Conjuntos Numéricos

Este módulo trata de uma das mais básicas noções da Matemática: a noção de número. Estudaremos então os principais conjuntos numéricos, que são conjuntos de números sobre os quais estão definidas operações, como soma e multiplicação, por exemplo.

Conjunto dos números naturais

Chama-se conjunto dos números naturais o conjunto denotado por $\mathbb{N}$ e formado pelos números 0, 1, 2, 3, … .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Neste conjunto, são definidas duas operações fundamentais: a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] associatividade da adição

$$(a+b)+c = a+(b+c), \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

[A.2] comutatividade da adição

$$a+b = b+a, \ \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

[A.3] elemento neutro da adição

$$\exists\, 0 \in \mathbb{N}, \ a+0 = a, \ \forall a \in \mathbb{N}.$$

[M.1] associativade da multiplicação

$$(ab)c = a(bc), \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

[M.2] comutatividade da multiplicação

$$ab = ba, \ \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

[M.3] elemento neutro da multiplicação

$$\exists\, 1 \in \mathbb{N}, \ a \cdot 1 = a, \ \forall a \in \mathbb{N}.$$

[D] distributividade da multiplicação relativamente à adição

$$a(b+c) = ab + ac, \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Veremos que os próximos conjuntos numéricos a serem apresentados são ampliações do conjunto $\mathbb{N}$, isto é, possuem a adição e multiplicação com as mesmas propriedades já apresentadas e outras mais, que constituem justamente o motivo determinante da ampliação.

Por exemplo, dado um número natural $a \neq 0$, não existe natural x tal que $a+x=0$. Dizemos assim que, dado um número natural $a \neq 0$, não existe o simétrico aditivo de a, ou seja, $-a \notin \mathbb{N}$. O resultado disso é que a subtração $a-b$ não tem significado em $\mathbb{N}$, para todos $a, b \in \mathbb{N}$. Por exemplo, $2-5 \notin \mathbb{N}$. Assim, em $\mathbb{N}$ a subtração não é uma operação definida. Venceremos esta dificuldade introduzindo um novo conjunto numérico: os *inteiros*.

Conjunto dos números inteiros

Chama-se conjunto dos números inteiros e denotamos por $\mathbb{Z}$ o seguite conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

<u>*Observação*</u>: a letra $\mathbb{Z}$ é a incial da palavra $Zahl$, que significa *número* em alemão.

No conjunto $\mathbb{Z}$ distinguimos três subconjuntos notáveis:

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$ (chamado conjunto dos inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ (chamado conjunto dos inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}^* = \{1, -1, 2, -2, \ldots\}$ (chamado conjunto dos inteiros não nulos)

No conjunto $\mathbb{Z}$ são definidas também as operações de adição e multiplicação que apresentam, além de [A.1], [A.2], [A.3], [M.1], [M.2], [M.3] e [D], a propriedade:

[A.4] simétrico (ou oposto) para a adição

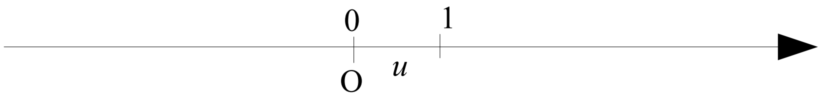
$$\forall\, a \in \mathbb{Z},\ \exists -a \in \mathbb{Z},\ \ a+(-a)=0.$$

Devido à propriedade [A.4], podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que $a-b = a+(-b),\ \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

Os números inteiros podem ser representados sobre uma reta orientada por meio do seguinte procedimento:

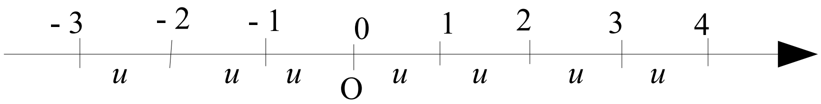
(a) sobre a reta estabelecemos um sentido positivo e um ponto O (origem), que representa o inteiro 0 (zero).

(b) a partir do ponto O, no sentido positivo, marcamos um segmento unitário $u \neq 0$ cuja extremidade passará a representar o inteiro 1.



(c) para cada inteiro positivo n, a partir de 0, marcamos um segmento de medida nu no sentido positivo cuja extremidade representará o número n e marcamos um segmento de medida nu no sentido negativo cuja extremidade representará o número inteiro $-n$.

O resultado é este:



Uma importante noção que devemos ter sobre números inteiros é o conceito de divisor.

