

MPEI 2022-2023

Resolução de exercícios
(consolidação)

Problema #1

- Considere o seguinte jogo de cartas entre si e um amigo:
 - Apenas se usam as figuras (Rei, Dama e Valete), o Ás e o Joker de um dos naipes
 - As cartas são baralhadas honestamente e extraídas uma a uma
 - Sempre que se extrai uma figura ganha 1 Euro, cada Ás obriga-o a pagar 1 Euro ao seu amigo, cada Joker implica pagar 2 Euros ao seu amigo.
 - Volta a colocar-se a carta no baralho e baralha-se
- Questão: **Qual o seu ganho médio ao fim de uma longa sequência de jogadas ?**

Fonte: “O ACASO”, J. M. Sá, Gradiva

Exemplo

- Para perceber melhor, analisemos um possível jogo:

Saiu	A	R	A	R	A	J	V	D	V	...
Seu ganho	-1	1	-1	1	-1	-2	1	1	1	
Ganho acumulado	-1	0	-1	0	-1	-3	-2	-1	0	...

Simulemos ...

- Para simplificar, consideremos a seguinte codificação:
Rei=1, Dama=2, Valete=3, Ás=4, Joker=5

% simular N extracções

```
e= floor (rand(1,N)*5)+1; % inteiros de 1 a 5 (equiprováveis)
```

% calcular ganho acumulado ao longo do jogo

```
g=e; g(e==1 | e==2 | e==3)=1;    g(e==4 )=-1;    g(e==5 )=-2;  
gacum= cumsum(g)
```

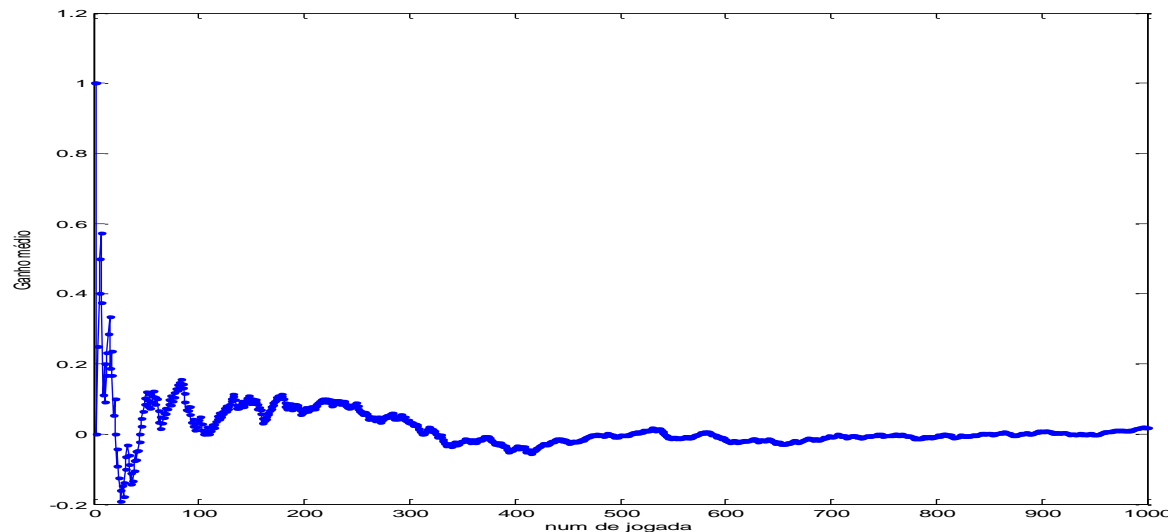
% ganho médio ao longo do tempo

```
n=1:N;  
gmed= gacum ./ n;
```

```
Plot(n,gmed, '')
```

Exemplo de resultado

- 1000 jogadas



- É apenas uma de um número muito grande de sequências possíveis (são possíveis 5^{1000})

Resolução ...

- Tentemos agora resolver sem simulação e usando o que já sabemos ...
- Sugestões ?

