



Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro

Curso de Engenharia da Computação

Guilherme Cagide Fialho

Comparativo das soluções das equações de advecção e de advecção-difusão

Nova Friburgo

2024



Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro

Graduação em Engenharia da Computação

Guilherme Cagide Fialho

Comparativo das soluções das equações de advecção e de advecção-difusão

Relatório da Disciplina Métodos Numéricos
para Equações Diferenciais 2

Orientador: Prof. Hélio Pedro Amaral Souto

Nova Friburgo

2024

RESUMO

CAGIDE FIALHO, G. Relatório do projeto de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais II. 2024. 25 f. Trabalho da Disciplina Métodos Numéricos para Equações Diferenciais II (Graduação em Engenharia da Computação) – Graduação em Engenharia da Computação, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2024.

Este trabalho investiga soluções numéricas e analíticas de equações de advecção e advecção-difusão, utilizando métodos Lagrangianos e de Separação de Variáveis. O estudo enfoca a influência dos coeficientes de advecção e difusão em um domínio infinito, explorando como a velocidade e o coeficiente de difusão afetam a dispersão e transporte de solutos. Através de simulações numéricas detalhadas, foram examinadas as características das soluções sob várias condições, proporcionando insights sobre a dinâmica do soluto em fluxos unidimensionais. As análises comparativas entre as soluções de advecção pura e advecção-difusão destacam o papel significativo da difusão em modificar o perfil de concentração, especialmente em coeficientes mais altos. Este estudo não apenas reforça a compreensão teórica das equações diferenciais na modelagem de fenômenos físicos, mas também serve como uma referência prática para engenheiros e cientistas aplicarem em contextos de engenharia e ambientais.

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Equações de Advecção, Advecção-Difusão, Solução de d'Alembert, Separação de Variáveis, Simulação Numérica.

ABSTRACT

CAGIDE FIALHO, G. Project Report on Numerical Methods for Differential Equations II. 2024. 25 p. Course Completion Work for Numerical Methods for Differential Equations II (Bachelor's in Computer Engineering) – Bachelor's in Computer Engineering, State University of Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2024.

This work investigates numerical and analytical solutions to advection and advection-diffusion equations, utilizing Lagrangian methods and Variable Separation. The study focuses on the influence of advection and diffusion coefficients in an infinite domain, exploring how velocity and diffusion coefficient affect the dispersion and transport of solutes. Through detailed numerical simulations, the characteristics of the solutions under various conditions were examined, providing insights into the dynamics of solute in unidimensional flows. Comparative analyses between pure advection and advection-diffusion solutions highlight the significant role of diffusion in modifying the concentration profile, particularly at higher coefficients. This study not only reinforces the theoretical understanding of differential equations in modeling physical phenomena but also serves as a practical reference for engineers and scientists to apply in engineering and environmental contexts.

Keywords: Numerical Methods, Advection Equations, Advection-Diffusion, d'Alembert Solution, Variable Separation, Numerical Simulation.

Lista de Figuras

1	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 0$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão.	4
2	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 1$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão.	5
3	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 2$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, mostrando maior dispersão.	6
4	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 3$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, destacando o aumento da dispersão.	7
5	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 4$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, mostrando um aumento na dispersão e na concentração do pico.	8
6	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 5$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, destacando uma dispersão ainda maior.	9
7	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 0$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase coincidente com a advecção pura, indica a advecção-difusão.	10
8	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 1$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, indica a advecção-difusão, evidenciando o efeito mínimo da difusão.	11
9	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 2$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível da advecção, mostra o efeito ainda limitado da difusão.	12
10	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 3$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, ainda quase indistinguível da advecção, ilustra a fraca influência da difusão.	13
11	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 4$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, ilustra a falta de efeito significativo da difusão.	14
12	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 5$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, continua a mostrar o efeito mínimo da difusão.	15
13	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 0$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase coincidente com a advecção pura, indica a advecção-difusão.	16
14	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 1$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, continua a mostrar o efeito mínimo da difusão.	17
15	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 2$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, ilustra o efeito mínimo da difusão.	18
16	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 3$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, ainda quase indistinguível, ilustra o efeito mínimo da difusão.	19
17	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 4$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, ilustra o efeito mínimo da difusão.	20
18	Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 5$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, continua a ilustrar o efeito mínimo da difusão.	21

Lista de Tabelas

1	Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 0$	4
2	Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 1$	5
3	Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 2$	6
4	Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 3$	7
5	Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 4$	8
6	Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 5$	9
7	Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 0$	10
8	Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 1$	11
9	Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 2$	12
10	Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 3$	13
11	Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 4$	14
12	Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 5$	15
13	Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 0$	16
14	Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 1$	17
15	Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 2$	18
16	Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 3$	19
17	Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 4$	20
18	Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 5$	21

Lista de Siglas e Abreviaturas

D: Coeficiente de Difusão

L: Largura do pulso inicial de concentração

c0: Concentração inicial dentro do pulso

u: Velocidade de advecção

t: Tempo

x: Posição espacial

Esta seção inclui as siglas e abreviaturas usadas ao longo do documento, proporcionando um ponto de referência rápido para os leitores.

Materiais Utilizados

Esta seção detalha os materiais e as configurações de software e hardware utilizados para o estudo e a simulação de equações diferenciais de advecção e advecção-difusão. Utilizando Python versão 3.11, este trabalho foca na implementação de modelos matemáticos e na análise de resposta do sistema sob diversas condições, simulados no ambiente do Ubuntu 24.04 LTS.

Especificações do Computador e Software:

As simulações foram realizadas em um computador modelo Lenovo Legion 5 15IMH05H, equipado com um processador Intel® Core™ i7-10750H, 16,0 GiB de memória RAM e um disco de 512,1 GB. O sistema operacional Ubuntu 24.04 LTS foi escolhido pela sua estabilidade e compatibilidade com aplicações de engenharia.

Versão do Python e Bibliotecas Utilizadas:

Python versão 3.11 foi utilizado para todas as simulações. As bibliotecas utilizadas incluem:

- **NumPy**: Utilizado para manipulação de arrays e operações matemáticas.
- **Matplotlib**: Empregada para a criação de gráficos e visualizações de dados.
- **SciPy**: Utilizado, especificamente o módulo *erf*, para cálculos relacionados com funções especiais necessárias nas soluções das equações.
- **Pandas**: Utilizado para manipulação de dados e geração de tabelas.
- **Jinja2**: Empregado para a formatação de saída de dados, facilitando a criação de relatórios e documentos.

Sumário

1	Introdução	2
2	Desenvolvimento Teórico	2
2.1	Equação de Advecção	2
2.2	Equação de Advecção-Difusão	3
2.3	Comparação das Soluções	3
3	Demonstração e Análise de Resultados	3
3.1	Caso: $D = 0.1$	3
3.1.1	Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 0$	3
3.1.2	Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 1$	4
3.1.3	Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 2$	5
3.1.4	Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 3$	6
3.1.5	Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 4$	7
3.1.6	Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 5$	8
3.2	Conclusão do Caso: $D = 0.1$	9
3.3	Caso: $D = 0.001$	9
3.3.1	Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 0$	9
3.3.2	Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 1$	10
3.3.3	Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 2$	11
3.3.4	Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 3$	12
3.3.5	Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 4$	13
3.3.6	Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 5$	14
3.4	Conclusão do Caso: $D = 0.001$	15
3.4.1	Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 1$	16
3.4.2	Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 2$	17
3.4.3	Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 3$	18
3.4.4	Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 4$	19
3.4.5	Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 5$	20
4	Conclusão Geral dos Casos de Difusão	21
5	Referências	1
6	Apendice	1
6.1	Repositório no GitHub	1

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo investigar e comparar as soluções das equações diferenciais unidimensionais de advecção e de advecção-difusão, que são fundamentais em diversas áreas da engenharia, especialmente na modelagem de fenômenos de transporte em meios contínuos. Para isso, utilizamos duas abordagens distintas: o método Lagrangiano, baseado na solução de d'Alembert, para a equação de advecção, e o método de Separação de Variáveis, auxiliado pela função de Green, para a equação de advecção-difusão.

