



## **Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro**

Curso de Engenharia da Computação

**Guilherme Cagide Fialho**

**Projeto de Modelagem e Controle de Sistemas em Scilab**

**Nova Friburgo**

**2024**



## **Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro**

Graduação em Engenharia da Computação

Guilherme Cagide Fialho

### **Projeto de Modelagem e Controle de Sistemas em Scilab**

Projeto de Conclusão da Disciplina  
Modelagem e Controle de Sistemas

Orientador: Prof. Joel Sánchez Domínguez

Nova Friburgo

2024

# 1 Atividade 1

## 1.1 Descrição do Modelo

O sistema modelado é um oscilador massa-mola-amortecedor, onde a massa está sujeita à força restauradora de uma mola e ao amortecimento proporcional à velocidade. A equação diferencial que descreve o movimento do sistema é dada por:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

onde  $x$  representa o deslocamento da massa  $m$  da sua posição de equilíbrio,  $\dot{x}$  é a velocidade,  $\ddot{x}$  é a aceleração,  $C$  é o coeficiente de amortecimento, e  $K$  é a constante da mola. A força de entrada é considerada nula, indicando que não há forças externas atuando sobre o sistema após o instante inicial.

## 1.2 Parâmetros do Sistema

Os parâmetros utilizados no modelo do sistema são especificados como segue:

- Massa ( $m$ ): 10 kg
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m
- Constante da mola ( $K$ ): 5 N/m

## 1.3 Condições Iniciais para a Simulação

As condições iniciais para a simulação são detalhadas na tabela a seguir, baseadas nos parâmetros especificados acima:

Caso	Velocidade Inicial $V_0$	Posição Inicial $X_0$
1	5 m/s	0 m
2	0 m/s	2.5 m
3	3.33 m/s	2 m

Esta tabela reflete os valores numéricos para cada caso, facilitando a compreensão e a aplicação direta dos parâmetros na simulação.

## 1.4 Análise dos Resultados

Cada um dos casos de simulação foi configurado com condições iniciais distintas para explorar como o sistema responde a diferentes estados iniciais de deslocamento e velocidade.

### 1.4.1 Caso 1: Velocidade Inicial Elevada

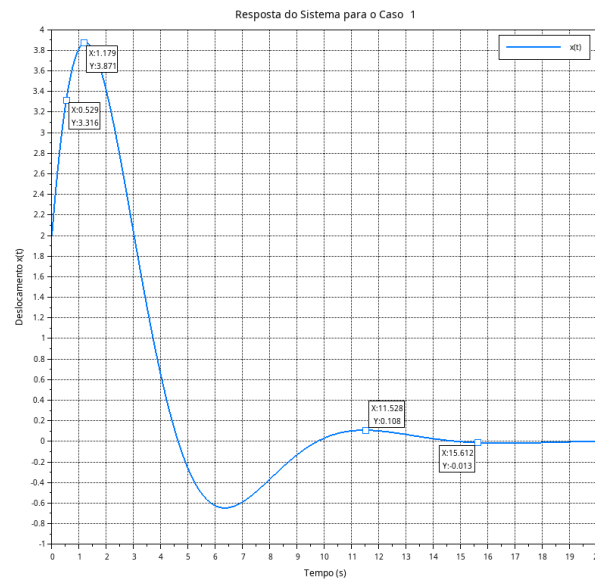


Figure 1: Resposta do sistema para o Caso 1

No Caso 1, o sistema é inicialmente impulsionado com uma alta velocidade (5 m/s), partindo do repouso ( $X_0 = 0$ ). Esta condição inicial leva a uma resposta inicialmente enérgica, onde a massa oscila com uma amplitude elevada, seguida de um rápido decaimento energético devido ao amortecimento significativo ( $C = 7 \text{ Ns/m}$ ). O amortecimento não só reduz a amplitude das oscilações rapidamente, mas também garante que o sistema não persista em um estado de oscilação prolongada, estabilizando-se em um tempo curto.

### 1.4.2 Caso 2: Deslocamento Inicial Sem Velocidade

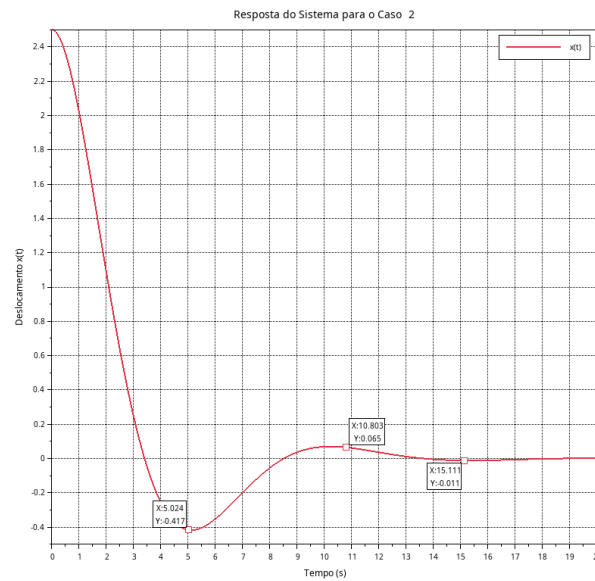


Figure 2: Resposta do sistema para o Caso 2

O Caso 2 é caracterizado por um deslocamento inicial (2.5 m) sem impulso inicial de velocidade ( $V_0 = 0$ ). Aqui, observamos uma resposta típica de um sistema oscilatório subamortecido onde o sistema retorna ao equilíbrio através de oscilações que decaem gradativamente. Este caso destaca como a energia potencial armazenada na mola é convertida em energia cinética e dissipada pelo amortecedor. As oscilações decrescem em amplitude mais gradualmente do que no Caso 1, demonstrando uma transferência de energia mais prolongada antes da estabilização.

### 1.4.3 Caso 3: Velocidade e Deslocamento Iniciais

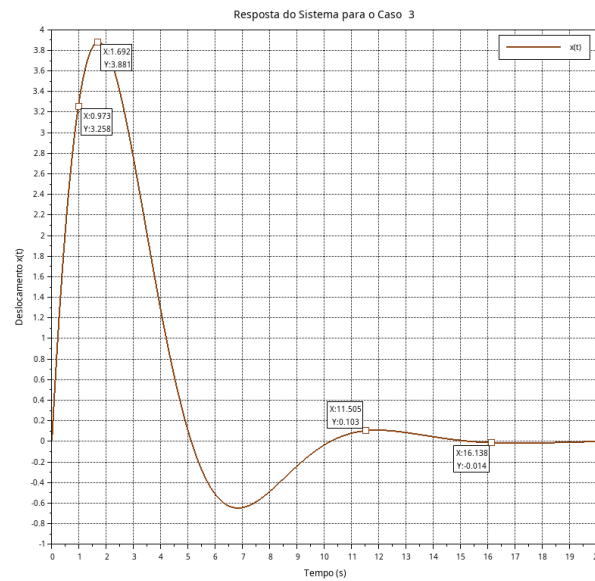


Figure 3: Resposta do sistema para o Caso 3

No Caso 3, o sistema inicia com condições iniciais moderadas tanto de velocidade (3.33 m/s) quanto de deslocamento (2m). Esta configuração produz uma resposta dinâmica complexa, onde a interação entre energia cinética e potencial é mais evidente. A amplitude inicial é significativa, com uma taxa de decaimento que ilustra eficientemente o papel do amortecimento. As oscilações observadas são mais sustentadas que no Caso 1, mas menos intensas do que no Caso 2, refletindo um equilíbrio entre as energias cinética e potencial no início da simulação.

