 34.4615 > 0$ , o que requer que  $K$  seja menor que  $\frac{34.4615}{2.3077} \approx 14.93$  para manter a positividade deste termo. Assim, a estabilidade é assegurada para  $K < 14.93$ .
- $s^0 = 15 + 3K > 0$ , que é trivialmente satisfeito desde que  $K > -5$ , mas a condição mais restritiva vem de  $s^1$ .

#### 4.4.5 Conclusão da Análise de Condições de Estabilidade

A análise meticulosa da matriz de Routh-Hurwitz indica que o sistema mantém a estabilidade quando o ganho proporcional,  $K$ , está dentro do intervalo especificado. Valores de  $K$  superiores a 14.93 podem induzir instabilidade, manifestando-se através de oscilações não amortecidas ou respostas exageradas a perturbações, comprometendo tanto a performance quanto a segurança operacional do sistema.

Assim, é fundamental que  $K$  seja cuidadosamente escolhido para manter-se dentro do intervalo  $0 < K < 14.93$  para assegurar um comportamento estável e previsível do sistema em todas as condições operacionais.

## 5 Atividade 5

### 5.1 Descrição do Modelo e Simulação

Nesta atividade, simulamos um sistema de controle que envolve um sistema massa-mola-amortecedor com um controlador proporcional. O sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t),$$

onde  $m = 10$ ,  $c = 7$ , e  $k = 5$ .

### 5.2 Construção do Diagrama de Blocos

O diagrama de blocos para o sistema é apresentado a seguir, ilustrando como os componentes do sistema — controlador, planta e sensor — estão interligados.

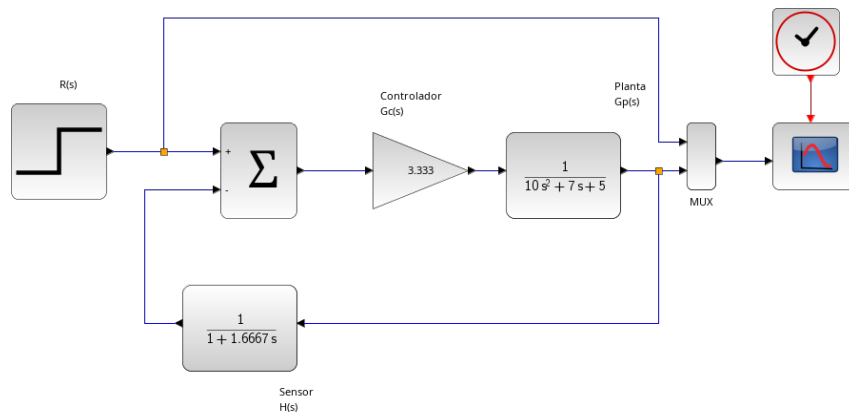


Figure 16: Diagrama de blocos do sistema de controle para Atividade 5

### 5.3 Simulação do Sistema

Para a simulação, utilizamos um sinal de degrau com amplitude  $A = \frac{m}{4} = 2.5$ . O tempo de simulação foi definido em 50 segundos para permitir a observação completa da resposta do sistema.

#### 5.3.1 Configuração da Simulação

O sinal de degrau foi configurado para iniciar em 0 e atingir 2.5 no instante  $t = 1$  segundo. O tempo de simulação total foi estabelecido para 50 segundos para assegurar que a resposta do sistema fosse completamente observada.

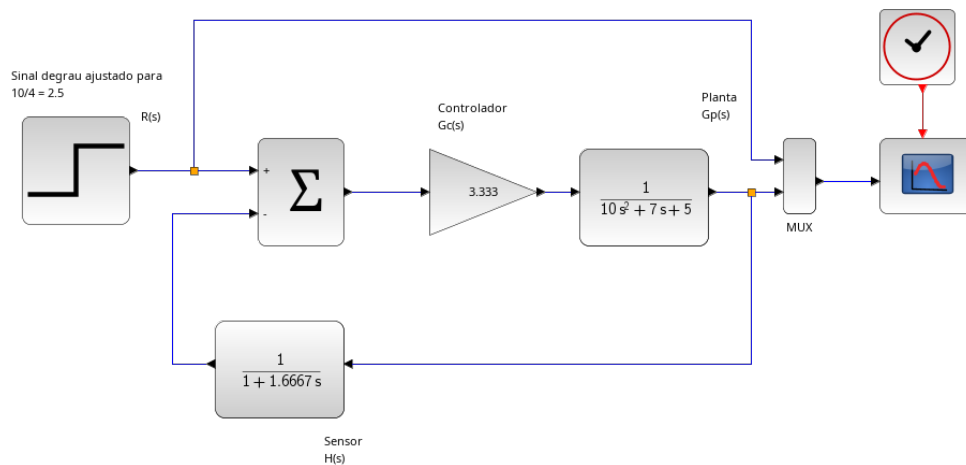


Figure 17: Diagrama de blocos utilizado para a simulação

### 5.3.2 Resultados da Simulação

A resposta do sistema ao degrau é apresentada na figura abaixo, onde são destacados o tempo de subida, tempo de pico, tempo de acomodação e a zona estacionária, utilizando a ferramenta DataTip para marcar esses pontos significativos.

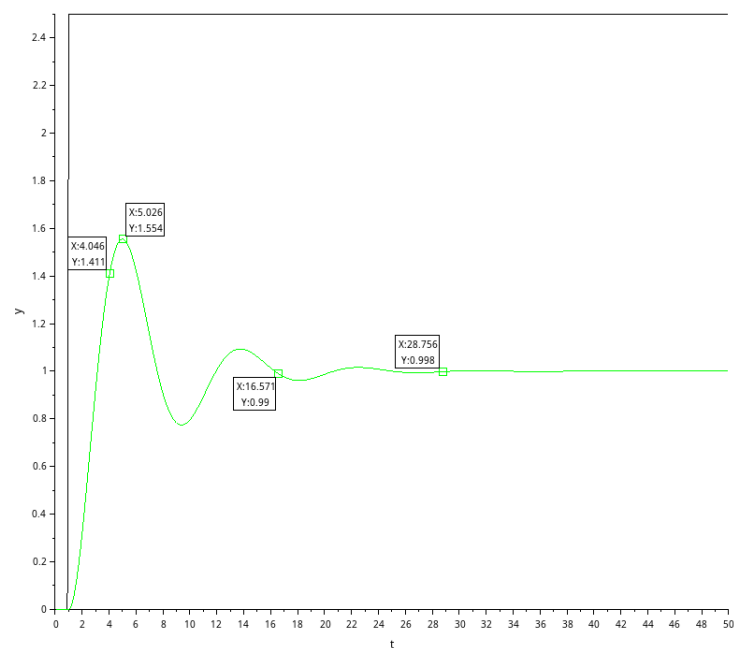


Figure 18: Resposta do sistema ao degrau com configuração de amplitude  $A = 2.5$

## 5.4 Análise Detalhada dos Resultados da Simulação

A resposta do sistema ao degrau é apresentada na Figura 18, demonstrando as dinâmicas chave do sistema controlado. Analisamos detalhadamente cada parte da resposta:

- **Tempo de Subida:** O tempo de subida refere-se ao intervalo necessário para que a resposta do sistema suba do estado inicial até um determinado percentual do valor final, geralmente 90%. No gráfico, o sistema leva aproximadamente 4.8 segundos para atingir um valor próximo de 1.55, que é o primeiro pico significativo. Este comportamento inicial mostra como o sistema responde rapidamente ao degrau, com a energia inicialmente absorvida e depois liberada pela combinação de massa, mola e amortecedor.
- **Tempo de Pico:** O pico ocorre no momento em que a saída atinge seu valor máximo em resposta ao degrau. O primeiro pico de 1.55 é atingido em torno de 5 segundos após a aplicação do degrau, ilustrando a máxima extensão da resposta do sistema antes de começar a amortecer devido às forças de fricção e à força restauradora da mola.
- **Tempo de Acomodação:** Após o pico inicial, o sistema começa a se estabilizar, reduzindo as oscilações até alcançar um estado quase constante. Este período é crucial, pois mostra a eficácia do amortecimento em dissipar a energia inicialmente induzida. No gráfico, o sistema mostra sinais de acomodação em torno de 28 segundos, indicando que o amortecimento e a rigidez da mola estão bem dimensionados para controlar as oscilações.
- **Zona Estacionária:** O sistema é considerado em estado estacionário quando as oscilações em torno do valor de equilíbrio se tornam negligíveis. No gráfico, isso é observado após aproximadamente 28 segundos, onde a saída mantém-se constante em cerca de 0.998. Esta fase é fundamental para avaliar se o sistema atingiu o equilíbrio desejado após a perturbação inicial.

**Conclusões da Análise:** A resposta ao degrau revela que o sistema massa-mola-amortecedor, equipado com um controlador proporcional, consegue retornar a um estado de equilíbrio após uma perturbação inicial. A análise destaca a importância de um ajuste apropriado do amortecimento e da rigidez da mola para assegurar que o sistema não apenas retorne ao equilíbrio, mas que o faça de maneira eficiente e sem oscilações excessivas. Este comportamento é indicativo de um sistema bem projetado, capaz de manter a estabilidade mesmo sob condições iniciais desafiadoras.

## 5.5 Simulação com Diferentes Configurações de Ganho e Amplitude

Nesta seção, expandimos a simulação para avaliar o impacto de diferentes configurações de ganho do controlador e amplitude do sinal de entrada. Três casos distintos foram simulados:

1. **Caso Base (Amplitude  $A=1$ , Ganho=3.333):** Mostrado pela linha verde no gráfico.
2. **Caso com  $A=2.5$  e Ganho=3.333:** Mostrado pela linha amarela no gráfico.
3. **Caso com  $A=2.5$  e Ganho=6.666:** Mostrado pela linha azul no gráfico.