A equação de advecção unidimensional modela o transporte de uma substância em um meio onde a velocidade do fluxo é constante, enquanto a equação de advecção-difusão leva em consideração tanto o transporte advectivo quanto o efeito da difusão, representado por um coeficiente de difusão D . Neste estudo, consideramos um domínio infinito, permitindo uma análise mais simplificada e a obtenção de soluções analíticas claras para os dois problemas.

As soluções analíticas dessas equações permitem a compreensão profunda dos fenômenos envolvidos e fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de métodos numéricos mais avançados, que são frequentemente necessários para resolver problemas práticos com condições de contorno mais complexas. Além disso, a análise comparativa entre as soluções das duas equações, em diferentes instantes de tempo, possibilita uma avaliação detalhada do impacto do termo difusivo sobre a propagação do soluto no meio considerado.

No desenvolvimento teórico, a equação de advecção é resolvida utilizando a abordagem de d'Alembert, que explora a invariância da concentração ao longo das características do fluxo. Já a equação de advecção-difusão é abordada por meio de uma transformação que simplifica a equação para uma forma onde a solução pode ser expressa em termos de uma função de Green, proporcionando uma solução exata para o problema.

A implementação numérica das soluções, seguida de uma análise comparativa para diferentes coeficientes de difusão, permite avaliar a influência da difusão na dispersão do soluto e como essa influência se manifesta ao longo do tempo. Os resultados são apresentados em forma de tabelas e gráficos, que facilitam a visualização das diferenças entre os dois modelos e fornecem insights valiosos para a compreensão dos fenômenos de advecção e difusão.

2 Desenvolvimento Teórico

Neste trabalho, investigamos o comportamento de uma substância transportada em um meio contínuo, considerando dois modelos fundamentais: a equação de advecção e a equação de advecção-difusão. Esses modelos são resolvidos analiticamente para um domínio infinito, onde $-\infty < x < +\infty$, e assumimos que a substância está inicialmente confinada em um intervalo finito $-L < x < L$.

2.1 Equação de Advecção

A equação de advecção unidimensional descreve o transporte de uma substância em um meio quando esta é movida por um fluxo constante. Matematicamente, ela é expressa por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

onde $c(x, t)$ representa a concentração da substância no ponto x e no tempo t , enquanto \bar{u} é a velocidade constante do fluxo. A condição inicial para essa equação é:

$$c(x, 0) = \tilde{c}(x) = \begin{cases} c_0, & \text{se } -L < x < L, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

Para encontrar a solução, seguimos o conceito das características, que nos permite acompanhar a trajetória da substância ao longo do tempo, assumindo que ela se move com a velocidade \bar{u} . Isso implica que, ao longo dessa trajetória, a concentração c permanece constante. A solução geral, então, é:

$$c(x, t) = \tilde{c}(x - \bar{u}t) = \begin{cases} c_0, & \text{se } -L + \bar{u}t < x < L + \bar{u}t, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

Essa solução mostra que a substância é transportada ao longo do eixo x com a velocidade \bar{u} , mantendo sua concentração constante dentro da região delimitada pelo intervalo $-L + \bar{u}t$ a $L + \bar{u}t$.

2.2 Equação de Advecção-Difusão

A equação de advecção-difusão leva em conta não apenas o transporte da substância pelo fluxo, mas também o efeito da difusão, que tende a espalhar a substância ao longo do tempo. A equação é formulada como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (4)$$

onde D é o coeficiente de difusão, representando a intensidade do espalhamento da substância. A condição inicial para este modelo é similar à usada na equação de advecção:

$$c(x, 0) = \tilde{c}(x) = \begin{cases} c_0, & \text{se } -L < x < L, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5)$$

Para resolver essa equação, aplicamos uma mudança de variável que simplifica o problema. Definimos uma nova variável $W(x, t)$ como:

$$W(x, t) = c(x, t) \exp\left(-\frac{\bar{u}x}{2D} + \frac{\bar{u}^2 t}{4D}\right). \quad (6)$$

Essa transformação elimina o termo de advecção, deixando uma equação de difusão pura:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (7)$$

A solução dessa equação, considerando um domínio infinito e uma condição inicial transformada, pode ser encontrada utilizando a função de Green:

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x', t) \tilde{W}(x') dx', \quad (8)$$

onde $G(x - x', t)$ é a função de Green, expressa por:

$$G(x - x', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4Dt}\right). \quad (9)$$

Finalmente, ao reverter a transformação inicial, obtemos a solução para a concentração $c(x, t)$:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{L + (x - \bar{u}t)}{\sqrt{4Dt}}\right] + \operatorname{erf}\left[\frac{L - (x - \bar{u}t)}{\sqrt{4Dt}}\right] \right\}, \quad (10)$$

onde $\operatorname{erf}(\cdot)$ é a função erro, que descreve a dispersão e o transporte da substância ao longo do tempo.

2.3 Comparação das Soluções

Para entender a diferença entre os dois modelos, comparamos as soluções das equações de advecção e advecção-difusão em diferentes instantes de tempo, variando o coeficiente de difusão D . A comparação revela como a difusão afeta a dispersão da substância, tornando a distribuição mais homogênea à medida que D aumenta, em contraste com o transporte puramente advectivo, onde a substância se move sem dispersão significativa.

Os resultados dessas comparações são apresentados em tabelas e gráficos, mostrando claramente como diferentes valores de D influenciam a propagação da substância ao longo do tempo.

3 Demonstração e Análise de Resultados

3.1 Caso: $D = 0.1$

3.1.1 Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 0$

A Figura 1 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo inicial para um coeficiente de difusão $D = 0.1$. Como observado, a solução de advecção-difusão mostra uma suavização inicial e um alargamento da distribuição da concentração em comparação com a advecção pura, que mantém a forma original da distribuição de concentração estabelecida pela condição inicial. Este efeito é típico de processos difusivos, onde a concentração tende a se espalhar para fora de sua posição inicial mais rapidamente.