#### 1.4.4 Comparação Unificada dos Casos

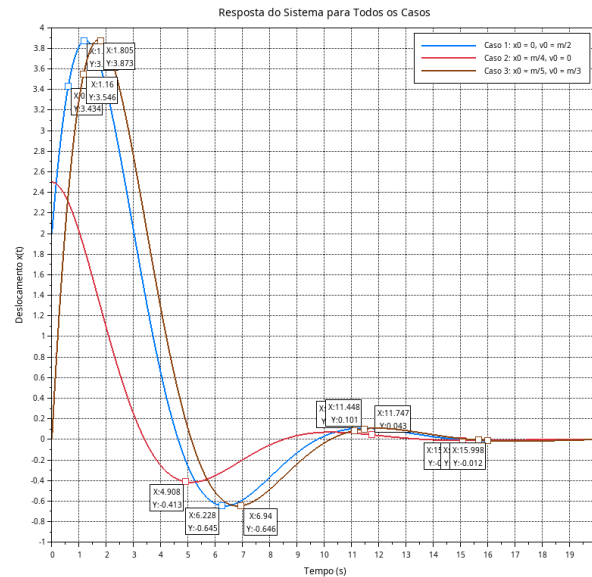


Figure 4: Resposta unificada do sistema para os Casos 1, 2 e 3

A análise unificada dos três casos demonstra de forma clara as diferenças significativas nas respostas do sistema decorrentes de diversas condições iniciais. A seguir, discutiremos detalhadamente cada resposta e suas implicações para a compreensão do comportamento dinâmico do sistema:

- **Caso 1 (Azul Escuro):** Iniciado com uma alta velocidade inicial (5 m/s) e sem deslocamento inicial, este caso exibe a maior amplitude de oscilação observada. A energia cinética inicial é rapidamente convertida em energia potencial pela mola, resultando em oscilações de grande amplitude que são rapidamente amortecidas. Este caso ilustra o efeito de um forte amortecimento, onde a energia é dissipada rapidamente, levando a um retorno rápido à posição de equilíbrio sem oscilações residuais prolongadas. Esta configuração é ideal em situações onde a rápida estabilização após distúrbios é crucial, como em sistemas de suspensão de veículos.
- **Caso 2 (Vermelho):** Com um deslocamento inicial (2.5 m) e sem velocidade inicial, o sistema mostra uma resposta clássica de um oscilador subamortecido. A energia potencial armazenada na mola é convertida gradualmente em energia cinética, com a energia sendo dissipada ao longo do tempo pelo amortecedor. As oscilações decaem suavemente, refletindo uma conversão mais lenta de energia que é típica em aplicações onde é necessário manter uma certa quantidade de movimento ou onde oscilações graduais são preferíveis, como em alguns tipos de sensores mecânicos.
- **Caso 3 (Marrom):** Este caso combina condições iniciais moderadas de velocidade (3.33 m/s) e deslocamento (2 m), resultando numa resposta dinâmica mais complexa que engloba características dos dois primeiros casos. A amplitude inicial é significativa, mas as oscilações são mais controladas e decaem de maneira gradual. Este caso destaca a importância do equilíbrio entre rigidez da mola e amortecimento no projeto de sistemas mecânicos, onde é necessário um compromisso entre estabilidade rápida e manutenção de energia dinâmica.

Esta comparação detalhada destaca não apenas a influência das condições iniciais na resposta do sistema, mas também o papel crítico do amortecimento e da rigidez da mola na determinação da natureza da resposta dinâmica. A análise fornece insights valiosos para o design e a otimização de sistemas mecânicos em engenharia, sublinhando a necessidade de uma seleção cuidadosa de parâmetros de acordo com os requisitos específicos de cada aplicação.

## 1.5 Comentários Gerais e Conclusão

Os gráficos e análises ilustram claramente como as condições iniciais impactam a resposta dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor. A energia inicial, seja como deslocamento ou velocidade, define a resposta imediata do sistema, mostrando a complexidade do comportamento de sistemas dinâmicos lineares. Observamos que o amortecimento é essencial para reduzir as oscilações e trazer o sistema de volta ao repouso de maneira eficiente, sublinhando sua importância no design de componentes mecânicos.

A adequação do coeficiente de amortecimento e da rigidez da mola é crucial para otimizar sistemas para suas funções específicas, como a absorção de choques em suspensões de veículos ou a precisão em instrumentos de medição. Além disso, a análise das condições iniciais é vital no planejamento e teste de sistemas mecânicos, onde engenheiros e designers devem antecipar cenários variados de operação.

Este estudo destaca a necessidade de um entendimento profundo das dinâmicas de sistemas para inovação em engenharia, proporcionando uma base sólida para a compreensão dos princípios de mecânica e dinâmica que são fundamentais no design de sistemas controlados e mecanismos em geral.

## 2 Atividade 2: Simulação com Xcos

### 2.1 Descrição do Modelo e Ferramentas

Nesta atividade, utilizamos o Xcos, uma ferramenta gráfica do Scilab para a simulação de sistemas dinâmicos. O Xcos permite a construção de diagramas de blocos que facilitam a visualização e implementação do sistema massa-mola-amortecedor com diferentes entradas e condições iniciais.

### 2.2 Parâmetros do Sistema

O sistema é descrito pelos seguintes parâmetros, que são consistentes com os usados na Atividade 1:

- Massa ( $m$ ): 10 kg
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m
- Constante da mola ( $K$ ): 5 N/m

### 2.3 Condições Iniciais de Simulação

As simulações foram executadas sob várias condições iniciais para explorar a resposta do sistema sob diferentes estados iniciais. A seguir estão as condições iniciais utilizadas, incluindo uma condição inicial adicional específica para esta atividade (Caso 0):

Caso	Velocidade Inicial $V_0$	Posição Inicial $X_0$
0	0 m/s	0 m
1	5 m/s	0 m
2	0 m/s	2.5 m
3	3.33 m/s	2 m

Esta tabela facilita a referência rápida às condições iniciais para cada caso simulado, permitindo uma comparação mais direta entre os diferentes cenários testados.



## 2.4 Diagrama de Blocos no Xcos

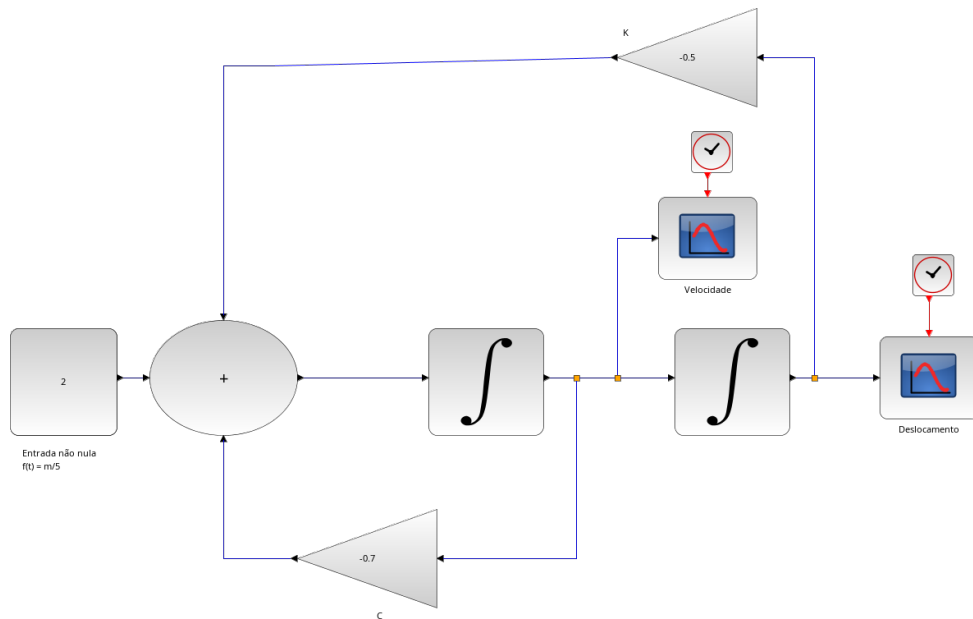


Figure 5: Diagrama de blocos utilizado na simulação no Xcos.

## 2.5 Resultados e Análise

### 2.5.1 Análise dos Resultados para o Caso 0

No Caso 0, analisamos a resposta do sistema quando ele parte de condições completamente estáticas ( $V_0 = 0\text{ m/s}$  e  $X_0 = 0\text{ m}$ ). Esta configuração é vital para avaliar a resposta pura do sistema a uma entrada controlada sem influência inicial de deslocamento ou velocidade.

## Deslocamento

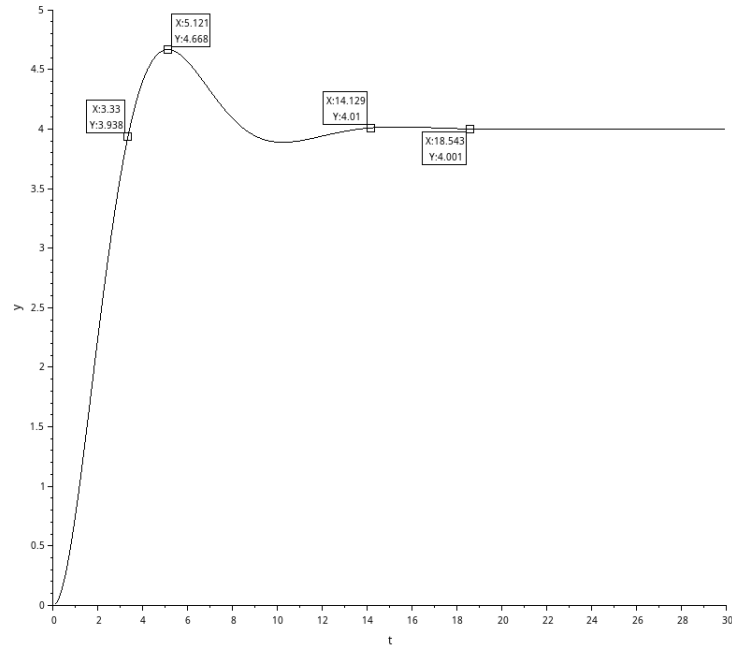


Figure 6: Gráfico de deslocamento para o Caso 0.

