

# 1 Atividade 1

## 1.1 Descrição do Modelo

O sistema modelado é um oscilador massa-mola-amortecedor, onde a massa está sujeita à força restauradora de uma mola e ao amortecimento proporcional à velocidade. A equação diferencial que descreve o movimento do sistema é dada por:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$$

onde  $x$  representa o deslocamento da massa  $m$  da sua posição de equilíbrio,  $\dot{x}$  é a velocidade,  $\ddot{x}$  é a aceleração,  $C$  é o coeficiente de amortecimento, e  $k$  é a constante da mola. A força de entrada é considerada nula, indicando que não há forças externas atuando sobre o sistema após o instante inicial.

## 1.2 Parâmetros do Sistema

Os parâmetros utilizados no modelo do sistema são especificados como segue:

- Massa ( $m$ ): 10 kg
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m
- Constante da mola ( $k$ ): 5 N/m

As condições iniciais para a simulação, baseadas nos parâmetros acima, são detalhadas na tabela a seguir:

Caso	Velocidade Inicial $V_0$	Posição Inicial $X_0$
1	5 m/s ( $\frac{m}{2}$ )	0 m
2	0 m/s	2.5 m ( $\frac{m}{4}$ )
3	3.33 m/s ( $\frac{m}{3}$ )	2 m ( $\frac{m}{5}$ )

Esta tabela reflete os valores numéricos para cada caso, facilitando a compreensão e a aplicação direta dos parâmetros na simulação.

## 1.3 Análise dos Resultados

Cada um dos casos de simulação foi configurado com condições iniciais distintas para explorar como o sistema responde a diferentes estados iniciais de deslocamento e velocidade.

### 1.3.1 Caso 1

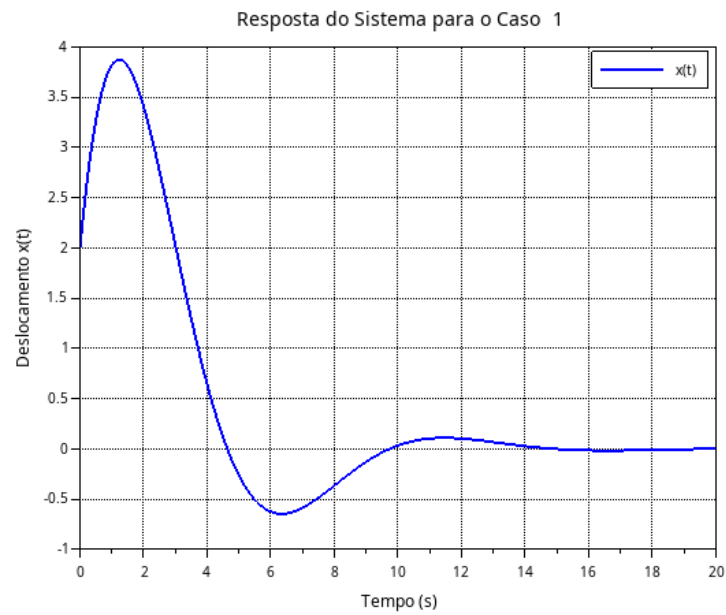


Figure 1: Resposta do sistema para o Caso 1

No Caso 1, com uma velocidade inicial significativa ( $\frac{m}{2}$ ) e sem deslocamento inicial ( $X_0 = 0$ ), o sistema exibe uma resposta vigorosa inicialmente, decaindo rapidamente devido ao amortecimento considerável. A alta velocidade inicial resulta em uma amplitude inicial grande, mas a ausência de força externa e o alto amortecimento fazem com que o sistema retorne rapidamente à estabilidade sem oscilações residuais.