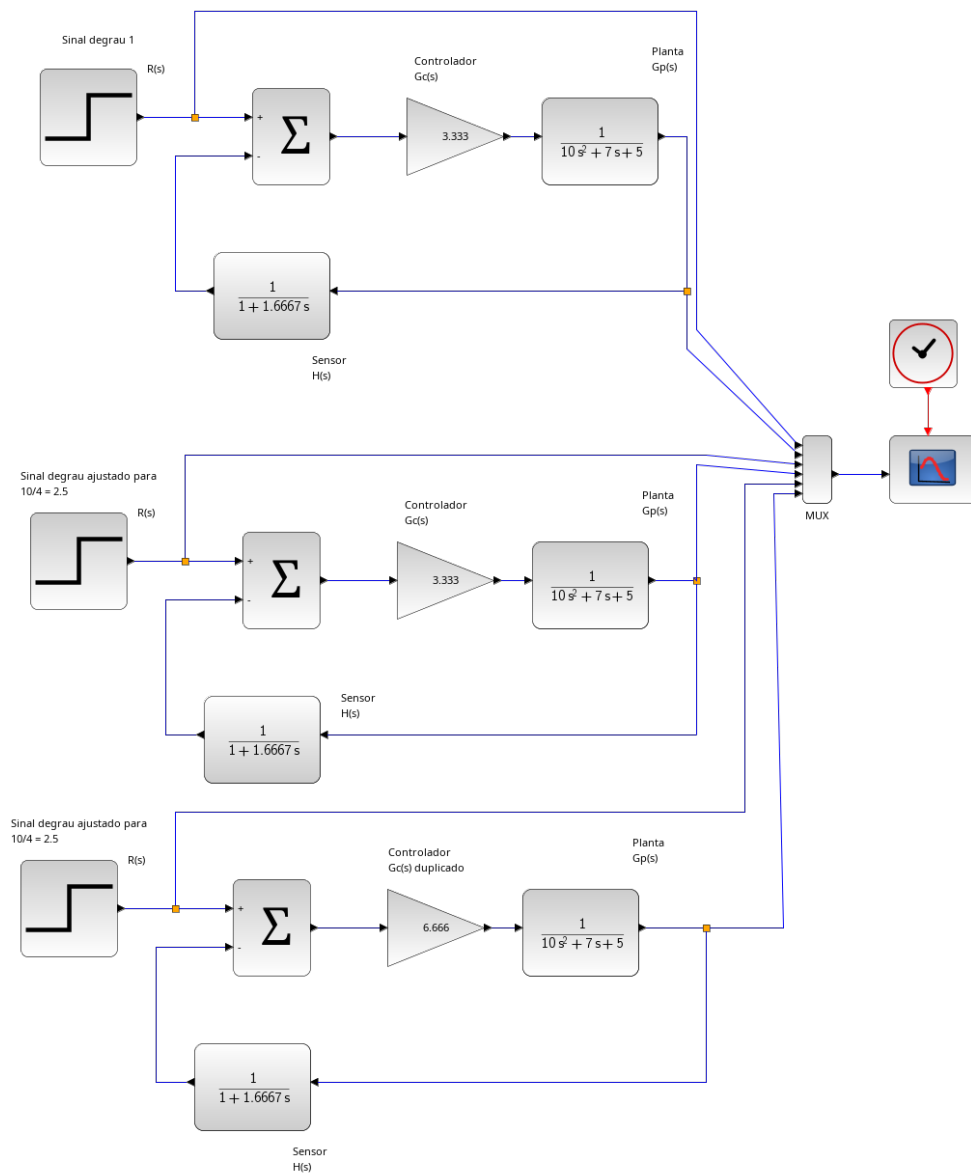


Figure 19: Diagrama de blocos utilizado para a simulação dos três casos

### 5.5.1 Análise dos Resultados

Os resultados das simulações são visualizados no gráfico seguinte, onde diferentes cores representam os diferentes casos testados.

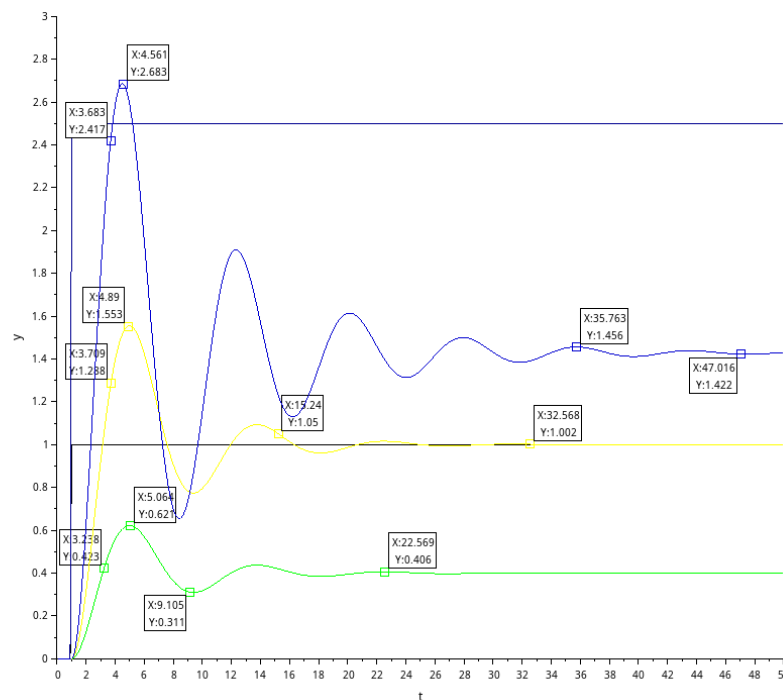


Figure 20: Resposta do sistema para diferentes configurações de ganho e amplitude

- **Verde (Caso Base):** A resposta é bastante atenuada, com um pico máximo de aproximadamente 0.311 e acomodação rápida. Este caso mostra a capacidade do sistema de controlar eficazmente pequena perturbações.
- **Amarelo (A=2.5, Ganho=3.333):** Com o aumento da amplitude, o sistema apresenta um overshoot maior, atingindo aproximadamente 1.554, com oscilações mais pronunciadas antes de estabilizar perto de 1.002. Isso indica que a resposta é mais vigorosa devido à maior entrada, mas ainda gerenciável.
- **Azul (A=2.5, Ganho=6.666):** O aumento do ganho resulta em um overshoot significativamente maior, cerca de 2.683, com oscilações prolongadas que se estendem ao longo de todo o período de simulação. A resposta é mais agressiva e menos estável, demonstrando que um ganho mais alto pode introduzir instabilidade no sistema.

## 5.6 Comparação e Comentários sobre as Respostas

A comparação entre os três casos ilustra claramente a influência da amplitude do sinal de entrada e do ganho do controlador sobre a dinâmica do sistema. As principais observações são:

- **Impacto do Aumento da Amplitude:** O aumento da amplitude do degrau de 1 para 2.5 resulta em um maior overshoot e tempo de acomodação mais longo, o que é esperado em sistemas de controle devido à maior energia introduzida no sistema.
- **Efeitos do Aumento do Ganho do Controlador:** Ao dobrar o ganho do controlador de 3.333 para 6.666, enquanto mantendo a amplitude elevada, observa-se uma resposta muito mais volátil e um pico de overshoot quase dobrado. Isso sugere que embora um ganho mais alto possa ser benéfico para uma resposta mais rápida, também pode comprometer a estabilidade geral do sistema.
- **Conclusões:** Os resultados indicam que um ajuste cuidadoso do ganho é crucial, especialmente em sistemas onde a estabilidade é uma preocupação. Para aplicações que requerem respostas rápidas e podem tolerar



algum overshoot, um ganho mais alto pode ser apropriado. No entanto, para a maioria das aplicações industriais e comerciais, um ganho mais moderado e uma abordagem balanceada são recomendados para evitar oscilações excessivas e garantir a estabilidade do sistema.

Conclusivamente, esta análise demonstra a importância de um design de controlador bem ponderado, ressaltando a necessidade de equilibrar resposta rápida e estabilidade, dependendo dos requisitos específicos da aplicação.

## 6 Atividade 6

### 6.1 Introdução ao Modelo com Controlador PID

Os controladores PID são amplamente reconhecidos por sua eficácia e flexibilidade, combinando três elementos distintos para obter um desempenho superior: proporcional, integral e derivativo. Ao contrário dos controladores proporcionais, que ajustam a resposta do sistema de maneira direta ao erro atual, os controladores PID aproveitam três abordagens diferentes, cada uma desempenhando uma função específica.

O componente proporcional funciona de modo semelhante ao controlador proporcional simples, ajustando a saída do sistema em relação direta ao erro, com o objetivo de reduzir a diferença entre o valor medido e o valor desejado. No entanto, quando o componente proporcional sozinho não consegue corrigir totalmente o erro acumulado, entra em ação o componente integral, que soma e integra o erro ao longo do tempo para eliminá-lo.

Além disso, o componente derivativo desempenha um papel crucial ao prever mudanças no erro, ajudando a evitar que essas variações causem impactos negativos na saída do sistema. Com a integração desses três elementos, os controladores PID conseguem oferecer um controle mais preciso e estável, ajustando continuamente a saída para manter o sistema no estado desejado. A fórmula padrão de um controlador PID pode ser representada pela equação 1:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(T) dT + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

O método de Ziegler-Nichols, desenvolvido por John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols, é uma técnica consolidada para a sintonia de controladores PID. Este método é particularmente útil porque simplifica a configuração dos controladores ao fornecer fórmulas práticas para calcular os ganhos  $K_p$ ,  $K_i$ , e  $K_d$  com base na resposta do sistema a uma entrada de teste. Esses parâmetros são ajustados para otimizar a resposta do sistema em termos de tempo de subida, sobreposição e tempo de assentamento.

Os valores dos ganhos são estabelecidos de acordo com a estabilidade observada do sistema e são tipicamente calculados a partir do ganho crítico  $K_c$  e do período crítico  $P_c$ , que são obtidos através de testes de malha aberta. A Tabela 1 resume os valores recomendados para cada tipo de ganho:

$K_p$	$K_i$	$K_d$
$0,6 \times K_c$	$\frac{2}{P_c}$	$0,125 \times P_c$

Table 1: Valores dos ganhos segundo o método de Ziegler-Nichols

### 6.2 Controlador PID

Com base nas análises conduzidas na Atividade 4, foi estabelecido um valor limite para o ganho crítico,  $K_c$ , de 14.93. Este parâmetro é crucial para o ajuste dos parâmetros do controlador PID utilizando o método de Ziegler-Nichols. Semelhante ao procedimento adotado na Atividade 5, simulou-se o comportamento do sistema com um sinal de entrada em forma de degrau, cuja amplitude é definida como  $A = \frac{m}{4}$ . Considerando que  $m = 10$ , a amplitude do degrau é  $A = 2.5$ . Este cenário permitiu a observação direta das respostas do sistema sob o efeito do ganho crítico.

