



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**

INSTITUTO POLITÉCNICO
**GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
DE COMPUTAÇÃO**



Autor:

Rodrigo Macedo Campos de Souza

Relatório de

Modelagem e Controle de Sistemas:

Rio de Janeiro

2021

Rodrigo Macedo Campos de Souza

Relatório de
Modelagem e Controle de Sistemas:

Relatório do projeto da matéria
Modelagem e Controle de Sistemas do
curso de Engenharia da Computação da
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Professor: Joel Sánchez Domínguez

Rio de janeiro

2021

RESUMO

O trabalho em questão tem o objetivo de resolver exercícios de modelagem do sistema massa-mola-amortecedor, visando verificar os pontos fracos e fortes do sistema para simular computacionalmente um problema de mundo real e procurar otimizá-lo.

ABSTRACT

This work has the objective of solving modeling exercises of the mass-spring-damper system, aiming to verify the weak and strong points of the system to computationally simulate a real world problem and seek to optimize it.

SUMÁRIO

Introdução	3
Resultados e discussão	4
Questão 1 Modelagem FT.....	4
1. a).....	4
1. b).....	5
1. c).....	5
1. d).....	6
1. e).....	6
1. f).....	8
1. g).....	8
1. h).....	9
Questão 2 Construção de gráficos	10
2. a).....	10
2. b).....	11
2. c).....	12
Questão 3 Diagrama de blocos e Matriz RH.....	13
3. a).....	13
3. b).....	13
3. c).....	14
3. d).....	14
Questão 4 XCos	16
4. a).....	16
4. b).....	16
4. c).....	17

4. d).....	18
Questão 5 Xcos controlador PID	20
5. a).....	20
5. b).....	22
5. c).....	23
5. d).....	24
Questão 6 Evans.....	25
Questão 7 Bode	26
Questão 8 Nyquist	27
CONCLUSÃO	28
REFERÊNCIAS.....	28
APÊNDICE.....	29
Questão 1.....	29
Questão 2.....	29
Matriz Routh	31
Raízes de Evans	31
Diagrama de Bode.....	32
Estabilidade de Nyquist	32

Introdução

A modelagem pode ser definida como um processo de desenvolvimento de modelos de um sistema visando fornecer a descrição matemática de um fenômeno do mundo real. O modelo matemático por sua vez é um instrumento que utiliza um conjunto de símbolos e equações para representar um sistema real e resolvidas por valores estimados.

Um conjunto de equipamentos organizados com o propósito de conseguir a resposta de um sistema sendo dada uma entrada específica é denominado sistema de controle.

A modelagem dos sistemas, muito utilizada na engenharia, pode ser caracterizada como uma análise para entender a funcionalidade dos sistemas e elaborar uma discussão sobre seus pontos fortes e fracos, tentando obter a sua otimização.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Questão 1 Modelagem FT

1. a)

O sistema escolhido foi o Sistema massa-mola-amortecedor. Abaixo, sua imagem:

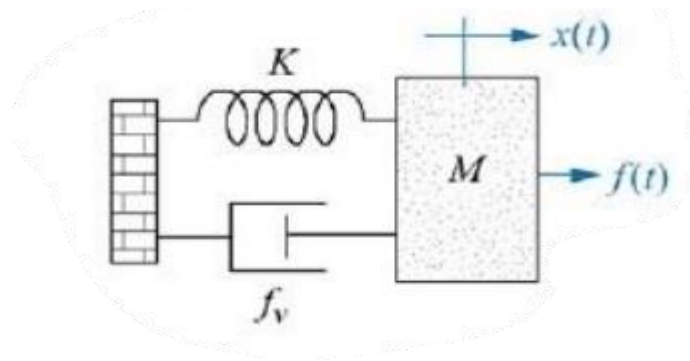
Sistema massa-mola-amortecedor

Figura 1 - Sistema massa-mola-amortecedor

Fonte: EAD-IPRJ, material de Modelagem e Controle de Sistemas

Regido pela equação:

$$f(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$$

A segunda lei de Newton foi utilizada para modelar essa equação, descrevendo a força resultante que atua no corpo de massa M. Segundo Newton, a força resultante em um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração nela impressa.

1. b)

Obtendo a função de transferência do sistema:

Transformada de Laplace:

Considerando $f(t) = Y(t)$

$$L[Y(t)] = L[m\ddot{x} + f_v\dot{x} + kx]$$

$$Y(s) = ms^2X(s) + f_vsX(s) + KX(s)$$

$$Y(s) = X(s)(ms^2 + f_vs + K)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + f_vs + K}$$

Na forma padrão, temos:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{K}}{\frac{ms^2}{K} + \frac{f_vs}{K} + 1}$$

1. c)

Identificando os componentes:

Fórmula Geral:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2s^2 + 2\epsilon\tau s + 1} = \frac{\frac{1}{K}}{\frac{ms^2}{K} + \frac{f_vs}{K} + 1}$$

Comparando os componentes, temos:

τ – Constante de tempo do processo; $\tau = \sqrt{\frac{m}{K}}$

ε – Fator de amortecimento; $\varepsilon = \frac{f_v}{2k\tau} = \frac{f_v}{2k\sqrt{\frac{m}{k}}}$

K_p – Ganho estacionário do processo; $K_p = \frac{1}{K}$

ω_n – Frequência natural; $\omega_n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{k}}}$

1. d)

Com os respectivos valores P1, P2 e P3 de Rodrigo Macedo Campos de Souza da tabela de parâmetros temos:

$$P1 = 1 = K_p$$

$$P2 = 0.85 = \xi$$

$$P3 = 0.25 = \omega_n$$

Desta forma, conseguimos obter os seguintes valores:

$$K_p = \frac{1}{K}, \text{ logo: } K = 1$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_n} \text{ p/ } \omega_n = 0.25, \tau = 4$$

$$m = \tau^2 K = 16$$

$$f_v = 2 * \xi * K * \tau = 2 * 0.85 * 1 * 4 = 6.8$$

1. e)

Substituindo os valores encontrados, temos a função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + f_v s + K} = \frac{1}{16s^2 + 6.8s + 1}$$

No Scilab, temos:

$$\frac{1}{1 + 6.8z + 16z^2}$$

$$-0.2125 + 0.1316957i$$

$$-0.2125 - 0.1316957i$$

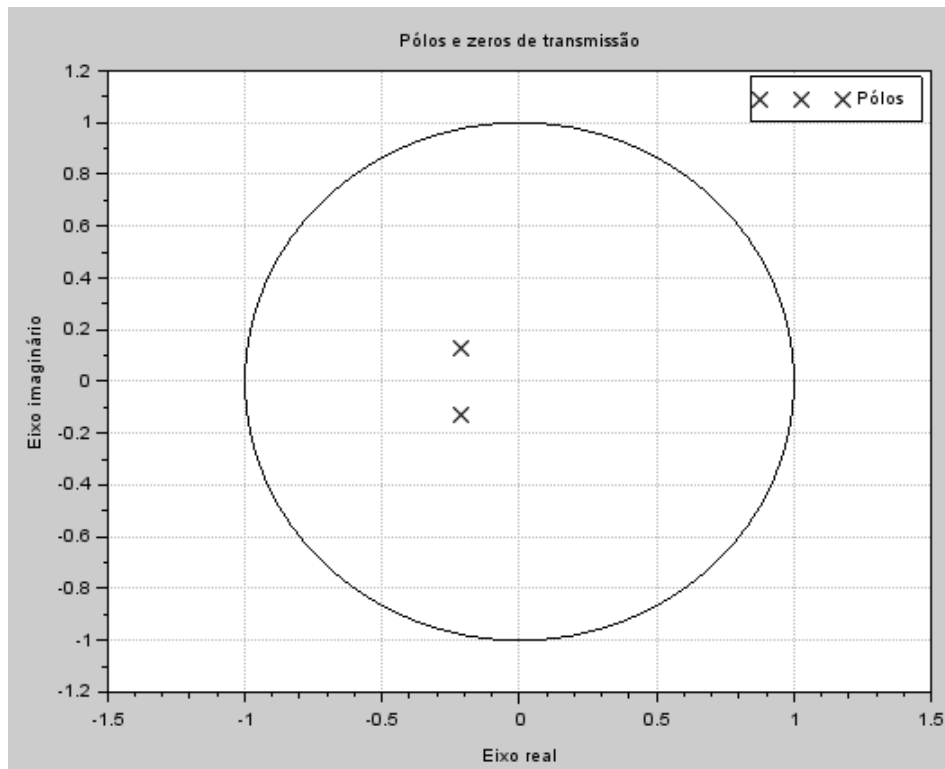


Figura 2 – Gráfico no Scilab

$$p1 = -0.21 + 0.13i$$

$$p2 = -0.21 - 0.13i$$

1. f)

