Seminários de Ensino de Matemática/ SEMA–FEUSP agosto/2010
Coordenação: Profº Drº Nilson José Machado

O número de Euler: Possíveis abordagens no ensino básico.

Wagner M. Pommer
wmpommer@usp.br

Introdução

A grande maioria dos Números Reais é do tipo irracional. Dentre os infinitos números irracionais, o número PI ($\boldsymbol{\pi}$) e o número de Euler (***e***), são duas constantes de grande importância em diversos áreas científicas e, também, na própria matemática.

Porém, tal reciprocidade não transparece no ensino básico, onde predomina a exploração de $\boldsymbol{\pi}$.

No ciclo fundamental, o número $\boldsymbol{\pi}$ é apresentado como a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro de uma circunferência, uma definição de simples entendimento na faixa etária em questão.

A Proposta Curricular de São Paulo (2008) destaca que o famoso irracional π, dentro da concepção citada no parágrafo acima, "(...) deve ser apresentado nos cursos de geometria elementar, assim como deve ser trabalhado no Ensino Medio, desta vez em contextos associados à trigonometria, ao estudo dos corpos redondos e aos conjuntos numéricos" (p. 46).

E como é apresentado o número de Euler no ensino de matemática elementar?

Nos manuais didáticos, o número de Euler é citado dentro do tópico logaritmos, como uma possível base, denominando-se tais logaritmos de naturais. Alguns livros citam este tópico ao final do capítulo, geralmente denominado Sistemas de Logaritmos, como se fosse um apêndice, um pequeno acréscimo de informação, apresentando o número de Euler como um número irracional aproximado por 2,718281, citando que este valor é obtido utilizando-se uma calculadora eletrônica. Mas o que teriam de naturais estes logaritmos com base dada pelo número de Euler? E por que apresenta o valor aproximado de 2,718281. Isto não é explicado nos textos usuais.

Também, nos documentos oficiais, observamos que os PCN, Brasil (1997) e a Proposta Curricular, São Paulo (2008) não apresentam referência com relação ao número de Euler.

Constatando-se a falta de material para esclarecer e introduzir ao aluno o que seria o número de Euler, de modo a fazer sentido a alunos, fica aberta uma possibilidade e uma necessidade de discutir esse assunto, voltada ao ciclo básico.

Uma panorâmica inicial: a idéia essencial do número de Euler.

Segundo Maor (2008), o número de Euler[1] era conhecido, de modo implícito e não intencional, pelos antigos, por meio de situações de ordem prática, antes de qualquer estudo teórico.

Depois de um grande lapso de tempo, Maor (2008) destaca que o número de Euler surge no estudo desenvolvido por Napier, de forma indireta, em 1618, com relação aos logaritmos. Os logaritmos foram criados como ferramenta para agilizar cálculos, como, por exemplo, na astronomia. Os logaritmos, "(...) que inicialmente eram instrumentos fundamentais para a simplificação de cálculos, hoje não se destinam precipuamente a isso, sendo imprescindíveis no estudo das grandezas que variam exponencialmente (SÃO PAULO, 2008, p. 50).

Porém, a ideia básica de Napier é muito importante para se compreender o número de Euler. Napier queira escrever qualquer número como uma potência de algum número fixo (base). Deste modo, multiplicar/dividir dois números seria equivalente a somar/subtrai os expoentes das potências.

Por exemplo, se possuirmos uma tabela para as potências de 2 (tabela 1), para multiplicar 8x64, trocamos 8 por 2^3 e 64 por 2^6, conforme a tabela 1. Daí: $8x64 = 2^3 x 2^6 = 2^9$, pela propriedade de soma dos expoentes de uma potência qualquer. Pela tabela 1, o resultado da potência 2^9 é 512.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Tabela 1: Potências inteiras de 2.

Hoje em dia não se faz mais assim. Porém, na época de Napier, que não existia calculadora eletrônica, a tabela era de grande ajuda nos cálculos. Então, ele produziu uma tabela que completava os espaços entre as potências de expoente inteiro.

Para exemplificar, para calcular 3x5, Napier recorria a uma tábua. Nesta tabela, o número que elevado a base 2 resultava 5 era aproximadamente 2,322, ou seja, $2^{2,322}= 5$. Também, $2^{1,585}= 3$. Assim, $3x5 = 2^{1,585} x 2^{2,322} = 2^{3,907}$. Na tabela, o resultado era 15.

Para completar os inúmeros espaços entre as potências de números inteiros, Napier utilizou um fator próximo de 1, que foi $1 – 10^{-7} = 0,9999999$. Esta idéia de utilizar um fator próximo a 1 é a que permite entender o número de Euler, conforme veremos no decorrer do texto.