<u>Definição</u>: Dizemos que o inteiro a é divisor do inteiro b (ou que a divide b) e simbolizamos por $a \mid b$ quando existe um inteiro c tal que $c\,a=b$.

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z},\ c\,a=b.$$

Exemplos:

$2 \mid 6$, pois $\exists\ 3 \in \mathbb{Z},\ 3 \cdot 2 = 6$.
$3 \mid -18$, pois $\exists -6 \in \mathbb{Z}, (-6) \cdot 3 = -18$.
$-5 \mid 20$, pois $\exists -4 \in \mathbb{Z}, (-4) \cdot (-5) = 20$.
$-2 \mid -14$, pois $\exists\ 7 \in \mathbb{Z}, 7 \cdot (-2) = -14$.
$4 \mid 0$, pois $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}, 0 \cdot 4 = 0$.
$0 \mid 0$, pois $\exists\ 1 \in \mathbb{Z}, 1 \cdot 0 = 0$.

Quando a é divisor de b, dizemos que "*b é divisível por a*" ou "*b é múltiplo de a*".

Para um inteiro a qualquer, indicamos por $D(a)$ o conjunto seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos:

D(2) = {1, -1, 2, -2}	M(2) = { 0,± 2, ± 4, ± 6, … }
D(-3) = { 1, -1, 3, -3}	M(-3) = { 0, ± 3, ± 6, ± 9, … }
D(10) = { 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10}	M(10) = { 0, ± 10, ± 20, ± 30, … }
D(0) = $\mathbb{Z}$	M(0) = {0}

Observe que todo número inteiro divide 0, mas só 0 é múltiplo de 0, ou seja, 0 só divide 0.

Um número inteiro é par se é múltiplo de 2, ou seja,

$$x \text{ é } par \Leftrightarrow 2 \mid x \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z},\ x=2n.$$

Note que 0 é par, pois $2 \mid 0 \Leftrightarrow \exists 0 \in \mathbb{Z},\ 0=2 \cdot 0$.

Um número inteiro é ímpar se não é par, ou seja,

$$x \text{ é } ímpar \Leftrightarrow 2 \nmid x \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z},\ x=2n+1.$$

Dizemos que um número inteiro p é primo quando $p \notin \{0, 1, -1\}$ e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$. São primos, por exemplo, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 7 e -7.

Dado um número inteiro $q \neq \pm 1$, o inverso multiplicativo de q não existe em $\mathbb{Z}$. Por exemplo, se $q = 2$, não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \cdot x = 1$. Assim, dado um número inteiro $q \neq \pm 1$, $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Por isso, não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de divisão. Vamos superar esta dificuldade introduzindo o conjunto dos números racionais.

Conjunto dos números racionais

Chama-se conjunto dos números racionais, de símbolo $\mathbb{Q}$, o conjunto das frações da forma $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

1) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a d = b c$

2) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a d + b c}{b d}$

3) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a c}{b d}$

Assim, por exemplo, as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ representam o mesmo número racional, já que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Também temos que $\frac{9}{5} + \frac{7}{20} = \frac{180 + 35}{100} = \frac{215}{100} = \frac{43}{20}$ e que $\frac{9}{5} \cdot \frac{7}{20} = \frac{63}{100}$.

Na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b é o denominador. A designação *racional* surgiu porque $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma *razão* (divisão) entre os inteiros a e b. Observe que $b \neq 0$, pois a divisão de a por b só tem significado se $b \neq 0$. A letra $\mathbb{Q}$ que representa o conjunto dos números racionais é a primeira letra da palavra *quociente*.

Se $b = 1$, temos que $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$. Assim, $7 = \frac{7}{1}$, $\frac{0}{1} = 0$, $-2 = \frac{-2}{1}$. Portanto, $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Assim, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Pode-se verificar que a adição e multiplicação de números racionais apresentam as propriedades [A.1], [A.2], [A.3], [A.4], [M.1], [M.2], [M.3] e [D]. Além dessas, temos também a seguinte:

[M.4] simétrico ou inverso para a multiplicação

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ \frac{a}{b} \neq 0,\ \exists \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \ tal\ que\ \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 .$$

Assim, por exemplo, existe o simétrico de $\frac{2}{3}$, que é $\frac{3}{2}$, tal que $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1} = 1$. Porém, não existe o inverso de 0, pois não existe número x tal que $0 \cdot x = 1$.

Devido à propriedade [M.4], podemos definir em $\mathbb{Q}^*$ $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\})$ a operação de *divisão* entre racionais, estabelecendo que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos.