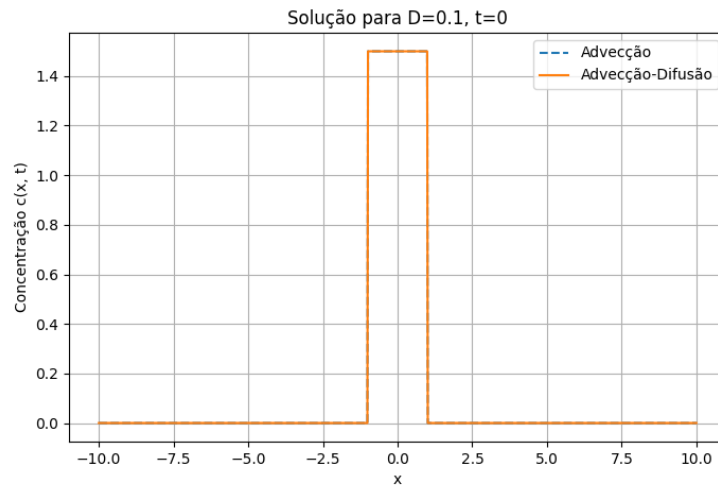


Figura 1: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 0$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão.

Tabela 1: Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 0$

x	Advecção	Advecção-Difusão
-2.250000	0.000000	0.000000
-1.690000	0.000000	0.000000
-1.140000	0.000000	0.000000
-0.580000	1.500000	1.500000
-0.030000	1.500000	1.500000
0.530000	1.500000	1.500000
1.080000	0.000000	0.000000
1.640000	0.000000	0.000000
2.190000	0.000000	0.000000
2.750000	0.000000	0.000000

3.1.2 Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 1$

A Figura 2 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 1$ para um coeficiente de difusão $D = 0.1$. A advecção pura mantém a forma original retangular, simplesmente deslocada, enquanto a advecção-difusão revela uma significativa suavização e espalhamento da concentração, característico de um processo onde a difusão tem um papel importante.

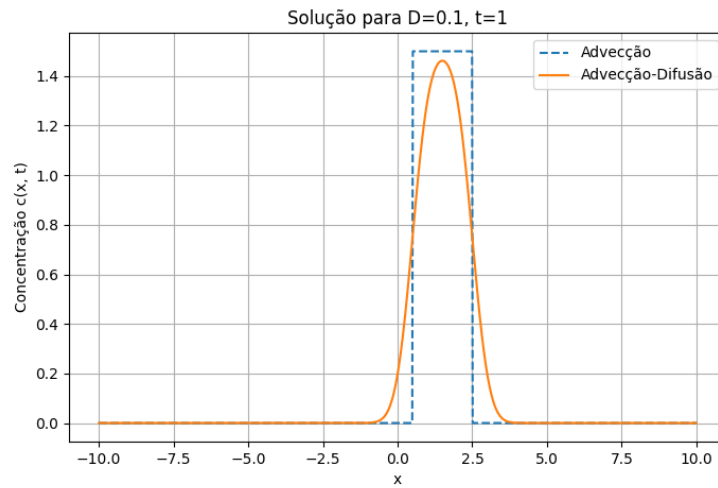


Figura 2: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 1$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão.

Tabela 2: Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 1$

x	Advecção	Advecção-Difusão
-0.750000	0.000000	0.003891
-0.190000	0.000000	0.090349
0.360000	0.000000	0.567097
0.920000	1.500000	1.236080
1.470000	1.500000	1.461555
2.030000	1.500000	1.281271
2.580000	0.000000	0.639132
3.140000	0.000000	0.114840
3.690000	0.000000	0.005674
4.250000	0.000000	0.000068

3.1.3 Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 2$

A Figura 3 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 2$ para um coeficiente de difusão $D = 0.1$. A diferença entre a advecção pura e a advecção-difusão torna-se ainda mais evidente, com a difusão claramente aumentando o espalhamento do soluto além da simples deslocação causada pela advecção.

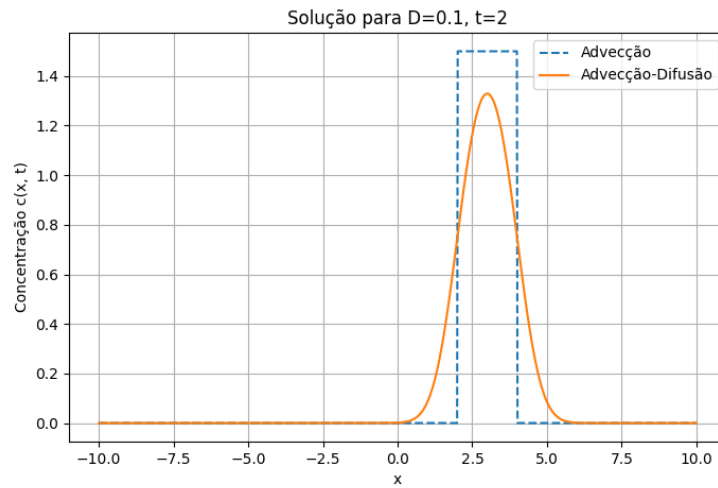


Figura 3: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 2$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, mostrando maior dispersão.

Tabela 3: Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 2$

x	Advecção	Advecção-Difusão
0.750000	0.000000	0.036080
1.310000	0.000000	0.204134
1.860000	0.000000	0.619096
2.420000	1.500000	1.108262
2.970000	1.500000	1.328708
3.530000	1.500000	1.146762
4.080000	0.000000	0.670639
4.640000	0.000000	0.234287
5.190000	0.000000	0.044211
5.750000	0.000000	0.004243

3.1.4 Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 3$

A Figura 4 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 3$ para um coeficiente de difusão $D = 0.1$. Observa-se que a diferença entre a advecção pura e a advecção-difusão é acentuada, com a difusão produzindo um perfil de concentração significativamente mais suavizado e espalhado.

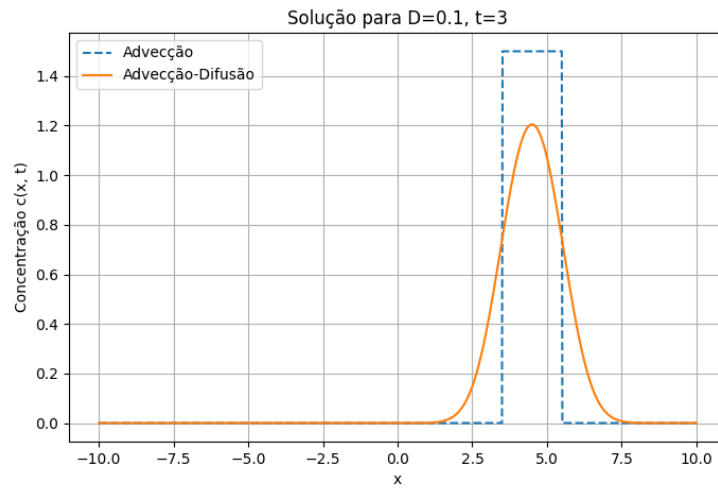


Figura 4: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 3$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, destacando o aumento da dispersão.

Tabela 4: Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 3$

x	Advecção	Advecção-Difusão
2.250000	0.000000	0.079917
2.810000	0.000000	0.277102
3.360000	0.000000	0.638956
3.920000	1.500000	1.026313
4.470000	1.500000	1.204510
5.030000	1.500000	1.056996
5.580000	0.000000	0.680379
6.140000	0.000000	0.306620
6.690000	0.000000	0.092273
7.250000	0.000000	0.017900

3.1.5 Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 4$

A Figura 5 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 4$ para um coeficiente de difusão $D = 0.1$. O perfil de advecção-difusão agora exibe um pico ainda mais concentrado e caudas mais extensas, evidenciando a influência crescente da difusão na forma da distribuição da concentração.

