1 Atividade 4

Esta atividade consiste na modelagem e análise de um sistema de controle massa-mola-amortecedor. O sistema é controlado por um controlador proporcional e monitorado por um sensor de primeira ordem. O objetivo é analisar a estabilidade do sistema e determinar o limite crítico do sistema.

1.1 Parte (a): Descrição do Diagrama de Blocos

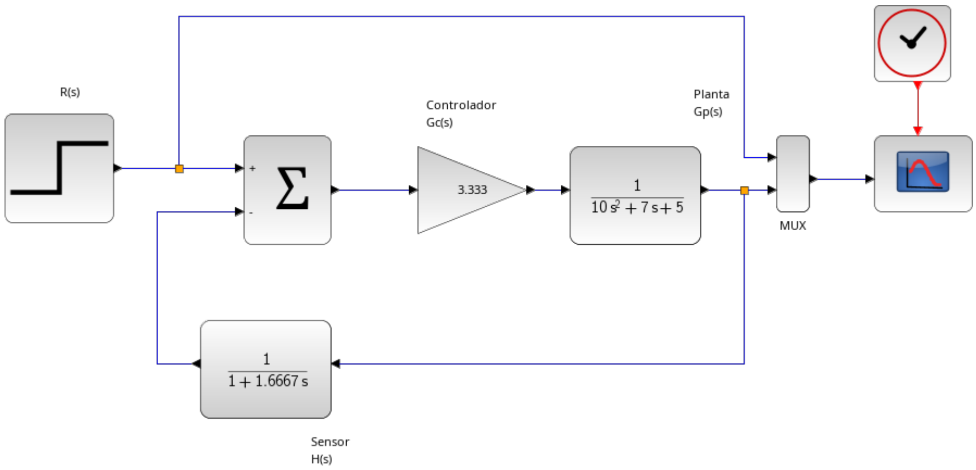

Figure 1: Diagrama de blocos do sistema de controle proporcional.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 1 ilustra a configuração do sistema de controle:

- **Controlador Proporcional** ($G_c(s)$): Com ganho de $\frac{10}{3}$ = (3.333), o controlador ajusta a saída com base na diferença entre a referência e o sinal medido pelo sensor.
- **Planta** ($G_p(s)$): Representada pela função de transferência $\frac{1}{10s^2+7s+5}$, que descreve a dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor.
- **Sensor** ($H(s)$): O sensor é modelado como um sistema de primeira ordem com a função de transferência $\frac{1}{1+1.6667s}$, capturando a resposta da variável controlada com uma certa constante de tempo.
- **Soma** (Σ): Um somador que computa a diferença entre a referência e a saída do sensor, alimentando essa diferença para o controlador.
- **Realimentação**: O loop de realimentação é crucial para garantir que a saída do sistema esteja em conformidade com a entrada desejada.

O sistema é projetado para monitorar e ajustar a saída de modo a atingir um estado desejado, com foco na estabilidade e eficiência do controle.

1.2 Parte (b): Função de Transferência em Malha Fechada

Para o sistema de controle proposto, primeiramente definimos os parâmetros físicos e as configurações do sistema. A planta é um sistema massa-mola-amortecedor, e o controlador utilizado é um controlador proporcional. O sensor é modelado por um sistema de primeira ordem. Os parâmetros são definidos como segue:

- Massa, $m = 10\,\text{kg}$
- Coeficiente de amortecimento, $c = 7\,\text{Ns/m}$
- Constante da mola, $k = 5\,\text{N/m}$

O ganho do controlador proporcional, K, é definido como:

$$K = \frac{m}{3}$$

A constante de tempo do sensor, T_s, é determinada por:

$$T_s = \frac{m}{6}$$

As funções de transferência para a planta ($G_p(s)$), o sensor ($H_s(s)$), e o controlador proporcional ($G_c(s)$) são definidas da seguinte forma:

$$G_p(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$
$$H_s(s) = \frac{1}{T_s s + 1} = \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1}$$
$$G_c(s) = K = \frac{10}{3}$$