Assim, por exemplo, $\frac{9}{5} \div \frac{7}{20} = \frac{9}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{180}{35} = \frac{36}{7}$.

Representação decimal

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado na forma decimal, dividindo o inteiro a pelo inteiro b. Na passagem de uma notação para outra, podem ocorrer dois casos:

1) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, uma decimal exata.

Exemplos: $\frac{3}{1}=3$, $\frac{1}{4}=0{,}25$, $-\frac{51}{8}=-6{,}375$, $\frac{27}{1000}=0{,}027$.

2) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, uma dízima periódica.

Exemplos:

$\frac{1}{3}=0{,}33333333\ldots=0{,}\overline{3}$ (período 3)

$\frac{2}{7}=0{,}285714285714285714\ldots=0{,}\overline{285714}$ (período 285714)

$\frac{31}{6}=5{,}16666666\ldots=5{,}1\overline{6}$ (perído 6)

Podemos notar também que todo número na forma decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$ e, portanto, representa um número racional.

1) Quando a decimal é exata, podemos transformá-lo em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

Exemplos: $0{,}37=\frac{37}{100}$, $2{,}631=\frac{2631}{1000}$, $63{,}4598=\frac{634598}{10000}$.

2) Quando a decimal é uma dízima periódica, devemos procurar sua geratriz. Damos a seguir três exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo: 0,7777...

$$\begin{Bmatrix} x=0{,}777777\ldots \\ 10x=7{,}777777\ldots \end{Bmatrix} \Rightarrow 10x-x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

Portanto, $0{,}777777\ldots=\frac{7}{9}$

Exemplo: 6,43434343...

$$\begin{Bmatrix} x=6{,}434343... \\ 100x=643{,}434343... \end{Bmatrix} \Rightarrow 100x-x=637 \Rightarrow x=\frac{637}{99}$$

Portanto, $6{,}434343\ldots=\frac{637}{99}$

Exemplo: 2,57919191...

$$\begin{Bmatrix} x=2{,}57919191... \\ 100x=257{,}919191... \\ 10000x=25791{,}919191... \end{Bmatrix} \Rightarrow 10000x-100x=25534 \Rightarrow x=\frac{25534}{9900}$$

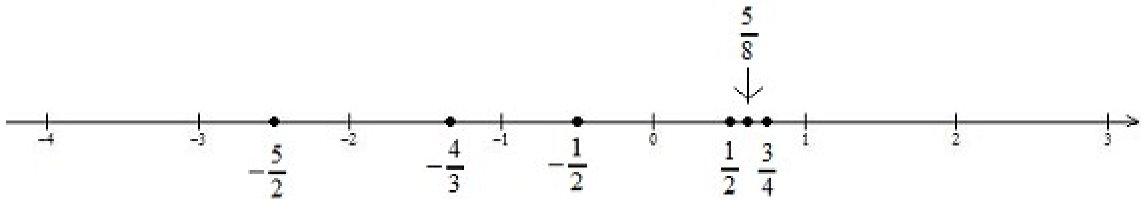
Portanto, $2{,}57919191\ldots=\frac{25534}{9900}$.

Observações:

1) O número 0,999999… representa o número cujos valores aproximados são: 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; etc., cada vez mais próximos de 1. Dizemos que essa sequencia tem 1 como limite e podemos então dizer que 0,999999…= 1. De fato, conforme vimos no procedimento anterior,

se $\begin{Bmatrix} x=0{,}999999... \\ 10x=9{,}99999... \end{Bmatrix} \Rightarrow 10x-x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{9}=1$.

2) Já vimos que os números inteiros podem ser representados por pontos em uma reta. Analogamente, os números racionais não inteiros também podem. Na figura abaixo, representamos alguns números racionais.

