

# 1 Atividade 4

Esta atividade consiste na modelagem e análise de um sistema de controle massa-mola-amortecedor. O sistema é controlado por um controlador proporcional e monitorado por um sensor de primeira ordem. O objetivo é analisar a estabilidade do sistema e determinar o limite crítico do sistema.

## 1.1 Parte (a): Descrição do Diagrama de Blocos

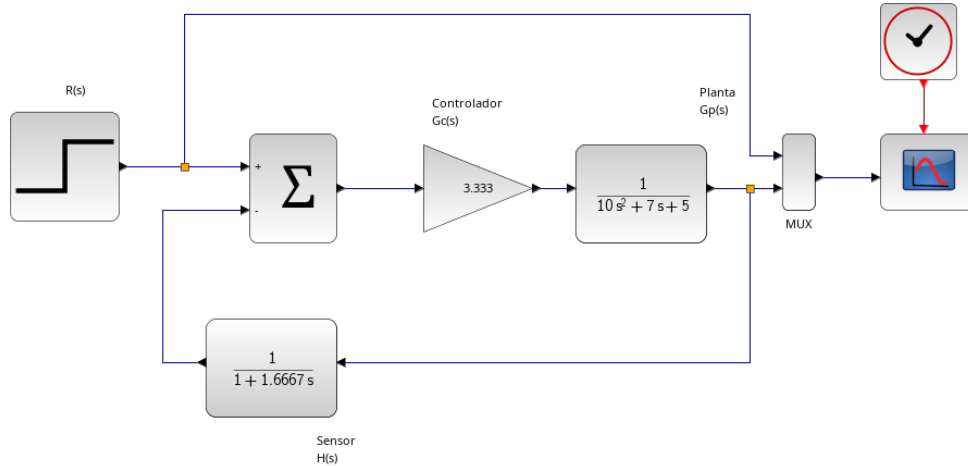


Figure 1: Diagrama de blocos do sistema de controle proporcional.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 1 ilustra a configuração do sistema de controle:

- **Controlador Proporcional ( $G_c(s)$ ):** Com ganho de  $\frac{10}{3} = 3.333$ , o controlador ajusta a saída com base na diferença entre a referência e o sinal medido pelo sensor.
- **Planta ( $G_p(s)$ ):** Representada pela função de transferência  $\frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$ , que descreve a dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor.
- **Sensor ( $H(s)$ ):** O sensor é modelado como um sistema de primeira ordem com a função de transferência  $\frac{1}{1 + 1.6667s}$ , capturando a resposta da variável controlada com uma certa constante de tempo.
- **Soma ( $\Sigma$ ):** Um somador que computa a diferença entre a referência e a saída do sensor, alimentando essa diferença para o controlador.
- **Feedback:** O loop de feedback é crucial para garantir que a saída do sistema esteja em conformidade com a entrada desejada.

O sistema é projetado para monitorar e ajustar a saída de modo a atingir um estado desejado, com foco na estabilidade e eficiência do controle.

## 1.2 Parte (b): Função de Transferência em Malha Fechada

Para o sistema de controle proposto, primeiramente definimos os parâmetros físicos e as configurações do sistema. A planta é um sistema massa-mola-amortecedor, e o controlador utilizado é um controlador proporcional. O sensor é modelado por um sistema de primeira ordem. Os parâmetros são definidos como segue:

- Massa,  $m = 10\text{ kg}$
- Coeficiente de amortecimento,  $c = 7\text{ Ns/m}$
- Constante da mola,  $k = 5\text{ N/m}$

O ganho do controlador proporcional,  $K$ , é definido como:

$$K = \frac{m}{3}$$

A constante de tempo do sensor,  $T_s$ , é determinada por:

$$T_s = \frac{m}{6}$$

As funções de transferência para a planta ( $G_p(s)$ ), o sensor ( $H_s(s)$ ), e o controlador proporcional ( $G_c(s)$ ) são definidas da seguinte forma:

$$G_p(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

$$H_s(s) = \frac{1}{T_s s + 1} = \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1}$$