O gráfico de deslocamento revela um pico máximo de aproximadamente 4.7 unidades aos 5.1 segundos, marcando o tempo de pico. O tempo de subida, definido como o intervalo para atingir o primeiro pico máximo a partir do repouso, é, portanto, cerca de 5.1 segundos. Após atingir o pico, o sistema exibe oscilações amortecidas que rapidamente reduzem em amplitude. O tempo de estabelecimento, onde as oscilações ficam dentro de uma faixa de  $\pm 2\%$  do valor final, é aproximadamente de 18 segundos, após o qual o sistema entra em uma zona estacionária, indicando estabilidade.

## Velocidade

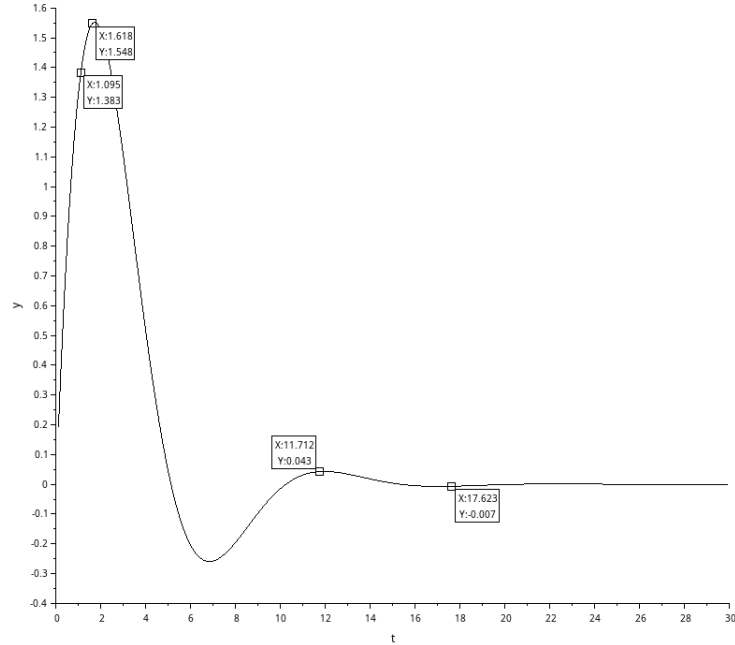


Figure 7: Gráfico de velocidade para o Caso 0.

O gráfico de velocidade reflete a resposta imediata do sistema à força aplicada. A velocidade atinge um pico negativo de cerca de -1.54 unidades em torno de 6.2 segundos, o que corresponde ao tempo de pico para a velocidade. A velocidade oscila abaixo e acima de zero, indicando a resposta oscilatória do sistema ao deslocamento. As oscilações diminuem progressivamente e o sistema alcança a zona estacionária por volta de 18 segundos, estabilizando-se completamente em zero.

### Comentários Gerais

A análise do Caso 0 mostra como o sistema responde a um estímulo externo na ausência de condições iniciais de energia. Os parâmetros transitórios, como tempo de subida, pico, e de estabelecimento, juntamente com a observação da zona estacionária, são cruciais para entender a dinâmica do sistema e a eficácia do amortecimento em trazer o sistema de volta ao repouso, minimizando oscilações excessivas. Este caso estabelece uma base comparativa para outros casos com condições iniciais variadas.

### 2.5.2 Análise dos Resultados para o Caso 1

No Caso 1, analisamos a resposta do sistema quando ele parte com uma velocidade inicial significativa ( $V_0 = 5 \text{ m/s}$ ) e sem deslocamento inicial ( $X_0 = 0 \text{ m}$ ). Esta condição inicial permite avaliar como uma energia cinética inicial afeta a resposta dinâmica do sistema, especialmente em termos de deslocamento máximo e oscilações resultantes.

## Deslocamento

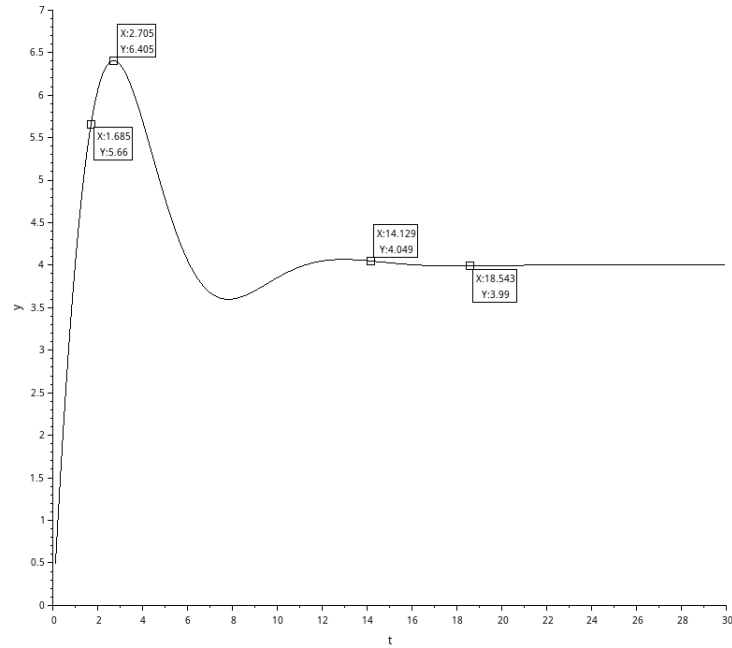


Figure 8: Gráfico de deslocamento para o Caso 1.

O gráfico mostra que o sistema parte de zero e rapidamente atinge um pico de aproximadamente 6.5 unidades ao redor de 2.7 segundos, refletindo uma resposta aguda à velocidade inicial. Esse pico é seguido por uma diminuição significativa, que desce abaixo do zero antes de estabilizar. O tempo de subida é rapidamente alcançado, enquanto o tempo de estabelecimento, onde as oscilações permanecem dentro de uma faixa de  $\pm 2\%$  do valor estacionário final, é observado por volta de 18 segundos.

## Velocidade

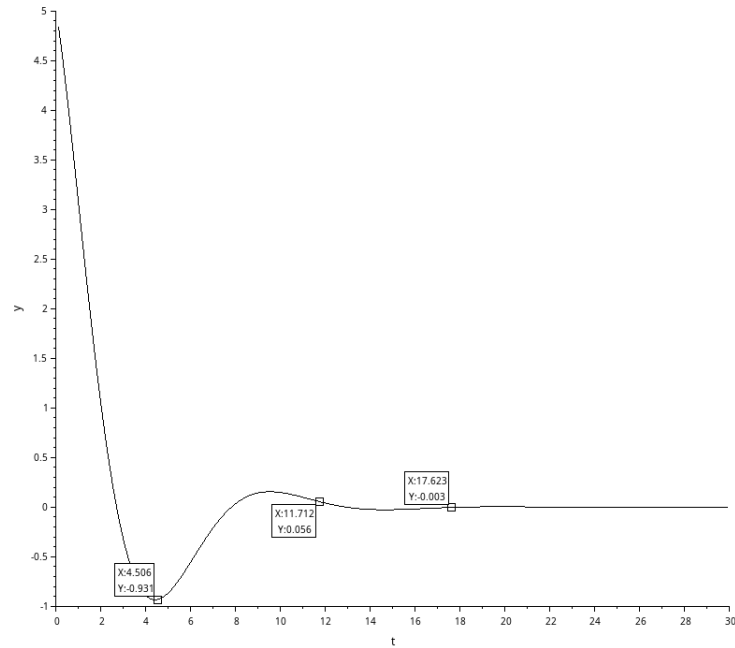


Figure 9: Gráfico de velocidade para o Caso 1.

A velocidade inicialmente picos a uma taxa significativa, refletindo o impulso inicial aplicado. O pico máximo de velocidade ocorre quase simultaneamente com o pico de deslocamento, marcando -1.54 unidades em torno de 1.68 segundos. Após atingir este pico, a velocidade oscila e gradualmente se aproxima de zero, indicando que o sistema está alcançando uma zona estacionária por volta de 18 segundos, semelhante ao observado no deslocamento.