Isto foi um trabalho árduo, mas que, ao final da execução, ajudou os cálculos computacionais dos usuários da época: os astrônomos. Posteriormente, Briggs fez uma série de melhorias no trabalho de Napier, apresentando uma aproximação numérica para o logaritmo de '**e**' na base dez, mas não faz referência do significado deste resultado.

[1] O uso do símbolo ***e*** remonta a Euler, em 1728, em uma exposição de resultados. Tal notação foi posteriormente adotada pela comunidade, como uma homenagem a este matemático.

Em 1668, Mercator, no livro *Logarithmotechnia*, utilizou a nomenclatura logaritmo natural, para se referir a base ‘**e’**, porém o número de Euler ainda é uma referência implícita ao desenvolvimento dos logaritmos.

O’Connor e Robertson (2001) ressaltam que o trabalho com logaritmos, realizado por Napier e Briggs, quase reconheceu explicitamente o número de Euler, mas não o fizeram. A primeira apresentação explicita do número de Euler foi realizada em problemas que envolviam investimentos com juros compostos.

Em cerca de meio século depois ele é incorporado e estudado pelo advento do Cálculo Diferencial e Integral, a partir do século XVII. Daí, em diante, o número de Euler tornou-se importante e surgiu em diversas áreas do conhecimento, como a Biologia, a Economia, as Engenharias e a Física, dentre outros ramos do conhecimento.

Vale destacar observação em Maor (2008), que a explicação mais comum no ensino básico, para comentar a respeito do número de Euler, como base dos logaritmos, historicamente foi obra posterior, devido a Leonardo Euler, em cerca do século XVIII.

Há vários modos de se definir o número de Euler. No ciclo básico é possível entendê-lo e introduzi-lo, através da interligação de vários conceitos matemáticos da Matemática Elementar do próprio currículo do ciclo básico e, ainda, ilustrar e relacionar a outros conceitos, normalmente abordados em Ensino Superior.

O número de Euler e a Matemática Financeira

Historicamente, os babilônios haviam aproximado o valor do número de Euler, em cálculos financeiros, mas não há indícios da compreensão deste fato, pelo caráter empírico da matemática deste povo.

Um tablete de argila dos antigos babilônios, datada de cerca de 1700 a.C., propõe um problema envolvendo uma questão de investimento: “Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?” (MAOR, 2008, p. 41).

Em linguagem matemática atual, ao final de cada ano, o capital inicial deverá ser multiplicado por um fator 1,2. Assim, em **t** anos, o capital será crescido de um fator $1{,}2^x$. Como o problema solicita em quanto tempo o capital dobra, isto significa resolver a equação exponencial $1{,}2^x = 2$.

A resposta a esta questão recai num número irracional. Na época dos antigos babilônios, tal problema foi resolvido por **aproximação**. A aproximação de um número irracional para um número racional é importante fundamento a ser trabalho em diferentes momentos e contextos, no ciclo básico.

A representação decimal dos números irracionais é necessariamente infinita e não periódica. A única via:

> (...) de acesso a um número irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. (...) Ainda hoje, [isto] parece desconcertar todos os que enfrentam os irracionais. (...) Negando o estatuto de números as razões entre grandezas que conduziam aos irracionais, foi possível aos gregos viver praticamente ao largo de tais objetos indesejáveis. Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos Números Reais existentes é constituída por números irracionais. Os outros, os racionais, constituem uma ínfima minoria, a despeito de o homem comum não ter contato senão com uns poucos números irracionais, ao longo da vida (MACHADO, 1990, p. 43-44).

Enquanto que em três anos o capital terá sido acrescido de $1,2^3$ = 1,728, em quatro anos tal valor passa a ser $1,2^4$= 2,076. Assim, o tempo estimado se encontra entre três e quatro anos.

Segundo Maor (2008), para melhorar esta aproximação, os antigos babilônios utilizavam o processo da interpolação linear, que consiste em estabelecer uma relação de proporcionalidade direta, de modo que x divide o intervalo de 3 para 4 anos de modo proporcional ao capital 2, que divide o intervalo $1,2^3$ = 1,728 e $1,2^4$= 2,076.

Observando a figura 35, em linguagem atual, constrói-se o gráfico da função y = $1,2^x$ e, no intervalo $3 \le x \le 4$ aproxima-se a curva por um segmento de reta. Assim, pode-se estabelecer a proporção direta:

$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \rightarrow \frac{1,2^x - 1,2^3}{x-3} = \frac{1,2^4 - 1,2^3}{4-3}$. Fazendo-se $1,2^x$ = 2, tem-se:

$$\frac{2-1,728}{x-3} = \frac{2,076-1,728}{4-3} \rightarrow x = 0,7816 \ \ ano \cong 9 \, meses \ \ 11 \ dias.$$

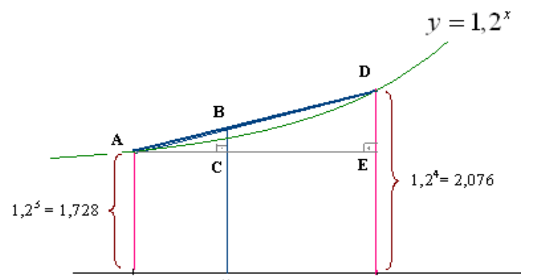


Figura 1: O processo de interpolação linear.