Novos Polos (duplicando a parte real):

$$\begin{aligned}p1 &= -0.42 + 0.13i \\p2 &= -0.42 - 0.13i\end{aligned}$$

Com os novos polos, temos:

$$\begin{aligned}(s - p1)(s - p2) &= 0 \\(s + 0.42 - 0.13i)(s + 0.42 + 0.13i) &= 0\end{aligned}$$

Assim chegamos na nova função de transferência:

$$N(s) = \frac{1}{s^2 + 0.84s + 0.19} = 0$$

1. g)

Com os novos polos, descobrimos os parâmetros físicos para fins de cálculo:

$$K = 0.19 \qquad m = 1 \qquad f_v = 0.84$$

Logo, teremos os parâmetros típicos:

$$\begin{aligned}K_p &= \frac{1}{K} = 5.26 \\ \varepsilon &= \frac{f_v}{2K\tau} = \frac{f_v}{2K\sqrt{\frac{m}{K}}} = 0.96 \\ \omega_n &= \frac{1}{\tau'} = 0.43\end{aligned}$$

1. h)

A alternância nos polos, possibilitou aumentos e diminuições em determinados parâmetros:

G(s)	N(s)	Parâmetro	Situação
1	5,26	K_p	Aumento
0,85	0,96	ε	Aumento
0,25	0,43	W_n	Aumento
1	0,19	K	Diminuição
16	1	m	Diminuição
6,8	0,84	f_v	Diminuição

Questão 2 Construção de gráficos

2. a)

Através da função disponibilizada pelo professor, construímos no Scilab os gráficos da função de transferência $G(s)$ obtida na letra e) da questão 1:

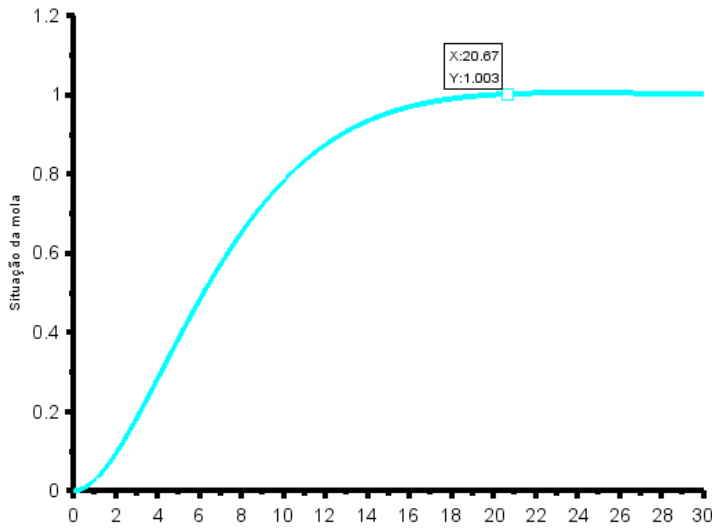


Figura 36: Tempo de subida (T_r) = 20,67

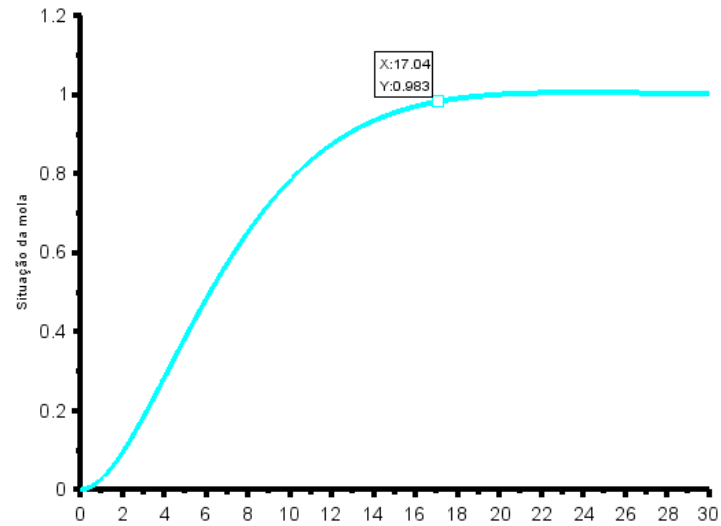


Figura 4: Tempo de estabilização (T_s) = 17,04

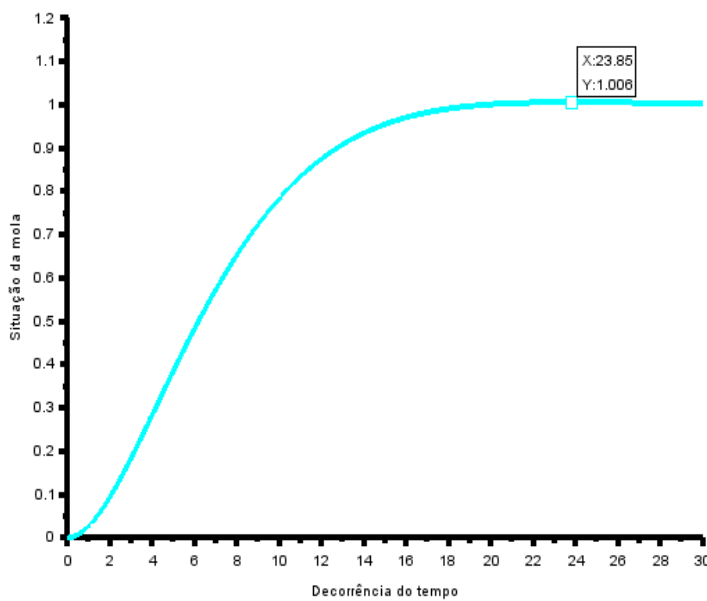


Figura 5: Tempo de pico (T_p) = 23,85

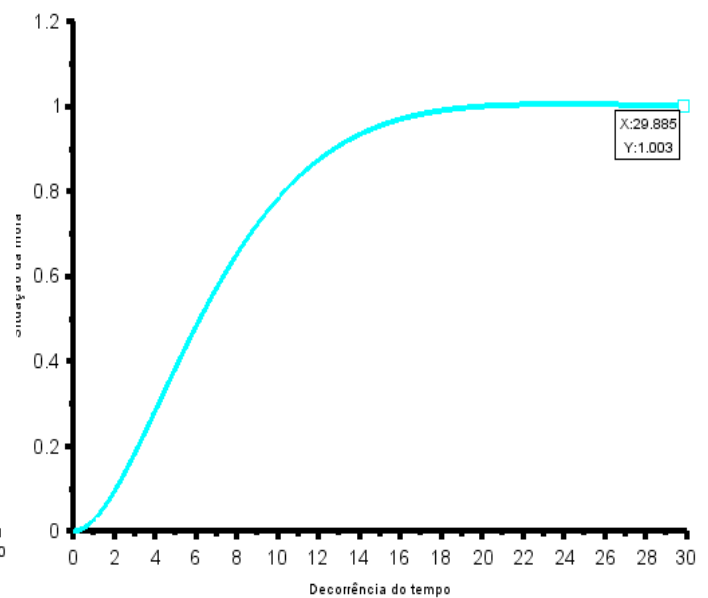


Figura 6: Estado estacionário

2. b)

Para a função de transferência $(N(s))$ obtida na questão 1-f) obtemos:

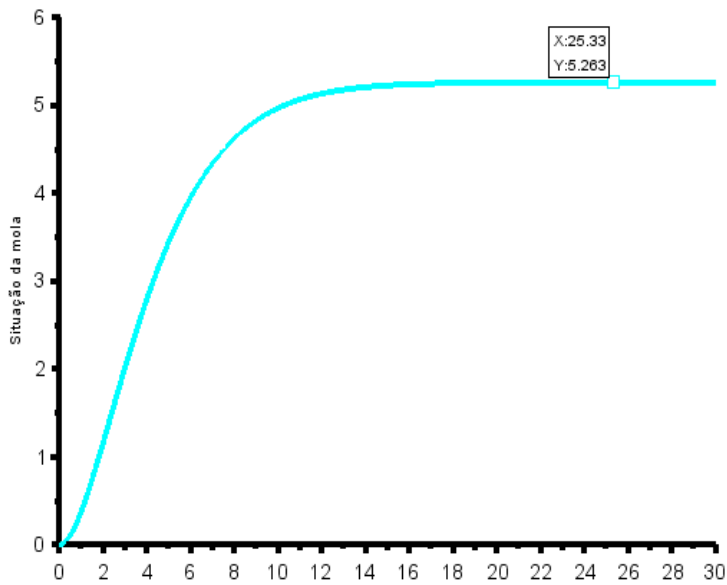


Figura 7: Tempo de subida (T_r) = 25,33

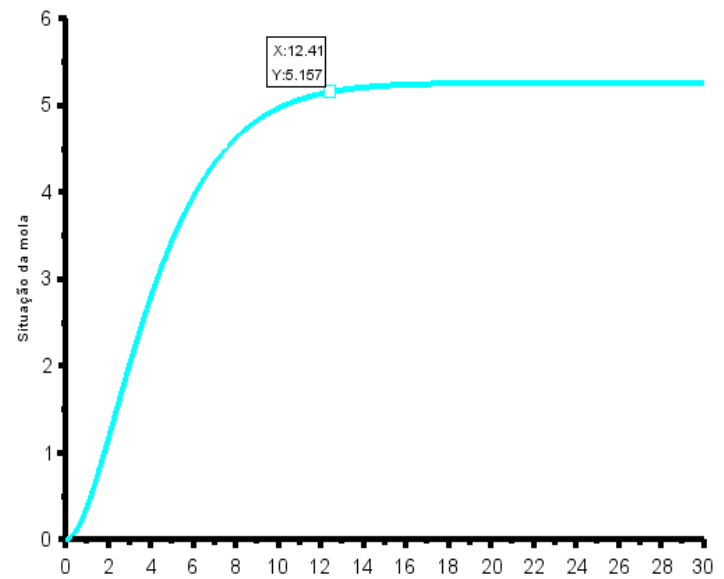


Figura 8: Tempo de Estabilização (T_s) = 12,41

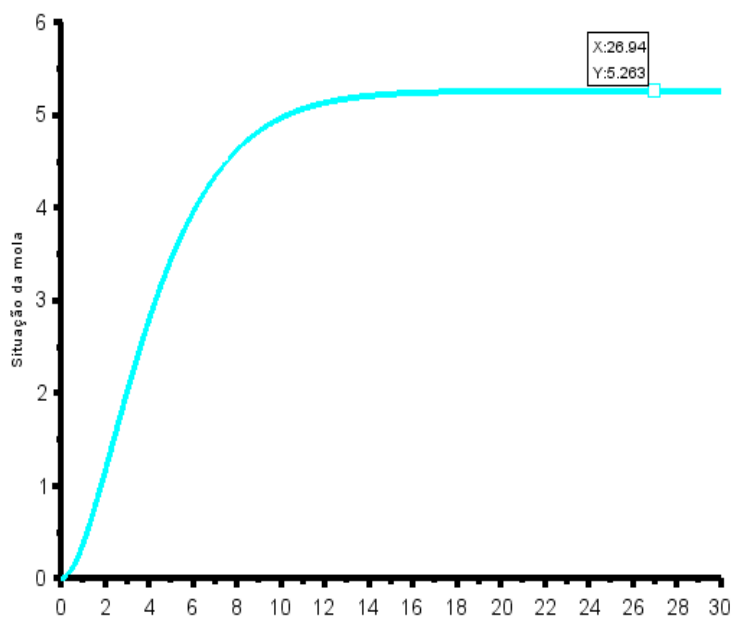


Figura 9: Tempo de pico (T_p) = 26,94

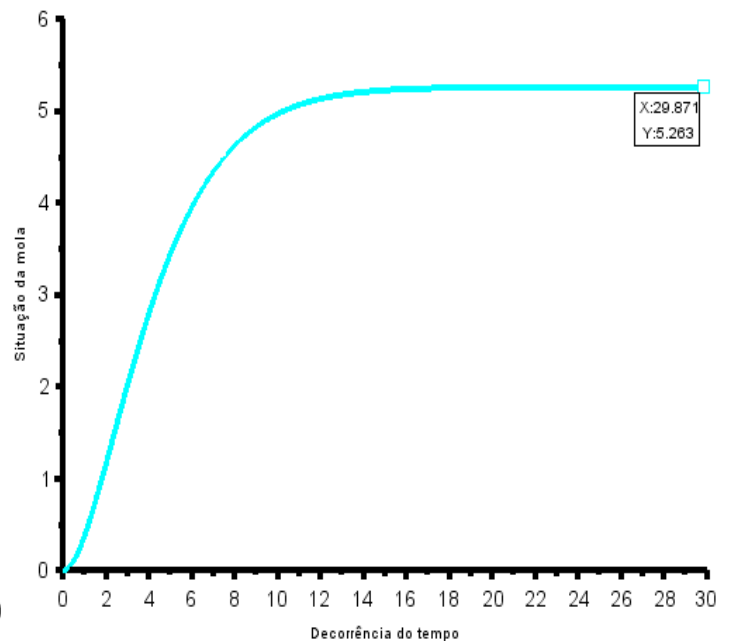


Figura 10: Estado estacionário

2. c)

Comparando os gráficos de a) e b) representando respectivamente as funções de transferência $G(s)$ e $N(s)$ da questão 1:

G(s)	N(s)	Parâmetro	Situação
20,67	25,33	Tr	Aumento
17,04	12,41	Ts	Diminuição
23,85	26,94	Tp	Aumento

É possível concluir que dobrando a parte real dos polos da função, ocorreu uma estabilização mais rápida, afinal, os polos determinam o comportamento dinâmico do sistema.

Uma vez que os polos foram alterados, os valores de Tr e Tp aumentaram e o valor de Ts diminuiu. Os valores de Wn e ξ influenciam nos resultados devido às

$$\text{fórmulas } tr = \frac{\pi}{2Wn\sqrt{1-\xi^2}} \quad ts = \frac{\pi}{\xi Wn}.$$

Questão 3 Diagrama de blocos e Matriz RH

3. a)

Construindo o Diagrama de blocos com os respectivos valores da tabela, temos:

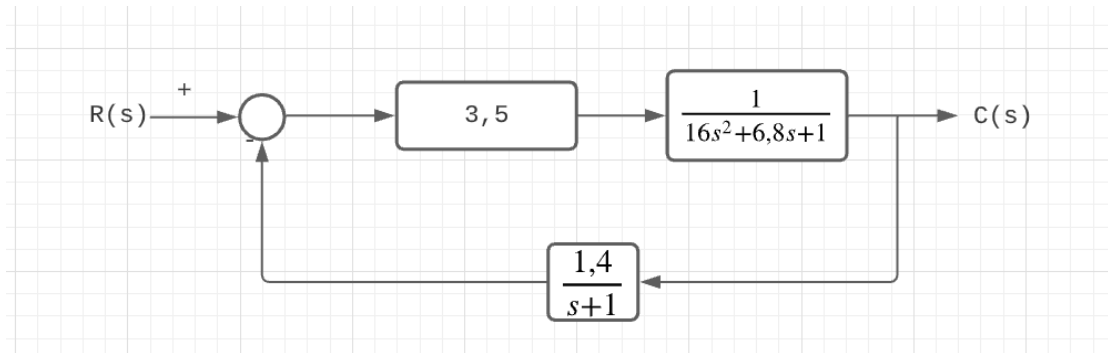


Figura 11: Diagrama de blocos

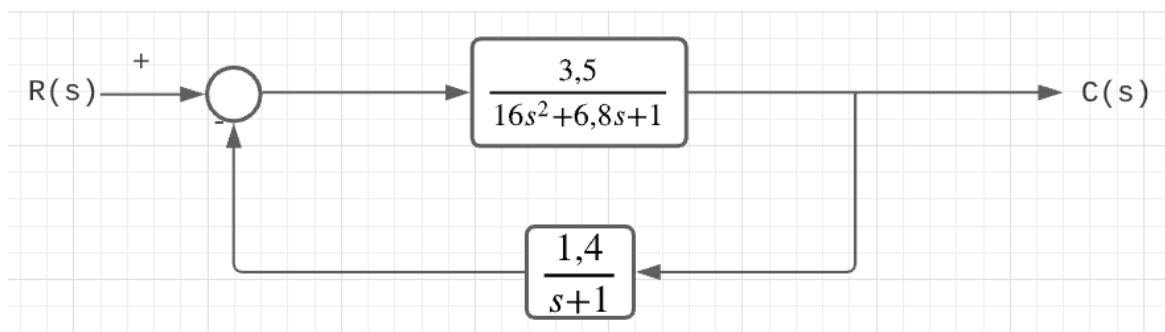


Figura 12: Diagrama de blocos

3. b)

Encontrando a Função de transferência $C(s)/R(s)$ temos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{3,5}{16s^2 + 6,8s + 1}}{1 + \left(\frac{3,5}{16s^2 + 6,8s + 1}\right)\left(\frac{1,4}{s+1}\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3,5(s+1)}{16s^3 + 22,8s^2 + 7,8s + 5,9}$$

3. c)

Através dos valores descobertos, calculamos a matriz Routh-Hurwitz:

s^3	16	7,8
s^2	22,8	5,9
s^1	3,65	0
s^0	5,9	0

Matriz RH

Para construir a matriz RH, a função “`routh_t()`” já pertencente a biblioteca da versão 6.1.0.0 do Scilab implementada para a construção dessa matriz foi utilizada. Para que ela fosse printada na tela para visualização, foi utilizado o comando `disp()`.

A respeito da estabilidade, uma vez que todos os coeficientes são positivos, a matriz RH pode ser construída, além disso, na primeira coluna de valores da matriz, todos os valores são positivos e assim, a estabilidade absoluta é garantida.

3. d)

Substituindo o valor do controlador pelo parâmetro K:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{16s^2 + 6,8s + 1}}{1 + \left(\frac{K}{16s^2 + 6,8s + 1}\right)\left(\frac{1,4}{s + 1}\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 1)}{16s^3 + 22,8s^2 + 7,8s + 1 + 1,4K}$$

Construindo a matriz RH, temos:

s^3	16	7,8
s^2	22,8	$1+1,4K$
s^1	$7,1-0,98K$	0
s^0	$1+1,4K$	0

Matriz RH baseada no parâmetro k

Para garantir a estabilidade absoluta de K, os valores da primeira coluna devem ser positivos, dessa forma: “ $7,1-0,98K > 0$ ” e “ $1+1,4K > 0$ ”.

Sendo assim, chegamos à conclusão que $-0,71 < K < 7,24$.

Questão 4 XCos

4. a)

Diagrama montado na ferramenta Xcos do Scilab, utilizando na aba simulação a configuração de 1.0E02:

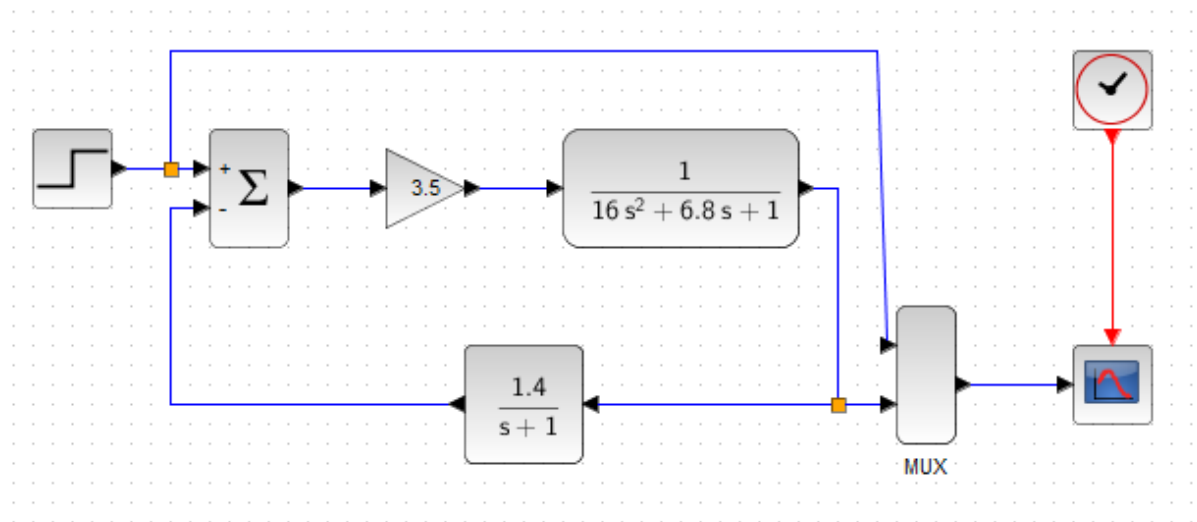


Diagrama Xcos

4. b)

Considerando o ganho do controlador = 3,5:

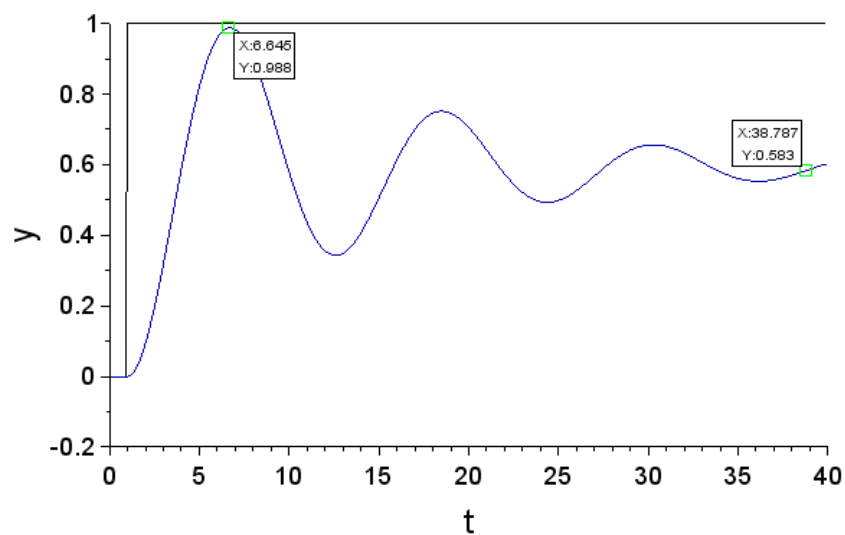
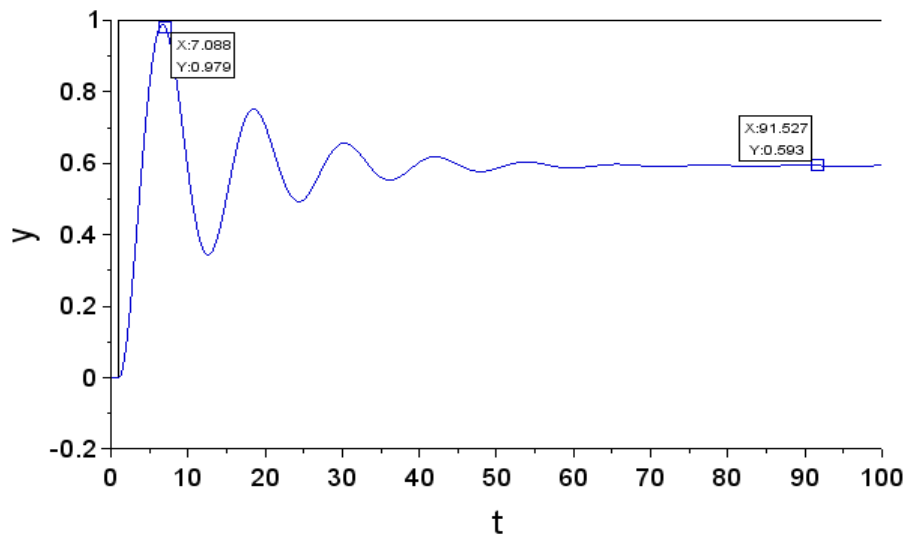
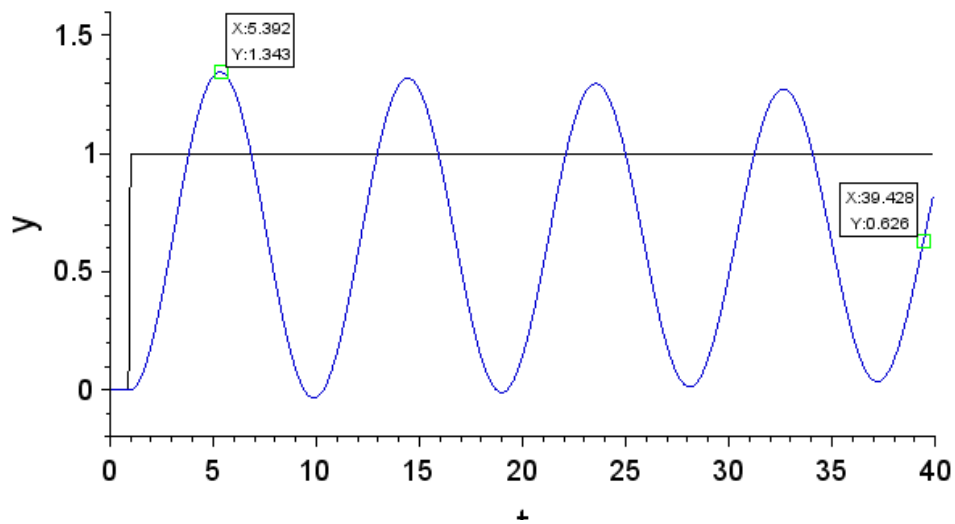