### 1.3.2 Caso 2

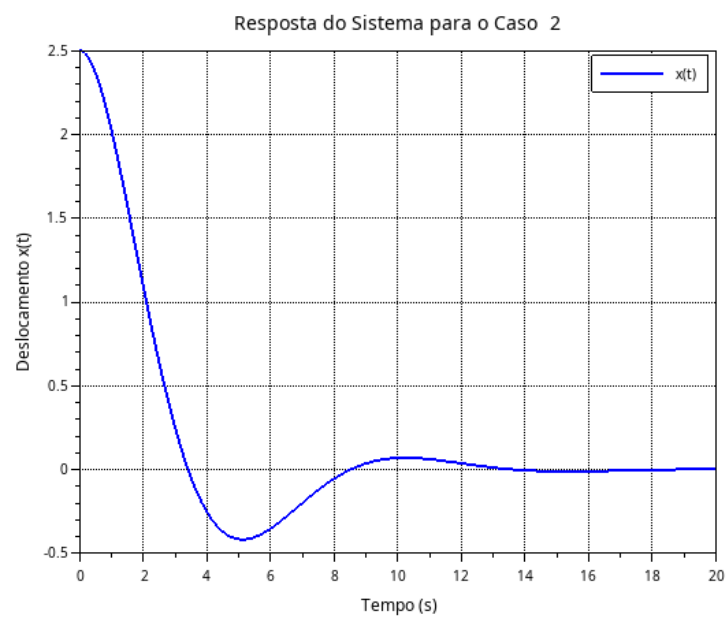


Figure 2: Resposta do sistema para o Caso 2

No Caso 2, a velocidade inicial é nula ( $V_0 = 0$ ), e o deslocamento inicial é  $\frac{m}{4}$ . Este caso ilustra um exemplo clássico de oscilação amortecida onde o sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio e liberado. A resposta mostra oscilações que decaem ao longo do tempo, com o sistema eventualmente retornando ao repouso. Comparativamente, este caso tem uma resposta mais suave em termos de velocidade devido à ausência de velocidade inicial.

### 1.3.3 Caso 3

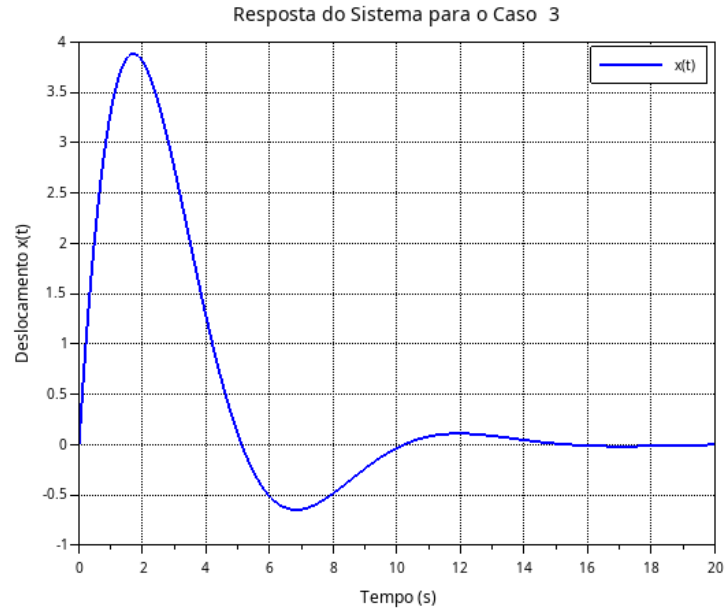


Figure 3: Resposta do sistema para o Caso 3

No Caso 3, tanto a velocidade ( $\frac{m}{3}$ ) quanto o deslocamento ( $\frac{m}{5}$ ) iniciais são não nulos. Esta condição inicial resulta em uma resposta dinâmica complexa, com o sistema exibindo uma amplitude inicial maior e oscilações mais sustentadas comparadas aos outros casos. O sistema ainda retorna ao repouso, mas a trajetória é mais envolvente e ilustra a interação entre energia cinética e potencial no sistema.