Este valor encontrado pelos babilônios, pelo processo da interpolação linear, é bem próximo do valor exato, obtido pela técnica da logaritmação:

$$1,2^x = 2 \Rightarrow \ln 1,2^x = \ln 2 \Rightarrow x.\ln 1,2 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1,2} = 3,8018 \ \ anos \cong 3 \, anos \ \ 9 \, meses \, 18 \, dias.$$

Este procedimento dos babilônios representa uma estratégia fundamental inicial para a resolução do problema proposto e que ainda envolve um importante raciocínio: a aproximação e o uso da estimativa.

De modo geral, em problemas financeiros envolvendo juros compostos, o cálculo do valor futuro ou Montante (S) em função do capital inicial (P), aplicado a uma taxa de juros compostos (r), aplicado durante uma unidade de tempo (t) é dada por: $S = P.(1+r)^{t}$.

Geralmente, a taxa de juros não é dada no mesmo período que o tempo t de aplicação. Assim, para equalizar o intervalo de tempo, digamos em *n* períodos, encontramos um divisor de ambos estes valores, de modo que a taxa de juros fica: r/n e o tempo de aplicação n.t. Por exemplo, se a taxa de juros for de 100% ao ano (r= 100% a.a) e se deseje conhecer o montante após 1ano e meio de aplicação (t= 1ano e 6 meses).

Podemos equalizar o período em meses, de modo que r/n = 100/12 = 8,33 % ao mês e o tempo t = 18 meses. Assim, de modo mais geral: $S = P.(1+\frac{r}{n})^{n.t}$. Existe um certo caso particular que associa o número de Euler ao cálculo de juros compostos.

> Alguém – não se sabe quem ou quando – deve ter notado o fato curioso de que se um capital *P* é composto *n* vezes por ano, durante *t* anos, a uma taxa de juros r e se permitirmos que *n* aumente sem limites, a soma de dinheiro *S*, obtida a partir da fórmula $S = P\ (1 + r/n)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite para $P=1$, $r=1$ e $t=1$, é aproximadamente 2,718. (...) Assim, as origens do número *e* (...) pode muito bem estar ligado a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo (MAOR, 2008, p. 13).

Nesta perspectiva, para uma abordagem inicial do número de Euler, nos reportamos a uma narrativa. Um agiota empresta 1 dinar[2] a juros de 100% ao ano a uma pessoa[3]. Ao final de um ano, a pessoa encontra o agiota, devolvendo 1 + 1 = 2 dinares. O agiota, achando injusta tal situação, argumenta que tal valor é incorreto.

Se dividirmos o ano em dois semestres, a pessoa deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de 1 dinar + 50% de 1 dinar = 1½ dinar. Em mais um semestre, os juros se comporiam em: 1½ dinar + 50% de 1½ dinar = 2,25 dinares.

Porém, o agiota continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, teríamos que a pessoa deveria, ao final de cada trimestre, conforme a tabela 2.

---

[2] A palavra 'dinar' deriva de denário, uma moeda romana. Atualmente, é a moeda nacional de vários países pertencentes ao extinto Império Otomano. Utilizamos esta denominação como homenagem a Malba Tahan.

[3] Segundo O'Connor e Robertson (2001), Jacob Bernoulli estudou o problema dos juros compostos, em 1683, utilizando a expressão $(1 + {}^{1}/n)^{n}$, com *n* tendendo ao infinito. Utilizando-se da expansão binomial, ele encontrou para o limite um valor entre 2 e 3, sendo esta considerada uma primeira aproximação do cálculo do valor de ***e***, dentro da idéia de infinito, na forma potencial. Ainda, observamos que esta opção de trabalho com investimentos está desvinculada do desenvolvimento dos logaritmos, o que didaticamente permite um olhar complementar em relação ao número de Euler.

Período	Montante
1º trimestre	1 dinar + 25% de dinar= 1,25 dinares.
2º trimestre	1,25 dinares + 25% de 1,25 dinares= 1,25.1,25= $1,25^2$ = 1,5625 dinares.
3º trimestre	1,5625 dinares + 25% de 1,5625 dinares= 1,5625.1,25 = $1,25^3$ = 1,953125 dinares.
4º trimestre	1,953125 dinares + 25% de 1,953125 dinares= $1,25^4$ = 2,4414063 dinares.