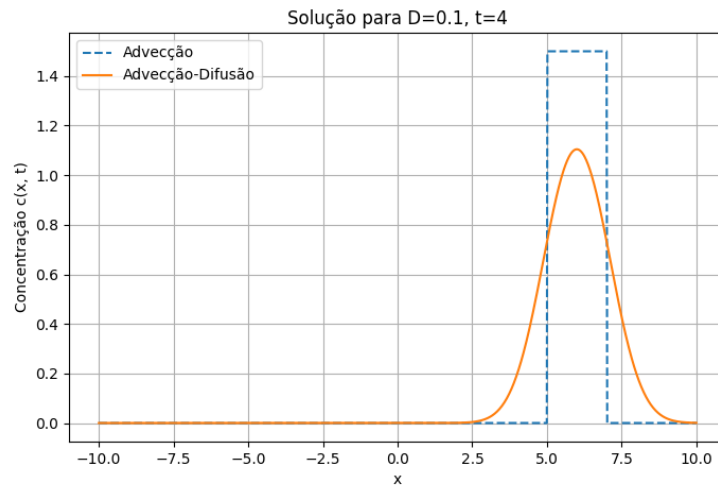


Figura 5: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 4$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, mostrando um aumento na dispersão e na concentração do pico.

Tabela 5: Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 4$

x	Advecção	Advecção-Difusão
3.750000	0.000000	0.121478
4.310000	0.000000	0.326186
4.860000	0.000000	0.644859
5.420000	1.500000	0.961489
5.970000	1.500000	1.104326
6.530000	1.500000	0.986143
7.080000	0.000000	0.679442
7.640000	0.000000	0.353901
8.190000	0.000000	0.136036
8.750000	0.000000	0.037779

3.1.6 Análise para o caso: $D = 0.1$ e $t = 5$

A Figura 6 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 5$ para um coeficiente de difusão $D = 0.1$. A diferença entre a advecção pura e a advecção-difusão é ainda mais dramática, com a difusão resultando em uma dispersão substancial da concentração de soluto, suavizando e alargando significativamente o pico da distribuição.

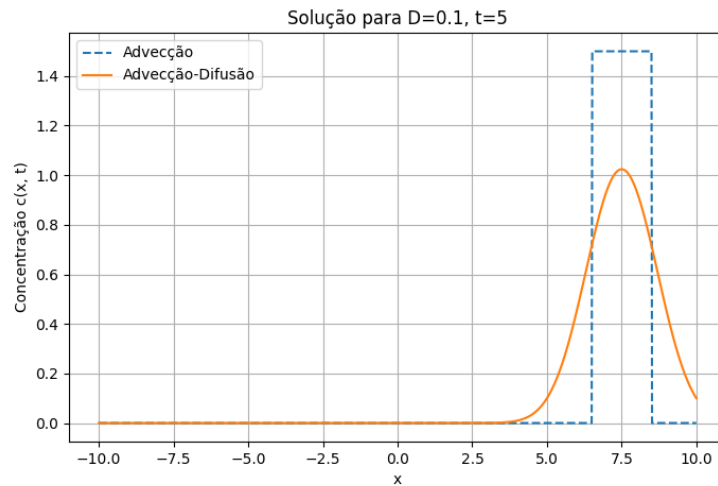


Figura 6: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.1$ no tempo $t = 5$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua indica a advecção-difusão, destacando uma dispersão ainda maior.

Tabela 6: Valores numéricos da concentração para $D = 0.1$ e $t = 5$

x	Advecção	Advecção-Difusão
5.250000	0.000000	0.157609
5.810000	0.000000	0.360265
6.360000	0.000000	0.642820
6.920000	1.500000	0.907299
7.470000	1.500000	1.023754
8.030000	1.500000	0.927498
8.580000	0.000000	0.672274
9.140000	0.000000	0.385933
9.690000	0.000000	0.173177
10.250000	0.000000	0.059956

3.2 Conclusão do Caso: $D = 0.1$

Ao longo do intervalo observado de $t = 0$ a $t = 5$, as soluções numéricas da equação de advecção-difusão com coeficiente de difusão $D = 0.1$ revelaram mudanças significativas na distribuição da concentração de soluto. Inicialmente, advecção pura e advecção-difusão partem de um perfil retangular idêntico, mas logo divergem conforme a difusão começa a suavizar e alargar o perfil de concentração. Com o tempo, esse efeito se intensifica, resultando em uma diferença marcante por $t = 5$, onde a distribuição influenciada pela difusão mostra um pico mais pronunciado e extenso. Esta evolução destaca como mesmo uma moderada difusão de $D = 0.1$ pode transformar significativamente a dinâmica do transporte de solutos, enfatizando a importância de considerar a difusão em aplicações práticas onde a dispersão uniforme é crucial.

3.3 Caso: $D = 0.001$

3.3.1 Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 0$

A Figura 7 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo inicial para um coeficiente de difusão $D = 0.001$. Neste caso, a diferença entre a advecção pura e a advecção-difusão é quase imperceptível, indicando que a influência da difusão é extremamente limitada neste estágio inicial. A forma retangular do perfil de concentração mantém-se praticamente inalterada, destacando o efeito mínimo da difusão quando D é substancialmente reduzido.

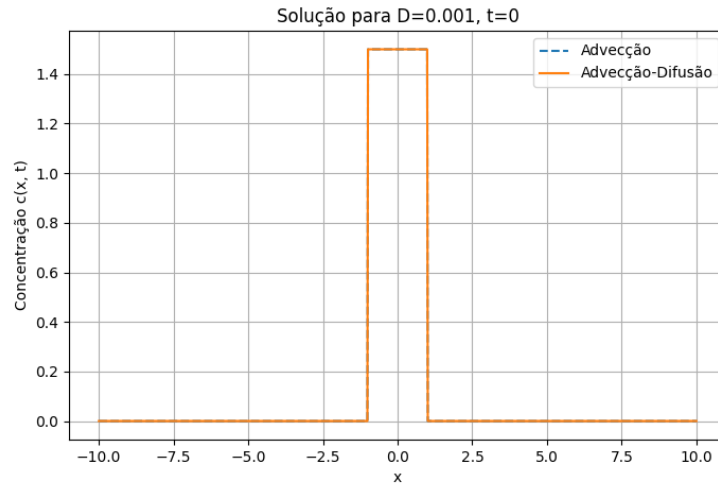


Figura 7: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 0$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase coincidente com a advecção pura, indica a advecção-difusão.

Tabela 7: Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 0$

x	Advecção	Advecção-Difusão
-2.250000	0.000000	0.000000
-1.690000	0.000000	0.000000
-1.140000	0.000000	0.000000
-0.580000	1.500000	1.500000
-0.030000	1.500000	1.500000
0.530000	1.500000	1.500000
1.080000	0.000000	0.000000
1.640000	0.000000	0.000000
2.190000	0.000000	0.000000
2.750000	0.000000	0.000000

3.3.2 Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 1$

A Figura 8 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 1$ para um coeficiente de difusão $D = 0.001$. Semelhante ao tempo $t = 0$, a difusão tem um efeito ainda muito limitado sobre a distribuição da concentração, que permanece praticamente idêntica à advecção pura. Isso demonstra que, para valores extremamente baixos de D , a difusão é insuficiente para alterar significativamente o perfil inicial da concentração mesmo após um intervalo de tempo.