Variável aleatória Ganho

- O Ganho em cada extracção de uma carta (experiência aleatória) pode ser considerada uma variável aleatória (G)
- Pode assumir os valores $\{-2, -1, 1\}$
- Função de probabilidade ?
 $p_G(G = -2) = ?$
 $p_G(G = -1) = ?$
 $p_G(G = 1) = ?$

Função de probabilidade de G

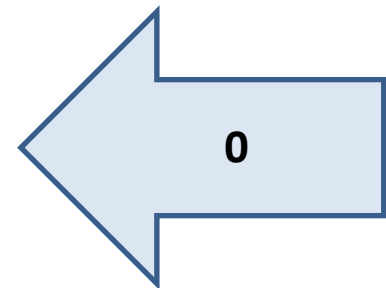
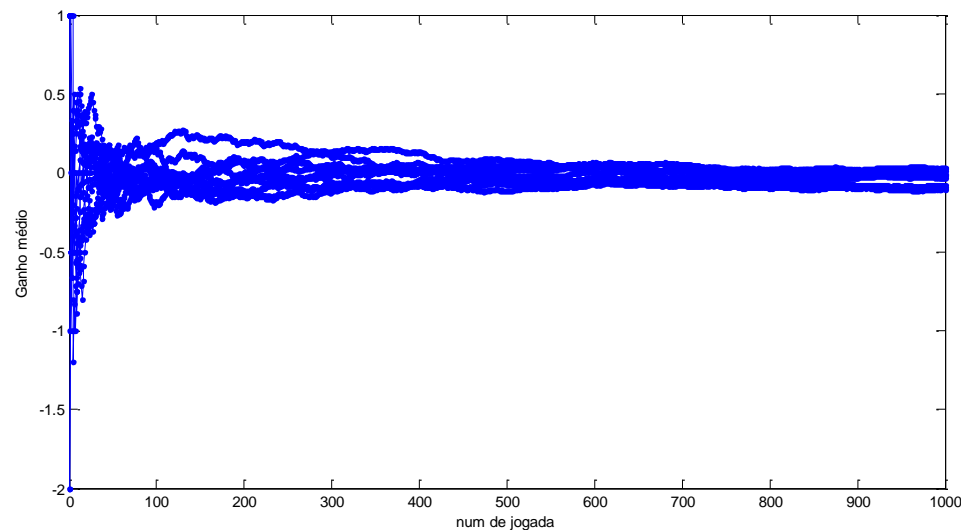
- $p_G(G = -2) = 1/5$
- Equivalente a $P(\text{“sair um Joker”})$
- $p_G(G = -1) = 1/5$
- $p_G(G = 1) = 3/5$

Ganho médio ...

- O “Ganho médio esperado” ao fim de um grande número de jogadas é designado por **esperança matemática da variável Ganho**
- $E[G] = \sum x_i p(X = x_i)$
- Aplicando ao nosso caso...
- $E[G] = 1 \times \frac{3}{5} + (-1) \times \frac{1}{5} + (-2) \times \frac{1}{5} = 0$

Longa sequência

- É altura de esclarecer um pouco mais o que se entende por “longa sequência”...
- Repetindo o jogo (ou melhor simulando..), temos



- Existe uma tendência para todas as curvas estabilizarem em torno da esperança (0)

Problema #2 (aniversários)

- Faz parte do Guião PL02

Consideremos uma festa em que há um certo número de pessoas, digamos n .

Qual deve ser o valor de n para que a **probabilidade de duas (ou mais) pessoas terem a mesma data de aniversário** (mês e dia) seja superior a 50 % ?
e para ser superior a 90% ?