Tabela 2: Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% ao ano, supondo a correção trimestral dos juros.

Continuando a especulação, supondo agora a correção mensal, teríamos (ver tabela 3):

Período	Montante
1º mês	1 dinar + 8,33% de dinar= 1,083 dinares.
2º mês	1,083 dinares + 8,33% de 1,083 dinares= 1,083. 1,083 = 1,17289 dinares.
3º mês	1,172889 dinares + 8,33% de 1,172889 dinares= $1,083^2$.1,083 = $1,083^3$= 1,27024 dinares.
$\vdots$	$\vdots$
12º mês	$1,083^{12}$ = 2,6034 dinares.

Tabela 3: Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% ao ano, supondo a correção mensal dos juros.

Assim, a uma taxa de 100/360 = 0,278% ao dia, o devedor teria que pagar $1,00278^{360}$, ou seja, 2,7166825 dinares. Deste modo, a $\frac{100}{360.24} = 0{,}011574\%$ a hora, teríamos que a pessoa, ao final de um ano, deveria pagar: $1,00011574^{360.24}$ = $1,00011574^{8640}$ = 2,7181236 dinares.

Se considerarmos a taxa por minuto, teríamos $\frac{100}{360.24.60} = 0{,}00019290\ \%$ ao minuto, o que resulta numa dívida de: $1,000001929^{518400}$ = 2,7182618 dinares.

Cada vez que a divisão de tempo aumenta e o intervalo de tempo se torna mais diminuto, ou seja, quando o tempo de composição dos juros tende a zero, o resultado da dívida parece convergir para certo número. Notemos que a base se aproximar do número 1, quando a divisão do tempo aumenta, é a essência da idéia de Napier para a tábua de logaritmos.

Levantada esta conjectura, podemos verificá-la utilizando a fórmula binomial de Newton, uma ferramenta comumente apresentada no ensino básico.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}.a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n}.a^0.b^n.$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = \binom{n}{0}.1^n.(\frac{1}{n})^0 + \binom{n}{1}.1^{n-1}.(\frac{1}{n})^1 + \binom{n}{2}.1^{n-2}.(\frac{1}{n})^2 + \binom{n}{3}.1^{n-3}.(\frac{1}{n})^3 + \ldots + \binom{n}{n}.1^0.(\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.(\frac{1}{n}) + \frac{n.(n-1)}{2!}.(\frac{1}{n})^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{3!}.(\frac{1}{n})^3 + \ldots + (\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n.(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n.(n-1).(n-2)}{n^3}+...+(\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n}{n}.\frac{(n-1)}{n}.\frac{(n-2)}{n}+...+(\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}.\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}.\frac{(n-1)}{n}.\frac{(n-2)}{n}+...+(\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}.(\frac{n}{n}-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}.(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}).(\frac{n}{n}-\frac{2}{n})+...+(\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}.(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}.(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})+...+(\frac{1}{n})^n$$

Assim: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}.(1-0)+\frac{1}{3!}.(1-0).(1-0)+.... = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.... = 2{,}718281828....$

Numa linguagem matemática mais voltada ao cálculo, quando n tende a infinito, 1/n tende a zero. Daí, podemos escrever: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828....$

Acreditamos que este tipo de abordagem inicial, considerando-se um problema prático, através de matemática financeira, permite a introdução do número de Euler de modo a superar o obstáculo de considerar o infinito como um número grande, o que possibilitaria a pensar que $1^\infty = 1$. Para um estudante iniciante, a observação ingênua do:

> (...) comportamento peculiar da expressão $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de *n* deve parecer de fato intrigante. Suponha que se consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses, 1 + 1/*n*. à medida que *n* aumenta, 1/*n* fica cada vez mais próximo de 0 e assim 1 + 1/*n* fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor grande de *n* 'realmente grande' (...) a expressão 1 + 1/*n* pode ser substituída por 1. Agora, elevado a qualquer potência é sempre igual a 1. Portanto, parece que $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de *n* deve se aproximar do número 1 (MAOR, 2008, p. 47).

Devemos notar que a base $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, que tende a 1 quando n tende a infinito, presente na potência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, remete a ideia fundamental do número de Euler.

E esta idéia é a essência da construção da tábua de logaritmos desenvolvida por Napier.

Esta representação do número de Euler, associada à escrita de uma soma de infinitos termos, permite abordar uma série, que parece ser convergente. O tema 'séries' é importante assunto a ser abordado no ciclo básico, dentro dos temas usuais do currículo de matemática, porém raramente é apresentado.