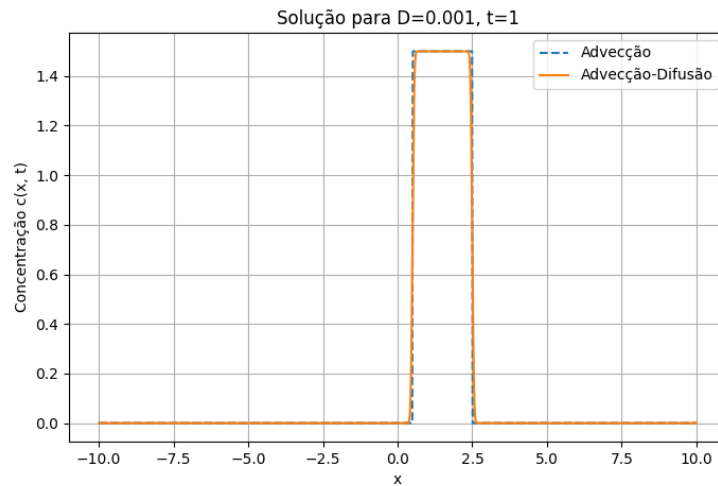


Figura 8: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 1$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, indica a advecção-difusão, evidenciando o efeito mínimo da difusão.

Tabela 8: Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 1$

x	Advecção	Advecção-Difusão
-0.750000	0.000000	0.000000
-0.190000	0.000000	0.000000
0.360000	0.000000	0.001424
0.920000	1.500000	1.500000
1.470000	1.500000	1.500000
2.030000	1.500000	1.500000
2.580000	0.000000	0.046806
3.140000	0.000000	0.000000
3.690000	0.000000	0.000000
4.250000	0.000000	0.000000

3.3.3 Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 2$

A Figura 9 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 2$ para um coeficiente de difusão $D = 0.001$. Neste momento, a diferença entre a advecção pura e a advecção-difusão continua sendo mínima, indicando que mesmo com o passar do tempo, a difusão com um coeficiente tão baixo não tem um impacto significativo na forma da distribuição da concentração. O perfil continua essencialmente retangular, destacando que a advecção domina o transporte do soluto.

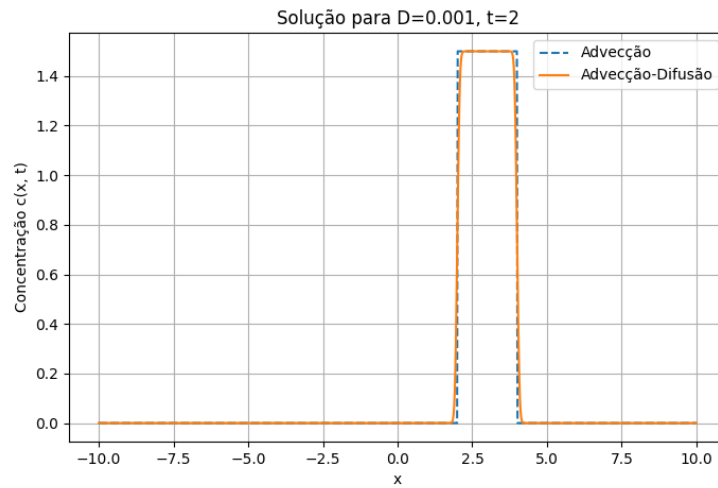


Figura 9: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 2$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível da advecção, mostra o efeito ainda limitado da difusão.

Tabela 9: Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 2$

x	Advecção	Advecção-Difusão
0.750000	0.000000	0.000000
1.310000	0.000000	0.000000
1.860000	0.000000	0.021068
2.420000	1.500000	1.500000
2.970000	1.500000	1.500000
3.530000	1.500000	1.500000
4.080000	0.000000	0.140724
4.640000	0.000000	0.000000
5.190000	0.000000	0.000000
5.750000	0.000000	0.000000

3.3.4 Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 3$

A Figura 10 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 3$ para um coeficiente de difusão $D = 0.001$. Neste ponto, a advecção pura e a advecção-difusão continuam a apresentar perfis praticamente idênticos, com o perfil de concentração mantendo a forma retangular, evidenciando o efeito mínimo da difusão neste coeficiente.

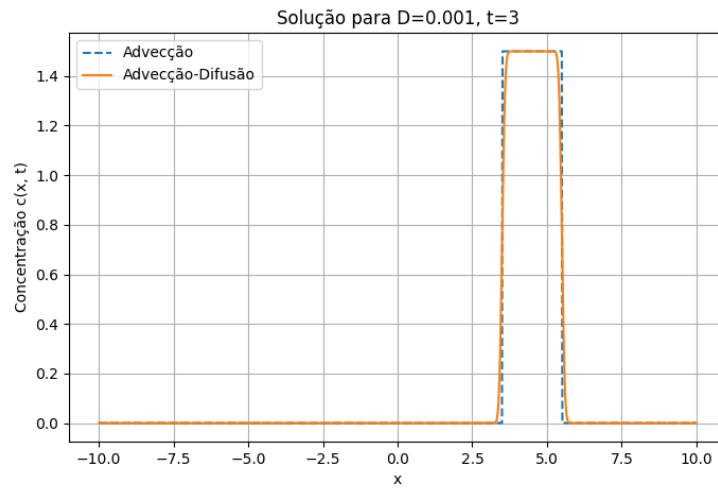


Figura 10: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 3$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, ainda quase indistinguível da advecção, ilustra a fraca influência da difusão.

Tabela 10: Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 3$

x	Advecção	Advecção-Difusão
2.250000	0.000000	0.000000
2.810000	0.000000	0.000000
3.360000	0.000000	0.054724
3.920000	1.500000	1.500000
4.470000	1.500000	1.500000
5.030000	1.500000	1.500000
5.580000	0.000000	0.211503
6.140000	0.000000	0.000000
6.690000	0.000000	0.000000
7.250000	0.000000	0.000000

3.3.5 Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 4$

A Figura 11 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 4$ para um coeficiente de difusão $D = 0.001$. Como nos momentos anteriores, a advecção pura e a advecção-difusão apresentam perfis quase idênticos, indicando que a difusão continua a ter um impacto muito limitado no perfil de concentração. Este padrão ressalta que, para coeficientes de difusão extremamente baixos como $D = 0.001$, a advecção domina predominantemente a dinâmica do transporte de soluto.

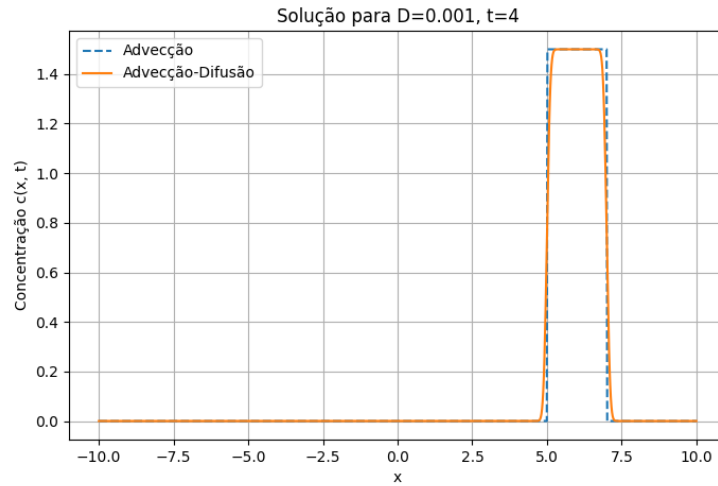


Figura 11: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 4$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, ilustra a falta de efeito significativo da difusão.