Simulação

- Usar inteiros de 1 a 365 para representar os possíveis aniversários
- Gerar N conjuntos de n aniversários
 - Por exemplo, matriz de N colunas e n linhas
- Determinar o número de colunas que têm pelo menos 1 número repetido
 - Dá os casos favoráveis
- Calcular a probabilidade (casos favoráveis / N)

Simulação (exemplo de código)

```
N=10e5;
diferentes=zeros(1,N);

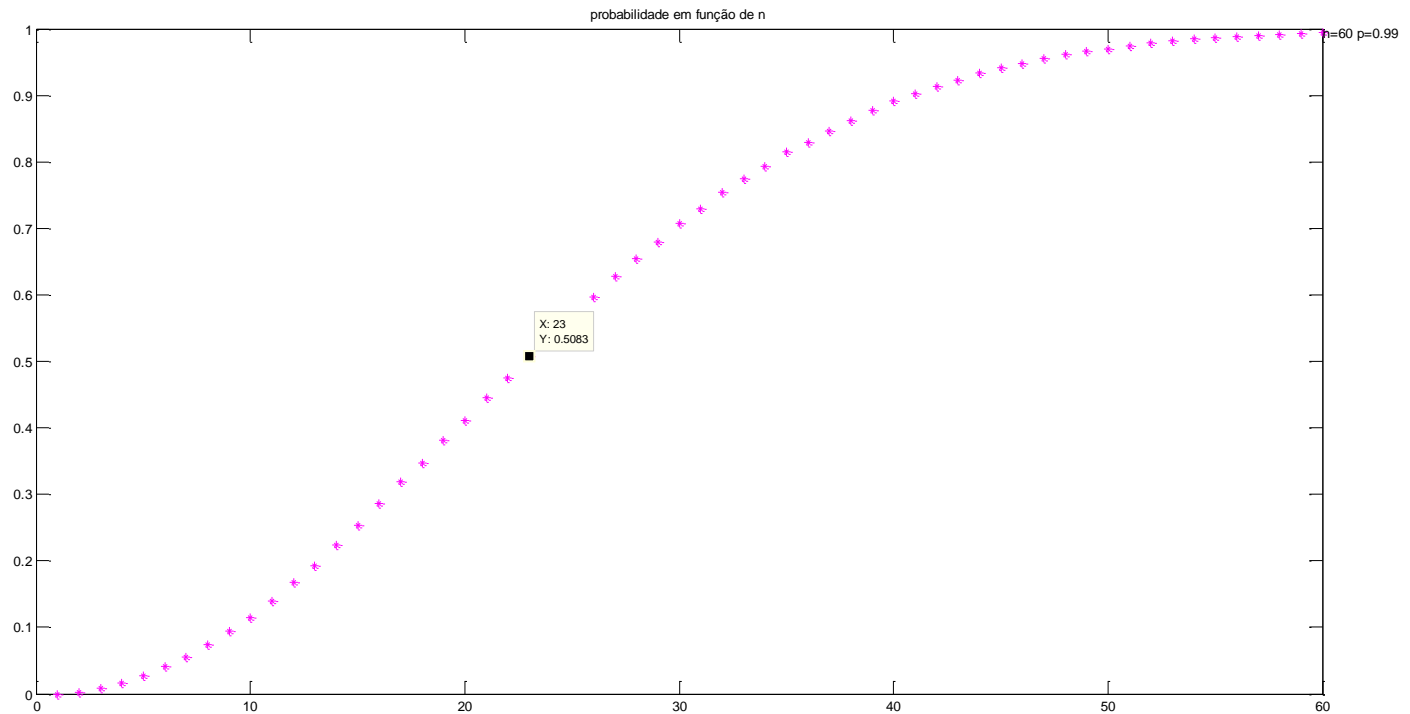
for n=1:60
    M= randi(365, n, N); % inteiros de 1 a 365

    % verificar se houve repetição (1 ou mais)
    for i=1:N
        diferentes(i)= length(unique(M(:,i)));
    end
    colisoes=sum(diferentes~= n);

    pColisao=colisoes/N;
    fprintf(1,'n= %d, p=%.3f\n',n,pColisao);
end
```

Resultados da simulação

- Probabilidade em função de n:



Resposta às questões concretas

- superior a 50 % ?

n=23

- superior a 90 % ?

n=

Resolução “teórica”