Para verificar esta outra conjectura, inicialmente determinamos um limite inferior. Isto pode ser feito pelo uso de desigualdades, em relação a cálculos numéricos simples, uma importante ferramenta a ser mais explorada.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....<1+1=2 \Rightarrow s<2.$$

Para determinar se existe um limite superior para o número de Euler, tem-se que:

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1.2.3.4...n}=\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}....\frac{1}{n}<1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}....\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=a_1+a_2+a_3+...+a_n+....=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}+...<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+....$$

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+....}_{\text{Progressão Geométrica de razaõ } 1/2}$$

Na P.G. acima, de infinitas parcelas, primeiro termo ½ e razão ½, no intervalo para -1<q<1:

$$Soma=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...=\frac{\mathrm{a}_1}{1-\mathrm{q}}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

Daí: $\mathrm{e}<1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+....}_{\text{Progressão Geométrica de razaõ } 1/2}=1+1+1=3\Rightarrow \mathrm{e}<3.$

Assim, o número de Euler é convergente e fica limitado pela desigualdade 2 < **e** < 3.

Deste modo, o número de Euler pode ser expresso por:

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},\ \text{para } n\in\mathbb{N}.$$

Esta expressão permite aproximar o número de Euler, um número irracional, a partir de infinitas parcelas compostas de números racionais, se constituindo em um imbricamento entre esses conjuntos.

Este número que a série converge, posteriormente foi denominado número de Euler (e=2,718281828...). Assim, hipoteticamente, se fosse estendida a subdivisão de infinitos períodos de tempo de subdivisão dos juros, teríamos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ dinares$$ [4]

O número de Euler pode ser definido como limite, para valores muito grandes de n, da série:

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Utilizando-se calculadoras científicas usuais, onde o mostrador contém limitadas casas decimais, um primeiro olhar (ingênuo) para o resultado do número de Euler (e = 2,718281828...) parece mostrar uma certa regularidade na parte decimal (8281). Será que o número de Euler é um número racional?

Pode-se, provar a irracionalidade do número de Euler utilizando argumentos simples e acessíveis a alunos do ensino básico: desigualdades numéricas envolvendo frações, fatorial; seqüências; progressão geométrica e manipulações algébricas básicas.

---

[4] Segundo Lima (1983), generalizando este problema, se é emprestado um valor inicial (C) a uma taxa percentual r, transcorridos t períodos de tempo, um investidor deverá receber de volta $C.e^{\alpha.t}$, onde α = r/100.

A prova da irracionalidade do número de Euler se faz por absurdo. Supondo **e** = **p**/**q**, com **p** e **q** números inteiros e **q** não nulo.

De $e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$, onde q < n.

Multiplicando-se por **q!,** membro a membro, obtém-se:

$$e.q! = \frac{p}{q}.q! = 1.q! + 1.q! + \frac{1}{2!}.q! + \frac{1}{3!}.q! + ... + \frac{1}{(q-1)!}.q! + \frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1)!}.q! + \frac{1}{(q+2)!}.q! + ... + \frac{1}{n!}.q! + ...$$

$$\frac{p}{q}.q! = q! + q! + \frac{1}{2!}.1.2.3.4.5.6...q + \frac{1}{3!}.1.2.3.4.5.6...q + ... \frac{1}{(q-1)!}.q.(q-1)! + \frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1).q!}.q! + \frac{1}{(q+2).(q+1).q!}.q! + ... \frac{1}{n!}.q! + ...$$

$$p.(q-1)...3.2.1 = [q! + q! + 3.4.5.6...q + 4.5.6...q + ...q + 1] + \frac{1}{q+1} + . \frac{1}{(q+2).(q+1)} ... + \frac{1}{n!}.q! + ...$$

$$p.(q-1)...3.2.1 - [q! + q! + 3.4.5.6...q + 4.5.6...q + ...q + 1] = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + ... \frac{1}{n!}.q! + ...$$

No 1º membro (lado esquerdo) as parcelas são números inteiros, pois q ≥2.

No 2º membro (lado direito), as parcelas são frações e, ainda, como q ≥2, implica em $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, e:

$$\frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{(q+2).(q+1)} \leq \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{n!}.q! \leq \underbrace{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}......\frac{1}{3}}_{n-(q+1)\ vezes} = \frac{1}{3^{n-(q+1)}}$$

Daí, no 2º membro: $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + ... \frac{1}{n!}.q! + ... \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + ...$, surge uma progressão geométrica de infinitas parcelas, 1º termo 1/3 e razão 1/3. A soma destas parcelas é:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + ... \frac{1}{n!}.q! + ... \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + ... = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o número de Euler não pode ser um número racional.

O número de Euler e a Hibérpole Eqüilátera $(y = \frac{1}{x})$

Segundo O'Connor e Robertson (2001), em 1647, Saint-Vicent calculou a área sob a hipérbole eqüilátera, a função y = 1/x, com x>0, mas possivelmente não a relacionou com os logaritmos. Posteriormente, em 1661, Huygens explicitou a relação entre a área mencionada e os logaritmos.