Tabela 11: Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 4$

x	Advecção	Advecção-Difusão
3.750000	0.000000	0.000000
4.310000	0.000000	0.000000
4.860000	0.000000	0.090349
5.420000	1.500000	1.499998
5.970000	1.500000	1.500000
6.530000	1.500000	1.500000
7.080000	0.000000	0.263621
7.640000	0.000000	0.000000
8.190000	0.000000	0.000000
8.750000	0.000000	0.000000

3.3.6 Análise para o caso: $D = 0.001$ e $t = 5$

A Figura 12 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 5$ para um coeficiente de difusão $D = 0.001$. Como nos intervalos anteriores, a difusão continua a ter um impacto praticamente inexistente na forma da distribuição da concentração, com o perfil mantendo uma forma retangular quase idêntica à advecção pura. Esta consistência reforça a ideia de que, com valores extremamente baixos de D , a difusão é insuficiente para alterar o perfil de concentração de maneira significativa ao longo do tempo observado.

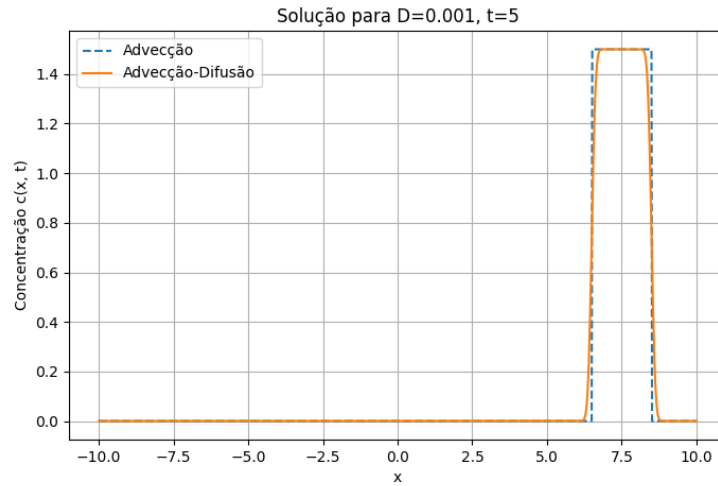


Figura 12: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 0.001$ no tempo $t = 5$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, continua a mostrar o efeito mínimo da difusão.

Tabela 12: Valores numéricos da concentração para $D = 0.001$ e $t = 5$

x	Advecção	Advecção-Difusão
5.250000	0.000000	0.000000
5.810000	0.000000	0.000000
6.360000	0.000000	0.123650
6.920000	1.500000	1.499977
7.470000	1.500000	1.500000
8.030000	1.500000	1.499998
8.580000	0.000000	0.303493
9.140000	0.000000	0.000000
9.690000	0.000000	0.000000
10.250000	0.000000	0.000000

3.4 Conclusão do Caso: $D = 0.001$

Durante o período observado de $t = 0$ a $t = 5$, as soluções numéricas para a equação de advecção-difusão com $D = 0.001$ apresentaram uma distribuição de concentração muito estável. Desde o início até o final do período estudado, advecção pura e advecção-difusão mostraram perfis quase idênticos, refletindo um impacto mínimo da difusão na evolução do soluto.

A persistência do perfil retangular indica que a difusão, neste nível baixo, não modifica significativamente a dinâmica do transporte de soluto, dominada pela advecção. A análise reforça que, embora a difusão possa ser impactante em coeficientes maiores, ela se torna quase irrelevante em valores tão baixos como $D = 0.001$, destacando a necessidade de ajustar cuidadosamente os parâmetros em modelos de advecção-difusão para simular corretamente os sistemas de transporte.

Caso: $D = 1 \times 10^{-5}$

Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 0$

A Figura 13 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo inicial para um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$. Neste caso, observamos que a difusão tem um impacto ainda mais reduzido do que em exemplos anteriores com difusões maiores. A forma retangular inicial praticamente não é alterada, indicando que a advecção domina completamente o transporte do soluto, com a difusão sendo quase negligenciável neste estágio.

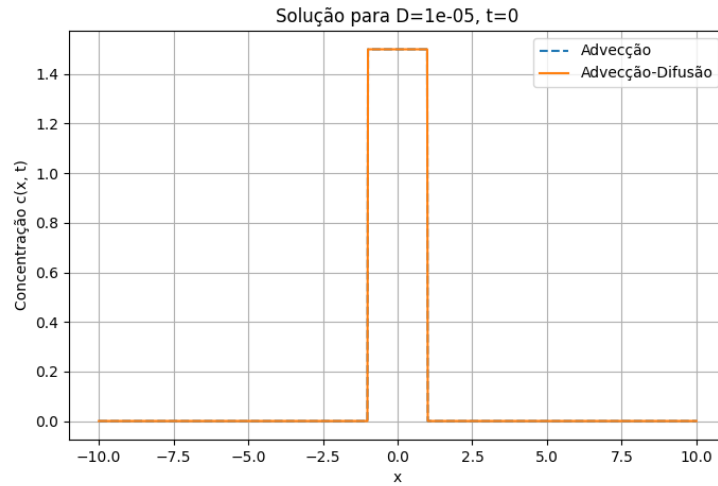


Figura 13: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 0$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase coincidente com a advecção pura, indica a advecção-difusão.

Tabela 13: Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 0$

x	Advecção	Advecção-Difusão
-2.250000	0.000000	0.000000
-1.690000	0.000000	0.000000
-1.140000	0.000000	0.000000
-0.580000	1.500000	1.500000
-0.030000	1.500000	1.500000
0.530000	1.500000	1.500000
1.080000	0.000000	0.000000
1.640000	0.000000	0.000000
2.190000	0.000000	0.000000
2.750000	0.000000	0.000000

3.4.1 Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 1$

A Figura 14 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 1$ para um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$. Semelhante ao observado em $t = 0$, a difusão tem um efeito ainda muito limitado sobre a distribuição da concentração, que permanece praticamente idêntica à advecção pura. A forma retangular do perfil de concentração persiste sem alterações significativas, demonstrando que, para valores de difusão tão baixos, a difusão não consegue modificar de maneira apreciável a dinâmica imposta pela advecção.

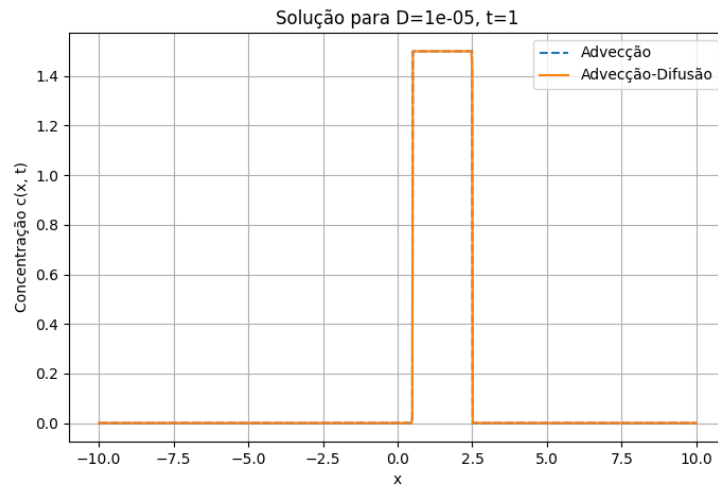


Figura 14: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 1$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, continua a mostrar o efeito mínimo da difusão.