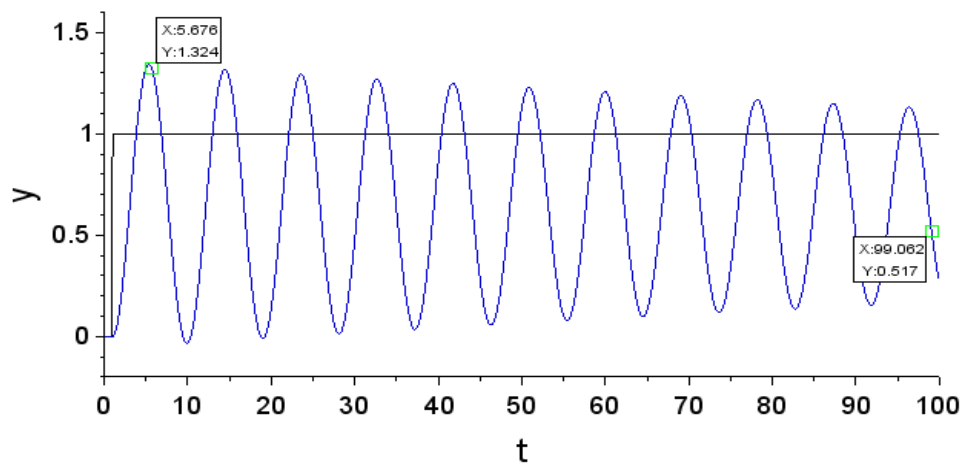
Gráfico para T = 40

Gráfico para $T = 100$

4. c)

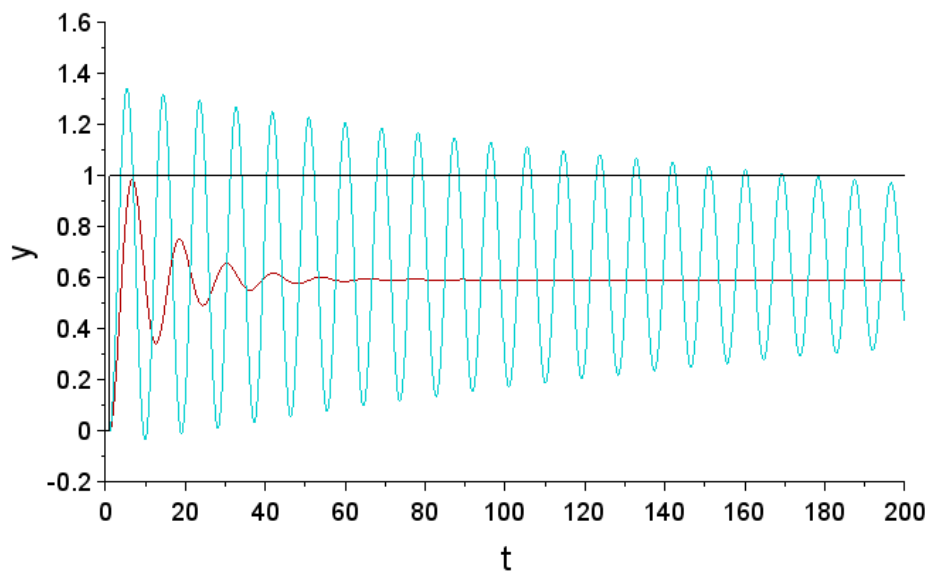
Considerando o valor do ganho do controlador = 7:

Gráfico para $T = 40$

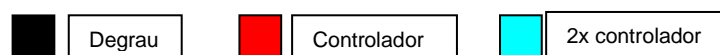


4. d)

Comparações e Comentários:



Legenda:



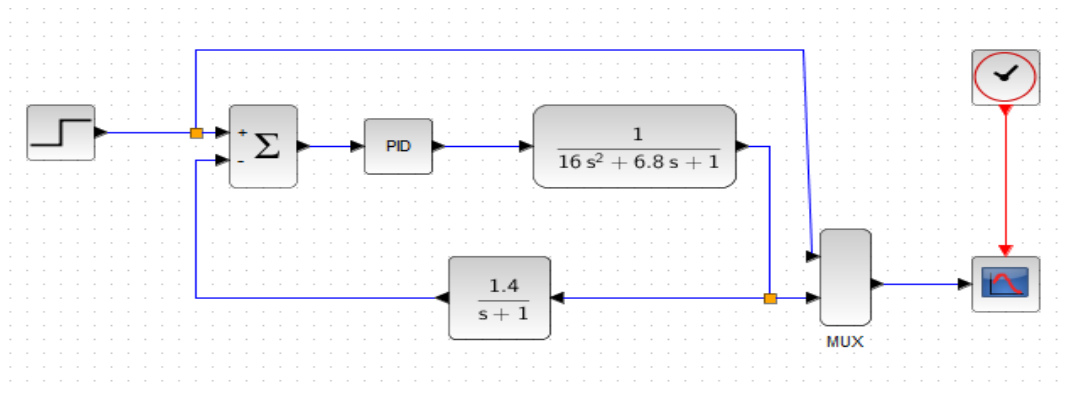
Comentários:

Ao dobrarmos o controlador, é perceptível que o tempo de estabilização fica tão grande que ultrapassa os 200, mas sua estabilidade ainda é garantida em determinado ponto, afinal, dobrando o controlador com valor de 3,5 temos 7 e esse valor ainda não ultrapassa o valor de K , descoberto no exercício anterior. Sendo assim, o sistema ainda é estável em determinado ponto.