Nessa época, os logaritmos eram entendidos como o resultado de cálculo e não como função. Provavelmente, há indícios que foi Jacob Bernoulli ou James Gregory, no século XVII, que estabeleceu a relação entre a função exponencial como o inverso da função logarítmica.

Assim, de certo modo, a história do número de Euler situa-se num paralelo com a história do cálculo integral e diferencial. Nos processos de calcular a área da hipérbole eqüilátera, Newton e Leibnitz, no século XVII, se depararam com o número de Euler.

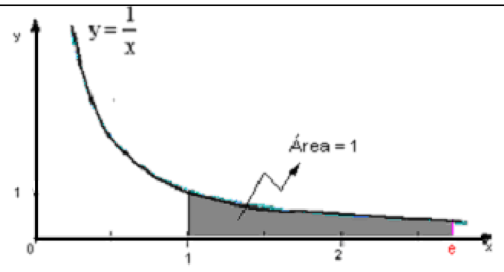


Figura 2: O número de Euler corresponde ao único número positivo superior a 1, cuja área da região indicada corresponde a uma unidade.

A figura 2 representa graficamente a função $y=\frac{1}{x}$, $x>0$, e a área sob a curva representa graficamente o logaritmo natural de um número real positivo.

A função y=1/x é contínua e suave, ou seja, não tem os famigerados buracos, mesmo quando x é irracional. Existe exatamente uma descontinuidade em x = 0, mas como é apenas uma, pode-se lidar com isso no ensino básico. Assim, o número de Euler representa o valor da abscissa x para o qual a área sob a função y = 1/x é unitária.

Se a função y=1/x é contínua em intervalos controlados, a área sob essa curva também é ser uma função contínua. Vários matemáticos tentaram, sem conseguir, calcular a área sob essa curva. Esse problema só foi resolvido com o advento do cálculo.

Como no ensino básico o uso de cálculo é restrito, fica a apresentação do número de euler através da área unitária sob a curva y = 1/x a uma abordagem conceitual. Podemos, entretanto, calcular a área através de retângulos inscritos e circunscritos a curva y =1/x, o que permite delimitar um intervalo para o número de euler, e, por aproximação, estimar um valor.

Esta abordagem permite, assim, utilizar uma importante idéia do cálculo integral: a obtenção da área de uma figura pela aproximação da soma das áreas de retângulos inscritos e circunscritos, com base tendendo a zero.

O número de Euler e o **uso de meios eletrônicos**

Articulo as idéias apresentadas neste texto com relação à possibilidade da utilização de certas ferramentas matemáticas, como as calculadoras eletrônicas.

Um dos modos destacados pelos PCN, Brasil (1998) para a promoção de significados nesta disciplina se refere ao uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, instrumentos motivadores que permitem cálculos mais rápidos, possibilitando modo mais eficiente em determinadas tarefas e investigações, abrindo um leque para a construção de significados de certos temas.

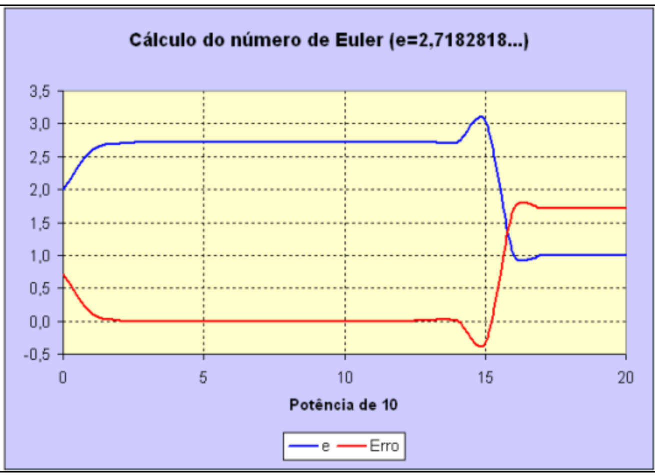
Machado (1994) aponta o desconhecimento da gênese e significado dos símbolos que se apresentam no teclado das calculadoras, tal como o número π e o número de Euler, dentre outros. Outro fato importante, é que os usuários das calculadoras eletrônicas desconhecem o fato de que esta realiza aproximações para o cálculo, que surge no mostrador deste instrumento, do valor numérico dos números irracionais (raízes não exatas, número de Euler e π).

Em sua pesquisa, Bonomi (2008) destaca o problema ocasionado pelas aproximações das calculadoras, que se encontra associada à natureza material acarretada pela limitação de armazenamento da memória da máquina, que possui espaço reservado para um determinado número de casas decimais. Deste modo, a autora pondera que a utilização cotidiana das calculadoras, com a inerente limitação da memória e com o mostrador dispondo os números na representação decimal, induz os alunos no trato dos números como se todos fossem racionais, não permitindo compreender a representação das dízimas (periódicas e não-periódicas) e nem a natureza dos números irracionais.