1.2.1 Código Scilab utilizado calcular a Função de Transferência em Malha Fechada

```
// Definicao dos parametros
s = poly(0, 's');
m = 10;  // massa
c = 7;   // coeficiente de amortecimento
k = 5;   // constante da mola

// Definicao das funcoes de transferencia
K = m / 3;  // Ganho do controlador proporcional
Ts = m / 6;  // Constante de tempo do sensor

// Funcoes de Transferencia
Gp = syslin('c', 1, m*s^2 + c*s + k);  // Planta
Hs = syslin('c', 1, Ts*s + 1);  // Sensor
Gc = syslin('c', K, 1);  // Controlador Proporcional

// Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s)
sys = Gc * Gp / (1 + Gc * Gp * Hs);

// Exibicao da Funcao de Transferencia em Malha Fechada
disp("Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s):");
disp(sys);
```

Listing 1: Código Scilab para calcular a função de transferência em malha fechada

A função de transferência em malha fechada $C(s)/R(s)$ é calculada pela integração dessas funções de transferência, resultando na seguinte expressão:

$$C(s)/R(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H_s(s)}$$

Após a simplificação e cálculos realizados pelo software Scilab, a função de transferência em malha fechada resultante é:

$$\frac{0.2 + 0.3333333s}{0.5 + 0.92s + 1.3s^2 + s^3}$$

Esta função de transferência em malha fechada indica como o sistema responde à entrada $R(s)$ dada a configuração de controle atual. A expressão mostra a relação entrada-saída considerando a realimentação do sensor e a ação do controlador proporcional.

1.3 Parte (c): Análise de Estabilidade com o Critério de Routh-Hurwitz

Após calcular a função de transferência em malha fechada $C(s)/R(s)$, o próximo passo é analisar a estabilidade do sistema de controle. Utilizamos o critério de Routh-Hurwitz para essa finalidade, que é uma técnica fundamental na teoria de controle para determinar a estabilidade de um sistema linear.

1.3.1 Código Scilab para a Análise de Routh-Hurwitz

```
// Definicao dos parametros
s = poly(0, 's');
m = 10;  // massa
c = 7;   // coeficiente de amortecimento
k = 5;   // constante da mola

// Definicao das funcoes de transferencia
K = m / 3;  // Ganho do controlador proporcional
Ts = m / 6;  // Constante de tempo do sensor

// Funcoes de Transferencia
Gp = syslin('c', 1, m*s^2 + c*s + k);  // Planta
Hs = syslin('c', 1, Ts*s + 1);  // Sensor
Gc = syslin('c', K, 1);  // Controlador Proporcional

// Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s)
sys = Gc * Gp / (1 + Gc * Gp * Hs);

// Extraindo o denominador da Funcao de Transferencia para Analise de Estabilidade
den = sys.den;

rh_matrix = routh_t(den);

// Exibir a Matriz de Routh-Hurwitz
disp("Matriz de Routh-Hurwitz:");
disp(rh_matrix);
```

Listing 2: Código Scilab para calcular a matriz de Routh-Hurwitz

1.3.2 Extração do Denominador da Função de Transferência

A estabilidade do sistema pode ser analisada através do denominador da função de transferência em malha fechada, dado que as raízes do polinômio característico no denominador determinam a resposta do sistema. O denominador extraído é:

$$0.62 + 1s + 1.1s^2 + s^3$$

1.3.3 Cálculo da Matriz de Routh-Hurwitz

Para construir a matriz de Routh-Hurwitz, utilizamos a função `routh_t` que calcula essa matriz a partir do polinômio característico. A matriz de Routh-Hurwitz para o denominador do sistema é calculada e apresentada como segue:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0.92 \\ s^2 & 1.3 & 0.5 \\ s^1 & 0.5353846 & 0 \\ s^0 & 0.5 & \end{array}$$

1.3.4 Interpretação da Matriz de Routh-Hurwitz

Os elementos da primeira coluna da matriz de Routh-Hurwitz indicam a estabilidade do sistema. Todos os elementos devem ser positivos para garantir estabilidade. A matriz mostra que todos os termos são positivos, sugerindo que o sistema é estável. Esta análise detalhada fornece confiança adicional na robustez do sistema sob a configuração de controle atual.