- Mais simples resolver probabilidade de ninguém de n pessoas fazer anos no mesmo dia
 - Depois usa-se $1-p$
- Os aniversários das n pessoas são independentes
- Para não haver nenhum dia com mais do que um aniversário, a primeira pessoa pode fazer anos em 365 dias dos 365, E a segunda em 364, E a terceira em 363 ..
- Ou seja $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{365-2}{365} \times \dots \times \frac{365-n+1}{365}$
- Que é igual a $\frac{365!}{(365-n)! 365^n}$
- Para $n=23$ temos $1-p=0.5073$
- Para $n=41$ temos $1-p=0.9032$

Problema #3 (n dardos e m alvos)

- Também parte de PL02

Considere o seguinte “jogo”: lançamento com os olhos vendados de n dardos, um de cada vez, para m alvos garantindo-se que cada dardo atinge sempre um alvo (e apenas 1).

a) Qual a probabilidade de nenhum alvo ter sido atingido 2 ou mais vezes ?

b) Qual a probabilidade de pelo menos 1 alvo ter sido atingido 2 vezes ?
**NOTA: Apesar de não ser 100% claro vamos considerar 2 vezes OU MAIS
objectivo inicial do exercício**

- ...

Simulação

- Basta uma simples adaptação/extensão do problema anterior
 - Em vez de 365 dias temos m alvos
 - As n pessoas passam a ser os n dardos

Resolução teórica

- Seguindo ideia análoga aos aniversários ...
- $P(\text{nenhum alvo ter sido atingido 2 ou mais vezes}) = \frac{m}{m} \times \frac{m-1}{m} \times \frac{m-2}{m} \times \dots \times \frac{m-n+1}{m}$
- Que é igual a $\frac{m!}{(m-n)! m^n}$

Problema #4 (sequências de palavras)

Integra PL02

Considere uma linguagem com apenas 3 palavras “um”, “dois”, “três” e que permite sequências de 2 palavras. Se todas as frases forem equiprováveis e as duas palavras na frase puderem ser iguais:

...

(d) Qual o valor de $P[\text{``sequência incluir a palavra um''} \mid \text{``sequência inclui palavra dois''}]$?

(e) Resolva a questão anterior para o caso de termos 10 palavras diferentes e sequências de 5 palavras com ajuda de um programa que calcule exaustivamente todas as possibilidades.

Sugestão: use números de 1 a 10 para representar as palavras e use Matlab/Octave.

Em Matlab...

- A solução mais simples é usar 5 ciclos for, mas não é generalizável
- Possível alternativa (por Tomás Oliveira e Silva)
 - Geral
 - Elegante

```

npw = 5; % number of possible words
nws = 2; % number of words in a sequence

seq = zeros(nws,npw^nws); % all possible sequences will be kept here
seq(:,1) = 1; % first sequence
nc = 1; % number of columns of the block that will be replicated
for i=1:nws
    % replicate a block npw-1 times, and change the data of its i-th row
    for j=2:npw
        seq(:,(j-1)*nc+1:j*nc) = seq(:,1:nc); % copy a block
        seq(i,(j-1)*nc+1:j*nc) = j; % change its i-th row
    end
    nc = nc*npw; % increase the block size
end

has_one = sum(reshape(seq == 1,size(seq))) >= 1;
has_two = sum(reshape(seq == 2,size(seq))) >= 1;

P= ...

```

Problema #5

1. (4 valores) Considere uma variável aleatória discreta X cujos valores possíveis estão no vetor x e cujas probabilidades de cada valor estão no vetor y . Considere o seguinte código MATLAB:

```
x = 1:4;  
y = [1/2 1/4 1/8 1/8];  
a = y.*x;  
b = sum(a)  
c = sqrt(sum(y.*x.^2)-b^2)
```

- Depois de executado o código, indique, justificando, o que representam as variáveis b e c
- Quais os valores de b e c ?

Problema #6

3. (2 valores) Considere duas variáveis X e Y com a função massa de probabilidade conjunta seguinte:

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

- a) Calcule as probabilidades marginais de X e de Y .
- b) Calcule a média e a variância de X .
- c) Calcule a correlação entre X e Y .
- C) X e Y são independentes?