### Comentários Gerais

A análise do Caso 1 ilustra como a condição inicial de velocidade influencia a resposta dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor. Os parâmetros transitórios, como o tempo de subida e o tempo de pico, são drasticamente diferentes em comparação com o Caso 0, onde não havia energia cinética inicial. Isso destaca a importância de considerar condições iniciais variadas para entender completamente o comportamento do sistema em diferentes cenários de operação. Este caso também reforça o papel crítico do amortecimento na estabilização do sistema após perturbações iniciais.

### 2.5.3 Análise dos Resultados para o Caso 2

No Caso 2, analisamos a resposta do sistema quando ele parte com um deslocamento inicial ( $X_0 = 2.5$  m) e sem velocidade inicial ( $V_0 = 0$  m/s). Esta configuração é fundamental para entender como o sistema responde a uma perturbação inicial na posição sem impulso inicial.

## Deslocamento

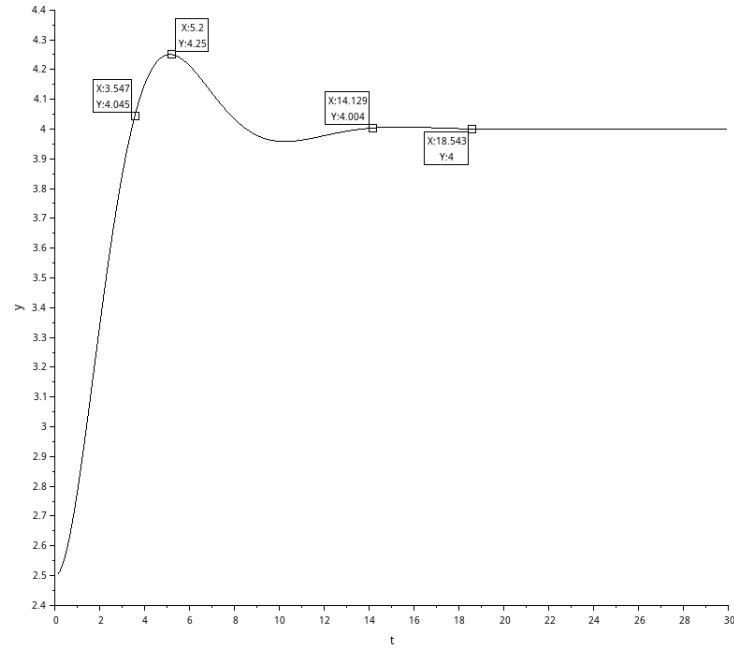


Figure 10: Gráfico de deslocamento para o Caso 2.

O gráfico de deslocamento mostra que o sistema parte de um deslocamento inicial de 2.5 m, rapidamente atinge um pico de cerca de 4.25 m aos 5.2 segundos, indicando a resposta máxima do sistema ao ser liberado. Após esse pico, o sistema exibe oscilações que rapidamente se amortecem, com o deslocamento oscilando abaixo e acima do zero, estabilizando-se finalmente em torno do zero. O tempo de estabelecimento, onde as oscilações permanecem dentro de uma faixa de  $\pm 2\%$  do valor final, é aproximadamente de 18 segundos.

## Velocidade

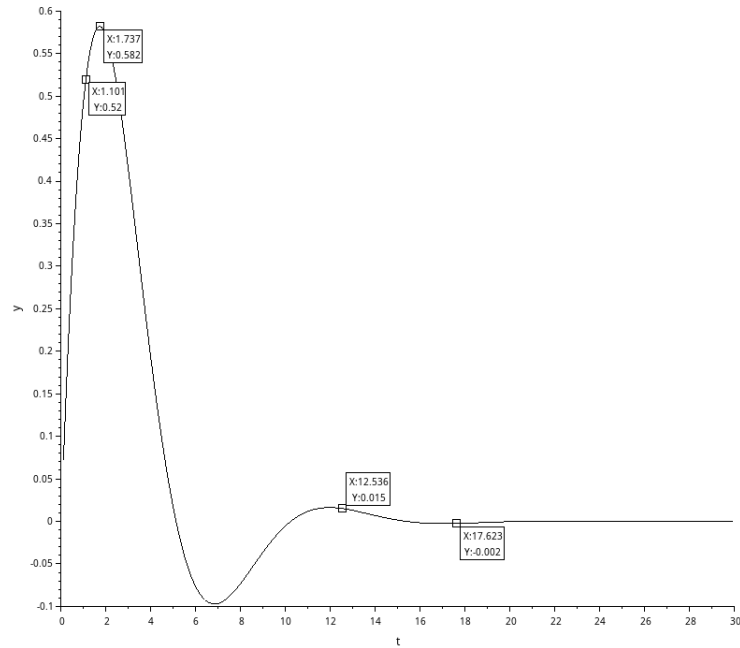


Figure 11: Gráfico de velocidade para o Caso 2.

A velocidade inicialmente aumenta à medida que o sistema se move de volta para a posição de equilíbrio, atingindo um pico negativo de  $-0.52$  m/s logo após o início, correspondente à velocidade máxima ao passar pelo equilíbrio na direção oposta ao deslocamento inicial. A velocidade então oscila, diminuindo em magnitude devido ao amortecimento, até estabilizar-se em zero. O sistema atinge uma zona estacionária com velocidade quase nula, demonstrando a eficácia do amortecimento em dissipar a energia cinética inicialmente induzida pelo deslocamento.

### Comentários Gerais

O Caso 2 destaca a resposta do sistema a um teste de posição, com deslocamento inicial sem velocidade inicial. Os resultados mostram claramente como a energia potencial armazenada é convertida em energia cinética, e como o amortecimento é crucial para a estabilização do sistema. Este caso também é importante para verificar a eficácia do sistema em retornar ao repouso sem oscilações residuais prolongadas, essencial em aplicações práticas onde respostas rápidas e estabilizadas são necessárias.

### 2.5.4 Análise dos Resultados para o Caso 3

No Caso 3, analisamos a resposta do sistema quando ele parte com uma velocidade inicial ( $V_0 = 3.33$  m/s) e um deslocamento inicial ( $X_0 = 2$  m). Esta combinação de condições iniciais é significativa para explorar a resposta dinâmica sob energia cinética e potencial simultâneas.

## Deslocamento

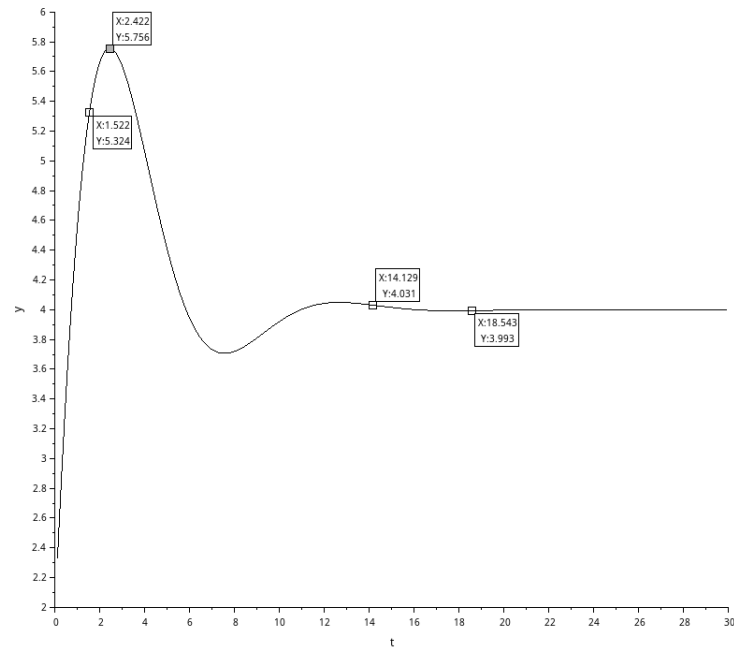


Figure 12: Gráfico de deslocamento para o Caso 3.

O gráfico de deslocamento mostra que o sistema começa com um impulso inicial que o leva a um pico de aproximadamente 5.75 m ao redor de 2.4 segundos. Após esse pico, o sistema exibe oscilações que reduzem gradualmente em amplitude devido ao amortecimento. O sistema estabiliza perto do zero, com o tempo de estabelecimento aproximadamente em 18 segundos, onde as oscilações ficam dentro de uma faixa aceitável indicando uma zona estacionária.