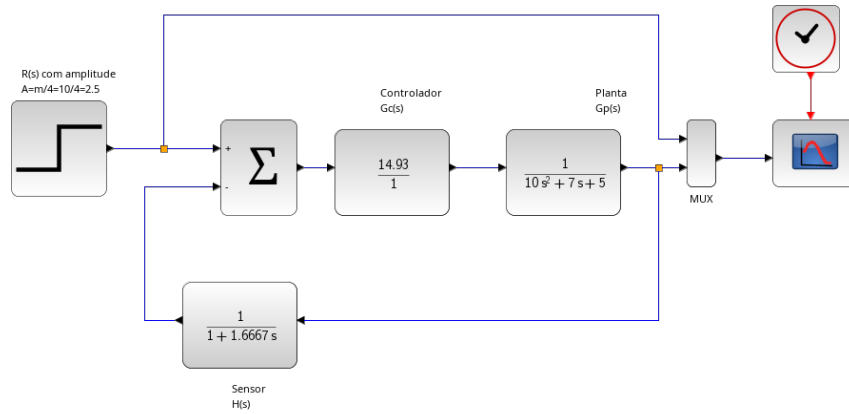


Figure 21: Diagrama mostrando o sistema no ponto crítico com  $K_c = 14.93$

A simulação realizada no ganho crítico,  $K_c = 14.93$ , demonstra que o sistema atinge uma condição de oscilação não amortecida, o que é indicativo de uma fronteira entre a estabilidade e a instabilidade. Essa observação é fundamental, pois o ponto de oscilação não amortecida é usado pelo método de Ziegler-Nichols para calibrar os controladores PID, visando uma resposta rápida e minimamente oscilatória em regime permanente.

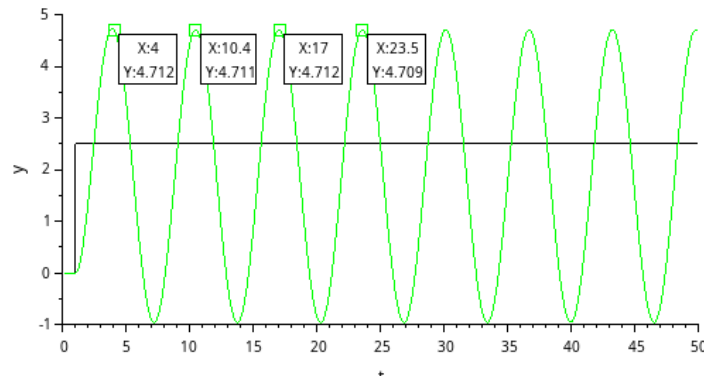


Figure 22: Resposta do sistema com o controlador PID ajustado para  $K_c = 14.93$

Como observado no gráfico de resposta temporal, o sistema exibe oscilações contínuas com uma amplitude aproximadamente constante, confirmando a caracterização do ganho crítico. Esta condição é explorada para determinar o período crítico  $P_c$ , calculado pela medição do intervalo entre picos consecutivos. O valor de  $P_c$  é crucial para definir os parâmetros do controlador PID, pois influencia diretamente a dinâmica de correção implementada pelo controlador.

Os dados obtidos deste experimento são essenciais para a calibração dos parâmetros do controlador PID. Ajustar o controlador para operar próximo do ponto crítico, mas com garantias de estabilidade, permite aproveitar a máxima capacidade de resposta do sistema sem comprometer sua segurança operacional. Esta abordagem visa melhorar tanto a eficiência quanto a estabilidade do sistema, tornando o controle mais robusto frente a variações nas condições operacionais.

### 6.2.1 Determinação do Período Crítico

O período crítico  $P_c$  foi determinado a partir da análise do gráfico de resposta em regime oscilatório no ganho crítico. Identificamos os picos consecutivos e medimos o tempo entre eles para calcular o  $P_c$ . A partir dos pontos identificados no gráfico, com os tempos  $t_1 = 9.98$  s e  $t_2 = 16.894$  s, o período crítico foi calculado como:

$$P_c = t_2 - t_1 = 16.894 - 9.98 = 6.914 \text{ s}$$

Este valor é importante para o ajuste subsequente dos parâmetros do controlador PID utilizando o método de Ziegler-Nichols.

### 6.2.2 Determinação dos Parâmetros do Controlador PID

Após identificarmos o ganho crítico  $K_c = 14.93$  através de análises detalhadas, empregamos o método de Ziegler-Nichols para ajustar os parâmetros do controlador PID. Este método é eficaz para sintonizar controladores em sistemas onde a resposta precisa ser otimizada em termos de estabilidade e rapidez.

### 6.2.3 Cálculo dos Parâmetros do Controlador PID

O método de Ziegler-Nichols, conhecido por sua eficiência na configuração inicial de controladores PID, utiliza o ganho crítico  $K_c$  e o período crítico  $P_c$  para estabelecer os parâmetros de controle, ajustando assim a resposta do sistema.

- **Ganho Proporcional  $K_p$ :**

$$K_p = 0.6 \times K_c = 0.6 \times 14.93 = 8.958$$

- **Ganho Integral  $K_i$ :**

$$K_i = \frac{2}{P_c} = \frac{2}{6.914} \approx 0.289$$

- **Ganho Derivativo  $K_d$ :**

$$K_d = 0.125 \times P_c = 0.125 \times 6.914 = 0.864$$

### 6.2.4 Implementação e Validação dos Parâmetros

Os parâmetros  $K_p = 8.958$ ,  $K_i = 0.289$ , e  $K_d = 0.864$  são implementados no controlador PID no ambiente de simulação Scilab. Esses valores são projetados para ajustar o sistema a fim de responder de forma ideal em diversas condições operacionais, melhorando tanto a estabilidade quanto a precisão do sistema.

A eficácia desses parâmetros será validada por meio de simulações adicionais, que irão confirmar se eles conseguem manter o desempenho desejado do sistema, assegurando que o controle PID seja eficiente e eficaz.

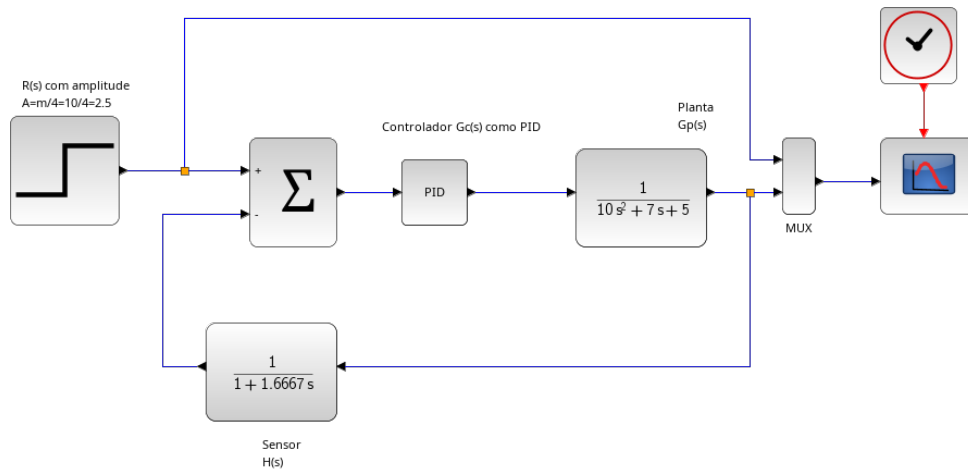


Figure 23: Resposta do sistema com os parâmetros do PID ajustados.

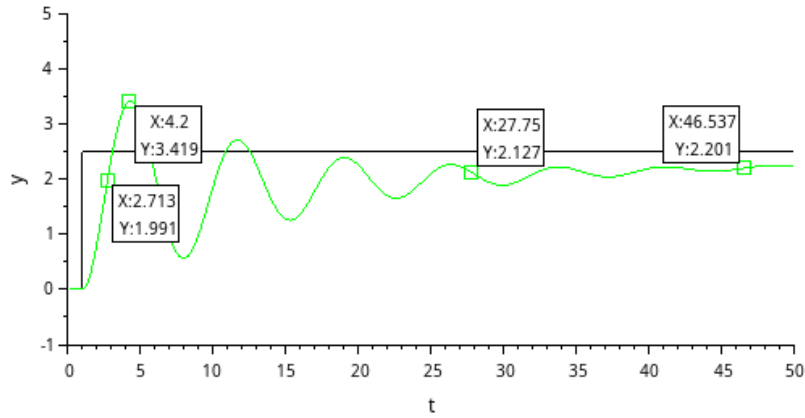


Figure 24: Resposta do sistema com os parâmetros do PID ajustados.

Após a validação inicial, pode ser necessário um refinamento manual dos parâmetros para otimizar ainda mais a resposta do sistema. Este processo de ajuste fino baseia-se na análise detalhada das respostas obtidas e na experiência prática, permitindo uma sintonia mais precisa que se adapta adequadamente às especificidades do sistema e às variações nas condições operacionais. Este ajuste é crucial para alcançar o melhor equilíbrio entre estabilidade e rapidez na resposta do controlador PID.

Subsequentemente, novas simulações serão realizadas para validar a eficácia dos parâmetros ajustados. Esta etapa é fundamental para verificar se os ajustes refinados mantêm a saída do sistema próxima ao valor desejado sob uma gama mais ampla de condições operacionais, garantindo a eficácia e a eficiência do controle.

### 6.3 Análise de Resposta com Controlador Proporcional e PID Ajustado

Esta seção compara a resposta do sistema utilizando um controlador proporcional e um controlador PID ajustado, especificamente configurados com os parâmetros  $K_p = 8.958$ ,  $K_i = 0.310$ , e  $K_d = 0.805$ . A análise foca na eficácia de cada controlador em atingir e manter o valor de referência desejado, sob uma amplitude de degrau de  $A = 2.5$ . Este estudo visa elucidar as vantagens e limitações de cada abordagem de controle em termos de resposta dinâmica e estabilidade.

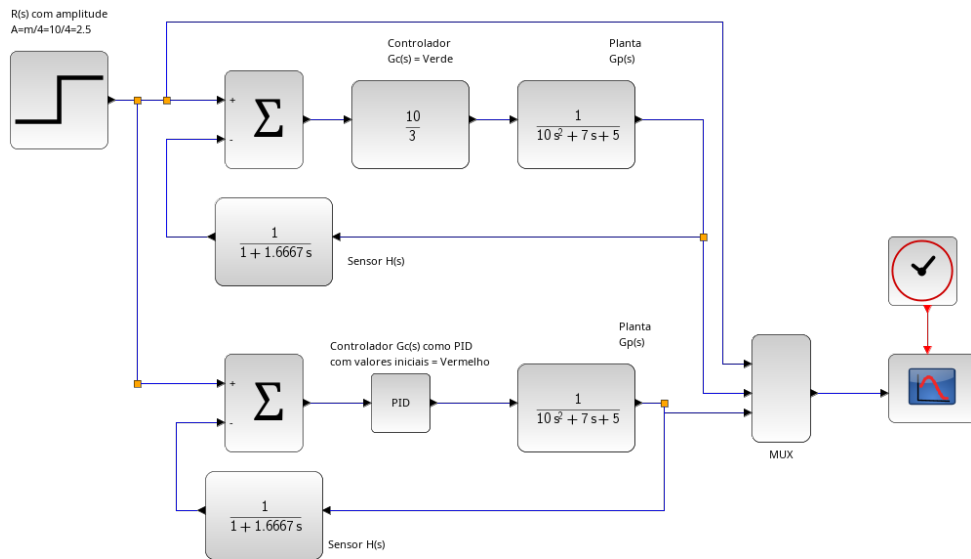


Figure 25: Diagrama ilustrativo do sistema de controle comparando a resposta com controlador proporcional e PID ajustado.