Problema #7

4. (8 valores) Um sistema de transmissão de dados envia informação em pacotes de 100 bits. A probabilidade do receptor decodificar um pacote com erros (1 ou mais erros) é de %1. Para a transmissão e recepção de 1600 pacotes de dados:
- a) Indique o nome da distribuição (e os respectivos parâmetros) que descreve a probabilidade do número de pacotes decodificados com erros.
 - b) Calcule o número médio de pacotes decodificados com erro.
 - c) Indique a expressão exata para a probabilidade de obter 20 (e só 20) pacotes com erros.
 - d) Indique uma aproximação, usando a distribuição de Poisson, para a probabilidade de obter 20 (e só 20) pacotes com erros.
 - e) Calcule uma aproximação, usando a distribuição normal, para a probabilidade de obter 20 ou mais pacotes com erros.
- Sugestão: deverá usar uma variável aleatória normal com média e variâncias adequadas.

Problema # 8 (Weather)

- PLO2 ex. final

Most mornings, Victor checks the weather report before deciding whether to carry an umbrella.

If the forecast is “rain” the probability of actually having rain that day is 80%.

On the other hand, if the forecast is “no rain”, the probability of it actually raining is equal to 10%.

During fall and winter the forecast is “rain” 70% of the time and during summer and spring it is 20%.

De: MIT OpenCourseWare 6.041/6.431: Probabilistic Systems Analysis (Fall 2010)