Outro exemplo da limitação dos meios eletrônicos pode ser observado na aplicação da definição do número de Euler como limite de uma sucessão, para valores cada vez maiores de n, na sucessão proposta.

Deve-se ter o cuidado de evitar algumas limitações ao utilizar recursos para aplicar a definição do número de Euler. Um problema conceitual na Matemática, relativa a ordem das operações elementares, surge no manuseio de planilhas eletrônicas.

> Para *x* maior do que 10^7 e menor do que 10^{11}, o resultado é dado pela planilha com erro de 10^{-7}. Acima de 10^{11}, o erro começa a aumentar até que o resultado se torna unitário a partir de 10^{16}. O que percebemos é que, obviamente, a planilha calcula inicialmente o número *(1+1/x)*, e depois o eleva a *x*. Para $x>10^{16}$, o resultado para *1/x* é tão pequeno que a planilha simplesmente o arredonda para zero, obtendo-se e=1, pois o número 1 elevado a qualquer número é também igual a 1. O gráfico da evolução do erro de cálculo de acordo com o aumento de *x* é ilustrado a seguir (AUGUSTO, 2009, p.3).



x	$y = (x+1/x)^x$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,593742
100	2,704814
1000	2,716924
$1,0.10^6$	2,718280
$1,0.10^9$	2,718282
$1,0.10^{12}$	2,718523496
$1,0.10^{15}$	3,035035207
$1,0.10^{16}$	1

Figura 3: Erro apontado por planilha eletrônica, conforme Augusto (2009).

***O número de Euler e o* problema do moleiro**.

O problema apresentado, a seguir, representa não somente uma particularidade, uma curiosidade, mas uma estratégia fundamental para se introduzir o número de Euler.

> Um moleiro armazenou 100 sacas de trigo, de 100kg cada. O moleiro pretende transportar tal carga, do armazém de sua casa até o moinho, que fica a 100 km de distância. Para tal faz uso de um burro, teimoso por natureza, que não suporta mais de 100 kg. Porém, o burro, quando carregado, exige consumir 1 kg de trigo para cada quilômetro que percorre. Pergunta-se:
> (a) Nos termos propostos, é possível transportar toda a carga de trigo do armazém da casa do moleiro até o moinho?
> (b) Caso exista um posto comercial ao meio do caminho entre o armazém da casa do moleiro e o moinho, existirá solução?
> (c) Caso exista solução, proponha um modo de maximizar a quantidade de trigo que o moleiro deve fazer chegar até o moinho. Despreze as massas das sacas
> (adaptado de VIEIRA, 2008, p.2).

À primeira vista, o problema parece não ter solução, pois cada viagem o burro consome toda a carga transportada.

Há uma estratégia que o moleiro pode usar para aproveitar ao máximo o seu burro. Uma primeira solução seria é dividir o caminho de 100 km em duas partes igualmente separadas, como se existisse um posto no meio do percurso. Então, o burro faz várias viagens, somente na 1ª parte do percurso (50 km), sobrando 100 sacos com 50 kg cada (metade da carga inicial).

Antes de continuar o transporte, o moleiro junta dois meios sacos para fazer um saco, de modo a constituir 50 sacos de 100kg. Ao final das várias viagens do posto até o moinho, restarão 50 sacos de 50 kg: 1/2x1/2= 1/4 da carga inicial.

Carga	100 sacos 100 kg	100 sacos 50 kg	50 sacos 25 kg
Saída: km 0	Saída: km 0	Km 50	Km 100
Total	10.000 kg	5.000 kg	2.500 kg
Rearranjo da carga na chegada		50 sacos 100 kg	
Fração da carga inicial		1/2	1/2x1/2= 1/4

Tabela 4: Solução para o problema do Moleiro, na divisão da distância em 2 partes iguais

E se dividíssemos o caminho em quatro partes iguais?

Carga	100 sacos 100 kg	100 sacos 75 kg	75 sacos 75 kg	56,25 sacos 75 kg	42,19 sacos 75 kg
Saída: km 0	Saída: km 0	Km 25	Km 50	Km 75	Km 100
Total	10.000 kg	7.500 kg	5625 kg	4218,75 kg	3164,25
Rearranjo da carga na chegada		75 sacos 100 kg	56,25 sacos 100 kg	42,19 sacos 100 kg	
Fração da carga inicial		3/4	3/4x3/4= $(3/4)^2$	3/4x3/4x3/4= $(3/4)^3$	3/4x3/4x3/4x3/4= $(3/4)^3$

Tabela 5: Solução para o problema do Moleiro, na divisão da distância em 4 partes iguais

Generalizando, em **n** intervalos igualmente espaçados sobrariam $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ da quantia inicial. Isto recai na essência do número de Euler: $e = (\frac{n+1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n$, ou ainda: $\frac{1}{e} = (\frac{n-1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})^n$, quando n tende a infinito.