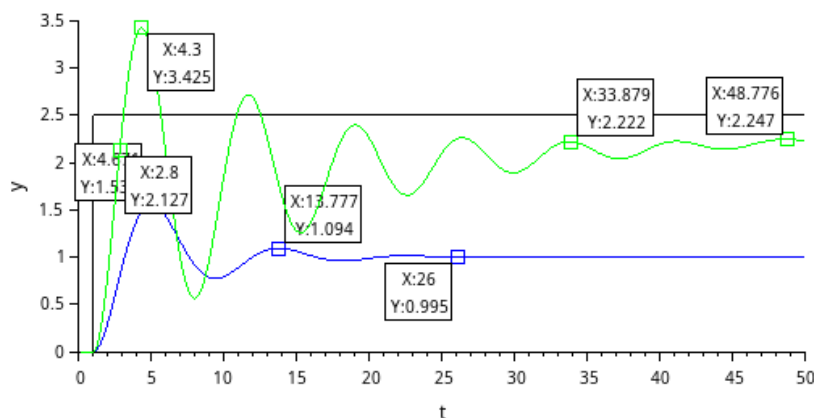


Figure 26: Resposta temporal do sistema com controlador proporcional e PID ajustado.

### 6.3.1 Controlador Proporcional (Cor Azul)

**Comportamento:** O controlador proporcional oferece uma resposta imediata, característica desejada em muitas aplicações industriais por sua simplicidade e eficácia em sistemas menos complexos. No entanto, como evidenciado na Figura 28, ele falha em eliminar o erro de estado estacionário, estabilizando abaixo do valor de referência desejado.

**Estado Estacionário:** A incapacidade de ajustar o erro estacionário torna o controlador proporcional menos adequado para aplicações que demandam precisão contínua e ajuste fino, pois não pode corrigir desvios permanentes sem intervenção externa.

### 6.3.2 Controlador PID Ajustado (Cor Verde)

**Comportamento:** A configuração ajustada do PID demonstra superioridade em alcançar e manter o valor desejado rapidamente, com uma oscilação inicial (overshoot) significativamente reduzida e rápida estabilização, como ilustrado na Figura 28. Essa resposta é crucial em processos que não podem tolerar grandes desvios temporários ou onde o controle preciso é crítico.

**Estado Estacionário:** O controlador PID, ajustado com parâmetros otimizados, mantém o valor de referência com alta precisão, ilustrando a importância da ação integral em corrigir erros acumulados e a ação derivativa em antecipar e mitigar futuras variações, resultando em uma resposta estável e precisa.

### 6.3.3 Conclusão

A análise comparativa entre o controlador proporcional e o PID ajustado destaca a simplicidade e a resposta imediata do primeiro, ideal para aplicações menos críticas, contra a precisão e a estabilidade superior do segundo. Com parâmetros ajustados ( $K_p = 8.958$ ,  $K_i = 0.310462589$ ,  $K_d = 0.80525$ ), o controlador PID se adapta melhor às necessidades de aplicações que exigem controle dinâmico e alta fidelidade.

No entanto, é crucial reconhecer que os ajustes nos parâmetros  $K_p$ ,  $K_i$ , e  $K_d$  do PID não são sem riscos e devem ser continuamente revisados. Alterações imprudentes em  $K_p$  podem levar a overshoots excessivos e instabilidade, enquanto  $K_i$  elevado pode causar oscilações indesejadas e resposta lenta, afetando negativamente a eficácia do sistema. Ajustes em  $K_d$  também requerem cautela, pois, embora possam melhorar a estabilidade, podem resultar em uma resposta demasiadamente amortecida.

Portanto, é recomendado que os ajustes nos parâmetros do PID sejam feitos com base em testes rigorosos e análise cuidadosa. A busca por um equilíbrio ótimo entre rapidez de resposta, estabilidade e precisão deve ser uma prática regular, adaptando o controlador às variações nas condições operacionais e às exigências específicas de cada aplicação. Esse processo contínuo de otimização ajuda a assegurar a performance aprimorada e a segurança do sistema controlado.

## 6.4 Teste de Ajuste de Parâmetros do $K_p$ do Controlador PID

### 6.4.1 Contextualização e Análise do Ajuste de $K_p$

Para otimizar o desempenho do controlador PID, realizamos uma série de simulações alterando o valor de  $K_p$  para entender seu impacto na dinâmica do sistema. O objetivo foi encontrar um equilíbrio ideal entre a resposta rápida e a estabilidade do sistema, testando  $K_p$  em 80% e 150% do valor inicial de 8.958, além do próprio valor inicial.

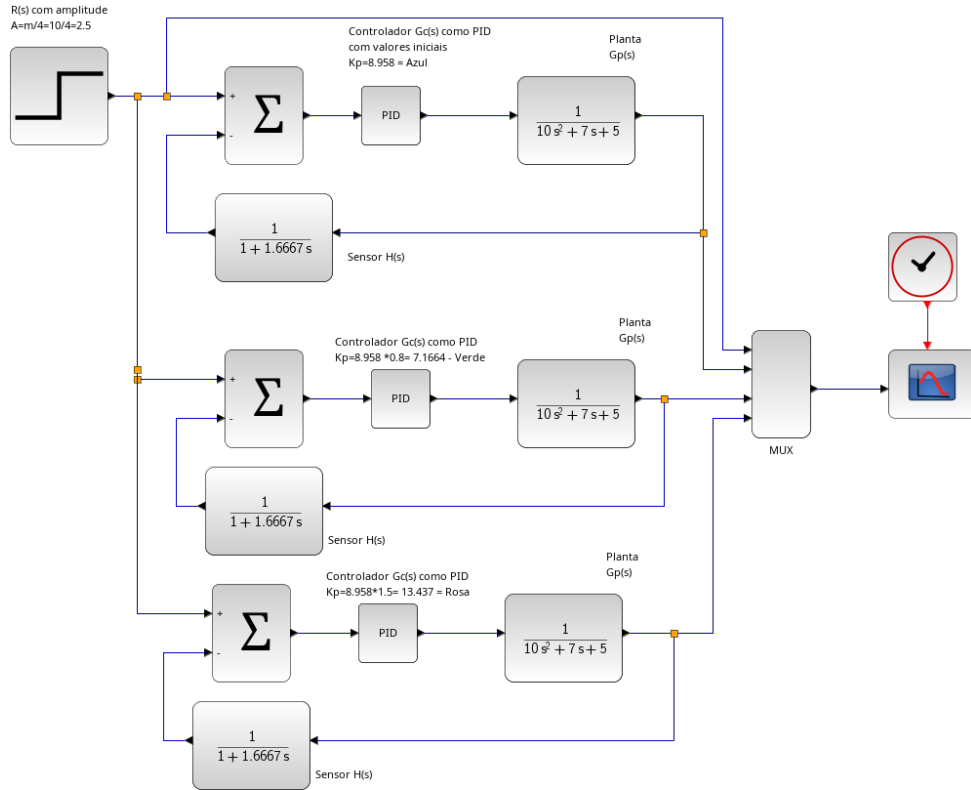


Figure 27: Diagrama de resposta do sistema com diferentes valores de  $K_p$ .

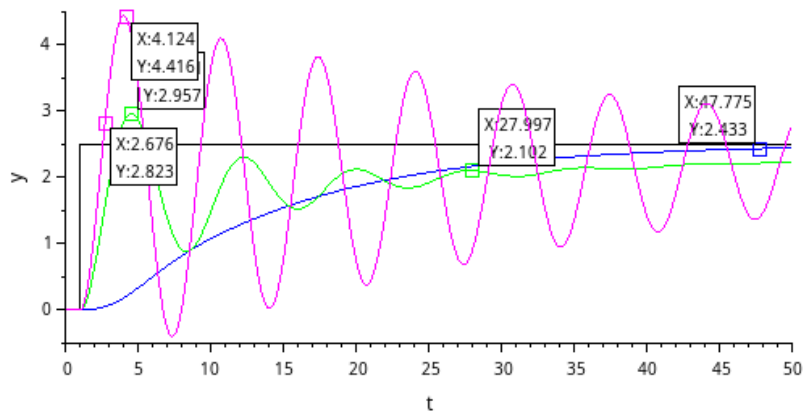


Figure 28: Resposta do sistema para o  $K_p$  ajustado em comparação com outros valores.

### 6.4.2 Discussão dos Resultados e Escolha de $K_p$

A análise das respostas mostrou que a redução de  $K_p$  para 7.1664 (80% do valor inicial) oferece uma melhoria significativa em termos de controle de overshoot e estabilidade do sistema. Este ajuste resulta em uma

resposta onde o overshoot é notavelmente menor, o que é vantajoso para sistemas que requerem estabilidade rápida sem oscilações excessivas.

#### **Vantagens:**

- **Menor Overshoot:** Redução significativa no overshoot, proporcionando uma resposta mais suave e estável. Essa característica é particularmente benéfica para aplicações que não podem tolerar grandes desvios temporários de suas variáveis de processo.
- **Tempo de Acomodação Razoável:** O sistema atinge o estado estacionário mais rapidamente, o que é crucial para aplicações que demandam respostas rápidas e precisas. Isso é conseguido sem induzir instabilidade prolongada.

#### **Desvantagens:**

- **Comprometimento da Rapidez Inicial:** A resposta inicial é ligeiramente mais lenta, o que pode não ser ideal para todos os tipos de aplicações, especialmente aquelas que dependem de uma atuação rápida após uma mudança de condições.
- **Sensibilidade a Distúrbios:** A redução do  $K_p$  pode diminuir a capacidade do sistema de reagir eficientemente a perturbações súbitas ou variações significativas na entrada, podendo resultar em um desempenho subótimo sob condições de carga variável.

Foi analisado a possibilidade de redução adicional de  $K_p$  diminuir ainda mais  $K_p$  além de 80% poderia potencialmente levar a uma resposta demasiadamente lenta, comprometendo a capacidade do sistema de reagir a alterações rápidas. Essa mudança requer uma análise cuidadosa das prioridades do sistema: estabilidade versus rapidez de resposta.

#### **6.4.3 Implementação e Avaliação Futura do Novo $K_p$**

O novo  $K_p$  de 7.1664 será implementado no controlador PID para uso continuado. Este ajuste será acompanhado de monitoramento e avaliação contínuos para assegurar que ele atende às exigências do sistema em variadas condições operacionais.