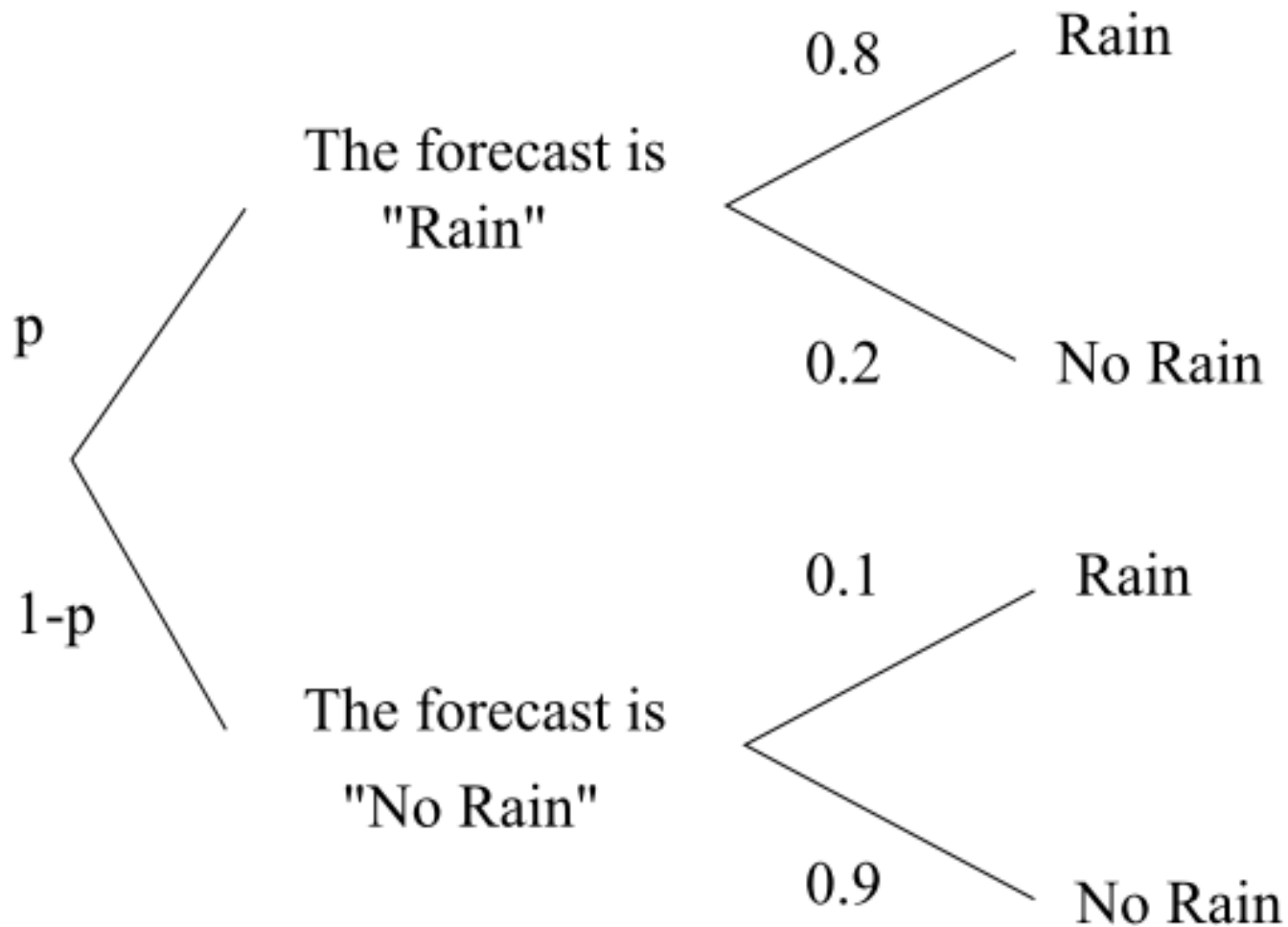
Questão 1

One day, Victor missed the forecast and it rained.

What is the probability that the forecast was “rain” if it was during the winter?

What is the probability that the **forecast was “rain”** if it was during the summer?

Árvore ...



Resolução

- Event A – “forecast was Rain”
- Event B - “rained”
- p = probability of “forecast says Rain”

- Winter: $p=0.7$

- $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(0.8)(0.7)}{(0.8)(0.7)+(0.1)(0.3)} = \frac{56}{59}$$

- Summer: $p=0.2$

- $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(0.8)(0.2)}{(0.8)(0.2)+(0.1)(0.8)} = \frac{2}{3}$$

Questão 2

The probability of Victor missing the morning forecast is equal to 20 % on any day in the year.

