UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS
Matemática para Computação
Prof. Rodrigo Orsini Braga

Conceitos Básicos da Teoria de Conjuntos

O texto que segue introduz alguns conceitos básicos relativos à Teoria dos Conjuntos. Embora já seja, possivelmente, do seu conhecimento, tal leitura é importante para verificar as nomenclaturas e fixar as notações que serão adotadas ao longo de todo o curso.

Conjuntos

Na construção da teoria de conjuntos, admitiremos como conceitos primitivos (ou seja, que não são definidos formalmente) as noções de:

conjunto, elemento e *relação de pertinência entre elemento e conjunto.*

A idéia de *conjunto* é a da linguagem comum, representando uma coleção bem-definida de objetos. Estes objetos são chamados os *elementos* de um conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada e, como veremos nos exemplos, podem ser qualquer coisa: números, pessoas, letras, etc.

Exemplo 1: *Conjuntos*.

a) os números 1, 3, 7 e 12.
b) as vogais a, e, i, o, u.
c) os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
d) os números pares 0, 2, 4, 6, ….
e) todos os brasileiros.
f) os alunos que faltaram à aula.

Observe que um conjunto pode ser definido listando-se todos os seus elementos (como "as vogais a, e, i, o, u") ou por propriedades declaradas (como "todos os brasileiros"), isto é, regras que decidem se um objeto particular é ou não é elemento de um conjunto.

Notação

Indicaremos conjuntos por letras latinas maiúsculas: $A, B, X, Y,$ etc., e seus elementos por letras latinas minúsculas: $a, b, x, y,$ etc.

A definição de um determinado conjunto listando todos os seus elementos é denominada *definição por extensão*. Os elementos são listados em qualquer ordem (separados por vírgulas) e entre chaves $\{\}$. Por exemplo:

$$A=\{1,3,12,7\}, \quad B=\{a,e,i,o,u\}, \quad C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}.$$

A definição de um conjunto pelas propriedades que seus elementos precisam satisfazer é denominada *definição por compreensão*. Por exemplo, ao considerarmos D como o conjunto de todos os números pares não-negativos, usamos então uma letra, geralmente x, para representar um elemento arbitrário e escrevemos

$$D=\{x \mid x \text{ é } par \text{ e } x\geqslant 0\}$$

que se lê: "D é o conjunto de números x tal que x é par e x é maior ou igual a zero". Observe que a linha vertical " | " é lida como "tal que".

Assim, de forma geral, se $p(x)$ é uma propriedade, o conjunto de todos os elementos x que satisfazem $p(x)$ é indicado por

$$\{x \mid p(x)\}.$$

Por exemplo, temos os conjuntos

$$E=\{x \mid x \text{ é brasileiro}\}, \quad F=\{x \mid x \text{ é um estudante e } x \text{ faltou à aula}\}.$$

Embora seja possível definir qualquer conjunto por compreensão, frequentemente é conveniente especificar conjuntos com o uso de reticências, como por exemplo

$$C=\{0,1,2,3,\ldots,9\} \quad \text{e} \quad D=\{0,2,4,6,8,\ldots\},$$

nos quais os elementos omitidos podem ser facilmente deduzidos do contexto.

Pertinência

Se um objeto x é um elemento do conjunto A, tal fato é denotado por

$$x \in A$$

o qual lê-se como segue:

x *pertence* ao conjunto A.

Caso contrário, afirma-se que x *não pertence* ao conjunto A. Tal fato é denotado por $x \notin A$.

Exemplo 2: Relativamente ao conjunto $B=\{a,e,i,o,u\}$, tem-se que $a \in B$, $b \notin B$.

Exemplo 3: Relativamente ao conjunto $E=\{x \mid x \text{ é brasileiro}\}$, tem-se que $Pelé \in E$, $Bill\ Gates \notin E$.

Conjunto vazio

É conveniente em matemática introduzir um conjunto que não tem nenhum elemento: o *conjunto vazio*. É fácil ver que há somente um conjunto vazio, o qual indicaremos pela letra escandinava $\emptyset$.

Por exemplo, o conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos, o conjunto de todos os números que são simultaneamente pares e ímpares e o conjunto { x | $x \neq x$ }, representam o mesmo conjunto vazio $\emptyset$.