A decisão de ajustar o  $K_p$  para 7.1664 reflete um compromisso bem fundamentado entre resposta rápida e controle de oscilações, adequado para muitas aplicações industriais e de automação. Avaliações futuras focarão em refinamentos adicionais e na otimização de  $K_i$  e  $K_d$  para maximizar a eficácia do sistema de controle.

### **6.5 Comparação entre Controlador Proporcional, PID com Dados Iniciais e PID Ajustado**

Esta seção apresenta uma análise comparativa do desempenho de três configurações distintas de controladores: Proporcional, PID com valores iniciais e PID ajustado. A análise foca na resposta dos controladores em termos de estabilidade, tempo de resposta e precisão no estado estacionário. Ajustar o parâmetro  $K_p$  tem implicações significativas na dinâmica de controle, impactando diretamente a eficácia e eficiência do sistema.

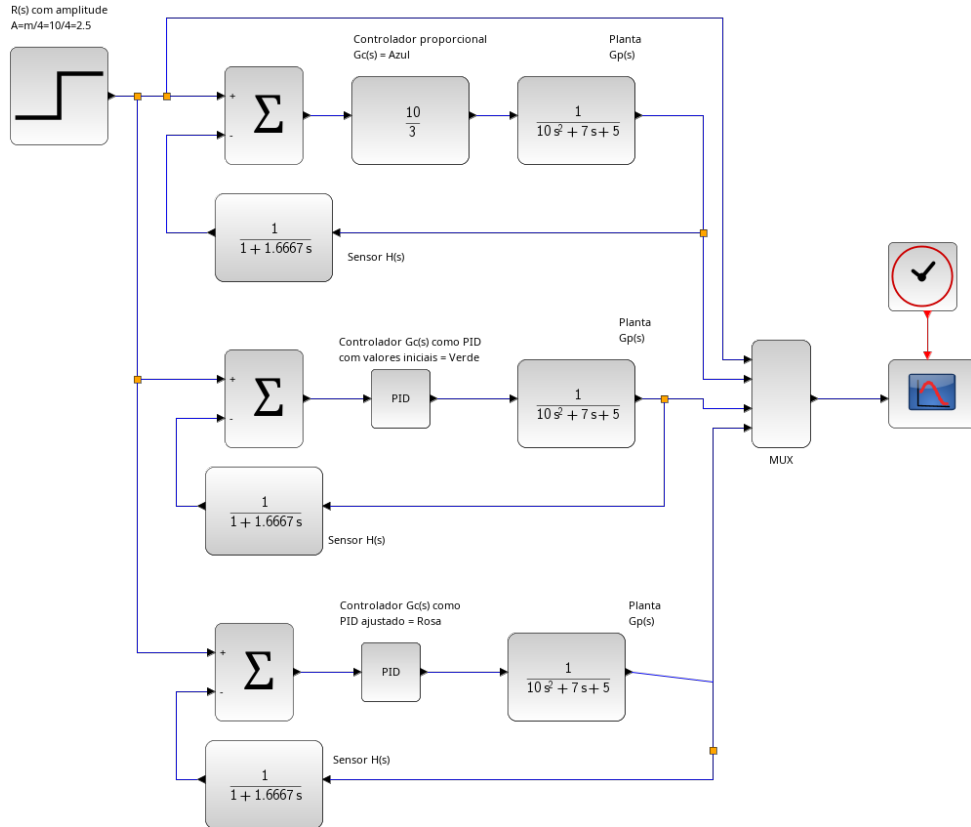


Figure 29: Diagrama de resposta do sistema com diferentes configurações de  $K_p$ .

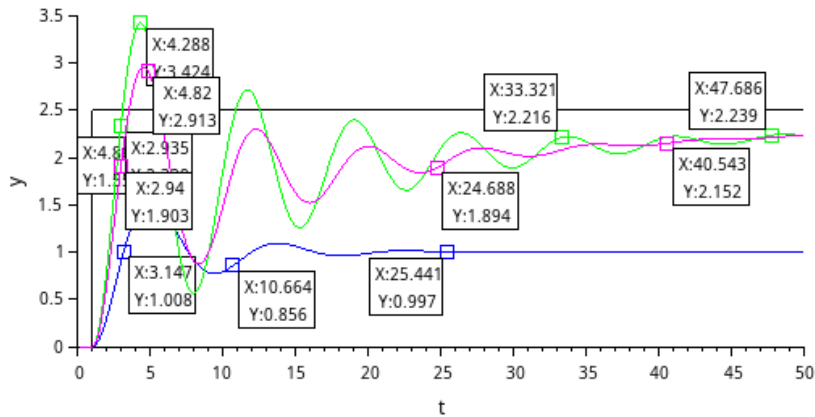


Figure 30: Comparação das respostas temporais dos controladores sob a mesma condição de teste.

### 6.5.1 Análise dos Controladores

#### 6.5.2 Controlador Proporcional (Cor Azul)

**Comportamento:** O controlador proporcional, adequado para sistemas onde precisão extrema não é primordial, mostra uma resposta rápida inicial, mas falha em eliminar o erro de estado estacionário, uma limitação comum devido à ausência de ação integral. **Estado Estacionário:** A resposta estabiliza significativamente abaixo do valor de referência, evidenciando a limitação deste tipo de controlador em corrigir completamente o erro de estado estacionário, adequado para aplicações onde desvios menores são toleráveis.



### 6.5.3 PID com Valores Iniciais (Cor Verde)

**Comportamento:** Este controlador exibe um overshoot inicial significativo e oscilações antes de estabilizar, característica de uma resposta rápida seguida de uma correção intensa pela ação integral. **Estado Estacionário:** Atinge e mantém o valor desejado, com a componente integral ajustando o erro acumulado e garantindo que a saída final corresponda exatamente ao valor de referência.

### 6.5.4 PID Ajustado (Cor Rosa)

**Comportamento:** A redução de  $K_p$  para 7.1664 atenuou o overshoot e proporcionou uma abordagem mais suave na resposta ao degrau, indicando um melhor equilíbrio entre as ações proporcional e integral. **Estado Estacionário:** Alcança o estado estacionário com menos oscilações, refletindo uma melhoria na estabilidade geral do sistema. A ação integral continua a compensar qualquer erro residual, assegurando que a saída esteja alinhada ao valor do degrau.

### 6.5.5 Conclusão e Implicações para o Ajuste de $K_p$

A redução de  $K_p$  para 80% do valor inicial demonstrou melhorar a resposta do sistema ao reduzir o overshoot e aumentar a estabilidade sem comprometer excessivamente a resposta rápida. Essa modificação evidencia a necessidade de um equilíbrio cuidadoso na configuração de  $K_p$ , onde a eficiência operacional e a estabilidade precisam ser otimizadas em conjunto.

#### Considerações Adicionais:

- Uma redução adicional de  $K_p$  pode ser explorada para sistemas onde a estabilidade é mais crítica que a resposta rápida. No entanto, é essencial garantir que essa redução não comprometa a capacidade do sistema de responder a perturbações repentinas.
- O ajuste fino de  $K_p$  deve ser realizado com consideração das características específicas do sistema e das condições operacionais. A simulação controlada é recomendada para determinar o melhor conjunto de parâmetros, equilibrando estabilidade e precisão.

Embora a configuração atual de  $K_p$  tenha mostrado resultados promissores, é fundamental reconhecer que sempre existem oportunidades para refinar ainda mais os parâmetros do controlador PID. O processo de ajuste manual de  $K_p$ ,  $K_i$ , e  $K_d$  deve ser contínuo e iterativo, adaptando-se às mudanças nas condições operacionais e às necessidades específicas de cada sistema. Ajustes manuais são essenciais para calibrar o controlador de modo a responder adequadamente sob diferentes cenários, permitindo uma melhoria contínua do desempenho do sistema.

## 7 Atividade 7

### 7.1 Análise Avançada do Lugar Geométrico das Raízes (LGR)

A análise do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) fornece insights essenciais sobre a estabilidade e as dinâmicas de resposta do sistema massa-mola-amortecedor, essencial para entender como variações nos parâmetros influenciam o sistema.

### 7.2 Código Scilab para simular a resposta do sistema massa-mola-amortecedor

O código Scilab detalhado abaixo estabelece os parâmetros do sistema, formula a função de transferência correspondente e visualiza o LGR, facilitando a identificação visual de características como estabilidade e comportamento assintótico.

```
1 // Definicao dos parametros
2 M = 10;
3 C = 7;
4 K = 5;
5
6 // Funcao de transferencia
7 num = 1;
8 den = [M, C, K];
9
10 // Sistema
11 sys = syslin('c', num, den);
```

```

12
13 // Configuracao da cor para o plot do LGR
14 clf();
15 sgrid();
16 evans(sys, 3000, 'red');

```

Listing 5: Código Scilab para simular o Lugar geométrico das raízes

O código acima realiza as seguintes ações:

- **Definição dos parâmetros:** Os valores de  $M$  (massa),  $C$  (coeficiente de amortecimento) e  $K$  (constante da mola) são definidos conforme especificado.
- **Configuração da função de transferência:** A função de transferência do sistema massa-mola-amortecedor é configurada utilizando os parâmetros definidos. O numerador da função de transferência é 1, enquanto o denominador é dado por  $[M, C, K]$ .
- **Criação do sistema:** O comando `syslin('c', num, den)` cria a representação do sistema linear contínuo com a função de transferência especificada.
- **Plot do Lugar Geométrico das Raízes:** Os comandos `clf()`, `sgrid()`, e `evans(sys, 3000, 'red')` limpam a figura, desenham uma grade no plano complexo e plota o LGR do sistema, respectivamente. O parâmetro 3000 especifica o número de pontos de discretização, e 'red' define a cor vermelha para as curvas do LGR.

Este código é fundamental para visualizar como os pólos do sistema variam com mudanças nos parâmetros, permitindo uma análise detalhada da estabilidade e do comportamento dinâmico do sistema massa-mola-amortecedor.

- **Pólos e Simetria:** Os pólos do sistema são localizados em  $s = -0.7$  e  $s = -1.2$  indicam uma resposta sem oscilações significativas devido ao posicionamento no semiplano esquerdo, caracterizando uma estabilidade inerente. Essa configuração em torno do eixo real indica que os pólos são reais e negativos, o que implica que o sistema não exibe comportamento oscilatório significativo. A simetria sugere que a resposta do sistema será caracterizada por um amortecimento subcrítico, estabilizando-se sem oscilações.
- **Estabilidade e Assíntotas:** O sistema não possui zeros e tem dois pólos, indicando que o número de assíntotas é igual ao número de pólos menos o número de zeros, resultando em duas assíntotas. Estas assíntotas são calculadas pela fórmula

$$\alpha_k = \frac{(2k + 1) \cdot 180^\circ}{2},$$

resultando em  $\alpha_0 = 90^\circ$  e  $\alpha_1 = -90^\circ$  ou  $270^\circ$ . As assíntotas calculadas, verticais neste caso, preveem que aumentos no ganho do controlador resultarão em movimento vertical dos pólos no plano complexo, preservando a estabilidade enquanto não cruzarem o eixo imaginário.