Questão 5 Xcos controlador PID

5. a)

Substituindo o controlador da questão anterior por um PID, temos:



Sintonizando os controladores PID e adequando às regras de Ziegler-Nichols, para o método do Limiar de Oscilação, temos:

	K_P	K_i	K_D
P	$0.5K_c$	0	0
PI	$0.45 K_c$	$1.2/P_c$	0
PID	$0.6K_c$	$2/P_c$	$0.125P_c$

Tabela com o método do Limiar de Oscilação

Com o intuito de calcular o P_c , colocamos o valor do ganho do controlador como 7 e plotamos o gráfico:

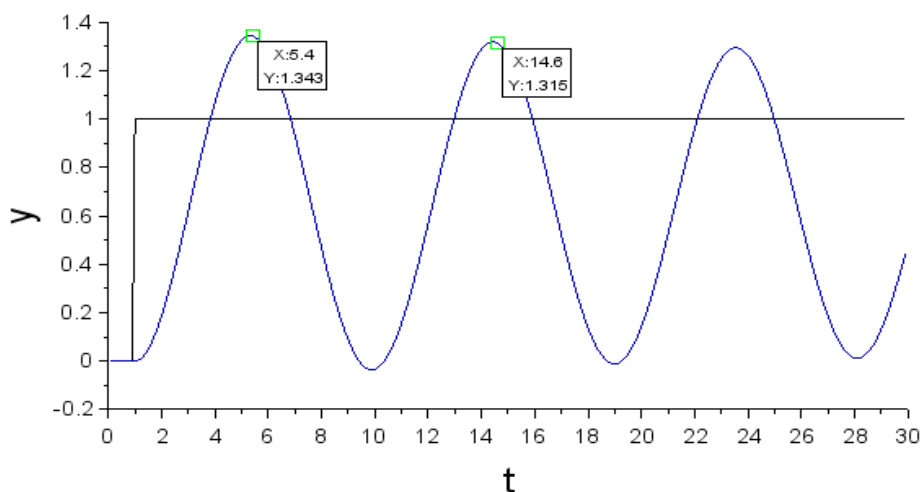


Gráfico para o controlador = 7

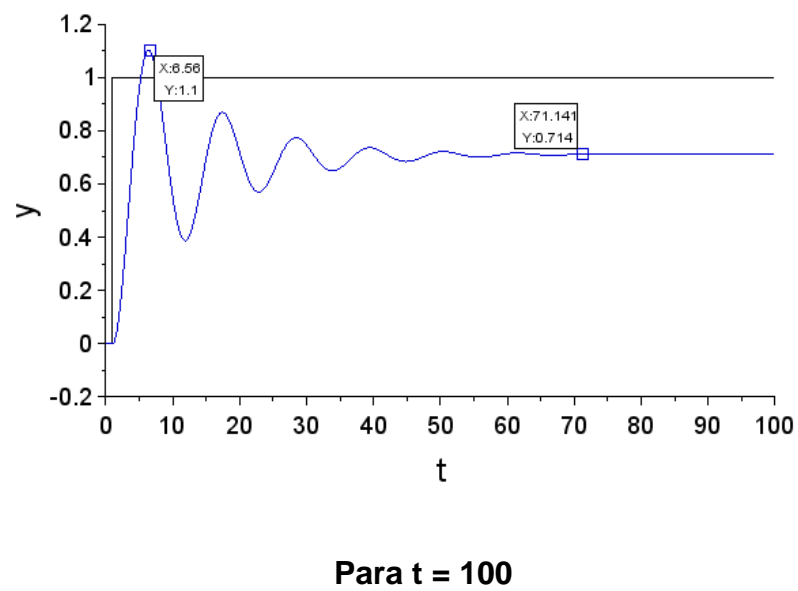
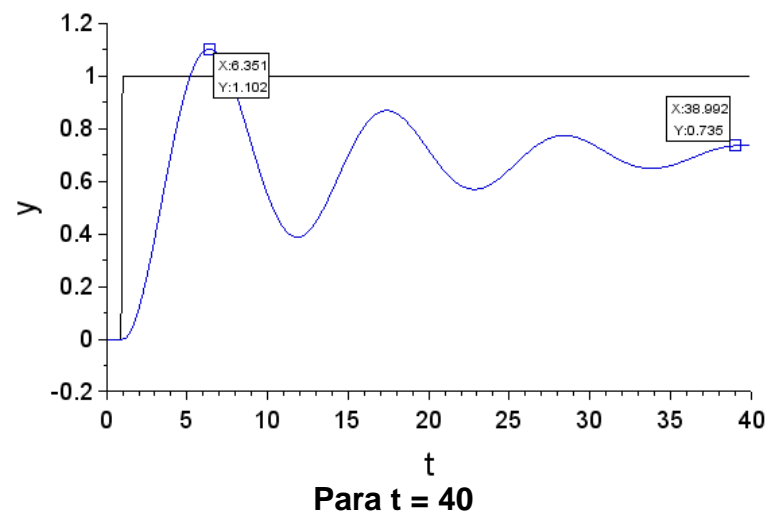
Seguindo o Método do Limiar de Oscilação $K_p = K_c$. Para completar e substituir na tabela os valores, devemos descobrir o valor de P_c e para isso, subtraímos o valor do pico da onda direita com o da esquerda e temos $P_c = (14,6 - 5.4) = 9,2$.

	K_P	K_i	K_D
P	3,5	0	0
PI	3,15	0,13	0
PID	4,2	0,217	1,15

Tabela 1 - Valores PID

5. b)

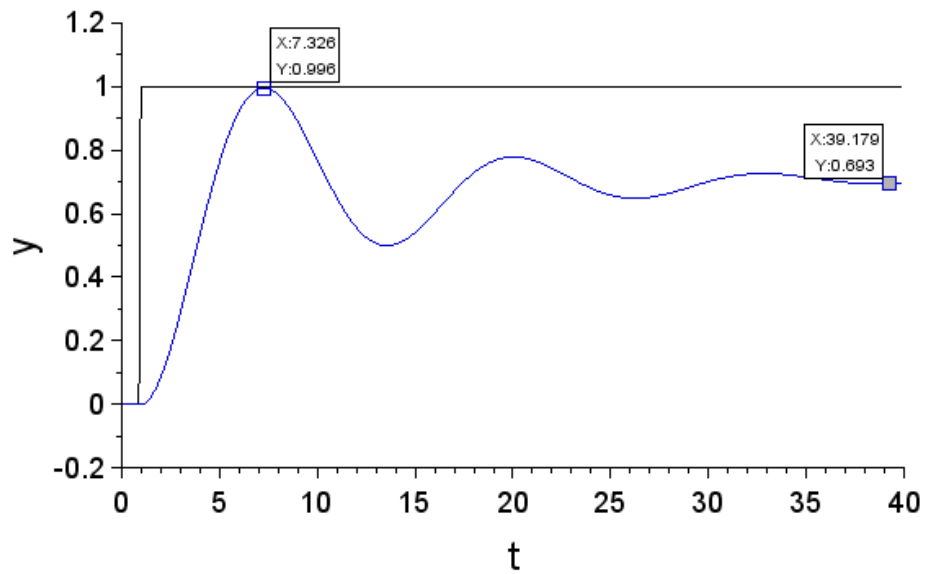
Substituindo os valores encontrados na tabela acima para o controlador PID, temos o gráfico:



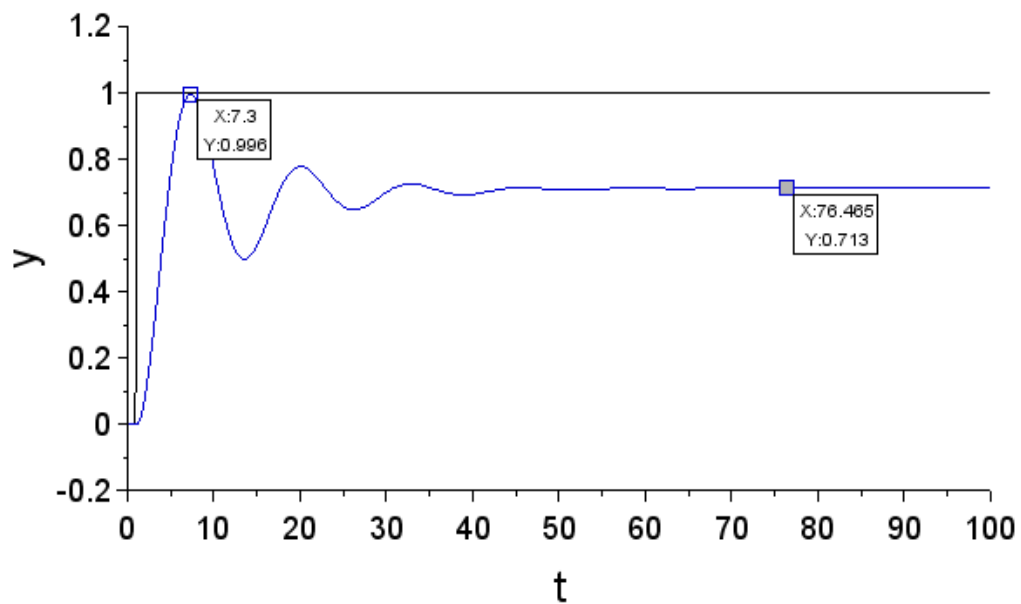
5. c)