Observe que $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são conjuntos diferentes: $\emptyset$ é o conjunto vazio -- não possui nenhum elemento -- e $\{\emptyset\}$ é um conjunto que possui um elemento. O que vale neste caso é

$$\emptyset \in \{\emptyset\}.$$

Conjuntos finitos e infinitos

Um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos. A definição formal de um conjunto finito e infinito será apresentada mais adiante neste curso. Informalmente, um conjunto é finito se consiste em um número específico de elementos diferentes, ou seja, ao contarmos diferentes elementos de um conjunto, o processo de contagem chega a um final. Caso contrário, o conjunto é dito infinito.

São finitos, por exemplo, os conjuntos $\emptyset$, $A=\{1,3,12,7\}$, $B=\{a,e,i,o,u\}$, $C=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$ e $E=\{x \mid x \text{ é brasileiro}\}$. É infinito, por exemplo, o conjunto dos pares $D=\{0,2,4,6,8,\ldots\}$. Observe que embora seja difícil explicitar e contar todos os elementos do conjunto $E=\{x \mid x \text{ é brasileiro}\}$, ainda assim, E é um conjunto finito.

Relação de inclusão (ou continência)

Além da relação de pertinência (entre elemento e conjunto) já introduzida, outra relação fundamental da Teoria de Conjuntos é a de *inclusão*, a qual permite introduzir os conceitos de *subconjunto* e de *igualdade de conjuntos*.

Definição 1: Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, então dizemos que A está contido em B, e escrevemos $A \subseteq B$, ou, alternativamente, dizemos que B contém A, e escrevemos $B \supseteq A$. Neste caso $(A \subseteq B \text{ ou } B \supseteq A)$, dizemos que A é um *subconjunto* de B.

Obs.: Em notação lógica, dizemos que $A \subseteq B$ se, qualquer que seja o objeto x,

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

é uma proposição sempre verdadeira.

Exemplo 4: O conjunto $C=\{1,3,5\}$ é um subconjunto de $D=\{5,4,3,2,1\}$, pois cada elemento 1, 3, 5 pertencente a C, também pertence a D. Neste caso, escrevemos $C \subseteq D$.

Exemplo 5: O conjunto $E=\{2,4,6\}$ é um subconjunto de $F=\{6,2,4\}$, pois cada elemento 2, 4, 6 pertencente a E, também pertence a F. Neste caso, escrevemos $E\subseteq F$.

Se $A\subseteq B$, mas existe algum $b\in B$ tal que $b\notin A$, então dizemos que A é um <u>subconjunto próprio</u> de B (ou que está *estritamente contido* em B), e denotamos $A\subset B$. Nos Exemplos 4 e 5, C é subconjunto próprio de D, mas E não é subconjunto próprio de F.

Quando não é fato que $A\subseteq B$, denotamos $A\not\subseteq B$. Se A não é um *subconjunto* de B, deve haver pelo menos um elemento de A que não seja elemento de B. Lembre-se que a negação de $x\in A\rightarrow x\in B$ é $x\in A\wedge x\notin B$.

Exemplo 6: O conjunto $G=\{0,1,2\}$ não é subconjunto de $H=\{0,2,4\}$, pois $1\in G\wedge 1\notin H$.

Observações:

1) Todo conjunto é subconjunto de si mesmo, ou seja,

$$A\subseteq A,\ \forall A \text{ conjunto.}$$

(o símbolo $\forall$ significa "para todo e qualquer". No próximo módulo, estudaremos os *quantificadores*.)

2) O conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja,

$$\varnothing\subseteq A,\ \forall A \text{ conjunto.}$$

Isto é verdade, pois do contrário, se $\varnothing\not\subseteq A$, para algum conjunto A, então teria que existir algum elemento em $\varnothing$ que não estivesse neste conjunto A, o que é impossível, já que $\varnothing$ não possui elementos.

Igualdade de conjuntos:

Definição 2: Dizemos que dois conjuntos A e B são <u>iguais</u>, e escrevemos $A=B$, se eles possuem os mesmos elementos, ou seja, se cada elemento pertencente a A pertencer também a B, e se cada elemento que pertence a B pertencer também a A. Em linguagem formal,

$$A=B \text{ se e somente se } A\subseteq B \text{ e } B\subseteq A.$$

Ou ainda, em notação lógica, $A=B\leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$ é sempre verdadeiro.