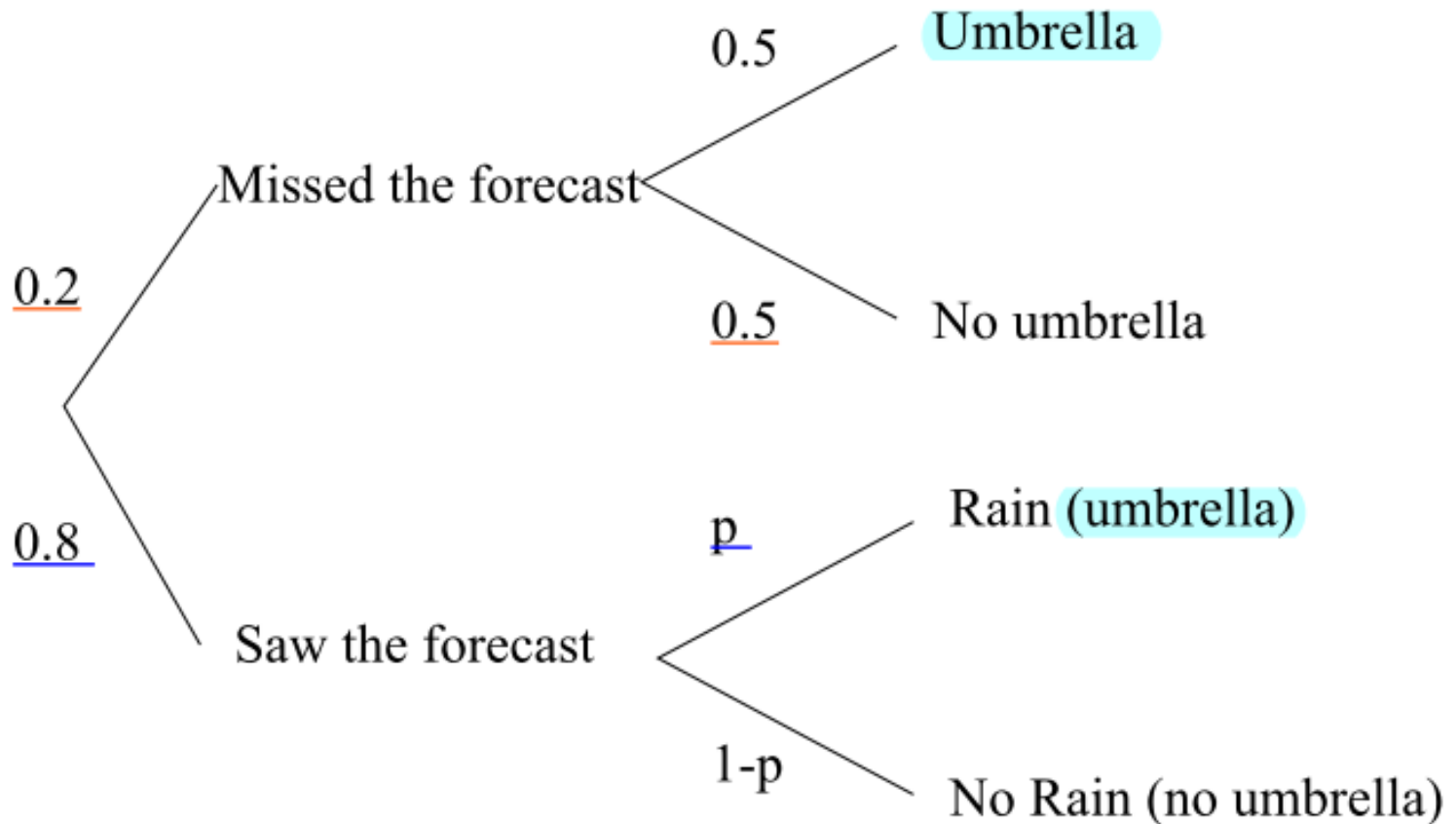
If he misses the forecast, Victor will flip a fair coin to decide whether to carry an umbrella.

On any day of a given season he sees the forecast, if it says ``rain" he will always carry an umbrella, and if it says ``no rain", he will not carry an umbrella.

Are the events ``Victor is carrying an umbrella", and ``The forecast is no rain" independent?

Does your answer depend on the season?

Árvore



Resolução

C - event that Victor is carrying an umbrella.

D - event that the forecast is no rain.

- $P(C) = ?$
- $P(D) = ?$
- $P(C|D) = ?$

Resolução

- $P(D) = 1 - p$
- $P(C) = (0.8)p + (0.2)(0.5) = 0.8p + 0.1$
- $P(C|D) = (0.8)(0) + (0.2)(0.5) = 0.1$
- $P(C|D) \neq P(C)$ as $p > 0$
— > C not independent from D

Questão 3

Victor is carrying an umbrella and it is not raining.

What is the probability that he saw the forecast?

Does it depend on the season?

Probabilidades para quando não vê a previsão meteorológica

Let us first find the probability of rain if Victor missed the forecast

– As for the case when he sees the forecast we already know

$P(\text{actually rains} \mid \text{missed forecast})$

$$= P(\text{rain} \mid \text{forecast rain}) \times P(\text{forecast rain}) + P(\text{rain} \mid \text{forecast NO rain}) \times P(\text{forecast NO rain})$$