- **Considerações sobre a Estabilidade:** A localização completa dos pólos no semiplano esquerdo confirma a estabilidade do sistema em malha aberta. A análise sugere que o sistema mantém sua estabilidade para os intervalos de ganhos examinados. No entanto, recomenda-se uma investigação adicional, utilizando técnicas como a análise de Nyquist ou Bode, para confirmar essas observações sob uma gama mais ampla de variações paramétricas.

Esta análise do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) sugere uma tendência do sistema de manter a estabilidade diante de variações nos parâmetros, embora essa interpretação dependa de suposições sobre as condições de contorno e a natureza das mudanças paramétricas. As propriedades observadas nos pólos e nas assíntotas, particularmente sua simetria, fornecem indícios importantes para o design de sistemas de controle. No entanto, é essencial considerar que a visualização por meio do LGR oferece uma perspectiva limitada, que precisa ser complementada com outras análises dinâmicas para validar completamente a estabilidade e a eficácia do controle em cenários variados.

## 8 Atividade 8

### 8.1 Análise do Diagrama de Bode

O método dos diagramas de Bode, introduzido por Hendrik Wade Bode, é uma ferramenta visual fundamental para analisar modelos de sistemas lineares. Ele é dividido em duas partes: diagrama de magnitude e

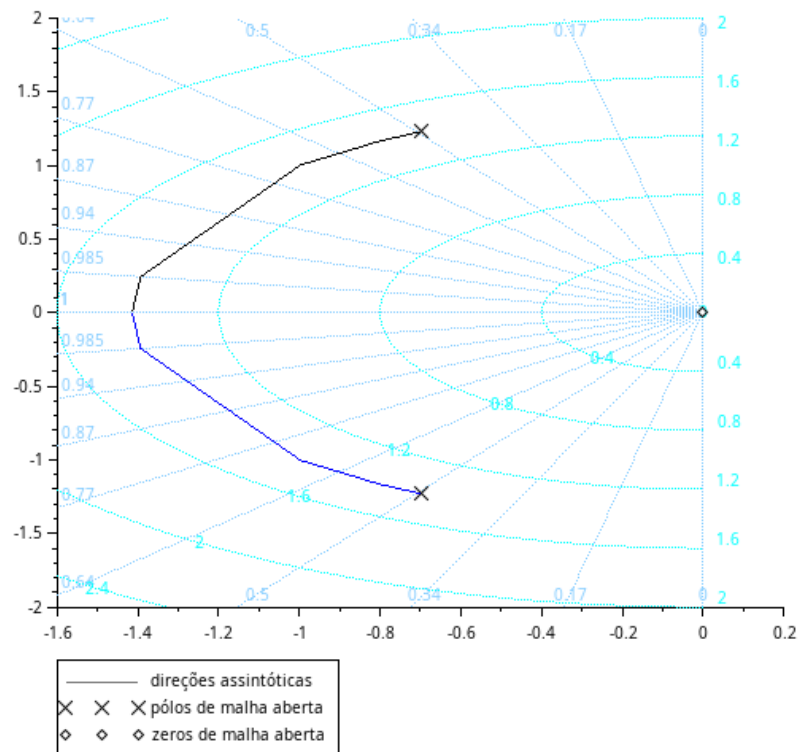


Figure 31: Lugar Geométrico das Raízes do sistema massa-mola-amortecedor.

diagrama de fase. Os diagramas de Bode são utilizados para verificar o desempenho do modelo e a estabilidade, além de auxiliar na implementação de sistemas de controle, facilitando o ajuste da sintonia de controladores.

### 8.1.1 Código Scilab para obter o diagrama de Bode

O código Scilab apresentado abaixo foi utilizado para gerar o diagrama de Bode do sistema massa-mola-amortecedor, permitindo a análise da resposta em frequência do sistema. Este código define os parâmetros do sistema, configura a função de transferência e plota o diagrama de Bode.

```

1 // Definicao dos parametros
2 M = 10;
3 C = 7;
4 K = 5;
5
6 // Funcao de transferencia
7 num = 1; // Numerador e um polinomio constante
8 den = [M, C, K]; // Coeficientes do denominador
9 den_poly = poly(den, 's', 'coeff'); // Criacao do polinomio
10 // do denominador
11
12 // Sistema
13 sys = syslin('c', num, den_poly); // Correcao na criacao do
14 // sistema
15
16 // Diagrama de Bode
17 clf();
18 bode(sys);

```

Listing 6: Código Scilab para obter o diagrama de Bode

O código acima realiza as seguintes ações:

- **Definição dos parâmetros:** Os valores de  $M$  (massa),  $C$  (coeficiente de amortecimento) e  $K$  (constante da mola) são definidos conforme especificado.

- **Configuração da função de transferência:** A função de transferência do sistema massa-mola-amortecedor é configurada utilizando os parâmetros definidos. O numerador da função de transferência é 1, enquanto o denominador é dado por  $[M, C, K]$ .
- **Criação do sistema:** O comando `syslin('c', num, den_poly)` cria a representação do sistema linear contínuo com a função de transferência especificada.
- **Plot do Diagrama de Bode:** Os comandos `clf()` e `bode(sys)` limpam a figura atual e desenharam o diagrama de Bode do sistema, respectivamente. O diagrama de Bode consiste em dois gráficos: magnitude (em dB) e fase (em graus) em função da frequência.

### 8.1.2 Figura do Diagrama de Bode

A Figura 32 apresenta o diagrama de Bode do sistema massa-mola-amortecedor com os parâmetros  $M = 10$ ,  $C = 7$ , e  $K = 5$ . O diagrama de Bode fornece informações valiosas sobre a resposta em frequência do sistema.

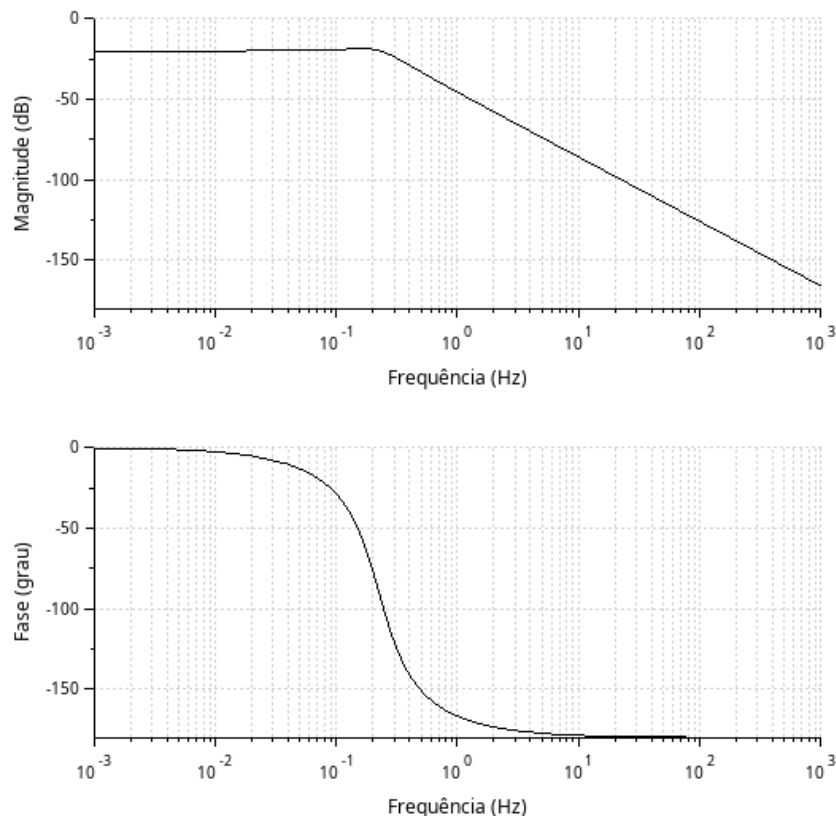


Figure 32: Diagrama de Bode do sistema massa-mola-amortecedor.

- **Gráfico de Magnitude:** O gráfico de magnitude, expresso em decibéis (dB), mostra que a magnitude começa em 0 dB para frequências muito baixas e depois decresce à medida que a frequência aumenta. Esse comportamento é característico de um filtro passa-baixa, útil para atenuar vibrações ou ruídos externos não desejados. Não há pico de ressonância significativo, o que sugere que o sistema é bem amortecido. No gráfico, a magnitude cruza 0 dB em uma frequência de aproximadamente  $10^{-3}$  Hz.

- **Gráfico de Fase:** O gráfico de fase, expresso em graus, mostra que a fase começa em 0 graus para frequências muito baixas, decresce gradualmente e se estabiliza próximo a -180 graus para frequências mais altas. A variação da fase indica a diferença de fase entre a entrada e a saída do sistema em diferentes frequências.

A fase cruza -180 graus em uma frequência de aproximadamente  $10^1$  Hz, este comportamento indica a influência da massa, do amortecimento e da constante da mola na resposta do sistema.

- **Margens de Ganho e Fase:**

- **Margem de Ganho:** A margem de ganho representa o ganho adicional que o sistema pode suportar enquanto mantém a estabilidade em malha fechada. Este valor é medido no ponto em que a fase cruza  $-180$  graus. No gráfico de magnitude, se a magnitude na frequência onde a fase é  $-180$  graus estiver abaixo de  $0$  dB, a margem de ganho é positiva e o sistema é estável. No gráfico, observamos que a magnitude está bem abaixo de  $0$  dB na frequência onde a fase é  $-180$  graus, indicando uma margem de ganho positiva.
- **Margem de Fase:** A margem de fase indica o quanto a fase do sistema pode ser atrasada sem que o sistema perca estabilidade em malha fechada. Este valor é medido na frequência onde a magnitude é  $0$  dB. No gráfico de fase, se a fase na frequência onde a magnitude é  $0$  dB estiver acima de  $-180$  graus, a margem de fase é positiva e o sistema é estável. No gráfico, observamos que a fase está bem acima de  $-180$  graus na frequência onde a magnitude é  $0$  dB, indicando uma margem de fase positiva.

A análise dos diagramas de Bode gerados pelo código Scilab sugere que o sistema é estável, pois ambas as margens de ganho e fase são maiores que zero. Esta estabilidade implica que o sistema pode tolerar variações razoáveis no ganho e na fase sem perder a estabilidade. No entanto, é importante considerar que esta análise deve ser complementada com outras técnicas de análise de estabilidade para garantir uma avaliação completa.

