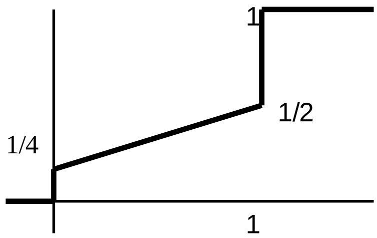
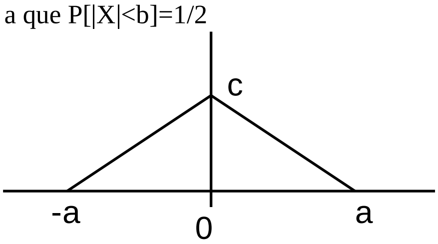
Alguns exercícios TP de MPEI (2022/10/28)

1- A função de distribuição da variável X está indicada na figura.
Determine as probabilidades dos acontecimentos
P[X <-1/2] , P[X < 0] , P[X ≤ 0] , P[1/4 ≤ X <1] , P[1/4 ≤ X ≤ 1], P[X > 1/2] e P[X > 5].



Sugestão: Note que esta variável aleatória é do tipo mista pelo que F_X (x) e $f_X(x)$ são discretas em algumas partes do eixo real e contínuas noutras.

2. Uma variável aleatória tem uma densidade de probabilidade como se mostra na figura
   (a) Determine a constante *c*
   (b) Calcule a função de distribuição
   (c) Determine *b* de modo a que P[|X|<b]=1/2



Sugestões:
(a) Relembre as condições que $f_X(x)$ tem de verificar para que possa ser uma função densidade de probabilidade?
(b) A f.d.p. tira-se directamente do gráfico. É só relembrar como se calcula F_X (x) a partir de $f_X(x)$, (*X* é uma variável aleatória contínua).

3. Numa turma 60% são génios, 70% gostam de chocolate e 40% estão em ambos os grupos.
Calcular a probabilidade de selecionar um aluno ao acaso e de não ser génio nem gostar de chocolate.

4. Um fabricante de material eletrónico utiliza chips de três fornecedores A, B e C. Sabe-se que a probabilidade de haver chips defeituosos é: 0.001 para o fornecedor A, 0.005 para o fornecedor B e 0.01 para o fornecedor C. Escolhendo aleatoriamente um chip e sendo este defeituoso calcule as probabilidades de ser fornecido pelo fabricante A, pelo fabricante B e pelo fabricante C:
   (a) Considerando que o fabricante tem igual número de chips de cada fornecedor.
   (b) Considerando que metade dos chips do fabricante são fornecidos por C.

5. Determine a probabilidade de uma variável aleatória normal diferir da média por um valor superior a 5 vezes o seu desvio padrão.

6. Considere-se uma fonte discreta sem memória que gera saídas pertencentes a um conjunto de 4 símbolos com as probabilidades assinalas na tabela seguinte, e considere-se que cada símbolo é codificado em palavras de comprimento variável de acordo com o mapeamento expresso na Tabela.

Símbolo	Prob.	Código
1	0.5	0
2	0.25	10
3	0.125	110
4	0.125	111

Determine o comprimento médio do código.

7. Uma doença rara é diagnosticada com um teste que em 95% dos casos dá um resposta correcta: se a pessoa tem a doença o teste é positivo com probabilidade 0.95, e se a pessoa não tem a doença o teste é negativo com probabilidade 0.95. Uma pessoa escolhida aleatoriamente tem probabilidade 0.001 de ter a doença.
Se uma pessoa escolhida de forma aleatória fizer o teste e o resultado for positivo, qual é a probabilidade de ter a doença?

8. O João entra num torneio de xadrez com jogadores de três níveis: 50% dos jogadores são do nível 1, 25% dos jogadores são do nível 2, e os restantes jogadores são do nível 3. As probabilidades de o João vencer os jogadores de cada nível são: 0.3, 0.4 e 0.5, respetivamente.

(a) Escolhendo um jogador ao acaso, qual é probabilidade de o João vencer o jogo?
(b) Sabendo que o João venceu o jogo, qual é a probabilidade de ter sido com um jogador do nível 1?

9. Considere uma experiência aleatória cujo espaço de amostragem é S = {0, 1, 2} × {0, 1, 2}. Considerando todos os resultados equiprováveis:

(a) Determine dois acontecimentos independentes.
(b) Há três acontecimentos independentes? (Não considere o acontecimento certo, nem o acontecimento impossível).

10. Um símbolo binário é transmitido por um canal ruidoso, onde a probabilidade de um “0” ser recebido incorretamente é ε_0, e a probabilidade de um “1” ser recebido incorretamente é ε1.

(a) Supondo que são enviados “0”s e “1”s com probabilidades p e (1−p), respetivamente, calcule a probabilidade de receber os símbolos binários corretamente.
(b) Calcule a probabilidade de receber a sequência “1011” corretamente.
(c) Para aumentar a fiabilidade da informação recebida, cada símbolo é enviado 3 vezes e na receção a decisão é tomada por maioria. Supondo que se envia um “0” (i.e “000”), qual é a probabilidade de o recetor decidir pelo símbolo correto?
(d) Sabendo que o recetor recebeu “101”, qual é a probabilidade de ter sido enviado um “0”?

11. Considere uma variável aleatória, *X*, relativa ao valor obtido no lançamento de um dado não honesto em que P(*X* = 6)= 0.4 e as probabilidades dos outros resultados possíveis são iguais.

Calcule a média e variância de *X*.

12. Para uma variável aleatória com distribuição uniforme entre -1 e 3, calcule:

(a) A média e a variância de *X*.
(b) P(-0.5 < X < 2)

13. Os resultados de um exame, *X*, têm distribuição normal com média 9 e desvio padrão 2.

Sendo $Y = aX + b$, calcule as constantes a e b de forma a que Y tenha média 10 e variância 6.

14. Dada uma variável aleatória normal com média 1 e desvio padrão 2, calcule as seguintes probabilidades:

(a) $P\left[X < 1\right]$;

(b) $P\left[X < 1\right]$;

(c) $P\left[-2 < X < 1\right]$

Sugestão:
Utilize uma tabela de Q(*x*).

15. Dada as probabilidades conjuntas das variáveis X e Y:

X/Y	**-1**	**0**	**1**
-1	1/8	1/8	1/24
0	1/8	1/4	1/8
1	1/24	1/8	1/24

(a) Calcule a média e a variância de X.
(b) Calcule a cov(X,Y),
(b) Diga se as variáveis X e Y são independentes.
(b) Calcule as probabilidades conjuntas das variáveis $W = X^2$ e $Z = Y^2$.
(c) Diga se W e Z são independentes?

16. Sabendo que X e Y são duas variáveis aleatórias, calcule $E[(X + Y)^2]$.