Tabela 14: Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 1$

x	Advecção	Advecção-Difusão
-0.750000	0.000000	0.000000
-0.190000	0.000000	0.000000
0.360000	0.000000	0.000000
0.920000	1.500000	1.500000
1.470000	1.500000	1.500000
2.030000	1.500000	1.500000
2.580000	0.000000	0.000000
3.140000	0.000000	0.000000
3.690000	0.000000	0.000000
4.250000	0.000000	0.000000

3.4.2 Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 2$

A Figura 15 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 2$ para um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$. Continuando o padrão observado nos momentos anteriores, a difusão não apresenta um impacto visível na forma da distribuição da concentração, que mantém o perfil retangular. Isso reforça a noção de que, com valores tão baixos de D , a advecção continua sendo a força dominante, com a difusão não proporcionando alterações significativas no transporte do soluto.

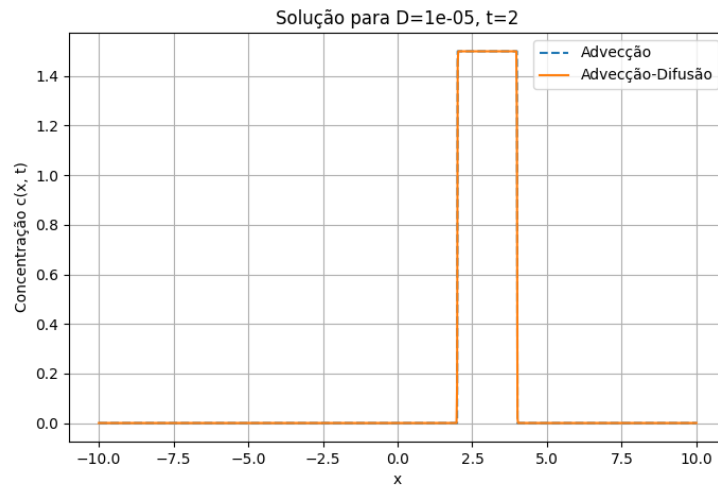


Figura 15: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 2$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, ilustra o efeito mínimo da difusão.

Tabela 15: Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 2$

x	Advecção	Advecção-Difusão
0.750000	0.000000	0.000000
1.310000	0.000000	0.000000
1.860000	0.000000	0.000000
2.420000	1.500000	1.500000
2.970000	1.500000	1.500000
3.530000	1.500000	1.500000
4.080000	0.000000	0.000000
4.640000	0.000000	0.000000
5.190000	0.000000	0.000000
5.750000	0.000000	0.000000

3.4.3 Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 3$

A Figura 16 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 3$ para um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$. Assim como nos tempos anteriores, a advecção pura e a advecção-difusão apresentam perfis quase idênticos, com a difusão tendo um impacto ainda inexpressivo sobre a forma da distribuição da concentração. O perfil retangular se mantém praticamente inalterado, reforçando que a advecção domina a dinâmica do transporte do soluto.

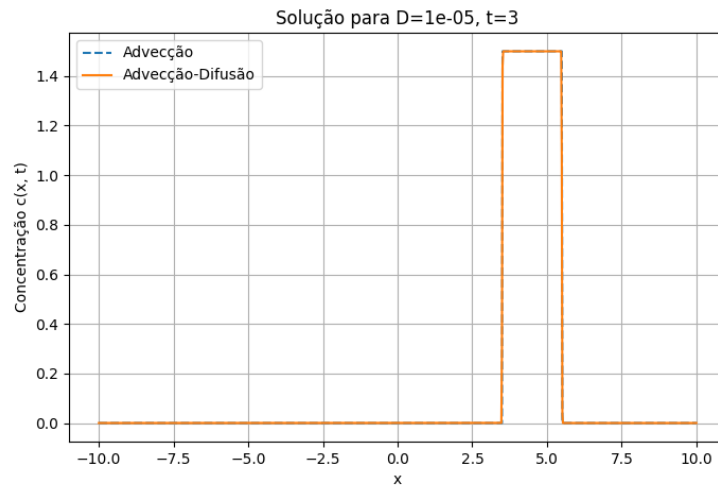


Figura 16: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 3$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, ainda quase indistinguível, ilustra o efeito mínimo da difusão.

Tabela 16: Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 3$

x	Advecção	Advecção-Difusão
2.250000	0.000000	0.000000
2.810000	0.000000	0.000000
3.360000	0.000000	0.000000
3.920000	1.500000	1.500000
4.470000	1.500000	1.500000
5.030000	1.500000	1.500000
5.580000	0.000000	0.000000
6.140000	0.000000	0.000000
6.690000	0.000000	0.000000
7.250000	0.000000	0.000000

3.4.4 Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 4$

A Figura 17 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 4$ para um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$. Continuando com as observações anteriores, a diferença entre a advecção pura e a advecção-difusão é mínima, com a difusão mostrando pouca ou nenhuma capacidade de alterar significativamente o perfil da concentração que permanece quase exclusivamente dominado pela advecção.

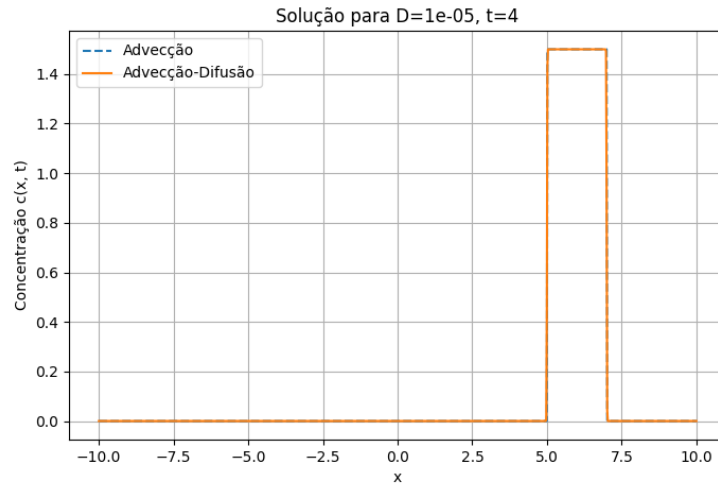


Figura 17: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 4$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, ilustra o efeito mínimo da difusão.

Tabela 17: Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 4$

x	Advecção	Advecção-Difusão
3.750000	0.000000	0.000000
4.310000	0.000000	0.000000
4.860000	0.000000	0.000000
5.420000	1.500000	1.500000
5.970000	1.500000	1.500000
6.530000	1.500000	1.500000
7.080000	0.000000	0.000000
7.640000	0.000000	0.000000
8.190000	0.000000	0.000000
8.750000	0.000000	0.000000

3.4.5 Análise para o caso: $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 5$

A Figura 18 mostra a distribuição da concentração de soluto no tempo $t = 5$ para um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$. Consistente com as observações em tempos anteriores, a advecção pura e a advecção-difusão mantêm perfis quase idênticos, com diferenças negligíveis entre eles. Este padrão indica que, mesmo ao longo de um intervalo de tempo estendido, a difusão extremamente baixa não consegue influenciar de maneira significativa a distribuição da concentração, que é amplamente dominada pela advecção.