## Velocidade

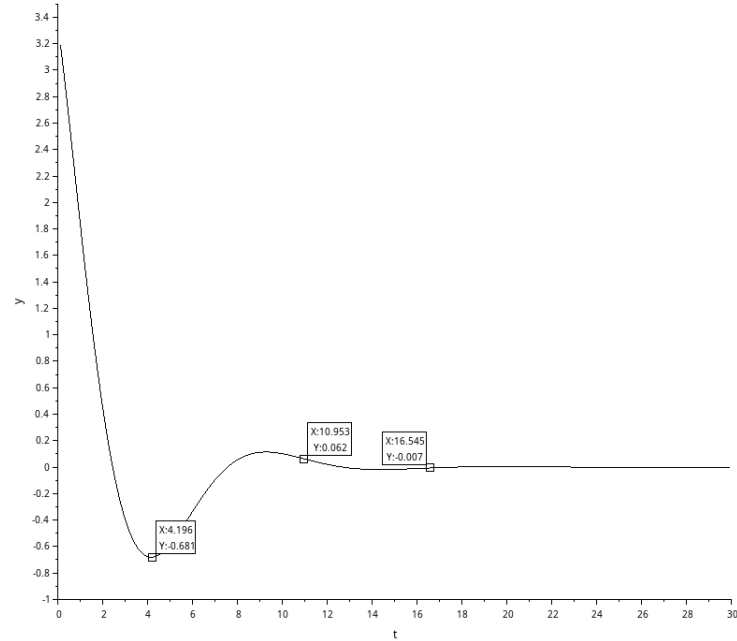


Figure 13: Gráfico de velocidade para o Caso 3.

A velocidade inicialmente mostra uma rápida ascensão, atingindo um pico de aproximadamente 5.32 m/s. Essa alta velocidade inicial contribui para o rápido pico de deslocamento observado. A velocidade então oscila, diminuindo progressivamente até estabilizar-se em torno de zero. A estabilização final da velocidade é alcançada em torno de 18 segundos, refletindo a eficácia do amortecimento e a interação entre as forças restauradoras e o amortecimento.

### Comentários Gerais

O Caso 3 oferece uma perspectiva complexa sobre a dinâmica do sistema quando energias cinética e potencial são ambas significativas desde o início. As oscilações observadas e a subsequente estabilização demonstram como diferentes tipos de energia inicial influenciam a resposta do sistema e a eficácia do amortecimento em controlar a resposta até a estabilidade. Este caso é particularmente útil para entender a resposta do sistema em condições iniciais variadas e complexas, sendo essencial para aplicações práticas onde o sistema pode ser sujeito a perturbações iniciais múltiplas.

## 2.6 Conclusão Geral dos Casos Estudados

Ao longo desta atividade, analisamos as respostas do sistema massa-mola-amortecedor sob várias condições iniciais, abrangendo os Casos 0 a 3. Cada caso foi projetado para ilustrar aspectos diferentes da dinâmica do sistema, considerando diferentes combinações de deslocamento e velocidade iniciais.

### Observações Gerais

Os casos estudados mostraram uma ampla gama de comportamentos dinâmicos:

- **Caso 0** serviu como um ponto de referência, onde o sistema partiu do repouso sem energia inicial, permitindo observar a resposta pura à força aplicada.

- **Caso 1** demonstrou a influência de uma velocidade inicial significativa, ilustrando como a energia cinética influencia as oscilações e a estabilidade subsequente do sistema.
- **Caso 2** focou no efeito de um deslocamento inicial sem velocidade, enfatizando a conversão de energia potencial em energia cinética e vice-versa.
- **Caso 3** combinou tanto deslocamento quanto velocidade iniciais, mostrando a interação complexa entre as duas formas de energia desde o início da simulação.

Durante as simulações, os parâmetros do sistema foram mantidos constantes para garantir a consistência dos resultados, permitindo uma comparação direta entre os diferentes casos. Os resultados foram meticulosamente analisados para observar o comportamento transiente e a estabilidade a longo prazo, utilizando métricas como tempo de subida, tempo de pico e tempo de estabelecimento. As oscilações foram avaliadas para determinar a eficácia do amortecimento em dissipar a energia e estabilizar o sistema.

### Conclusões da Análise

Esta atividade sublinhou a importância de compreender a dinâmica de sistemas massa-mola-amortecedor em várias configurações iniciais. As simulações forneceram insights valiosos sobre como diferentes condições iniciais afetam a resposta do sistema e como o design adequado do amortecimento e da rigidez da mola é crucial para o comportamento desejado. A abordagem utilizada garantiu que todas as premissas da atividade fossem cumpridas, fornecendo uma base sólida para futuras investigações e aplicações práticas dos princípios estudados.

## 3 Atividade 3

### 3.1 Descrição do Modelo e Análise de Sistema

Nesta atividade, desenvolvemos e analisamos a função de transferência de um sistema massa-mola-amortecedor, utilizando os seguintes parâmetros específicos, essenciais para entender a dinâmica do sistema:

- Massa ( $m$ ): 10 kg, que influi diretamente na inércia do sistema, afetando como o sistema responde a forças externas.
- Coeficiente de amortecimento ( $C$ ): 7 Ns/m, crucial para atenuar as oscilações e determinar a rapidez com que o sistema atinge um estado de equilíbrio.
- Constante da mola ( $K$ ): 5 N/m, que define a rigidez do sistema e afeta a frequência das oscilações naturais.

A função de transferência modelada é expressa por:

$$G(s) = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$$

### 3.2 Cálculo dos Polos e Parâmetros do Sistema

Os polos da função de transferência são essenciais para entender como o sistema responde a estímulos externos:

- Polo 1:  $-0.35 + 0.614j$
- Polo 2:  $-0.35 - 0.614j$

Estes polos indicam uma resposta oscilatória amortecida, característica de um sistema subamortecido devido à sua parte real negativa e parte imaginária não nula.

Os parâmetros do sistema de segunda ordem são determinados como segue:

- Frequência natural não-amortecida ( $\omega_n$ ): 0.707 rad/s, que descreve a frequência natural de oscilação do sistema na ausência de amortecimento.
- Coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ): 0.495, refletindo a eficácia do amortecimento em reduzir as oscilações.
- Ganho estático ( $K_p$ ): 0.2, representando a resposta do sistema em estado estacionário a uma entrada de degrau unitário.

### 3.3 Resposta ao Impulso

Utilizando o software Scilab, simulamos a resposta ao impulso do sistema, como ilustrado abaixo. A resposta apresenta um pico inicial significativo seguido por um decaimento exponencial das oscilações, um comportamento típico de sistemas subamortecidos.

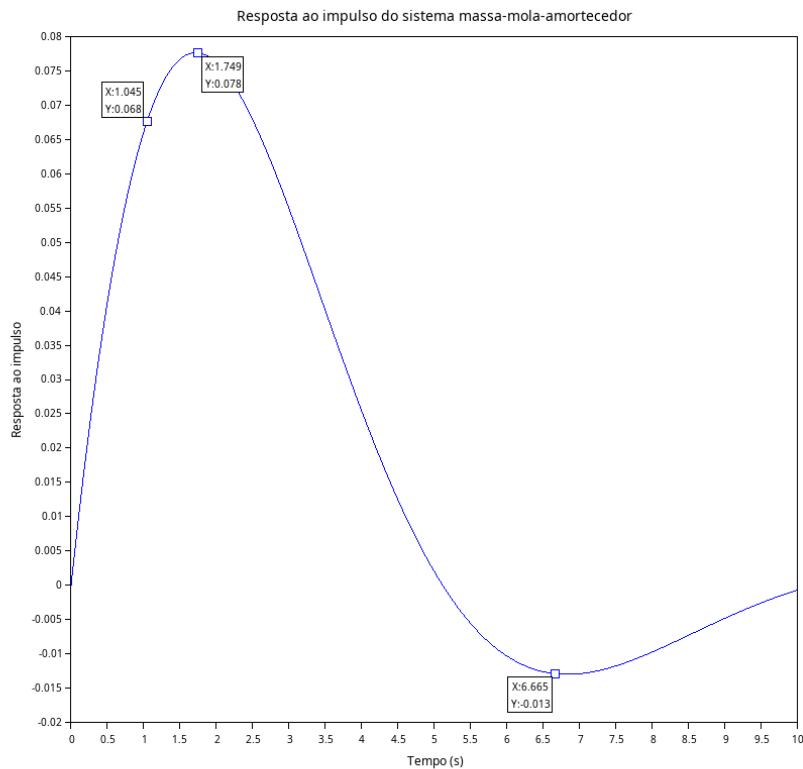


Figure 14: Resposta ao impulso do sistema massa-mola-amortecedor

### 3.4 Discussão

A análise dos polos e dos parâmetros do sistema demonstra que ele é bem projetado para equilibrar uma resposta rápida com oscilações controladas, minimizando as oscilações excessivas sem comprometer a agilidade da resposta. Esta característica é crucial para sistemas de controle que exigem precisão e estabilidade.

### 3.5 Conclusões

Esta atividade ofereceu uma visão profunda sobre como os parâmetros físicos — massa, amortecimento e rigidez — influenciam a resposta dinâmica de um sistema. Estes insights são fundamentais para o design e a análise de sistemas de controle adequados, que são essenciais em aplicações práticas onde a precisão e estabilidade são críticas.