Ajustando manualmente, obtivemos os seguintes valores e gráficos:

	K_P	K_I	K_D
PID	3	0.2	1



Para $T = 40$



Para $T = 100$

5. d)

Gráfico comparativo feito no Scilab:

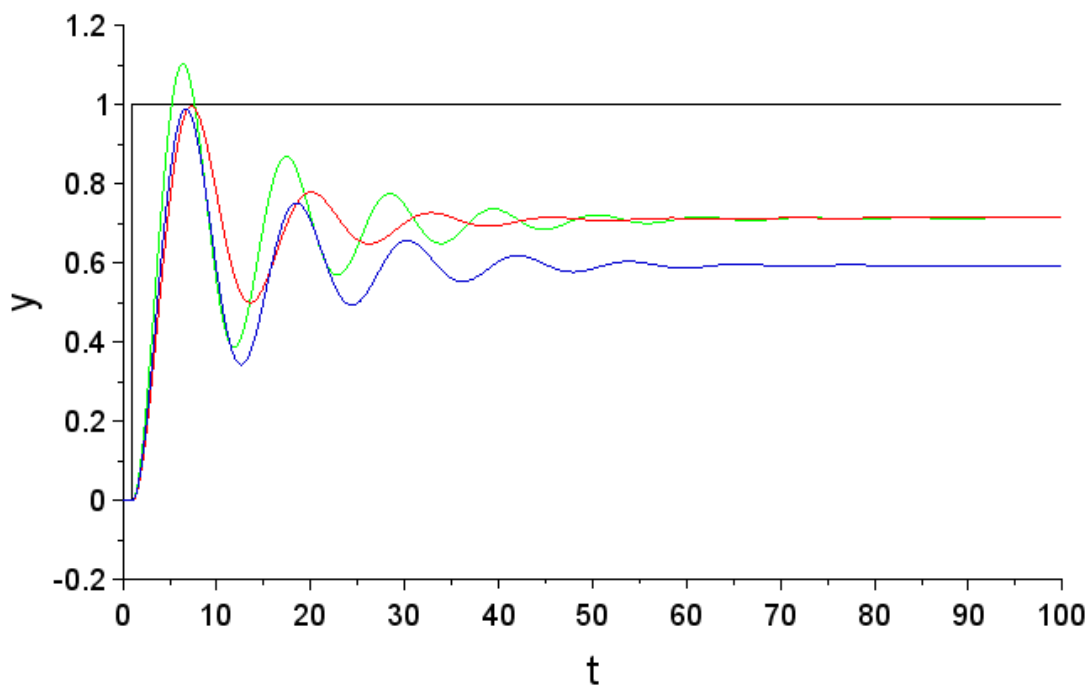
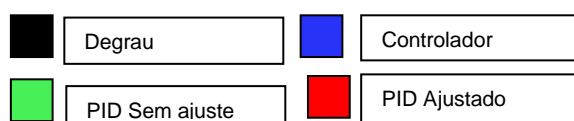


Gráfico comparativo

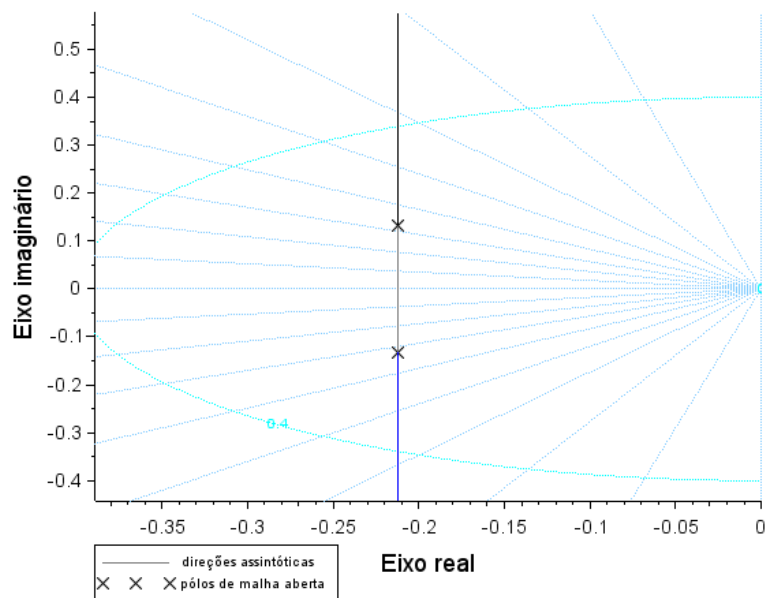
Legenda:



Comparando os gráficos, é possível observar que o controlador PID Ajustado (manualmente), obteve um tempo de estabilidade mais rápido que os demais. Além disso, é perceptível que não possui muita diferença nos tempos de estabilidade comparando o PID sem ajuste e o controlador posto na questão 4.

Questão 6 Evans

Ajustando a função disponibilizada pelo Scilab “Evans ()” e colocando a respectiva equação obtida no trabalho $16s^2 + 6,8s + 1$, temos:



Local das raízes de Evans

Os pólos da malha aberta se encontram no semi-plano esquerdo e seus respectivos complexos conjugados.

Questão 7 Bode

Utilizando a função disponibilizada pelo Scilab “Bode ()” e colocando a respectiva equação obtida no trabalho $16s^2 + 6,8s + 1$, temos:

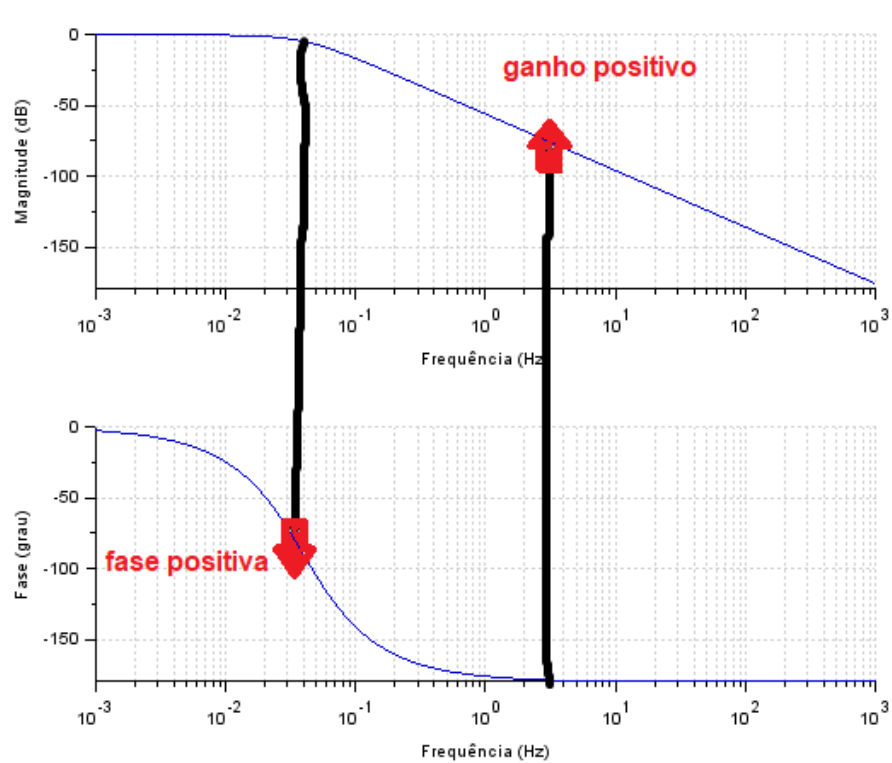
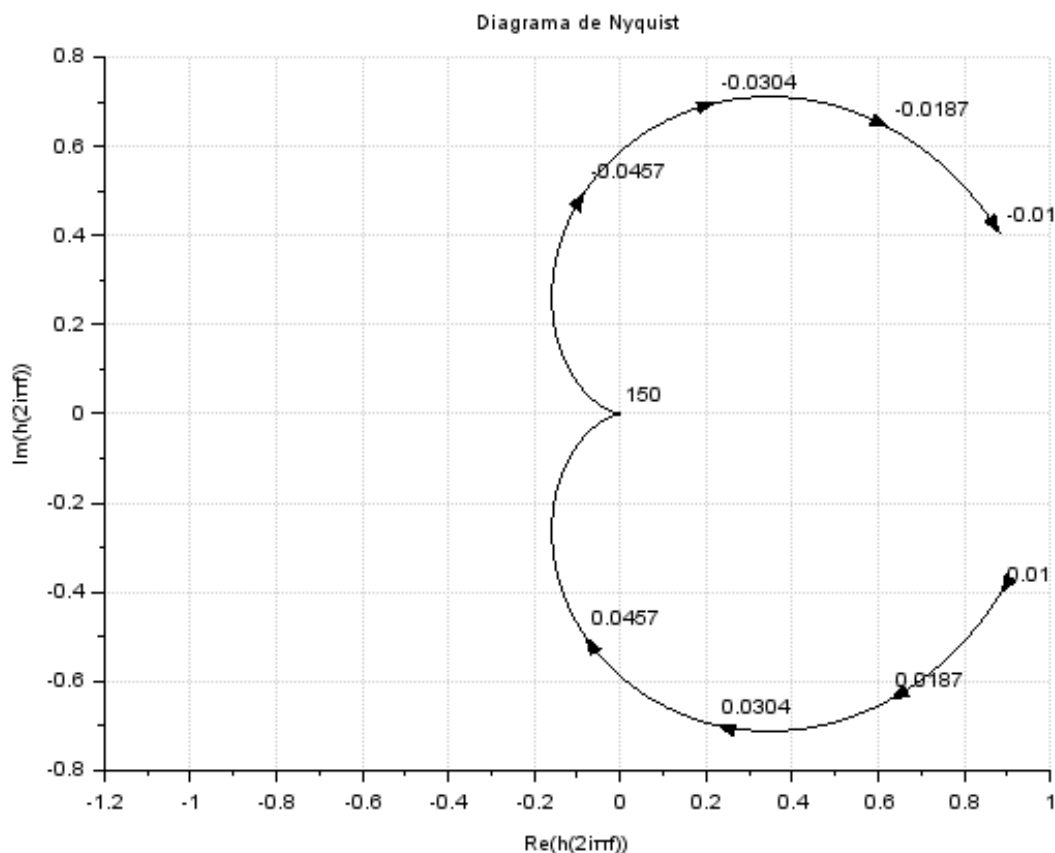


Diagrama de Bode

O Diagrama de Bode nos mostra os gráficos da frequência em função da magnitude e também da fase, como a margem de ganho e de fase são positivas, a estabilidade é garantida.

Questão 8 Nyquist

Utilizando a função disponibilizada pelo Scilab “Nyquist ()” e colocando a respectiva equação obtida no trabalho $16s^2 + 6,8s + 1$, temos:



Muito utilizado para determinar a estabilidade de um sistema, analisando o diagrama de Nyquist da função de transferência, é possível concluir que o sistema estudado é estável, afinal não existem polos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do gráfico.

A expressão $Z = N + P$, sendo Z o número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s , N o número de voltar em torno do ponto $-1+j0$ no sentido anti-horário e P o número de pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s . A estabilidade de um sistema deste tipo pode ser determinada verificando-se se o ponto $-1+j0$ é circundado pelo gráfico de Nyquist, como é o caso do gráfico acima.

CONCLUSÃO

A modelagem de um sistema é uma importante ferramenta a ser utilizada com o intuito de verificar se o determinado sistema será estável, se os valores de saída serão esperados, se as mudanças dos valores do sistema sofrerão grandes mudanças ao serem dobrados ou simplesmente modificados, entre outros.

Além disso, é possível através dela, resolver um problema de engenharia para verificar os pontos fracos e fortes de um sistema, visando sua otimização.

REFERÊNCIAS

Fernando Deeke Sasse. *Modelagem com Equações Diferenciais: Sistema Massa-Mola*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=ITJW8LpRulo>>. Acessado em 16/10/2021.

Luis Antônio Aguierre. *Critério de Nyquist (ELT009, ELT013, ELT035)*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=502AO3Atcts>>. Acessado em 21/10/2021.

https://help.scilab.org/docs/6.1.0/pt_BR/bode.html. Acessado em 21/10/2021.

UERJ Modelagem e controle de sistemas 2021.1
https://ead.iprj.uerj.br/moodle/pluginfile.php/12539/mod_resource/content/2/PID%2C%20Identifica%C3%A7%C3%A3o%20de%20Sistemas.pptx.pdf Acessado em 18/10/2021.

APÊNDICE

As questões referentes ao Xcos serão enviadas juntas ao arquivo compactado.

Questão 1

```
clc;
clear;

s = poly(0,'s')
Up = 1;
Equacao = (16*s^2 + 6.8*s + 1);
raizes=roots(Equacao);
H = syslin([],Up,Equacao);
disp(H)
disp(raizes)
figure(0);
clf();
plzr(H);
```

Questão 2

```
clear
clc

function [tr, tp, po, ymax, yinf, ts]=ParamResposta(t, y)
// calculando o ponto de maximo e o instante onde o maximo ocorre:
[ymax,i]=max(y);
```



```

tp=t(i);
////disp(tp)
// calculando o valor de estado permanente:
yinf=y(size(y,2))
////disp(yinf)
// calculando o percentual de ultrapassagem:
po=(ymax-yinf)/yinf*100
////disp(po)
//calculando o tempo de subida ts
r=1;
while y(r)<yinf; r=r+1; end;
tr=t(r);
////disp(tr)
//calculando o tempo de estabelecimento 2//
r=size(y,2);
while y(r)>0.98*yinf & y(r)<1.02*yinf; r=r-1; end;
ts=t(r-1)
////disp(ts)
endfunction

```

```

s=poly(0,'s');
Up=1;
Equacao=16*s^2+6.8*s + 1
ftransf = (Up/Equacao)
G=syslin('c',ftransf)
tp=0:0.01:50;
u=ones(tp);

```

```

x0=[0;0];
[y]=csim('step',tp,G);

xset('thickness',4)
xset('font size',3)
plot2d(tp,y,4)
xtitle('','Decorrência do tempo','Situação da mola')
[tr,tp,po,ymax,yinf,ts] = ParamResposta(tp,y)
disp([tr,tp,po,ymax,yinf,ts])

```

Matriz Routh

```

clc
clear

s=poly(0,'s')
Equacao=16*s^3+22.8*s^2+7.8*s+5.9
disp(routh_t(Equacao))

```

Raízes de Evans

```

clc
clear

s=poly(0,'s');

Up = 1;
Equacao= 16*s^2 + 6.8*s + 1 ;

```

```

ftransf = (Up/Equacao);
eq = syslin('c', ftransf)

clf();
evans(eq,10); // função para achar evans
sgrid();
[Ki,s]=kpure(eq)
plot([real(s) real(s)],[imag(s) -imag(s)], 'r') // Plot
[Kr,s]=krac2(eq)

```

Diagrama de Bode

```

clc
clear

s = poly(0,'s');
Up = 1;
Equacao = 16*s^2 + 6.8*s + 1
ftransf = (Up/Equacao)//Função de transferência
B = syslin('c',ftransf)
disp(bode(B))//Função Bode

```

Estabilidade de Nyquist

```

clc
clear

s=poly(0,'s');

```

```
Up = 1;  
Equacao = 16*s^2 + 6.8*s + 1;  
ftransf = (Up/Equacao);  
N=syslin('c',ftransf); //Monta a equação  
nyquist(N,0.01,150,N); //Função Nyquist
```