Engenharia

Matemática Multivariada

PROJETO 1 – CURVAS PARAMETRIZADAS

# INTRODUÇÃO

O foco do projeto 1 será o estudo de uma curva parametrizada, a ser sorteada dentre 16 opções disponíveis cujas construções geométricas serão fornecidas.

Deverá ser apresentado um estudo, na forma de documento escrito, com os seguintes aspectos sobre a curva:

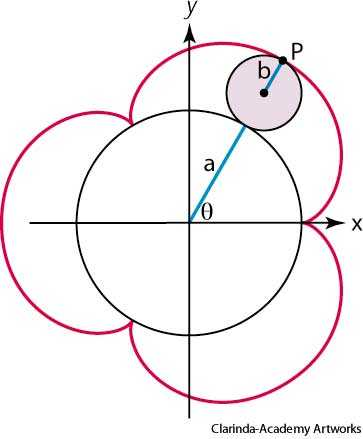
* modelagem matemática a partir da construção geométrica;
* pontos notáveis: o pontos em que a reta tangente é horizontal ou vertical; o cúspides.
* ilustração da curva utilizando o GeoGebra, destacando todos os pontos notáveis;
* cálculo analítico do comprimento, com confirmação numérica usando o GeoGebra;
* cálculo analítico da área, com confirmação numérica utilizando algum método computacional.

Veja a seguir o estudo de uma Epicicloide de razão 2.

# A EPICICLOIDE

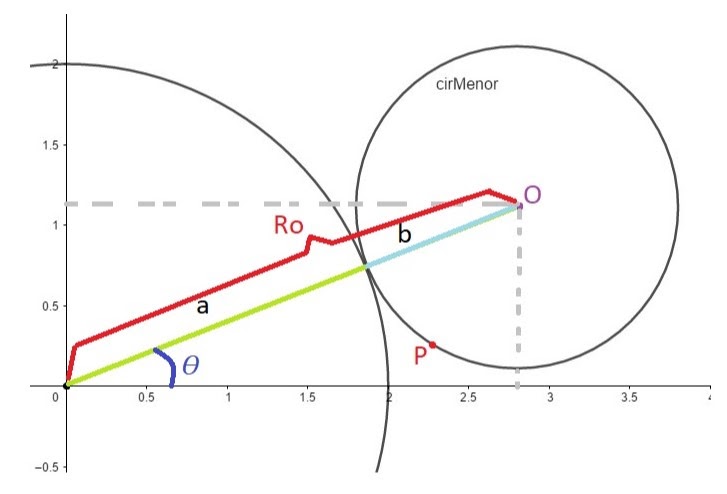
## CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA E MODELAGEM MATEMÁTICA

A Epicicloide é uma curva cíclica definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre um círculo diretor. Veja a seguir, na Figura 1:



### Figura 1 – Construção geométrica da Epicicloide

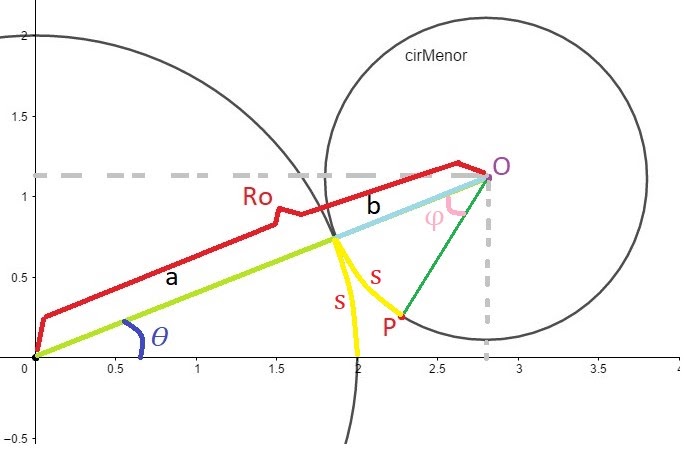
Essa construção nos permite obter as equações paramétricas da epicicloide de razão 2. Vamos usar como parâmetro a medida 𝛳, em radianos, que representa o ângulo entre o raio total e o eixo das abscissas, como mostra a Figura 2 abaixo.



### Figura 2 – Parâmetro para obtenção das equações da epicicloide, ponto de interseção e raio total

Note que o ponto observado, representado por ***P*** na figura acima, é o ponto de interseção das duas curvas quando 𝛳 é igual a 0, e, o raio total, representado por ***Ro*** na figura acima, é a soma dos raios da circunferência maior e menor, ou seja, ***a+b***. Para determinar as coordenadas (x, y) do centro da circunferência menor, representado por ***O*** na figura acima, basta realizar algumas operações trigonométricas:

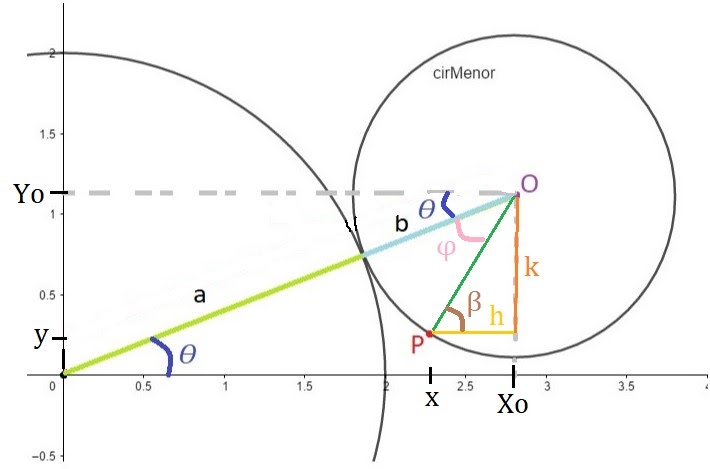
Para chegarmos nas coordenadas (x, y) do ponto ***P***, vamos precisar de algumas igualdades existentes na Figura 3 abaixo.



### Figura 3 – Igualdades entre ângulos

Essa igualdade é a seguinte:

Por fim, para determinar as coordenadas (x, y) do ponto ***P*** analisado em função do parâmetro escolhido, podemos adotar a seguinte estratégia: conhecidas as coordenadas do centro da circunferência, o ponto pode ser obtido ao subtrair as constantes **h** e **k** das coordenadas do centro, como mostra a Figura 4 abaixo.



### Figura 4 – *h*, *k* e ângulo β

A partir da figura 4, é possível obter as últimas equações para chegar nas equações paramétricas, segue abaixo:

Dessa forma, chegamos nas equações paramétricas da Epicicloide:

Ou, de maneira mais concisa:

Como a circunferência pode girar em ambos os sentidos inúmeras vezes, temos 𝜃 ∈ ℝ. Porém, se analisarmos o traço da curva referente a uma volta da circunferência, ou seja, os pontos tais que 𝜃 ∈ [0,2𝜋], poderemos tirar todas as conclusões necessárias.

## PONTOS NOTÁVEIS

De posse dessa parametrização 𝛾(𝜃) = (𝑥(𝜃), 𝑦(𝜃)), podemos determinar, por exemplo, os pontos em que a reta tangente à curva é horizontal ou vertical e, também, as cúspides. Para isso, vamos determinar o vetor tangente. Para determiná-lo, devemos derivar a parametrização 𝛾(𝜃) = (𝑥(𝜃), 𝑦(𝜃)), como mostra abaixo:

**Vetor tangente:**

### Pontos em que a reta tangente é horizontal

Para que a reta tangente seja horizontal, a componente vertical do vetor tangente deve ser nula, com a condição de que a componente horizontal não seja. Assim:

e

Para isso, vamos utilizar uma fórmula de prostaférese (disponível em [4]):

Aplicando na nossa equação, temos:

Resolvendo a primeira, chegamos a , com 𝑘 ∈ ℤ e, ao resolver a segunda obtemos duas condições, e , com 𝑘 ∈ ℤ. Assim, para que ambas as condições sejam satisfeitas, devemos ter:

,

sendo 𝑘 (considerando a primeira rotação completa da circunferência, isso ocorre para e ). Logo, a reta tangente é horizontal nos seguintes pontos:

∴

Referindo-se novamente à primeira rotação completa da circunferência, os únicos pontos onde a reta tangente é horizontal são e .

### Pontos em que a reta tangente é vertical

Da mesma forma, podemos determinar os pontos em que a reta tangente é vertical, considerando que a componente horizontal do vetor tangente deve ser nula e, a vertical, não. Assim:

𝑅 ⋅ (1 − cos 𝜃) = 0

e

𝑅 ⋅ sen𝜃 ≠ 0

Resolvendo a primeira, chegamos a 𝜃 = 𝑘 ⋅ 2𝜋, com 𝑘 ∈ ℤ e, ao resolver a segunda, obtemos 𝜃 ≠ 𝑘 ⋅ 𝜋, com 𝑘 ∈ ℤ. Porém, não existe um valor inteiro de 𝑘 que verifique, simultaneamente, essas duas condições, ou seja, a conclusão é de que não existe qualquer ponto da curva em que a reta tangente é vertical.

### Cúspides

Sendo uma curva parametrizada, com , temos que as cúspides ocorrem nos pontos em que o ângulo formado entre o versor tangente e a horizontal (ou qualquer outra direção) sofre um “salto” à medida que varia. Para medir esse ângulo, podemos calcular sua tangente, a qual vamos denominar

Para descobrir as cúspides, vamos utilizar do **versor tangente**:

Aplicando na nossa parametrização:

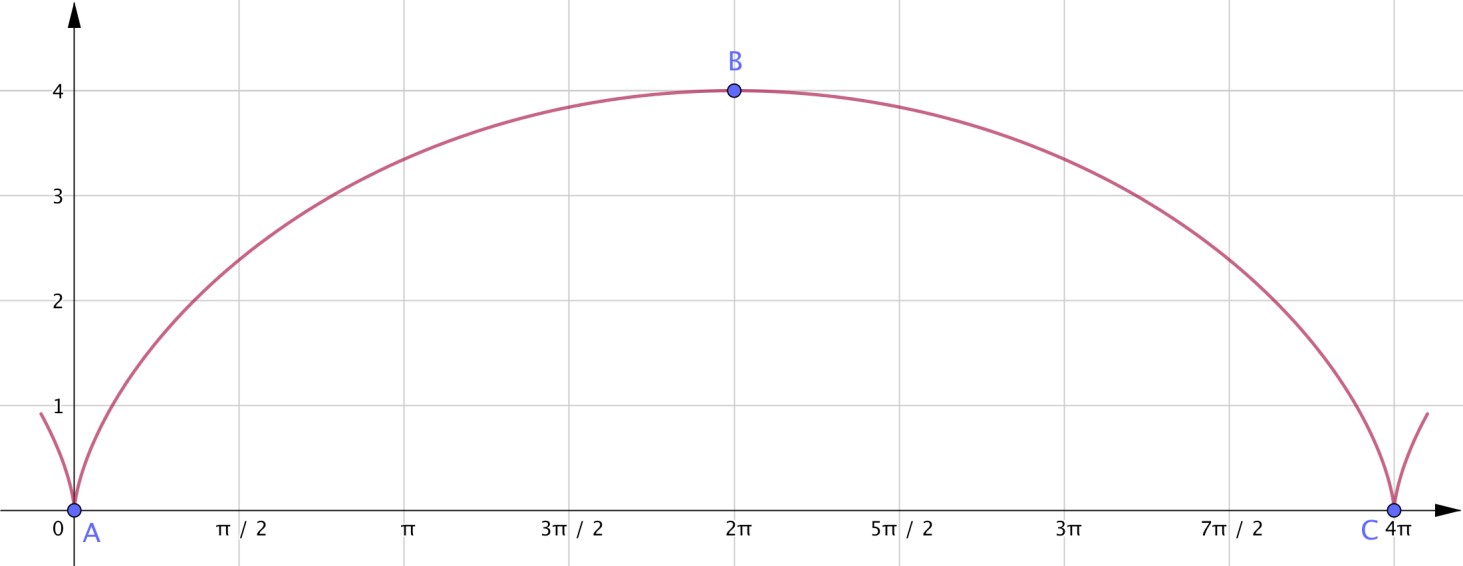
Dessa forma, o **versor tangente** é:

Agora, podemos determinar

Como a função é contínua para todos os valores de que não anulam o denominador, precisamos analisar apenas os casos em que , ou seja, os casos em que

## ILUSTRAÇÃO DA CURVA UTILIZANDO O GEOGEBRA

A Figura 5 mostra um arco completo de uma cicloide em que 𝑅 = 2 construída no GeoGebra com os pontos notáveis destacados. Os pontos 𝐴 e 𝐶 são cúspides e, no ponto 𝐵, a reta tangente é horizontal.



**Figura 5 – Representação da cicloide no GeoGebra**

## COMPRIMENTO

Como a epicicloide é ilimitada, vamos calcular o comprimento 𝐿 de um intervalo completo, ou seja, de um trecho da curva em que 𝜃 varia no intervalo [0,2𝜋].

Para isso, precisamos determinar o valor da seguinte integral:

Utilizando a igualdade , temos:

Resolvendo a integral obtida, temos:

Ou seja, a cada intervalo completo, o ponto analisado percorre uma distância de .

## ÁREA

Vamos calcular a área 𝐴 da região localizada entre o traço do ponto ***P*** e a borda da circunferência maior para 𝜃 variando no intervalo [2𝜋,0], isso porque a parametrização foi feita no sentido anti-horário.

Para isso, precisamos determinar o valor da seguinte integral:

Para voltar ao intervalo [0,2𝜋], vamos utilizar um truque que consiste em colocar um sinal de menos na frente da integral, como mostra abaixo:

Vamos separar a integral em 3 partes:

Vamos resolver uma parte por vez:

Usando a identidade , temos:

Aplicando a substituição , vamos integrar:

Agora a segunda parte:

Utilizando a identidade , temos:

Separando essa segunda parte em duas partes, temos:

Resolvendo a primeira parte, temos:

Resolvendo a segunda parte, temos:

Assim, resolvemos a segunda parte da nossa equação principal:

Por fim, resolvendo a terceira parte da equação principal, temos:

Usando a igualdade , temos:

Aplicando a substituição , temos:

Assim, resolvemos a terceira parte da equação principal:

Com todas as partes resolvidas, podemos encontrar o valor da área:

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Epicicloide - <https://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid>
2. Imagem epicicloide razão 3 exemplo - <https://cf.ydcdn.net/latest/images/main/A5epicycloid.jpg>
3. Epicicloide vídeo - <https://www.youtube.com/watch?v=Go9UbNTr_fI&t=143s>
4. Prostaférese - <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/formulas-transformacao-soma-produto.htm>