1.

a. $y = x^3 - 9x^2 + 15x$

i. Domínio:

$$R, contínua\ em\ toda\ parte;$$

ii. Limites no Inifinito:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 9x^2 + 15x = +\infty\ ;\ \lim_{x \to -\infty} x^3 - 9x^2 + 15x = -\infty$$

iii. Crescimento e Decrescimento:

$$y' = 3x^2 - 18x + 15$$

$$y' = 0$$

$$3x^2 - 18x + 15 = 0 \to 3(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$x = 1\ ou\ x = 5$$

$$f'(0) = 15 > 0$$

$$f'(2) = -9 < 0$$

$$f'(6) = 15 > 0$$

A função é crescente para $x \leq 1$ e $x \geq 5$ e decrescente para $x \geq 1$ e $x \leq 5$

iv. Extremos Relativos:

Substituindo as raizes da derivada na função, temos:

Para $x = 1$:

$$y = (1)^3 - 9(1)^2 + 15(1) = 7$$

Considerando o intervalo onde a função é crescente e decrescente temos um ponto de máximo relativo em (1,7)

Para $x = 5$:

$$y = (5)^3 - 9(5)^2 + 15(5) = -25$$

Considerando o intervalo onde a função é crescente e decrescente temos um ponto de mínimo relativo em (5,-25)

v. Ponto de Inflexão:

$$y'' = 6x - 18$$
$$y'' = 0$$
$$6x = 18$$
$$x = 3$$
$$f(3) = (3)^3 - 9(3)^2 + 15(3) = -9$$

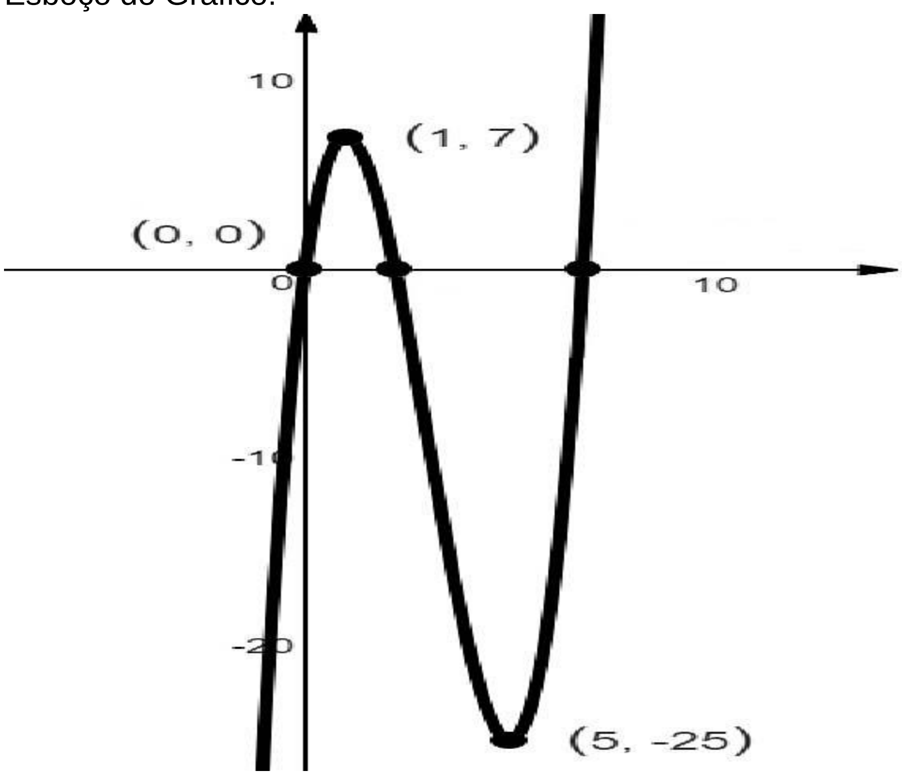
Há ponto de inflexão em (3,-9)

vi. Concavidade:

$$f''(2) = 6(2) - 18 = -6 < 0$$
$$f''(4) = 6(4) - 18 = 6 > 0$$

A função é côncava para baixo em $x \leq 3$ e côncava para cima em $x \geq 3$

vii. Esboço do Gráfico:



b. $y = \frac{x}{x^2-4}$

i. Domínio:

$$R - \{\pm 2\} = (-\infty, -2)U(-2,2)U(2, +\infty)$$

$$contínua\ exceto\ em\ x\ =\ \pm 2$$

ii. Limites no Inifinito:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0\,;\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$$

iii. Crescimento e Decrescimento:

$$y' = x.(x^2-4)^{-1}$$

$$y' = \frac{(x^2-4).(1)-(x).(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$$y' = 0$$

$$\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \to -x^2-4 = 0 \to x = \pm 2$$

$$f'(-3) = \frac{-(-3)^2-4}{((-3)^2-4)^2} = -\frac{13}{25} < 0$$

$$f'(0) = \frac{-(0)^2-4}{((0)^2-4)^2} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$f'(3) = \frac{-(3)^2-4}{((3)^2-4)^2} = -\frac{13}{25} < 0$$

A função é decrescente para $x < -2$ ou $-2 < x < 2$ ou $x > 2$

iv. Extremos Relativos:

Substituindo as raizes da derivada na função, temos:

Para $x = -2$:

$$y = \frac{(-2)}{(-2)^2-4} = -\frac{2}{0}(indeterminação)$$

$$Não\ há$$

Para $x = 2$:

$$y = \frac{(2)}{(2)^2-4} = \frac{2}{0}(indeterminação)$$

$$Não\ há$$

v. Pontos de Inflexão:

$$y'' = \frac{(-2x).(x^2-4)^2 - 4x(x^2-4)(-x^2-4)}{(x^2-4)^4} = -\frac{2x(-x^2-12)}{(x^2-4)^3}$$

$$y'' = 0$$

$$Não\ há\ pontos\ de\ inflexão, mas\ há\ descontinuidades\ em\ x = \pm 2$$

vi. Concavidade:

$$f''(-3) = -\frac{2(-3)(-(-3)^2-12)}{((-3)^2-4)^3} = -\frac{126}{125} < 0$$

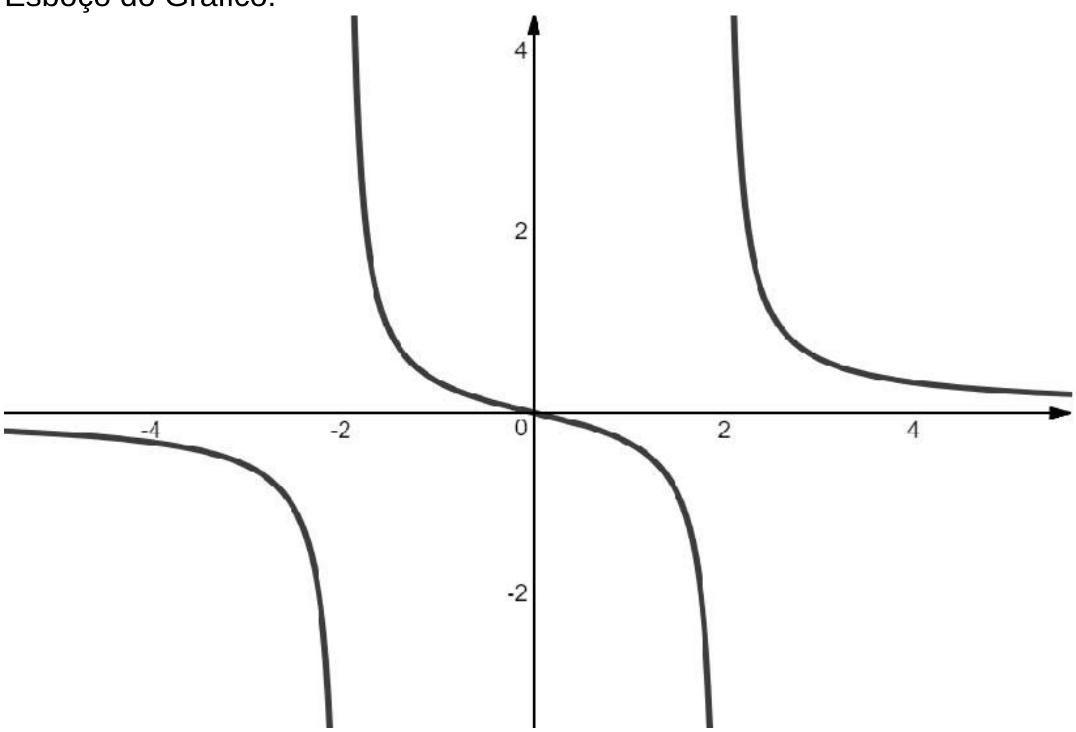
$$f''(-1) = -\frac{2(-1)(-(-1)^2-12)}{((-1)^2-4)^3} = \frac{26}{27} > 0$$

$$f''(1) = -\frac{2(1)(-(1)^2-12)}{((1)^2-4)^3} = -\frac{26}{27} < 0$$

$$f''(3) = -\frac{2(3)(-(3)^2-12)}{((3)^2-4)^3} = \frac{126}{125} > 0$$

A função é côncava para baixo se $x < -2$ ou $0 < x < 2$ e côncava para cima se $x > 2$ ou $-2 < x < 0$

vii. Esboço do Gráfico:



2. $y = 800x + \frac{100x}{38}$

Preço:

$$P(x) = 380 - 10x$$

Quantidade:

$$Q(x) = 800 + 100x$$

Rendimento:

$$R(x) = P(x).Q(x)$$

$$R(x) = (380 - 10x)(800 + 100x)$$

$$R(x) = -1000x^2 + 30000x + 304000$$

É uma função de segundo grau com concavidade para baixo.

Ponto de máximo = ponto de inflexão => $R'(x) = 0$

$$R'(x) = -2000x + 30000$$

$$0 = -2000x + 30000$$

$$2000x = 30000$$

$$\boldsymbol{x = 15}$$

$$\boldsymbol{P(15) = 380 - 150 = 230}$$

$$\boldsymbol{Q(15) = 800 + 1500 = 2300}$$

$$\boldsymbol{R(15) = -1000(15)^2 + 450000 + 304000 = 529000}$$

O abatimento deve ser de 150 dólares.