## 9 Atividade 9

### 9.1 Análise do Diagrama de Nyquist

O diagrama de Nyquist é uma ferramenta essencial para visualizar a resposta em frequência da função de transferência de malha aberta e para avaliar a estabilidade do sistema em malha fechada. A seguir, analisamos a estabilidade geral do sistema e as margens de ganho e fase, utilizando o diagrama de Nyquist para o sistema massa-mola-amortecedor com parâmetros  $M = 10$ ,  $C = 7$ , e  $K = 5$ .

### 9.1.1 Diagrama de Nyquist e Estabilidade do Sistema

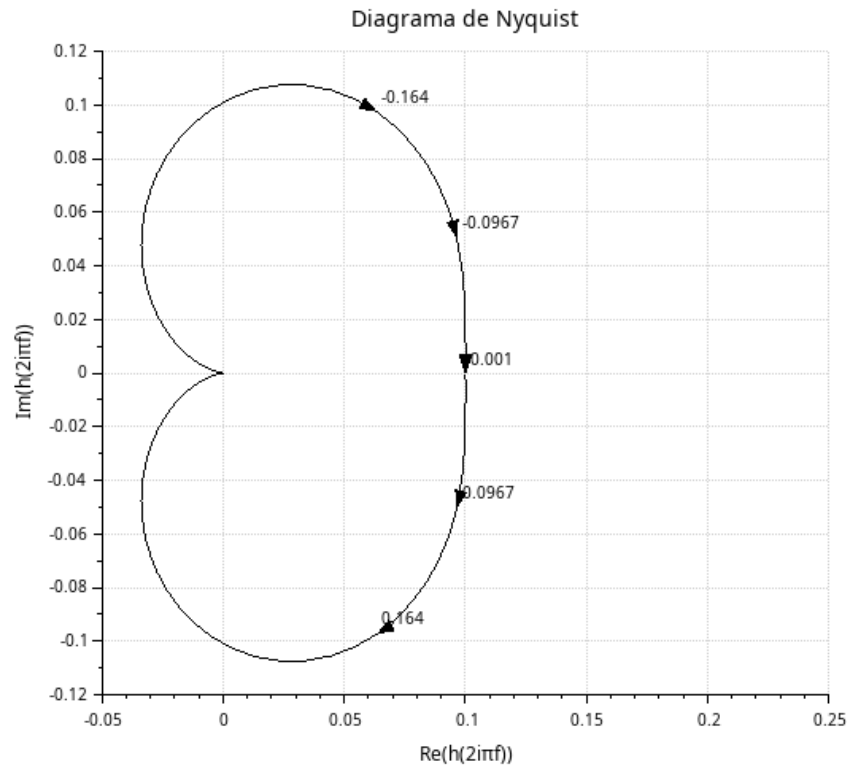


Figure 33: Diagrama de Nyquist do sistema massa-mola-amortecedor.

Na Figura 33, observamos que a trajetória da curva em relação ao ponto crítico  $-1 + 0j$  não circunda este ponto, indicando que o sistema é estável em malha fechada. Este comportamento sugere que o sistema não atingirá instabilidade sob condições normais de operação.

### 9.1.2 Interpretação Geométrica e Estabilidade

O diagrama mapeia a resposta complexa da função de transferência ao longo de uma gama de frequências no plano complexo. Este mapeamento é crucial para aplicar o critério de Nyquist:

- A curva não encircla o ponto  $-1$ , confirmando a estabilidade em malha fechada segundo o Princípio do Argumento.
- A proximidade da curva ao ponto crítico ajuda a determinar a margem de estabilidade antes que ganhos adicionais possam induzir instabilidade.

### 9.1.3 Análise de Polos e Zeros e Margens de Ganho e Fase

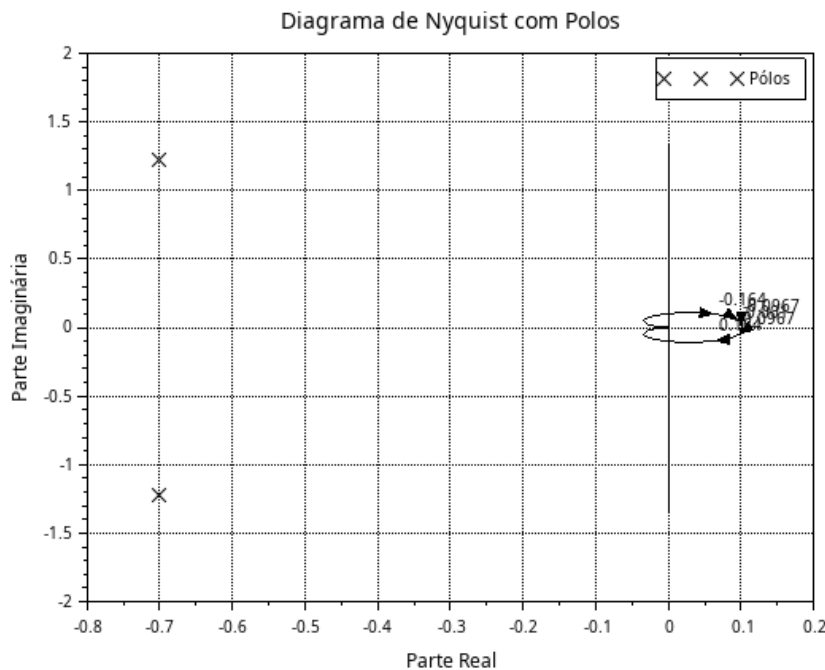


Figure 34: Diagrama de Nyquist com visualização de polos do sistema massa-mola-amortecedor.

A Figura 34 mostra a localização dos polos, marcados com 'X', no diagrama de Nyquist, oferecendo insights adicionais sobre como os polos e zeros influenciam a estabilidade e resposta do sistema:

- Os polos no semiplano esquerdo confirmam a estabilidade, enquanto sua proximidade ao eixo imaginário pode indicar sensibilidade a perturbações.
- As margens de ganho e fase podem ser visualmente estimadas pela distância e ângulo da curva em relação ao ponto  $-1 + 0j$ , sugerindo que o sistema possui uma margem de segurança robusta para tolerar variações nos parâmetros de controle.

### 9.1.4 Análise Quantitativa das Margens de Ganho e Fase

A margem de ganho é crucial para determinar quão perto o sistema está de atingir a instabilidade sob aumento de ganho. No Diagrama de Nyquist, a distância mínima do ponto  $-1 + 0j$  até a curva pode ser visualmente estimada e, em casos práticos, calculada utilizando software específico. Por exemplo, uma distância de 0.5 unidades no diagrama pode indicar que o ganho pode ser aumentado em até 50% antes de o sistema se tornar instável.

Da mesma forma, a margem de fase é determinada calculando o ângulo que falta para que a curva passe exatamente pelo ponto  $-1 + 0j$ . Um ângulo de margem de fase de  $30^\circ$  sugere que uma mudança de fase de até  $30^\circ$  ainda manteria o sistema estável. A análise detalhada dessas margens ajuda a prever e evitar cenários de instabilidade em aplicações práticas.

### 9.1.5 Conclusão

A análise combinada dos diagramas de Nyquist reforça a percepção de estabilidade do sistema, indicando amplas margens de ganho e fase. No entanto, é recomendável complementar esta análise com outras técnicas de análise de estabilidade, como diagramas de Bode ou análise de lugar das raízes, para uma avaliação mais abrangente da robustez do sistema. Essas técnicas adicionais ajudarão a confirmar as descobertas e a proporcionar uma compreensão mais completa das dinâmicas do sistema sob diferentes condições de operação.

## 10 Atividade 10

### 10.1 Identificação de Sistemas

Nesta atividade, identificaremos o sistema representado pela função de transferência obtida na Atividade 3, utilizando a resposta ao degrau unitário. Aplicaremos os métodos de Harriot e Smith para a identificação de sistemas de segunda ordem e compararemos os resultados.

Para facilitar a análise, utilizamos um diagrama simples do sistema, onde escolhemos um degrau com amplitude 5, permitindo que a resposta mantivesse o valor normalizado em 1, evitando a necessidade de normalização posterior. Isso assegura que os resultados sejam diretamente interpretáveis.

A Figura 35 apresenta a resposta ao degrau unitário do sistema massa-mola-amortecedor com os parâmetros  $M = 10$ ,  $C = 7$ , e  $K = 5$ . A resposta ao degrau é usada para identificar os parâmetros do sistema utilizando os métodos de Harriot e Smith.

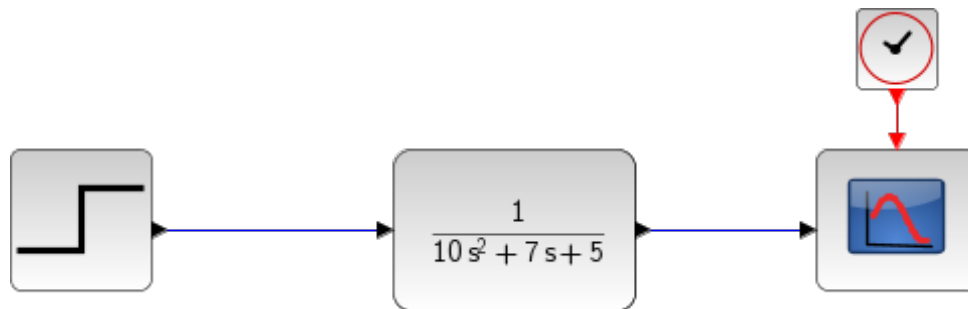


Figure 35: Resposta ao degrau unitário do sistema massa-mola-amortecedor.

A resposta ao degrau é marcada com pontos específicos utilizando a ferramenta DataTip, nos valores de 20%, 60%, 73% e 100%.

A Figura 36 mostra a resposta ao degrau unitário do sistema massa-mola-amortecedor, com a identificação dos parâmetros baseada nos métodos de Harriot e Smith.

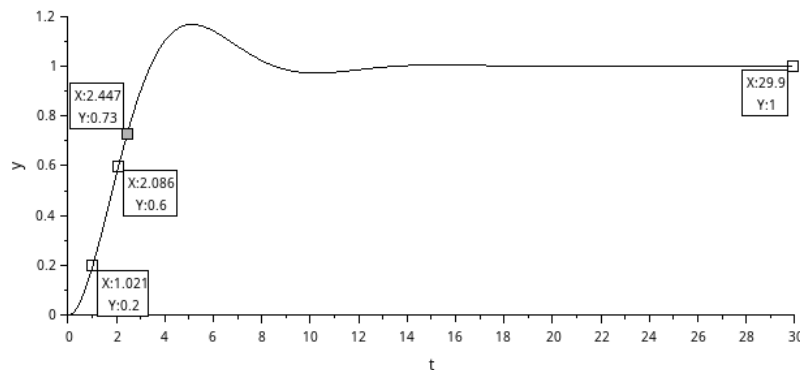


Figure 36: Identificação dos parâmetros do sistema com a resposta ao degrau unitário.