$$G_c(s) = K = \frac{10}{3}$$

### 1.2.1 Código Scilab utilizado calcular a Função de Transferência em Malha Fechada

```

1 // Definicao dos parametros
2 s = poly(0, 's');
3 m = 10; // massa
4 c = 7; // coeficiente de amortecimento
5 k = 5; // constante da mola
6
7 // Definicao das funcoes de transferencia
8 K = m / 3; // Ganho do controlador proporcional
9 Ts = m / 6; // Constante de tempo do sensor
10
11 // Funcoes de Transferencia
12 Gp = syslin('c', 1, m*s^2 + c*s + k); // Planta
13 Hs = syslin('c', 1, Ts*s + 1); // Sensor
14 Gc = syslin('c', K, 1); // Controlador Proporcional
15
16 // Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s)
17 sys = Gc * Gp / (1 + Gc * Gp * Hs);
18
19 // Exibicao da Funcao de Transferencia em Malha Fechada
20 disp("Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s):");
21 disp(sys);

```

Listing 1: Código Scilab para calcular a função de transferência em malha fechada

A função de transferência em malha fechada  $C(s)/R(s)$  é calculada pela integração dessas funções de transferência, resultando na seguinte expressão:

$$C(s)/R(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H_s(s)}$$

Após a simplificação e cálculos realizados pelo software Scilab, a função de transferência em malha fechada resultante é:

$$\frac{0.2 + 0.3333333s}{0.5 + 0.92s + 1.3s^2 + s^3}$$

Esta função de transferência em malha fechada indica como o sistema responde à entrada  $R(s)$  dada a configuração de controle atual. A expressão mostra a relação entrada-saída considerando o feedback do sensor e a ação do controlador proporcional.

### 1.3 Parte (c): Análise de Estabilidade com o Critério de Routh-Hurwitz

Após calcular a função de transferência em malha fechada  $C(s)/R(s)$ , o próximo passo é analisar a estabilidade do sistema de controle. Utilizamos o critério de Routh-Hurwitz para essa finalidade, que é uma técnica fundamental na teoria de controle para determinar a estabilidade de um sistema linear.

### 1.3.1 Código Scilab para a Análise de Routh-Hurwitz

```
1 // Definicao dos parametros
2 s = poly(0, 's');
3 m = 10; // massa
4 c = 7; // coeficiente de amortecimento
5 k = 5; // constante da mola
6
7 // Definicao das funcoes de transferencia
8 K = m / 3; // Ganho do controlador proporcional
9 Ts = m / 6; // Constante de tempo do sensor
10
11 // Funcoes de Transferencia
12 Gp = syslin('c', 1, m*s^2 + c*s + k); // Planta
13 Hs = syslin('c', 1, Ts*s + 1); // Sensor
14 Gc = syslin('c', K, 1); // Controlador Proporcional
15
16 // Funcao de Transferencia em Malha Fechada C(s)/R(s)
17 sys = Gc * Gp / (1 + Gc * Gp * Hs);
18
19 // Extraindo o denominador da Funcao de Transferencia para
20 // Analise de Estabilidade
21 den = sys.den;
22
23 rh_matrix = routh_t(den);
24
25 // Exibir a Matriz de Routh-Hurwitz
26 disp("Matriz de Routh-Hurwitz:");
27 disp(rh_matrix);
```

Listing 2: Código Scilab para calcular a matriz de Routh-Hurwitz

### 1.3.2 Extração do Denominador da Função de Transferência

A estabilidade do sistema pode ser analisada através do denominador da função de transferência em malha fechada, dado que as raízes do polinômio característico no denominador determinam a resposta do sistema. O denominador extraído é:

$$0.62 + 1s + 1.1s^2 + s^3$$

### 1.3.3 Cálculo da Matriz de Routh-Hurwitz

Para construir a matriz de Routh-Hurwitz, utilizamos a função `routh_t` que calcula essa matriz a partir do polinômio característico. A matriz de Routh-Hurwitz para o denominador do sistema é calculada e apresentada como segue:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0.92 \\ s^2 & 1.3 & 0.5 \\ s^1 & 0.5353846 & 0 \\ s^0 & 0.5 & \end{array}$$

### 1.3.4 Interpretação da Matriz de Routh-Hurwitz

Os elementos da primeira coluna da matriz de Routh-Hurwitz indicam a estabilidade do sistema. Todos os elementos devem ser positivos para garantir estabilidade. A matriz mostra que todos os termos são positivos, sugerindo que o sistema é estável. Esta análise detalhada fornece confiança adicional na robustez do sistema sob a configuração de controle atual.