Assim, quando n é muito grande esta expressão aproxima-se do valor 1/*e* = 0,3678. Portanto no máximo ele irá ficar com 3678 kg de trigo.

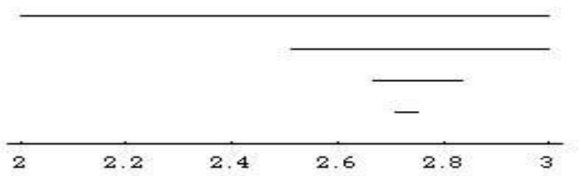
É claro que o esforço de todas estas paragens (tanto para o burro como para o moleiro que terá de fazer a transferência do grão) pode não compensar o grão que se poupa.

Uma Visualização Geométrica do *número de Euler*.

Consideremos os intervalos $I_1 = [2;3]$; $I_2 = \left[\frac{5}{2!};\frac{6}{2!}\right]$; $I_3 = \left[\frac{16}{3!};\frac{17}{3!}\right]$; $I_4 = \left[\frac{65}{4!};\frac{66}{4!}\right]$, ou, de modo geral: o intervalo $I_n = [a_n;A_n]$. Cada termo deste intervalo é dado por $a_n = \frac{p}{q!}$, obtido por truncamento da série e, ainda, $A_n = \frac{p+1}{q!}$.

Por exemplo: $a_1 = 1+1 = 2;\ A_1 = 3\ e\ I_1 = [2;3]$.

Ainda o valor do número de Euler corresponde à intersecção dos infinitos intervalos I_n, ou seja: $\bigcap_1^n I_n = \{e\}$. Geometricamente, isto pode ser visualizado, na figura 4.



$a_2 = 1+1+\frac{1}{2!} = \frac{5}{2!};\ \ A_2 = \frac{6}{2!}\ e\ I_2 = [\frac{5}{2!};\frac{6}{2!}]$.

$a_3 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} = \frac{6+6+3+1}{3!} = \frac{16}{3!}$ e

$A_3 = \frac{16+1}{3!} = \frac{17}{3!}\ e\ I_3 = [\frac{16}{3!};\frac{17}{3!}]$.

Figura 4: Uma representação geométrica de 'e', através de intervalos encaixantes $I_n = [a_n;A_n]$.

Considerações Finais

As várias possibilidades de abordagem do número de Euler, tema vinculado à valorização da idéia de aproximação através de números racionais, utilizadas em algumas áreas da ciência, como na Teoria dos Erros e no moderno computador, permite entender a extensão da tensão entre os conjuntos dos Racionais e o conjunto dos Irracionais, que leva necessariamente a questão de como administrá-la em favor do ensino e da aprendizagem em Matemática.

Encaminhamos algumas possibilidades considerando o conhecimento como rede de significações e a escolha de temas matemáticos que permitem explorar a intradisciplinaridade como ferramenta que expõem a tensão os dois conjuntos numéricos e administra tal confluência articulando conhecimentos e idéias fundamentais dentro da própria Matemática.

Referências Bibliográficas

AUGUSTO, A. **Esses engenheiros fantásticos e suas calculadoras maravilhosas.** Disponível em: <http://alvaroaugusto.blogspot.com/2007/02/esses-engenheiros-fantsticos-e-suas.html>. Acesso em: 18 jan. 2009.

BONOMI, Maria Cristina. **Os números irracionais e as calculadoras.** São Paulo: SEMA/USP, 1 sem 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: SEMT/MEC. 1997.

FIGUEIREDO, Djairo G. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna.** São Paulo: Editora Cortez, 1990.

MAOR, Eli. **e:** A História de um Número. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

O'CONNOR, J J; ROBERTSON, E.F. **The number *e*.** Setembro, 2001. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html>. Acesso em 19 out. 2009.

OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. **O número *e*.** Lisboa, Depto de Educação da Faculdade de Ciências. 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/ icm/ icm99/icm17/numeroe.htm>. Acesso em: 12. ag. 2009.

SONDOW, Jonathan. **A Geometric Proof that e is Irrational and a Measure of its Irrationality**. Disponível em: <http://home.earthlink.net/~jsondow// arxiv.org/ftp/ arxiv/ papers/0704/0704.1282.pdf> Acesso em: 29 ag. 2010.

VIEIRA, A. **À procura do número *e***. Portugal, Instituto Tecnológico e Nuclear, 2008. Disponível em: < http://fisica.ist.utl.pt/~pulsar/problemas.html>.