### 1.3.4 Comparação Unificada dos Casos

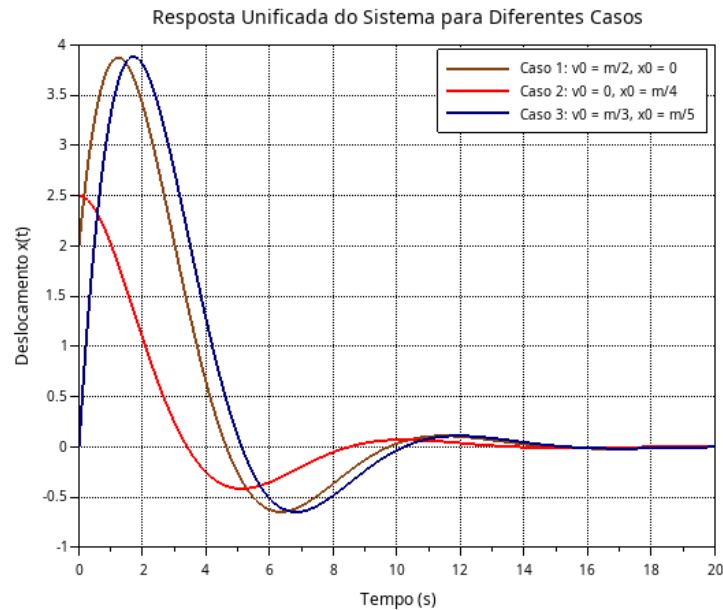


Figure 4: Resposta unificada do sistema para os Casos 1, 2 e 3

A resposta unificada ilustra claramente as interações e diferenças nas dinâmicas do sistema sob diversas condições iniciais. Observando o gráfico, podemos notar que:

- O **Caso 1** (Azul Escuro), com alta velocidade inicial e sem deslocamento, mostra a resposta mais rápida e com maior amplitude inicial, indicando uma rápida transferência de energia cinética para energia potencial e vice-versa, resultando em um rápido retorno à estabilidade.
- O **Caso 2** (Vermelho), começando com um deslocamento inicial sem velocidade, apresenta uma oscilação amortecida clássica que decai gradualmente, refletindo uma conversão mais lenta de energia potencial em energia cinética.
- O **Caso 3** (Marrom), com condições iniciais de deslocamento e velocidade moderados, combina aspectos dos dois primeiros casos, resultando em uma resposta intermediária com oscilações sustentadas que decaem de forma mais gradual que no Caso 1, mas com uma amplitude inicial mais significativa do que no Caso 2.

Esta comparação visual ressalta a importância do amortecimento e da rigidez da mola no comportamento do sistema, assim como o efeito das condições iniciais na resposta do sistema. Cada caso contribui para um entendimento mais aprofundado de como diferentes tipos de energia são gerenciados e dissipados dentro do sistema.

## 1.4 Comentários Gerais

Os gráficos mostram claramente a influência das condições iniciais na resposta dinâmica do sistema. A comparação entre os três casos revela que quanto maior a energia inicial (seja em forma de deslocamento ou velocidade), mais vigorosa é a resposta inicial do sistema. O amortecimento desempenha um papel crucial em trazer o sistema de volta ao repouso, demonstrando sua eficácia em dissipar energia mecânica. Essas simulações servem como uma excelente demonstração das propriedades fundamentais de sistemas dinâmicos lineares.

## 2 Atividade 2

### 2.1 Descrição do Modelo e Simulação

Esta atividade envolve a criação de um diagrama de blocos no Xcos que simula a resposta de um sistema massa-mola-amortecedor com uma entrada especificada como  $f(t) = \frac{m}{5}$ , onde  $m = 10$  unidades de massa. O objetivo é analisar o comportamento do sistema sob diferentes condições iniciais e identificar métricas específicas do sistema dinâmico.

### 2.2 Parâmetros do Sistema e Condições Iniciais

Os parâmetros utilizados no modelo do sistema são:

- Massa,  $m = 10$  unidades.
- Coeficiente de amortecimento,  $C = 7$  unidades.
- Constante da mola,  $k = 5$  unidades.

A tabela a seguir detalha as condições iniciais ajustadas com base nos parâmetros do sistema:

Caso	Velocidade Inicial $V_0$	Posição Inicial $X_0$
1	5 m/s ( $\frac{m}{2}$ )	0 m
2	0 m/s	2.5 m ( $\frac{m}{4}$ )
3	3.33 m/s ( $\frac{m}{3}$ )	2 m ( $\frac{m}{5}$ )