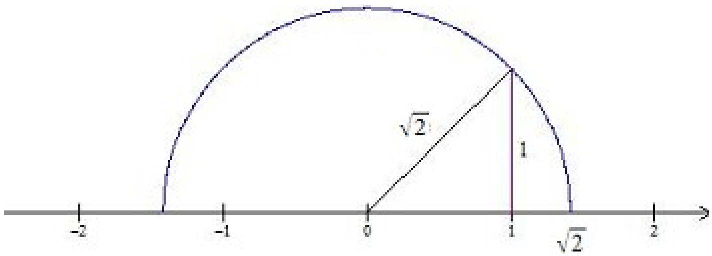


Entre dois números inteiros, *nem sempre* existe um número inteiro. Por exemplo, não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0<x<1$. Já entre números racionais, *sempre* existe outro racional. Basta, por exemplo, pegar entre dois racionais a/b e c/d , o ponto médio entre eles, dado por $\frac{a/b+c/d}{2}$. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2}=0{,}5$ e $\frac{3}{4}=0{,}75$, podemos encontrar o número racional $\frac{5}{8}=0{,}625$ (veja a figura acima). Entretanto, poder encontrar *infinitos* racionais *não* significa que os racionais preenchem *completamente* a reta, isto é, existem pontos da reta que não representam nenhum racional. Em outras palavras, existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o número decimal $0{,}1010010001\ldots$ (em que o número de algarismos 0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é não periódico. Ele então representa um número *não* racional. Dizemos então que ele representa um número *irracional*.

Outros exemplos de números irracionais:

1,23456789101112…
0,11223344...
40,404004000...

O que vamos ver é que os racionais não são suficientes para medir todos os segmentos de reta. Ou seja, exsitem segmentos de reta que não podem ser medidos através de um número racional. Um exemplo clássico é o caso da diagonal de um quadrado de lado 1. Usando o Teorema de Pitágoras, se x for a diagonal do quadrado de lado 1, então $x^2=1^2+1^2=2$. Porém, não existe número racional cujo quadrado é 2 *(veja demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional nos exemplos das técnicas de demonstração do Módulo 4).*



Conseguimos representar o número $\sqrt{2}$ na reta, embora este número não seja racional. Sua representação decimal é dada por $\sqrt{2}=1{,}41421356237309504\ldots$

Pode-se provar que não existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2=p$, onde p é um número primo positivo.

Assim sendo, precisamos de um conjunto numérico sobre o qual podemos medir todo e qualquer segmento de reta; tal conjunto é o conjunto dos números *reais*.

Conjunto dos números reais

Chama-se conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$ aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são os números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (chamadas números irracionais).

Dessa forma, todo número racional é um número real, ou seja,

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

Além dos racionais, estão em $\mathbb{R}$ números como:

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}7232058075688772935\ldots$

$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$ (o número pi, constante dos círculos)

$a = 1{,}01001000100001000001\ldots$

chamados *números irracionais* (os reais que não são racionais).

Se quisermos outros números irracionais, podemos obtê-los, por exemplo, por meio da expressão $\sqrt{p}$, em que p é um número primo positivo. São irracionais $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \ldots .$

Outro recurso para construção de irracionais é usar o fato de que, se α é irracional e r é racional não nulo, então: $\alpha + r$, $\alpha \cdot r$, $\dfrac{\alpha}{r}$ e $\dfrac{r}{\alpha}$ são todos irracionais. Exemplos: $1+\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ são todos irracionais.

Além de $\mathbb{Q}$, destacamos em $\mathbb{R}$ três outros subconjuntos:

$\mathbb{R}_+$ (conjunto dos números reais não negativos)

$\mathbb{R}_-$ (conjunto dos números reais não positivos)

$\mathbb{R}^*$ (conjunto dos números reias não nulos)

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ gozam das mesmas propriedades vistas para o conjunto $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}^*$ é definida também a divisão.

Com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a reta fica completa, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta. Dizemos, neste caso, que temos uma *correspondência biunívoca* entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim, a reta *rea*l.

<u>Observação</u>: Com os números reais, toda equação do tipo $x^2 = a$, onde a é um número postivo, pode ser resolvida. Ou seja, podemos encontrar a raiz quadrada de qualquer número positivo. Entretanto, não existe número real que elevado ao quadrado dê um número negativo. Assim, por exemplo, $\sqrt{-4}$ não representa um número real; é um número *complexo*, que não serão objeto de estudo desta atividade acadêmica.

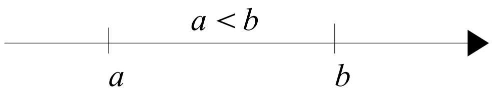
Desigualdades e Intervalos

Dados dois números reais quaiquer a e b, poderá ocorrer uma e somente uma das seguintes possibilidades:

$$a < b \quad \text{ou} \quad a = b \quad \text{ou} \quad a > b$$

A desigualdade $a < b$ significa que o número real a é menor do que o número real b, ou seja, $b - a$ é positivo. Por exemplo, 2 < 3; - 4 < - 2; 2,555...< 2,6; -1,256777 < -1,2576

Geometricamente, $a < b$ significa que, na reta real, o número real a está à esquerda do número real b. Na reta real, os números estão sempre ordenados.