## 4 Atividade 4

### 4.1 Descrição do Modelo e Simulação

Nesta atividade, analisamos um sistema de controle típico. Utilizamos um controlador proporcional cujo ganho  $K$  é determinado pela relação  $\frac{m}{3}$ , onde  $m$  é a massa do sistema. A função de transferência da planta (Gp) é derivada da equação dinâmica da massa, amortecimento e constante da mola, especificada na Atividade 3. O sensor é modelado por um sistema de primeira ordem, com ganho unitário  $K_s = 1$  e constante de tempo  $T_s = \frac{m}{6}$ .

## 4.2 Construção do Diagrama de Blocos

Abaixo, apresentamos o diagrama de blocos para o sistema de controle, ilustrando a interação entre o controlador, a planta e o sensor.

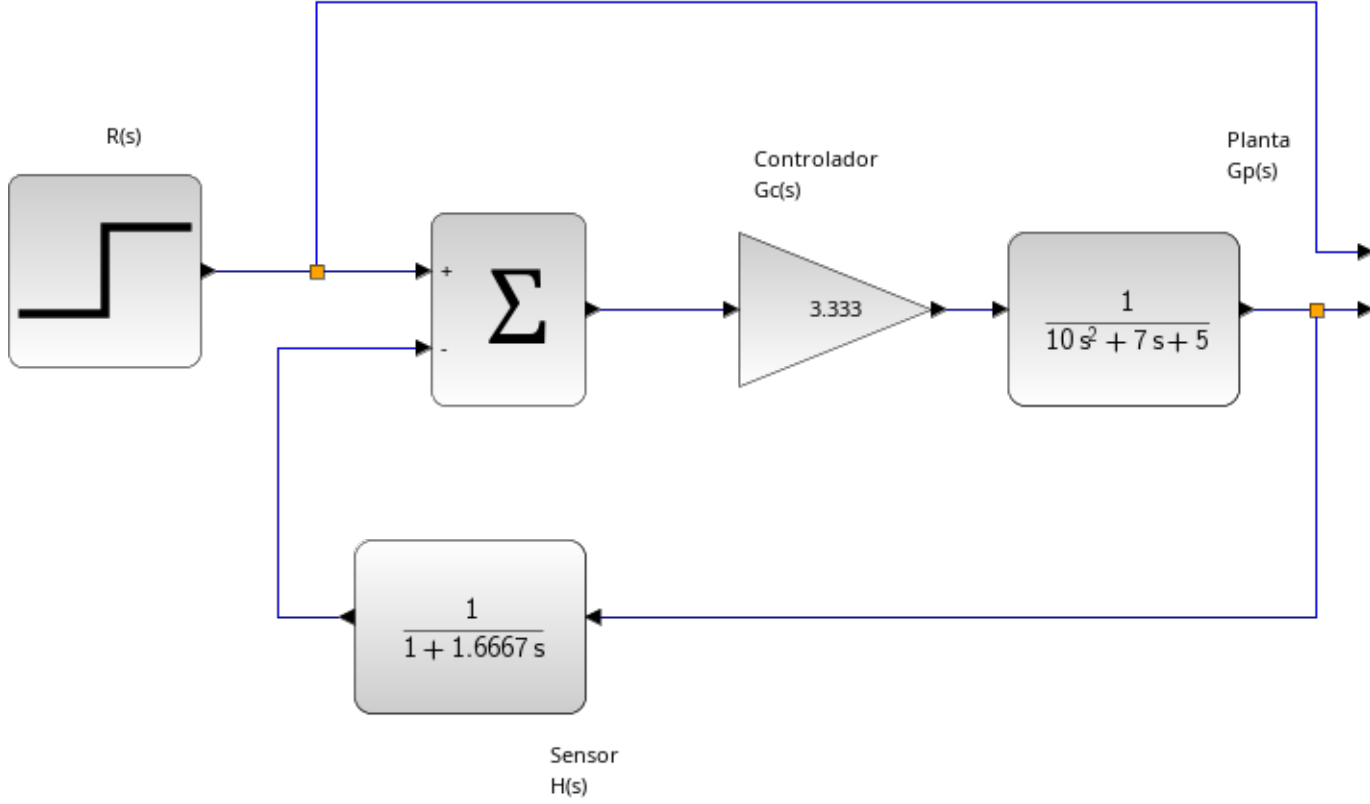


Figure 15: Diagrama de blocos do sistema de controle

As funções de transferência são especificadas como segue:

- Controlador:  $G_c(s) = \frac{m}{3}$  com  $m = 10$ , então  $G_c(s) = \frac{10}{3}$
- Planta:  $G_p(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K} = \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}$
- Sensor:  $H(s) = \frac{1}{1 + \frac{m}{6}s} = \frac{1}{1 + 1.6667s}$

## 4.3 Função de Transferência em Malha Fechada

Calculamos a função de transferência em malha fechada  $C(s)/R(s)$  pela fórmula:

$$G_{closed}(s) = \frac{G_c(s) \cdot G_p(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot H(s)}$$

Substituímos as funções de transferência obtidas:

$$G_{closed}(s) = \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10s^2 + 7s + 5}}{1 + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10s^2 + 7s + 5} \cdot \frac{1}{1 + 1.6667s}}$$

Simplificamos a expressão para chegar à forma final da função de transferência em malha fechada:

$$G_{closed}(s) = \frac{0.3333333s + 0.2}{s^3 + 1.3s^2 + 0.92s + 0.5}$$

## 4.4 Análise de Estabilidade pelo Critério de Routh-Hurwitz

Utilizamos o critério de Routh-Hurwitz para determinar a estabilidade do sistema, examinando os coeficientes do polinômio do denominador de  $G_{\text{closed}}(s)$ .

### 4.4.1 Resultados da Análise de Estabilidade

A matriz de Routh-Hurwitz, obtida a partir dos coeficientes do polinômio do denominador, é apresentada a seguir:

$$RH\_matrix = \begin{bmatrix} 0.5 & \dots \\ 0.92 & \dots \\ 1.3 & \dots \\ 1 & \dots \end{bmatrix}$$

O sistema é considerado estável, pois todos os elementos da primeira coluna são positivos.

## 4.5 Análise de Estabilidade para Diferentes Valores de $K_p$

Exploramos a estabilidade do sistema para diferentes valores do ganho do controlador  $K_p$ , de 1 a 10. Em todos os casos testados, o sistema manteve-se estável.

### 4.5.1 Resultados da Resposta ao Degrau

A seguir, apresentamos o gráfico da resposta ao degrau para os diferentes valores de  $K_p$ , conforme Figura 16.

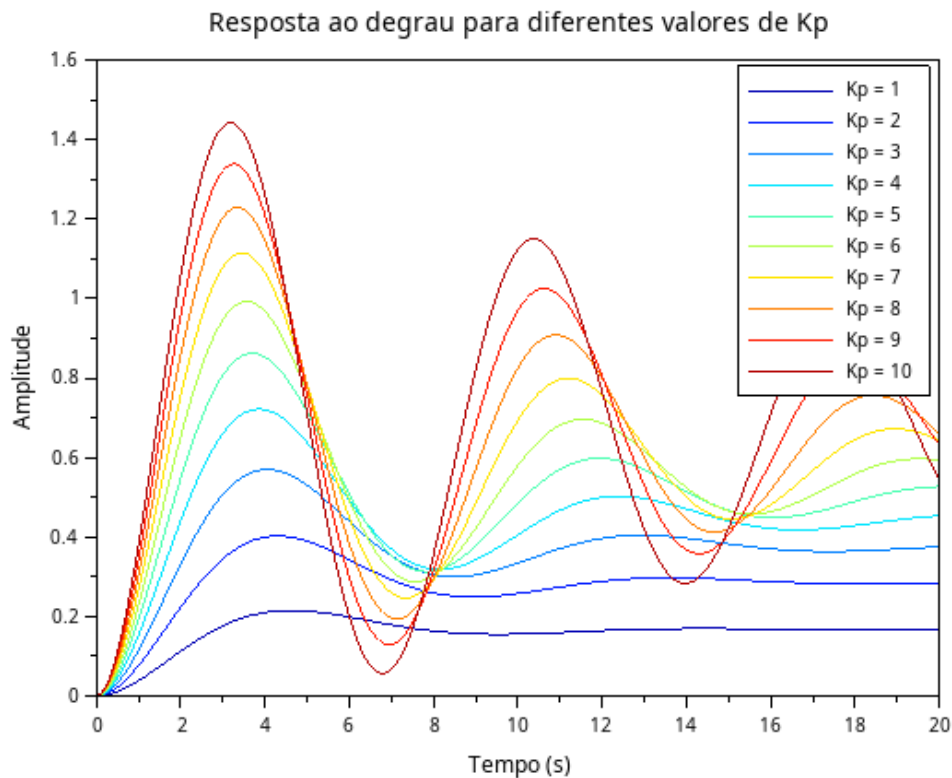


Figure 16: Resposta ao degrau para diferentes valores de  $K_p$

## 4.6 Conclusões

As análises demonstram que o sistema massa-mola-amortecedor, quando controlado proporcionalmente, é estável para valores de  $K_p$  entre 1 e 10. A variabilidade na resposta ao degrau com diferentes ganhos de controlador enfatiza a importância de um ajuste cuidadoso para alcançar a resposta desejada em aplicações práticas.