### 2.3 Resultados e Análise

#### 2.3.1 Gráfico de Deslocamento

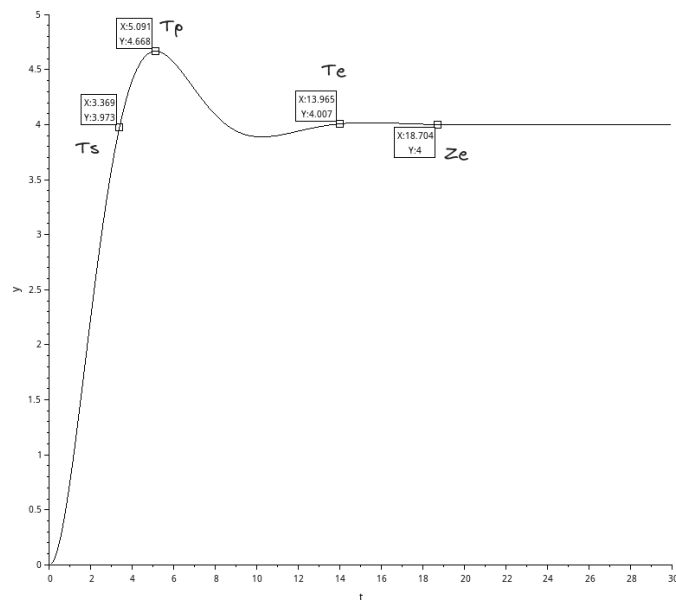


Figure 5: Gráfico de deslocamento com parâmetros comentados

No gráfico de deslocamento, são identificados os seguintes pontos:

- **Tempo de Subida ( $T_s$ ):** Tempo necessário para o deslocamento alcançar pela primeira vez o seu valor máximo.
- **Tempo de Pico ( $T_p$ ):** Momento em que o deslocamento atinge o seu valor máximo.
- **Tempo de Estabelecimento ( $T_e$ ):** Tempo necessário para que o deslocamento se estabilize dentro de uma faixa aceitável em torno do valor final.
- **Zona Estacionária ( $Z_e$ ):** Região no gráfico onde o sistema mantém um comportamento constante, indicando o estado estacionário.

### 2.3.2 Gráfico de Velocidade

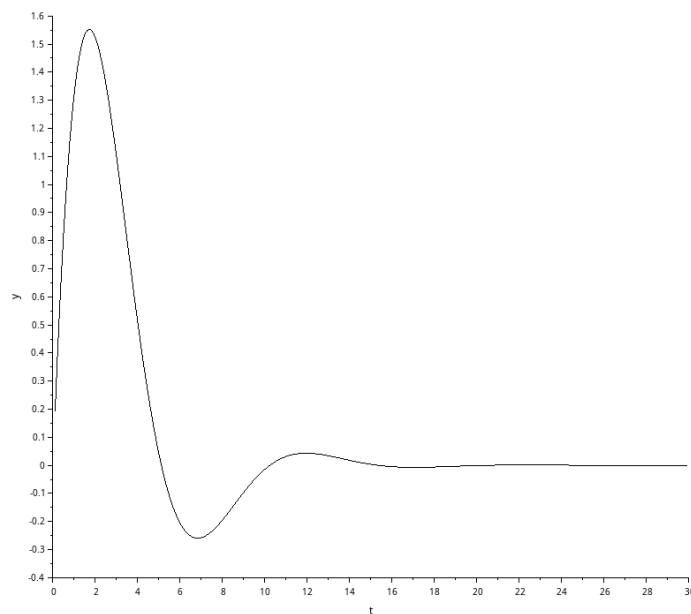


Figure 6: Gráfico de velocidade

O gráfico de velocidade fornece uma visão sobre como a velocidade do sistema varia ao longo do tempo em resposta à entrada aplicada e às condições iniciais.

## 2.4 Conclusões

A análise dos gráficos de deslocamento e velocidade mostra a eficácia do amortecimento e a influência da rigidez da mola nas respostas do sistema. Cada caso demonstra um comportamento único que é crucial para entender a dinâmica do sistema sob várias condições iniciais.

# 3 Atividade 3

## 3.1 Descrição do Modelo e Análise de Sistema

Nesta atividade, foi desenvolvida a função de transferência para um sistema massa-mola-amortecedor com os seguintes parâmetros específicos para o estudante Guilherme Cagide Fialho:

- Massa,  $m = 10$  kg.

- Coeficiente de amortecimento,  $C = 7$  Ns/m.
- Constante da mola,  $K = 5$  N/m.