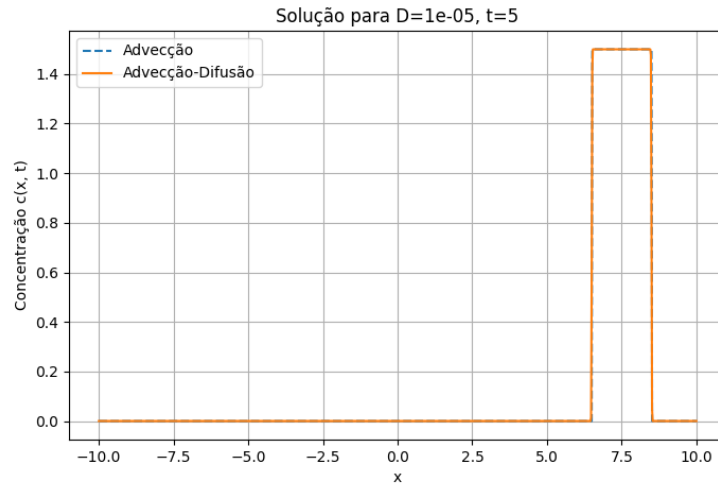


Figura 18: Comparação das soluções de advecção e advecção-difusão para $D = 1 \times 10^{-5}$ no tempo $t = 5$. A linha tracejada representa a advecção pura, enquanto a linha contínua, quase indistinguível, continua a ilustrar o efeito mínimo da difusão.

Tabela 18: Valores numéricos da concentração para $D = 1 \times 10^{-5}$ e $t = 5$

x	Advecção	Advecção-Difusão
5.250000	0.000000	0.000000
5.810000	0.000000	0.000000
6.360000	0.000000	0.000000
6.920000	1.500000	1.500000
7.470000	1.500000	1.500000
8.030000	1.500000	1.500000
8.580000	0.000000	0.000000
9.140000	0.000000	0.000000
9.690000	0.000000	0.000000
10.250000	0.000000	0.000000

Conclusão do Caso: $D = 1 \times 10^{-5}$

Durante o período analisado de $t = 0$ a $t = 5$, as soluções numéricas para a equação de advecção-difusão com um coeficiente de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$ mostraram estabilidade excepcional na distribuição da concentração do soluto. A difusão, neste nível extremamente baixo, demonstrou ter um impacto mínimo, mantendo perfis de concentração quase idênticos aos da advecção pura ao longo de todo o intervalo.

O perfil retangular persistente indica que a difusão é insuficiente para alterar a dinâmica do transporte de soluto, dominada pela advecção. Este caso ressalta que difusões menores são negligenciáveis para mudar a dispersão de solutos em fluxos advectivos, destacando a necessidade de uma parametrização precisa dos modelos de advecção-difusão para representar adequadamente os processos de engenharia e ciências ambientais.

4 Conclusão Geral dos Casos de Difusão

Este estudo detalhado dos casos com coeficientes de difusão $D = 1 \times 10^{-5}$, $D = 0.001$, e $D = 0.1$ revelou insights importantes sobre a interação entre advecção e difusão na dinâmica do transporte de solutos. A análise comparativa destes casos destacou como a influência da difusão na forma da distribuição de concentração é extremamente dependente da magnitude do coeficiente de difusão.

Influência Mínima em Baixos Coeficientes

Nos casos com $D = 1 \times 10^{-5}$ e $D = 0.001$, observou-se uma estabilidade notável na forma da distribuição de concentração, que permaneceu praticamente inalterada ao longo do tempo, dominada pela advecção. Nestes cenários, a difusão mostrou-se insuficiente para modificar significativamente a dinâmica de transporte, mantendo os perfis retangulares iniciais praticamente intactos. Esses casos sublinham a limitada eficácia da difusão em baixos níveis para alterar a dispersão de solutos, ressaltando a predominância da advecção quando a difusão é marginal.

Transformação Significativa em Coeficiente Maior

Em contraste, o caso com $D = 0.1$ mostrou uma dinâmica distinta, onde a difusão teve um impacto significativo e crescente ao longo do tempo. A partir de um perfil retangular inicial similar aos casos de menor D , a difusão no caso $D = 0.1$ efetivamente suavizou e alargou o pico de concentração, divergindo consideravelmente da advecção pura. Este comportamento ilustra o poder da difusão para moldar a dinâmica de transporte em cenários onde o coeficiente de difusão alcança magnitudes mais substanciais.

Implicações Práticas e Teóricas

A seleção adequada do coeficiente de difusão nos modelos de transporte é fundamental, devendo basear-se em um entendimento profundo de sua interação com a advecção. As variações notadas entre os diferentes casos sublinham a importância de uma escolha criteriosa dos parâmetros nos modelos de advecção-difusão. Esta escolha é particularmente crítica em campos como a engenharia ambiental, processamento químico e pesquisa biológica, onde prever com precisão a dispersão de contaminantes ou nutrientes pode ter implicações significativas.

Essas observações destacam a necessidade de considerar meticulosamente tanto o valor absoluto do coeficiente de difusão quanto sua relação proporcional com a advecção ao modelar sistemas de transporte de massa. Essa abordagem assegura uma representação precisa das características de dispersão, essencial tanto para simulações teóricas quanto para aplicações práticas.

5 Referências

LEVEQUE, Randall J. **Numerical Methods for Conservation Laws**. 2. ed. Basel: Birkhäuser, 1992.

STRIKWERDA, John C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. 2. ed. Philadelphia, PA: SIAM, 2004.

ASMAR, Nakhle H. **Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems**. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2016.

PRESS, William H.; TEUKOLSKY, Saul A.; VETTERLING, William T.; FLANNERY, Brian P. **Numerical Recipes in Python: The Art of Scientific Computing**. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. Disponível em: <http://www.numerical.recipes/>. Acesso em: 14 jun. 2024.

TREFETHEN, Lloyd N.; BAU III, David. **Numerical Linear Algebra**. Philadelphia, PA: SIAM, 1997.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Python Language Reference**, versão 3.11, 2024. Disponível em: <https://www.python.org/>. Acesso em: 14 jun. 2024.

6 Apendice

6.1 Repositório no GitHub

Todo o desenvolvimento deste projeto, incluindo o código Python, arquivos de Latex e CSV gerados, imagens geradas, texto redigido e todas as informações relevantes, está disponível em um repositório no GitHub. O GitHub é uma plataforma de hospedagem de código-fonte com controle de versão, semelhante a um "Google Drive de arquivos" para desenvolvedores. Através desse repositório, é possível acessar, visualizar e baixar todos os materiais relacionados a este projeto.

Para acessar o código completo e outras informações adicionais, visite o repositório do projeto no GitHub:

<https://github.com/GuilhermeCF10/Met-Num-Eq-Dif-2/tree/main/Trabalho-1>