## 5 Atividade 5

### 5.1 Descrição do Modelo e Simulação

Nesta atividade, simulamos um sistema de controle que envolve um sistema massa-mola-amortecedor com um controlador proporcional. O sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t),$$

onde  $m = 10$ ,  $c = 7$ , e  $k = 5$ .

### 5.2 Construção do Diagrama de Blocos

O diagrama de blocos para o sistema é apresentado a seguir, ilustrando como os componentes do sistema — controlador, planta e sensor — estão interligados.

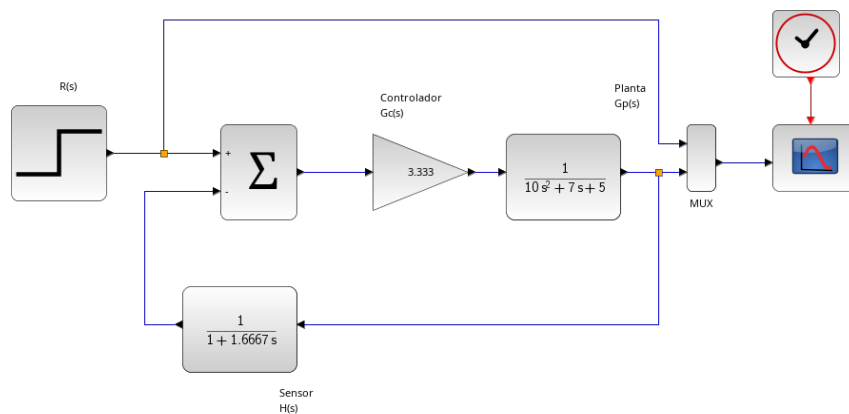


Figure 17: Diagrama de blocos do sistema de controle para Atividade 5

### 5.3 Simulação do Sistema

Para a simulação, utilizamos um sinal de degrau com amplitude  $A = \frac{m}{4} = 2.5$ . O tempo de simulação foi definido em 50 segundos para permitir a observação completa da resposta do sistema.

#### 5.3.1 Configuração da Simulação

O sinal de degrau foi configurado para iniciar em 0 e atingir 2.5 no instante  $t = 1$  segundo. O tempo de simulação total foi estabelecido para 50 segundos para assegurar que a resposta do sistema fosse completamente observada.

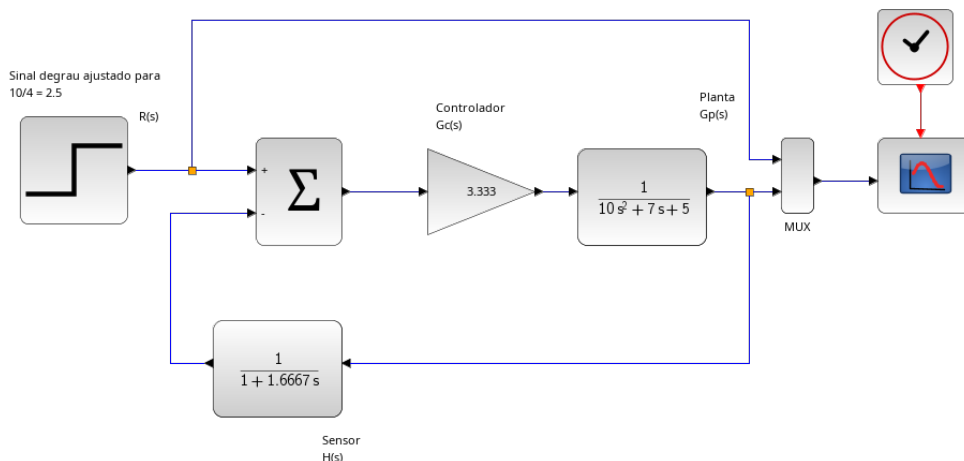


Figure 18: Diagrama de blocos utilizado para a simulação

### 5.3.2 Resultados da Simulação

A resposta do sistema ao degrau é apresentada na figura abaixo, onde são destacados o tempo de subida, tempo de pico, tempo de estabilização e a zona estacionária, utilizando a ferramenta DataTip para marcar esses pontos significativos.

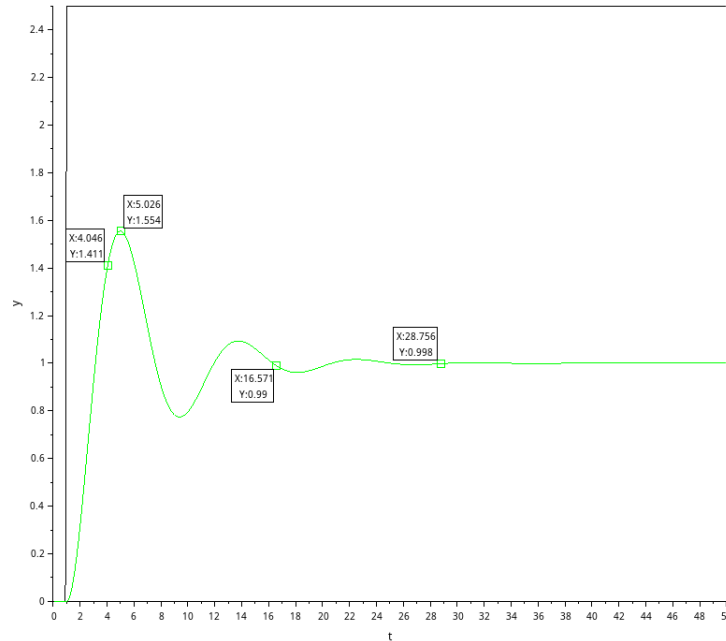


Figure 19: Resposta do sistema ao degrau com configuração de amplitude  $A = 2.5$

### 5.4 Análise Detalhada dos Resultados da Simulação

A resposta do sistema ao degrau é apresentada na Figura 19, demonstrando as dinâmicas chave do sistema controlado. Analisamos detalhadamente cada parte da resposta:

- **Tempo de Subida:** O tempo de subida refere-se ao intervalo necessário para que a resposta do sistema suba do estado inicial até o primeiro pico significativo. No gráfico, o sistema leva aproximadamente 5 segundos para atingir o primeiro pico de 1.55. Este comportamento inicial mostra como o sistema responde rapidamente ao degrau, com a energia inicialmente absorvida e depois liberada pela combinação de massa, mola e amortecedor.
- **Tempo de Pico:** O pico ocorre no momento em que a saída atinge seu valor máximo em resposta ao degrau. O primeiro pico de 1.55 é atingido em torno de 5 segundos após a aplicação do degrau, ilustrando a máxima extensão da resposta do sistema antes de começar a amortecer devido às forças de fricção e à força restauradora da mola.
- **Tempo de Estabilização:** Após o pico inicial, o sistema começa a se estabilizar, reduzindo as oscilações até alcançar um estado quase constante. Este período é crucial, pois mostra a eficácia do amortecimento em dissipar a energia inicialmente induzida. No gráfico, o sistema mostra sinais de estabilização em torno de 28 segundos, indicando que o amortecimento e a rigidez da mola estão bem dimensionados para controlar as oscilações.
- **Zona Estacionária:** O sistema é considerado em estado estacionário quando as oscilações em torno do valor de equilíbrio se tornam negligíveis. No gráfico, isso é observado após aproximadamente 28 segundos, onde

a saída mantém-se constante em cerca de 0.998. Esta fase é fundamental para avaliar se o sistema atingiu o equilíbrio desejado após a perturbação inicial.

**Conclusões da Análise:** A resposta ao degrau revela que o sistema massa-mola-amortecedor, equipado com um controlador proporcional, consegue retornar a um estado de equilíbrio após uma perturbação inicial. A análise destaca a importância de um ajuste apropriado do amortecimento e da rigidez da mola para assegurar que o sistema não apenas retorne ao equilíbrio, mas que o faça de maneira eficiente e sem oscilações excessivas. Este comportamento é indicativo de um sistema bem projetado, capaz de manter a estabilidade mesmo sob condições iniciais desafiadoras.