A função de transferência obtida é:

$$G(s) = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

### 3.2 Cálculo dos Polos e Parâmetros do Sistema

Os polos da função de transferência são complexos conjugados e foram calculados como:

- Polo 1:  $-0.35 + 0.614j$
- Polo 2:  $-0.35 - 0.614j$

Os parâmetros típicos do sistema de segunda ordem são:

- Frequência natural não-amortecida ( $\omega_n$ ): 0.707 rad/s
- Coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ): 0.495
- Ganho estático ( $K_p$ ): 0.2

### 3.3 Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso do sistema foi simulada e é mostrada na figura abaixo:

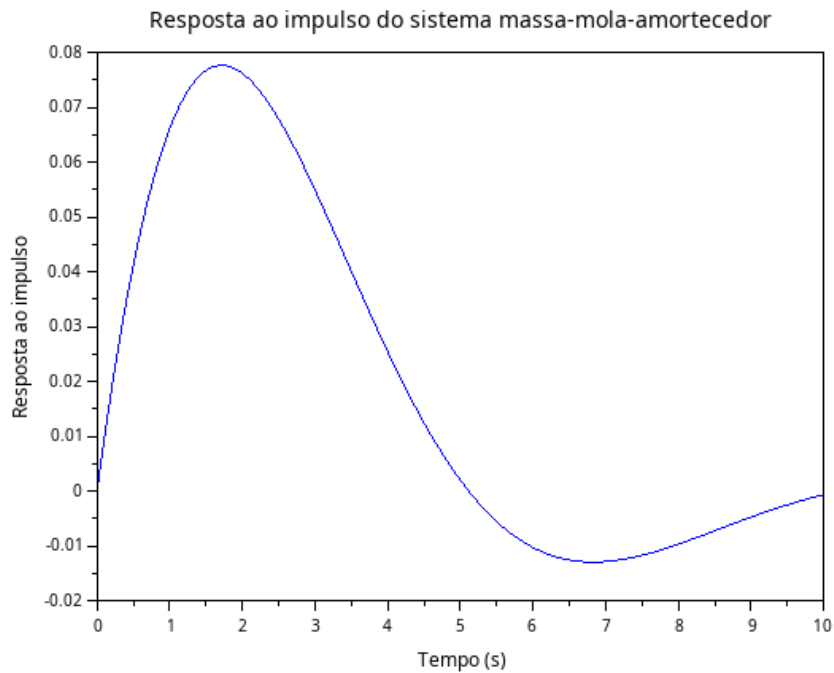


Figure 7: Resposta ao impulso do sistema massa-mola-amortecedor

### 3.4 Discussão

A análise dos polos mostra que o sistema é subamortecido, o que é corroborado pelo coeficiente de amortecimento menor que 1. A resposta ao impulso ilustra um comportamento oscilatório decaído, típico de sistemas subamortecidos, onde as oscilações diminuem gradualmente até a estabilização. O ganho estático ( $K_p$ ) indica a resposta do sistema a uma entrada de degrau unitário em regime permanente.

### 3.5 Conclusões

A simulação e os cálculos realizados fornecem uma visão detalhada da dinâmica do sistema, evidenciando como os parâmetros de massa, amortecimento e rigidez influenciam o comportamento do sistema. Esta análise é essencial para o entendimento e design de sistemas de controle que possam efetivamente gerenciar tais dinâmicas.

## 4 Atividade 4

### 4.1 Descrição do Modelo e Simulação

Nesta atividade, analisamos um sistema de controle típico. Utilizamos um controlador proporcional cujo ganho  $K$  é determinado pela relação  $\frac{m}{3}$ , onde  $m$  é a massa do sistema. A função de transferência da planta ( $G_p$ ) é derivada da equação dinâmica da massa, amortecimento e constante da mola, especificada na Atividade 3. O sensor é modelado por um sistema de primeira ordem, com ganho unitário  $K_s = 1$  e constante de tempo  $T_s = \frac{m}{6}$ .

### 4.2 Construção do Diagrama de Blocos

Abaixo, apresentamos o diagrama de blocos para o sistema de controle, ilustrando a interação entre o controlador, a planta e o sensor.

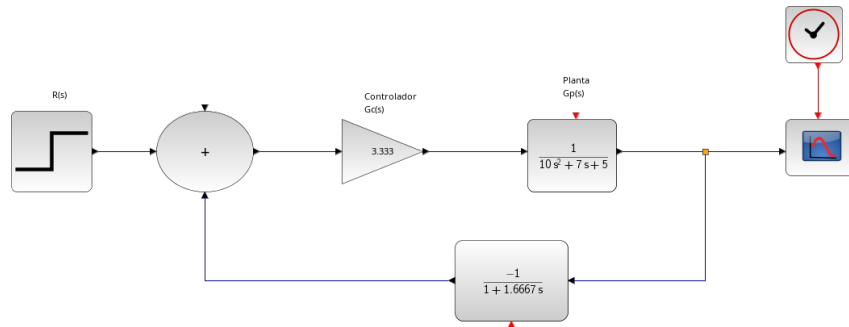


Figure 8: Diagrama de blocos do sistema de controle

As funções de transferência são especificadas como segue:

- Controlador:  $G_c(s) = \frac{m}{3}$  com  $m = 10$ , então  $G_c(s) = \frac{10}{3}$
- Planta:  $G_p(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K} = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$
- Sensor:  $H(s) = \frac{1}{1 + \frac{m}{6}s} = \frac{1}{1 + 1.6667s}$

### 4.3 Função de Transferência em Malha Fechada

Calculamos a função de transferência em malha fechada  $C(s)/R(s)$  pela fórmula:

$$G_{closed}(s) = \frac{G_c(s) \cdot G_p(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot H(s)}$$

Substituímos as funções de transferência obtidas:

$$G_{closed}(s) = \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}}{1 + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10s^2 + 7s + 5} \cdot \frac{1}{1 + 1.6667s}}$$

Simplificamos a expressão para chegar à forma final da função de transferência em malha fechada:

$$G_{closed}(s) = \frac{0.3333333s + 0.2}{s^3 + 1.3s^2 + 0.92s + 0.5}$$



## 4.4 Análise de Estabilidade pelo Critério de Routh-Hurwitz

Utilizamos o critério de Routh-Hurwitz para avaliar a estabilidade do sistema, baseando-nos nos coeficientes do denominador da função de transferência em malha fechada.

### 4.4.1 Resultados da Análise de Estabilidade

A matriz de Routh-Hurwitz, obtida a partir dos coeficientes do polinômio do denominador, é apresentada a seguir:

$$RH\_matrix = \begin{bmatrix} 0.5 & \dots \\ 0.92 & \dots \\ 1.3 & \dots \\ 1 & \dots \end{bmatrix}$$

O sistema é considerado estável, pois todos os elementos da primeira coluna são positivos.

## 4.5 Análise de Estabilidade para Diferentes Valores de $K$

Investigamos a estabilidade do sistema para diferentes valores do ganho do controlador  $K_p$ , variando de 1 a 10. As análises mostram que o sistema mantém a estabilidade em todo o intervalo testado.

### 4.5.1 Resultados da Resposta ao Degrau

Abaixo, apresentamos o gráfico da resposta ao degrau para os diferentes valores de  $K_p$ :

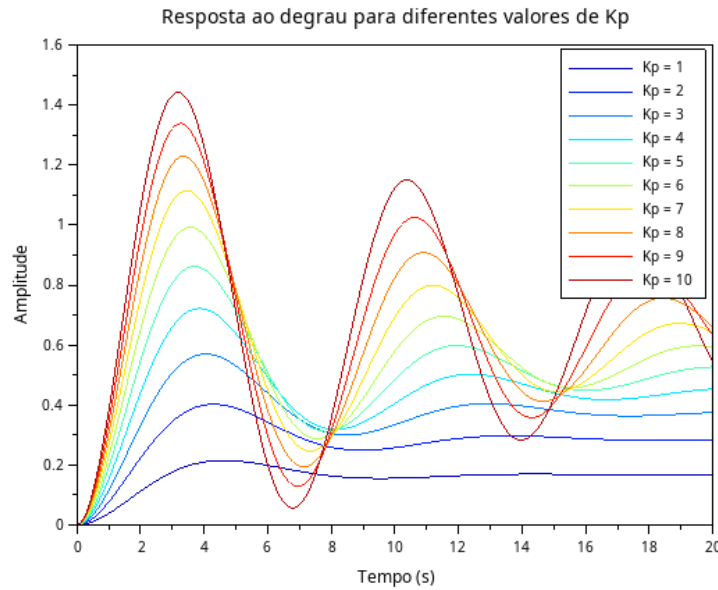


Figure 9: Resposta ao degrau para diferentes valores de  $K_p$

## 4.6 Conclusões

As análises mostram que o sistema massa-mola-amortecedor controlado proporcionalmente é estável para os valores de  $K_p$  entre 1 e 10. Observa-se que o comportamento da resposta ao degrau varia significativamente com o ganho do controlador, destacando a necessidade de ajuste adequado para alcançar a resposta desejada do sistema.