1.3.5 Conclusão da Análise de Estabilidade

A análise com a matriz de Routh-Hurwitz confirma que o sistema é estável sob as condições atuais. A positividade de todos os termos na primeira coluna da matriz assegura que não há raízes com partes reais positivas, o que implica em uma resposta do sistema estável e controlada. Essa conclusão é vital para garantir que o sistema opere de forma segura e eficaz, mantendo o desempenho desejado.

1.4 Parte (d): Análise de Estabilidade para Diferentes Valores de K

A estabilidade do sistema de controle é investigada para uma variação do ganho K do controlador proporcional, substituído pelo parâmetro variável K. Utilizamos a função de transferência em malha fechada definida pelos parâmetros físicos do sistema para determinar para quais valores de K o sistema é estável.

1.4.1 Definição da Função de Transferência

Com base nos parâmetros do sistema, a função de transferência da planta $G_p(s)$ e do sensor $H_s(s)$ são definidas como segue:

$$G_p(s) = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

$$H_s(s) = \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1}$$

1.4.2 Função de Transferência em Malha Fechada

A função de transferência em malha fechada $T(s)$, considerando o controlador proporcional $G_c(s) = K$, é dada por:

$$T(s) = \frac{K \cdot G_p(s)}{1 + K \cdot G_p(s) \cdot H_s(s)}$$

Substituindo $G_c(s)$, $G_p(s)$, e $H_s(s)$ com os valores acima, obtemos:

$$T(s) = \frac{K\left(\frac{1}{10s^2+7s+5}\right)}{1 + K\left(\frac{1}{10s^2+7s+5}\right)\left(\frac{1}{\frac{10}{6}s+1}\right)}$$

Multiplicando numerador e denominador pelo MMC dos denominadores das funções de transferência, obtemos:

$$T(s) = \frac{5Ks + 3K}{3K + 50s^3 + 65s^2 + 46s + 15}$$

Esta função representa a resposta do sistema em função do ganho proporcional K, onde K modula a entrada em função das dinâmicas combinadas da planta e do sensor.

1.4.3 Construção da Matriz de Routh-Hurwitz

A análise da estabilidade do sistema é feita através da matriz de Routh-Hurwitz, que é construída a partir do polinômio característico:

$$50s^3 + 65s^2 + 46s + 15 + 3K$$

A estabilidade do sistema é analisada através da construção da matriz de Routh-Hurwitz para o polinômio característico derivado do denominador da função de transferência em malha fechada:

$$\begin{array}{r|cc}
s^3 & 50 & 46 \\
s^2 & 65 & 15 + 3K \\
s^1 & \frac{150K - 2240}{65} & 0 \\
s^0 & 15 + 3K &
\end{array}$$

Onde:

$$s^1 = \frac{150K - 2240}{65} = 2.3077K - 34.4615$$

1.4.4 Análise de Condições de Estabilidade

Para garantir a estabilidade, todos os coeficientes na primeira coluna da matriz de Routh-Hurwitz devem ser positivos:

- $s^3 = 50$ é constantemente positivo.
- $s^2 = 65$ é positivo.
- $s^1 = 2.3077K - 34.4615 > 0$, o que requer que K seja menor que $\frac{34.4615}{2.3077} \approx 14.93$ para manter a positividade deste termo. Assim, a estabilidade é assegurada para $K < 14.93$.
- $s^0 = 15 + 3K > 0$, que é trivialmente satisfeito desde que $K > -5$, mas a condição mais restritiva vem de s^1.

1.4.5 Conclusão da Análise de Condições de Estabilidade

A análise meticulosa da matriz de Routh-Hurwitz indica que o sistema mantém a estabilidade quando o ganho proporcional, K, está dentro do intervalo especificado. Valores de K superiores a 14.93 podem induzir instabilidade, manifestando-se através de oscilações não amortecidas ou respostas exageradas a perturbações, comprometendo tanto a performance quanto a segurança operacional do sistema.

Assim, é fundamental que K seja cuidadosamente escolhido para manter-se dentro do intervalo $0 < K < 14.93$ para assegurar um comportamento estável e previsível do sistema em todas as condições operacionais.