## 5.5 Simulação com Diferentes Configurações de Ganho e Amplitude

Nesta seção, expandimos a simulação para avaliar o impacto de diferentes configurações de ganho do controlador e amplitude do sinal de entrada. Três casos distintos foram simulados:

1. **Caso Base (Amplitude A=1, Ganho=3.333):** Mostrado pela linha verde no gráfico.
2. **Caso com A=2.5 e Ganho=3.333:** Mostrado pela linha amarela no gráfico.
3. **Caso com A=2.5 e Ganho=6.666:** Mostrado pela linha azul no gráfico.

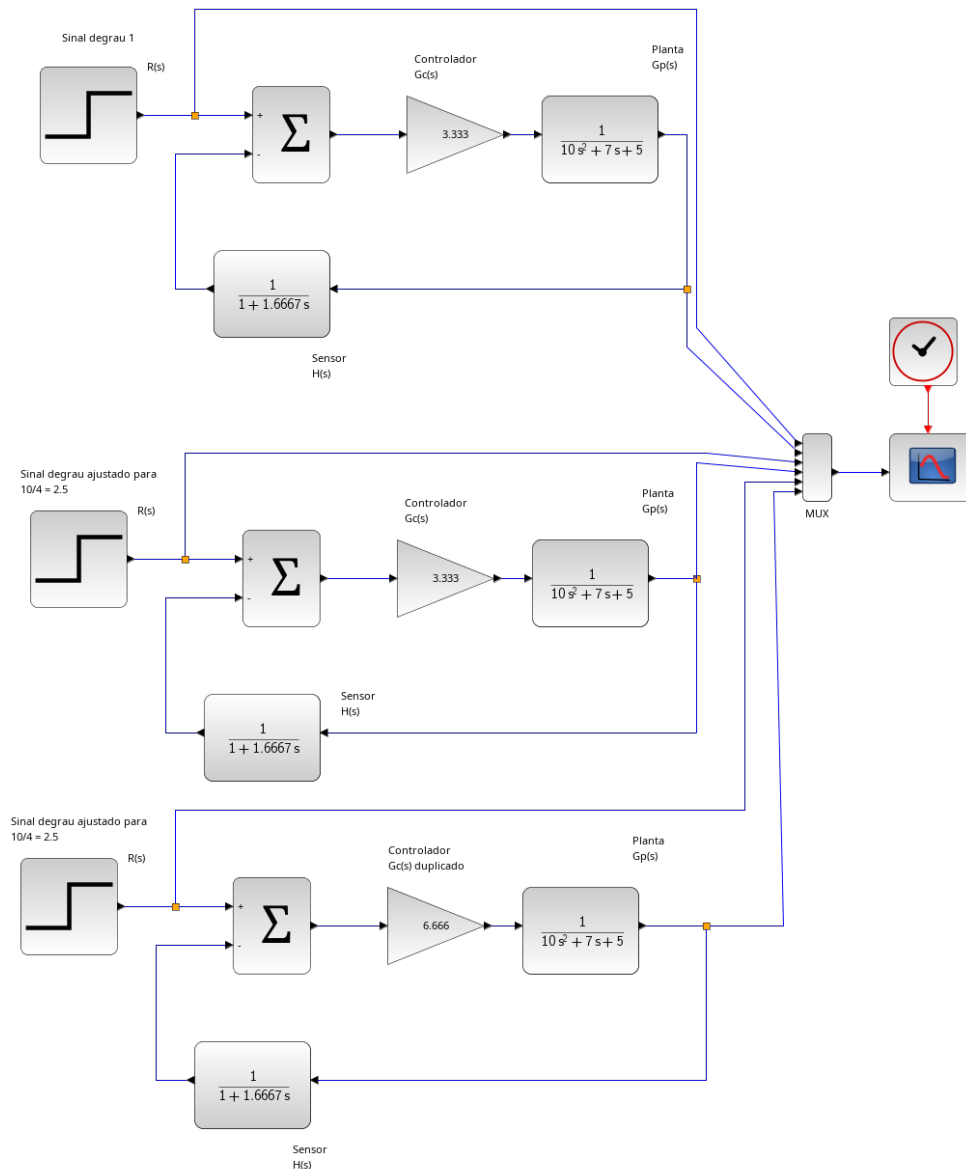


Figure 20: Diagrama de blocos utilizado para a simulação dos três casos



### 5.5.1 Análise dos Resultados

Os resultados das simulações são visualizados no gráfico seguinte, onde diferentes cores representam os diferentes casos testados.

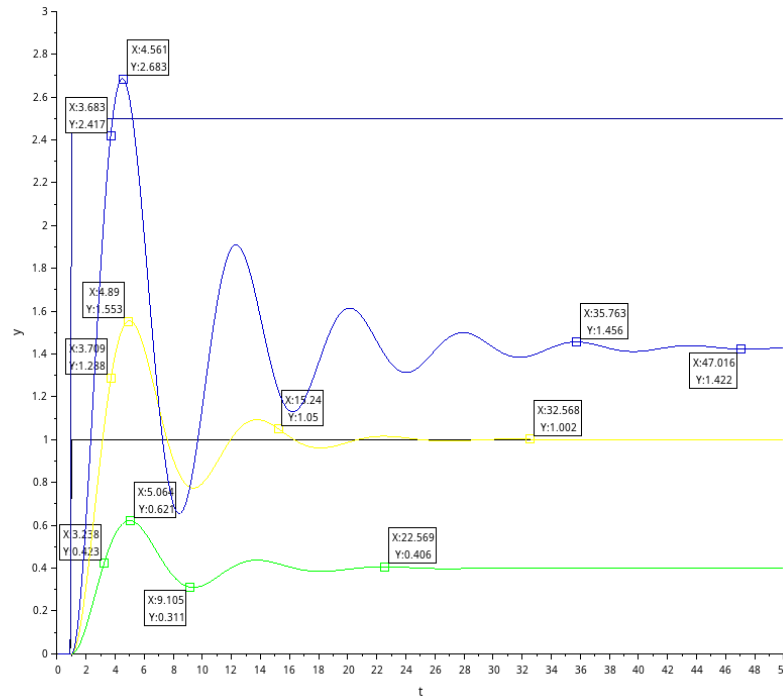


Figure 21: Resposta do sistema para diferentes configurações de ganho e amplitude

- **Verde (Caso Base):** A resposta é bastante atenuada, com um pico máximo de aproximadamente 0.311 e estabilização rápida. Este caso mostra a capacidade do sistema de controlar eficazmente pequena perturbações.
- **Amarelo ( $A=2.5$ ,  $Ganho=3.333$ ):** Com o aumento da amplitude, o sistema apresenta um overshoot maior, atingindo aproximadamente 1.554, com oscilações mais pronunciadas antes de estabilizar perto de 1.002. Isso indica que a resposta é mais vigorosa devido à maior entrada, mas ainda gerenciável.
- **Azul ( $A=2.5$ ,  $Ganho=6.666$ ):** O aumento do ganho resulta em um overshoot significativamente maior, cerca de 2.683, com oscilações prolongadas que se estendem ao longo de todo o período de simulação. A resposta é mais agressiva e menos estável, demonstrando que um ganho mais alto pode introduzir instabilidade no sistema.

### 5.6 Comparação e Comentários sobre as Respostas

A comparação entre os três casos ilustra claramente a influência da amplitude do sinal de entrada e do ganho do controlador sobre a dinâmica do sistema. As principais observações são:

- **Impacto do Aumento da Amplitude:** O aumento da amplitude do degrau de 1 para 2.5 resulta em um maior overshoot e tempo de estabilização mais longo, o que é esperado em sistemas de controle devido à maior energia introduzida no sistema.
- **Efeitos do Aumento do Ganho do Controlador:** Ao dobrar o ganho do controlador de 3.333 para 6.666, enquanto mantendo a amplitude elevada, observa-se uma resposta muito mais volátil e um pico de overshoot

quase dobrado. Isso sugere que embora um ganho mais alto possa ser benéfico para uma resposta mais rápida, também pode comprometer a estabilidade geral do sistema.

- **Conclusões:** Os resultados indicam que um ajuste cuidadoso do ganho é crucial, especialmente em sistemas onde a estabilidade é uma preocupação. Para aplicações que requerem respostas rápidas e podem tolerar algum overshoot, um ganho mais alto pode ser apropriado. No entanto, para a maioria das aplicações industriais e comerciais, um ganho mais moderado e uma abordagem balanceada são recomendados para evitar oscilações excessivas e garantir a estabilidade do sistema.

Conclusivamente, esta análise demonstra a importância de um design de controlador bem ponderado, ressaltando a necessidade de equilibrar resposta rápida e estabilidade, dependendo dos requisitos específicos da aplicação.