Usamos também a notação $a \leqslant b$ para dizer que $a < b$ ou $a = b$. Assim:

$a \leqslant b$ lê-se "a é menor ou igual a b".

$a \geqslant b$ lê-se "a é maior ou igual a b".

Certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ determinados por desigualdades, têm grande importância na Matemática: são os *intervalos*. Assim, dados dois números reais a e b, com $a < b$, tem-se:

(a) Intervalo aberto

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

(A bolinha vazia indica que os extremos a e b não pertencem ao intervalo.)

(b) Intervalo fechado

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

(A bolinha cheia indica que os extremos a e b pertencem ao intervalo.)

(c) Intervalo fechado à esquerda

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

(Neste caso, a pertence ao intervalo, mas b não.)

(d) Intervalo fechado à direita

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

(Neste caso, b pertence ao intervalo, mas a não.)

(e) Semi-reta direita, fechada, de origem a

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$$

(Neste caso, é um intervalo ilimitado superiormente, contendo todos os números reais maiores ou iguais a a. O símbolo $+\infty$ representa o “infinito” positivo, expressando a idéia de ser um intervalo ilimitado, podendo conter qualquer número tão grande quanto se queira. $+\infty$ não representa nenhum número real, apenas a idéia de não ter fim. Representa-se sempre aberto no infinito, pois nunca se atingirá, propriamente, o “infinito”.)

(f) Semi-reta direita, fechada, de origem a

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

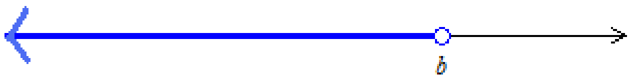
(A mesma idéia anterior, porém não contendo o a.)

(g) Semi-reta esquerda, fechada, de origem b

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$$

(Neste caso, é um intervalo ilimitado inferiormente, contendo todos os números reais menores ou iguais a b. O símbolo $-\infty$ representa o “infinito” negativo, expressando a idéia de ser um intervalo ilimitado podendo conter qualquer número quanto mais negativo se queira.)

(h) Semi-reta esquerda, aberta, de origem b



$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

(Mesma situação anterior, porém não contendo b.)

(i) Reta real

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

(Todos os números reais expressos na reta.)

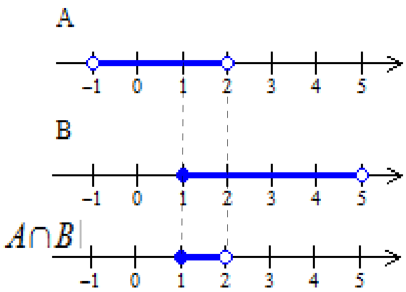
<u>Observação</u>: Há outras formas de se representar intervalos. Por exemplo, $(a, b] =]a, b]$ e $(a, b) =]a, b[$.

Operações com intervalos

Como intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$, podemos fazer operações com eles. As operações de intersecção, união e complementar serão apresentadas por meio de exemplos.

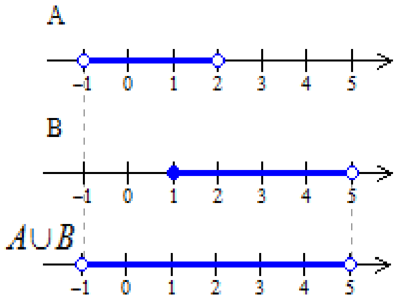
Assim, dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ e $B = [1, 5)$, vamos determinar:

(a) $A \cap B$



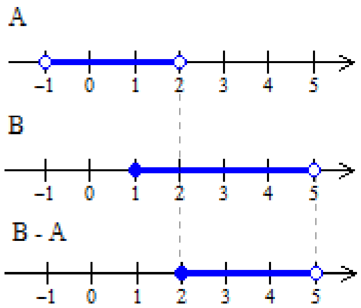
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 2\} = [1, 2)$$

(b) $A \cup B$



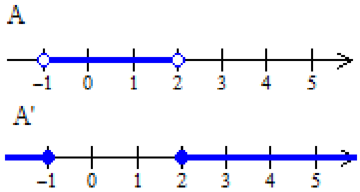
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\} = (-1, 5)$$

(c) $B - A$



$$B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\} = [2, 5)$$

(d) A'



$$A' = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \ ou \ x \geqslant 2 \} = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$