Exemplo 7: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{3,1,4,2\}$. Assim, $A=B$, isto é,

$$\{1,2,3,4\}=\{3,1,4,2\},$$

pois cada um dos elementos 1, 2, 3 e 4, de A, pertence a B, e cada um dos elementos 3, 1, 4, 2, de B, pertence a A. Observe, dessa maneira, que um conjunto não muda se seus elementos são reagrupados.

Exemplo 8: Sejam $C=\{5,6,5,7\}$ e $D=\{7,5,7,6\}$. Assim, $C=D$, isto é,

$$\{5,6,5,7\}=\{7,5,7,6\},$$

pois cada um dos elementos de C pertence a D, e cada um dos elementos de D pertence a C. Observe que um conjunto não varia se os seus elementos são repetidos. Também o conjunto $\{5,6,7\}$ é igual a C e a D.

Como mostram os exemplos acima, a igualdade de dois conjuntos não significa que eles tenham definições idênticas: ela reflete o fato de que um conjunto é uma coleção de objetos.

Conjunto Universo

Em qualquer aplicação da teoria de conjuntos, todos os conjuntos "em estudo" serão subconjuntos de um determinado conjunto. Chamamos a este de conjunto universo e o denotaremos por U. Note que U não é um conjunto fixo, depende do "contexto de discussão". Uma vez definido U, para qualquer conjunto A neste contexto, teremos $A\subseteq U$.

'

Conjunto das Partes (ou Conjunto Potência)

O conjunto de todos os subconjuntos de qualquer conjunto A é chamado o conjunto das partes (ou conjunto potência) de A. É denotado por $\wp(A)$ ou 2^A. Em outras palavras,

$$\wp(A)=\{X \mid X\subseteq A\}.$$

Exemplo 9: Seja $A=\{1,2,3\}$. Então $\wp(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

Observações:

3) $\varnothing$ e o próprio conjunto A sempre serão elementos de $\wp(A)$. (veja observações 1 e 2).

4) Pode-se provar que o número de elementos de $\wp(A)$ sempre será a potência de 2 elevado ao número de elementos de A. Por isso a denominação conjunto potência e a notação 2^A.

Pertinência x Inclusão

É importante distinguir claramente entre pertinência e inclusão. Relação de pertinência se estabelece entre elemento e conjunto e a relação de inclusão entre conjunto e conjunto. Contudo, os elementos de um conjunto podem ser quaisquer objetos. Em particular, podem ser conjuntos. Veja o caso do conjunto das partes, que é um conjunto cujos elementos são conjuntos. Assim, ao compararmos dois conjuntos, podemos estabelecer uma relação de inclusão para sabermos se um conjunto é ou não subconjunto do outro, como também podemos estabelecer uma relação de pertinência para sabermos se um conjunto é ou não é *elemento* do outro conjunto. O exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo 10: Considere o conjunto $A=\{1,\{1,2\},\varnothing\}$. Vamos decidir se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) $\{1,2\}\subseteq A$. Falso. Existe o objeto 2 que é elemento de $\{1,2\}$ mas não é elemento de A.

b) $\{1,2\}\in A$. Verdadeiro. O conjunto $\{1,2\}$ é um dos elementos do conjunto A.

c) $\{\{1,2\}\}\subseteq A$. Verdadeiro. O conjunto consistindo de um único elemento $\{1,2\}$ é um subconjunto de A.

d) $\{2\}\in A$. Falso. O conjunto $\{2\}$ não é um dos elementos de A.

e) $\{2\}\subseteq A$. Falso. O conjunto $\{2\}$ não é subconjunto de A, já que $2\notin A$.

f) $\varnothing\in A$. Verdadeiro. Neste caso, $\varnothing$ é um dos elementos de A.

g) $\varnothing\subseteq A$. Verdadeiro. O conjunto $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto.

É relevante perceber que sendo $A=\{1,\{1,2\},\varnothing\}$, A possui 3 elementos e, portanto, 8 possíveis subconjuntos.