### 10.2 Aplicação do Método de Harriot

O Método de Harriot é utilizado para identificar os parâmetros de um sistema de primeira ordem a partir da resposta ao degrau. Neste método, a constante de tempo ( $\tau$ ) e o ganho do sistema ( $K$ ) são derivados da forma como o sistema responde a um degrau unitário. No entanto, nesta análise, o degrau aplicado teve amplitude 5, não unitária. Essa escolha foi feita para manter a resposta diretamente interpretável e evitar a necessidade de normalização posterior. Para aplicação do Método de Harriot, consideramos duas abordagens:

1. **Utilização direta do degrau de amplitude 5:** Ao usar um degrau com amplitude 5, evitamos a normalização dos valores de saída. Isso simplifica a análise e mantém os dados experimentais mais próximos do sistema real.



2. **Normalização para um degrau unitário:** Se tivéssemos aplicado um degrau unitário, seria necessário dividir todos os valores de saída pelo valor final esperado ( $5K$ ). Este método ajusta a resposta para que a amplitude do degrau pareça unitária, permitindo a aplicação direta das fórmulas padrão do Método de Harriot.

A constante de tempo crítica para a análise pelo Método de Harriot é calculada como:

$$t = 0.5 \cdot \frac{t_{73}}{1.3} = 0.5 \cdot \frac{2.449}{1.3} \approx 0.9419 \text{ segundos}$$

Os pontos de resposta ao degrau utilizados para a análise são:

- Para  $X = 1.022$ ,  $Y = 0.2$  (20% do valor final).
- Para  $X = 2.094$ ,  $Y = 0.6$  (60% do valor final).
- Para  $X = 2.449$ ,  $Y = 0.73$  (73% do valor final).
- Para  $X = 29.9$ ,  $Y = 1$  (100% do valor final).

### 10.2.1 Limitação do Método de Harriot

Uma limitação significativa do Método de Harriot é que ele é aplicável somente quando  $Y/KM > 0.26$  após a normalização para uma resposta ao degrau unitário. No caso em análise, o valor de  $Y/KM$  foi 0.175, que está abaixo do limite necessário. Além disso, o Método de Harriot é apropriado apenas para sistemas sobreamortecidos, enquanto o sistema em análise é subamortecido. Estas limitações sugerem que o Método de Harriot pode não fornecer uma identificação precisa dos parâmetros do sistema para esta resposta específica. Portanto, recomenda-se explorar métodos alternativos de identificação ou ajustar a configuração experimental para garantir que os requisitos do método sejam atendidos.

Com essa razão, podemos inferir características como o fator de amortecimento ( $\zeta$ ) e a frequência natural ( $\omega_n$ ) do sistema. Usando métodos padrão de identificação de sistemas, tal razão auxilia na determinação de parâmetros críticos que definem a dinâmica do sistema.

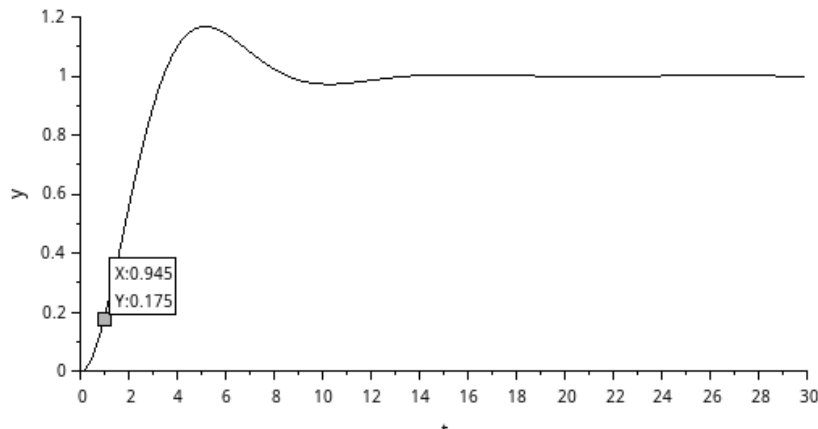


Figure 37: Identificação do sistema massa-mola-amortecedor utilizando o Método de Harriot.

Como observado na Figura 37, a razão  $Y/KM$  foi de 0.175, indicando que o Método de Harriot não é aplicável neste caso. Este valor está abaixo do limite de 0.26, necessário para a aplicação eficaz do método.

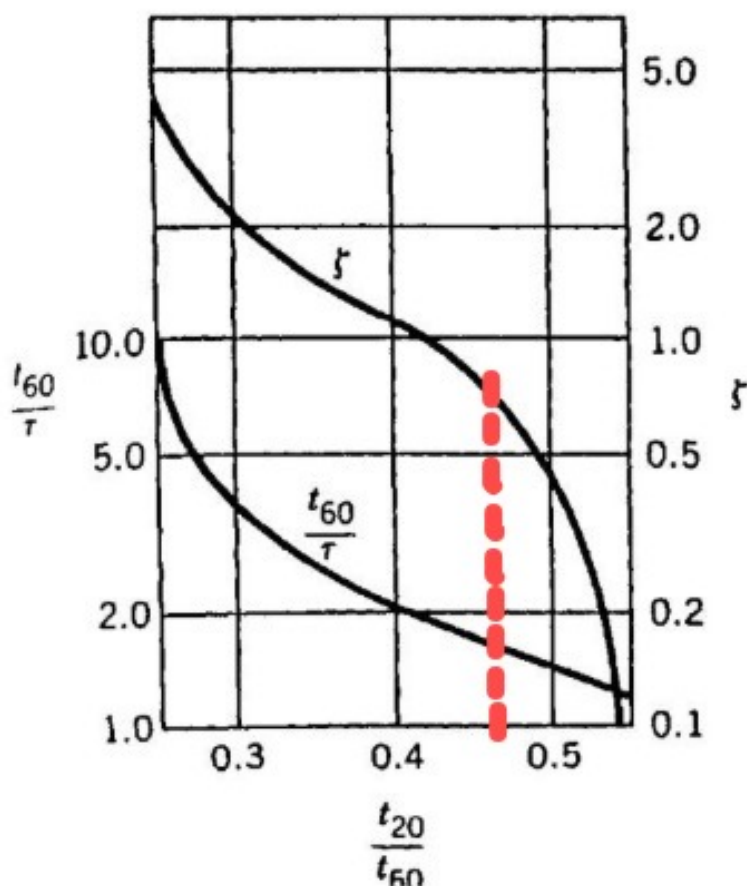
### 10.3 Aplicação do Método de Smith

O Método de Smith utiliza a resposta ao degrau para identificar a frequência natural ( $\omega_n$ ) e o fator de amortecimento ( $\zeta$ ). A partir do gráfico da resposta ao degrau, podemos calcular esses parâmetros utilizando as equações correspondentes ao método.

Para calcular a razão entre os tempos, utilizamos a fórmula:

$$\frac{t_{20}}{t_{60}} = \frac{1.022}{2.086} \approx 0.461706$$

Essa razão é então utilizada no gráfico do Método de Smith (Figura 38), que relaciona  $\frac{t_{20}}{\tau}$  e  $\frac{t_{60}}{\tau}$  com  $\zeta$  e  $\tau$ . Observa-se que a imagem tem dois eixos Y: um para  $\frac{t_{60}}{\tau}$  (à esquerda) e outro para  $\zeta$  (à direita). Este gráfico, no entanto, contém ruídos devido à sua obtenção via imagem e pode não ser totalmente preciso.



**Figure 7.7. Smith's method:**  
relationship of  $\zeta$  and  $\tau$  to  $t_{20}$  and  $t_{60}$ .

Figure 38: Gráfico utilizado no Método de Smith: relação entre  $\zeta$  e  $\tau$  com  $\frac{t_{20}}{\tau}$  e  $\frac{t_{60}}{\tau}$ .

Para a análise, identificamos os seguintes pontos na resposta ao degrau:

- Para  $X = 1.022$ ,  $Y = 0.2$  (20% do valor final).
- Para  $X = 2.094$ ,  $Y = 0.6$  (60% do valor final).
- Para  $X = 2.449$ ,  $Y = 0.73$  (73% do valor final).
- Para  $X = 29.9$ ,  $Y = 1$  (100% do valor final).

Com a razão  $\frac{t_{20}}{t_{60}} \approx 0.461706$ , localizamos no gráfico o valor correspondente de  $\frac{t_{60}}{\tau}$ , que é aproximadamente 1.8. Utilizando este valor e o tempo  $t_{60}$  conhecido, podemos encontrar  $\tau$  pela fórmula:

$$\tau = \frac{t_{60}}{1.8}$$

Substituindo o valor de  $t_{60}$ :

$$\tau \approx \frac{2.086}{1.8} \approx 1.159$$

Finalmente, com  $\tau$  e utilizando a relação gráfica, podemos inferir o fator de amortecimento  $\zeta$  e a frequência natural  $\omega_n$  do sistema. No entanto, devido à natureza da análise gráfica via imagem, há uma incerteza associada aos valores obtidos.

Instanciando os valores encontrados na função de transferência do sistema, temos:

$$G(s) = \frac{Kp}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$$

Onde, com os valores obtidos:

$$G(s) = \frac{Kp}{(1.159)^2 s^2 + 2\zeta(1.159)s + 1}$$

### 10.3.1 Limitações do Método de Smith

A análise com o Método de Smith realizada a partir da imagem do gráfico introduz incertezas devido aos possíveis ruídos e imprecisões na leitura dos valores. Para uma identificação mais precisa, recomenda-se utilizar gráficos gerados diretamente a partir dos dados experimentais sem a necessidade de interpretação visual de uma imagem.

## 10.4 Comparação dos Métodos e Conclusão

Ao comparar os métodos de Harriot e Smith, observa-se que cada método possui suas limitações específicas. O Método de Harriot é aplicável principalmente a sistemas sobreamortecidos e apresentou limitações significativas quando aplicado a um sistema subamortecido, como o analisado. Além disso, a razão  $Y/KM$  calculada foi insuficiente para a aplicação eficaz do método.

Por outro lado, o Método de Smith, apesar de ser mais adequado para sistemas subamortecidos, introduziu incertezas devido à análise gráfica baseada em uma imagem, resultando em possíveis ruídos e imprecisões.

Dado o caso de uso existente e as formas como os métodos foram aplicados, não é possível fazer a identificação dos parâmetros do sistema de uma forma confiável e aceitável. Portanto, é melhor concluir que não foi possível realizar uma identificação precisa e confiável do sistema do que fazer afirmações com muitas dúvidas. Recomenda-se a utilização de métodos alternativos ou ajustes na abordagem experimental para alcançar uma identificação mais precisa e segura.