### 1.3.5 Conclusão da Análise de Estabilidade

A análise com a matriz de Routh-Hurwitz confirma que o sistema é estável sob as condições atuais. A positividade de todos os termos na primeira coluna da matriz assegura que não há raízes com partes reais positivas, o que implica em uma resposta do sistema estável e controlada. Essa conclusão é vital para garantir que o sistema opere de forma segura e eficaz, mantendo o desempenho desejado.

## 1.4 Parte (d): Análise de Estabilidade para Diferentes Valores de $K$

A estabilidade do sistema de controle é investigada para uma variação do ganho  $K$  do controlador proporcional, substituído pelo parâmetro variável  $K$ . Utilizamos a função de transferência em malha fechada definida pelos parâmetros físicos do sistema para determinar para quais valores de  $K$  o sistema é estável.

### 1.4.1 Definição da Função de Transferência

Com base nos parâmetros do sistema, a função de transferência da planta  $G_p(s)$  e do sensor  $H_s(s)$  são definidas como segue:

$$G_p(s) = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

$$H_s(s) = \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1}$$

### 1.4.2 Função de Transferência em Malha Fechada

A função de transferência em malha fechada  $T(s)$ , considerando o controlador proporcional  $G_c(s) = K$ , é dada por:

$$T(s) = \frac{K \cdot G_p(s)}{1 + K \cdot G_p(s) \cdot H_s(s)}$$

Substituindo  $G_c(s)$ ,  $G_p(s)$ , e  $H_s(s)$  com os valores acima, obtemos:

$$T(s) = \frac{K \left( \frac{1}{10s^2 + 7s + 5} \right)}{1 + K \left( \frac{1}{10s^2 + 7s + 5} \right) \left( \frac{1}{\frac{10}{6}s + 1} \right)}$$

Multiplicando numerador e denominador pelo MMC dos denominadores das funções de transferência, obtemos:

$$T(s) = \frac{5Ks + 3K}{3K + 50s^3 + 65s^2 + 46s + 15}$$

Esta função representa a resposta do sistema em função do ganho proporcional  $K$ , onde  $K$  modula a entrada em função das dinâmicas combinadas da planta e do sensor.

### 1.4.3 Construção da Matriz de Routh-Hurwitz

A análise da estabilidade do sistema é feita através da matriz de Routh-Hurwitz, que é construída a partir do polinômio característico:

$$50s^3 + 65s^2 + 46s + 15 + 3K$$

A estabilidade do sistema é analisada através da construção da matriz de Routh-Hurwitz para o polinômio característico derivado do denominador da função de transferência em malha fechada:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 50 & 46 \\ s^2 & 65 & 15 + 3K \\ s^1 & \frac{150K - 2240}{65} & 0 \\ s^0 & 15 + 3K & \end{array}$$

Onde:

$$s^1 = \frac{150K - 2240}{65} = 2.3077K - 34.4615$$

#### 1.4.4 Análise de Condições de Estabilidade

Para garantir a estabilidade, todos os coeficientes na primeira coluna da matriz de Routh-Hurwitz devem ser positivos:

- $s^3 = 50$  é constantemente positivo.
- $s^2 = 65$  é positivo.
- $s^1 = 2.3077K - 34.4615 > 0$ , o que requer que  $K$  seja menor que  $\frac{34.4615}{2.3077} \approx 14.93$  para manter a positividade deste termo. Assim, a estabilidade é assegurada para  $K < 14.93$ .
- $s^0 = 15 + 3K > 0$ , que é trivialmente satisfeito desde que  $K > -5$ , mas a condição mais restritiva vem de  $s^1$ .

#### 1.4.5 Conclusão da Análise de Condições de Estabilidade

A análise metódica da matriz de Routh-Hurwitz indica que o sistema mantém a estabilidade quando o ganho proporcional,  $K$ , está dentro do intervalo especificado. Valores de  $K$  superiores a 14.93 podem induzir instabilidade, manifestando-se através de oscilações não amortecidas ou respostas exageradas a perturbações, comprometendo tanto a performance quanto a segurança operacional do sistema.

Assim, é fundamental que  $K$  seja cuidadosamente escolhido para manter-se dentro do intervalo  $0 < K < 14.93$  para assegurar um comportamento estável e previsível do sistema em todas as condições operacionais.