$$= (0.8)p + (0.1)(1 - p)$$

$$= 0.1 + 0.7p$$

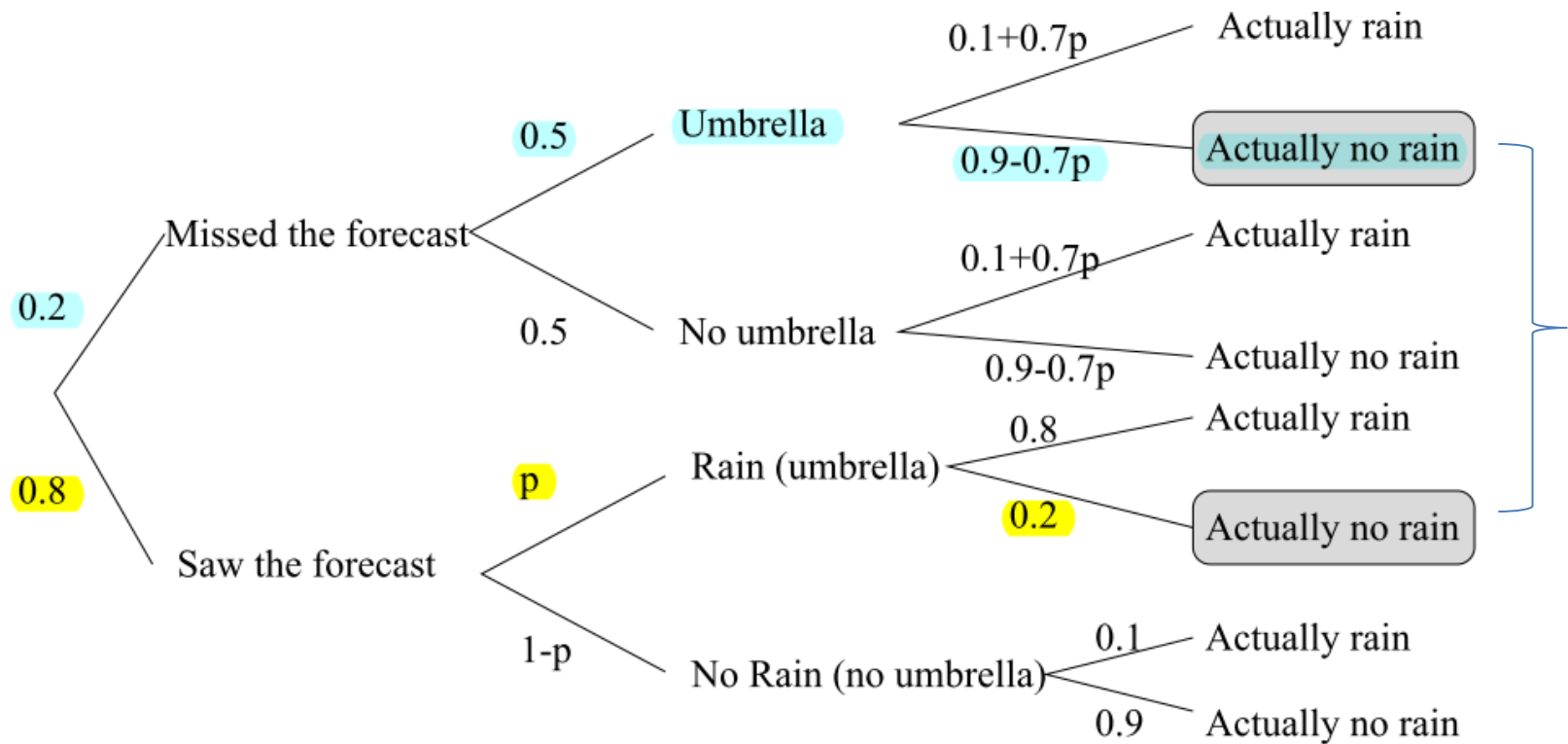
$P(\text{no rain} \mid \text{missed forecast})$

$$= P(\text{NO rain} \mid \text{forecast rain}) \times P(\text{forecast rain}) + P(\text{NO rain} \mid \text{forecast NO rain}) \times P(\text{forecast NO rain})$$

$$= (0.2)p + (0.9)(1 - p)$$

$$= 0.9 - 0.7p$$

Árvore



Cálculos

$P(\text{saw forecast} \mid \text{umbrella and not raining}) =$

$\frac{P(\text{saw forecast AND umbrella AND not raining})}{P(\text{umbrella AND not raining})} =$

$$= \frac{(0.8)p + (0.2)(0.5)}{(0.8)p + (0.2)(0.9 - 0.7p)}$$