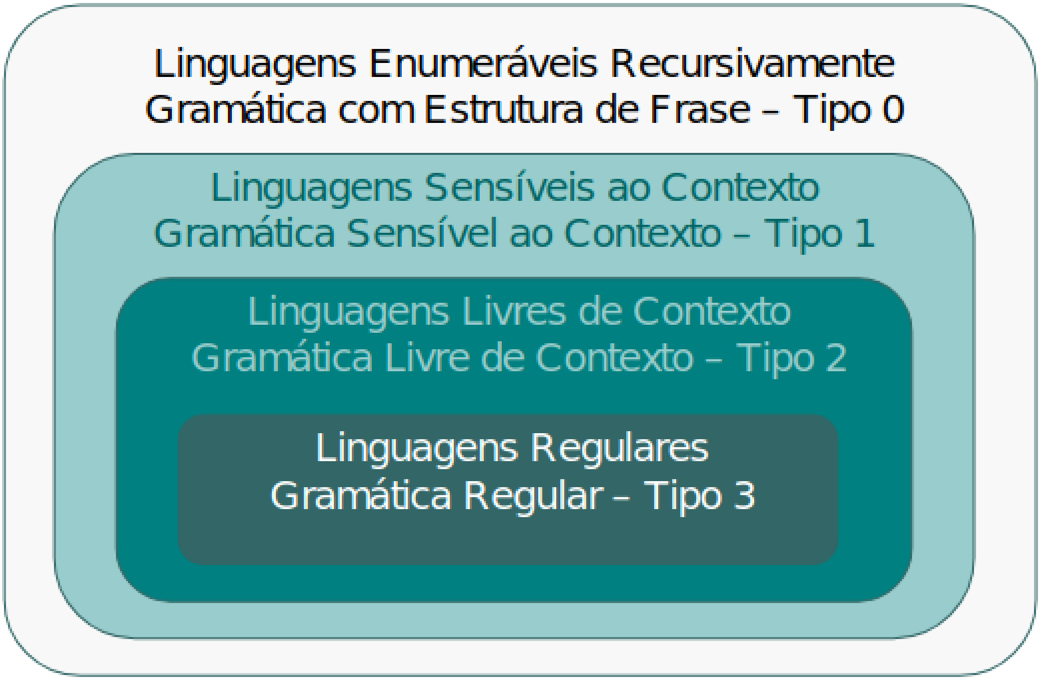
Autômato com Pilha

Guilherme Henrique de Souza Nakahata
guilhermenakahata@gmail.com

Autômato com Pilha

- São máquinas capazes reconhecer as Linguagens Livres de Contexto;
- Possuem um maior poder que os Autômatos Finitos, possuindo um “espaço de armazenamento” extra que é utilizado durante o processamento da cadeia;
- Possui uma pilha que caracteriza uma memória auxiliar onde pode-se inserir e remover informações;
- Mesmo pode de reconhecimento das GLC’S.

Autômato com Pilha



Autômato com Pilha

- Exemplo de LLC: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Um AF não é capaz de reconhecer esse tipo de linguagem devido a sua incapadidade de “recordar” (memoriza) informação sobre a cadeia analisada;
- Autômatos com Pilha (AP) possuem uma pilha para armazenar informação, adicionando poder aos AF’s.

Autômato com Pilha

- Definição:

AP com estado final é uma sextupla $<\Sigma,\Gamma,S,S_0,\delta,B>$, onde:

Σ é o alfabeto de entrada do AP;

Γ é o alfabeto da pilha;

S é o conjunto finito não vazio de estados do AP;

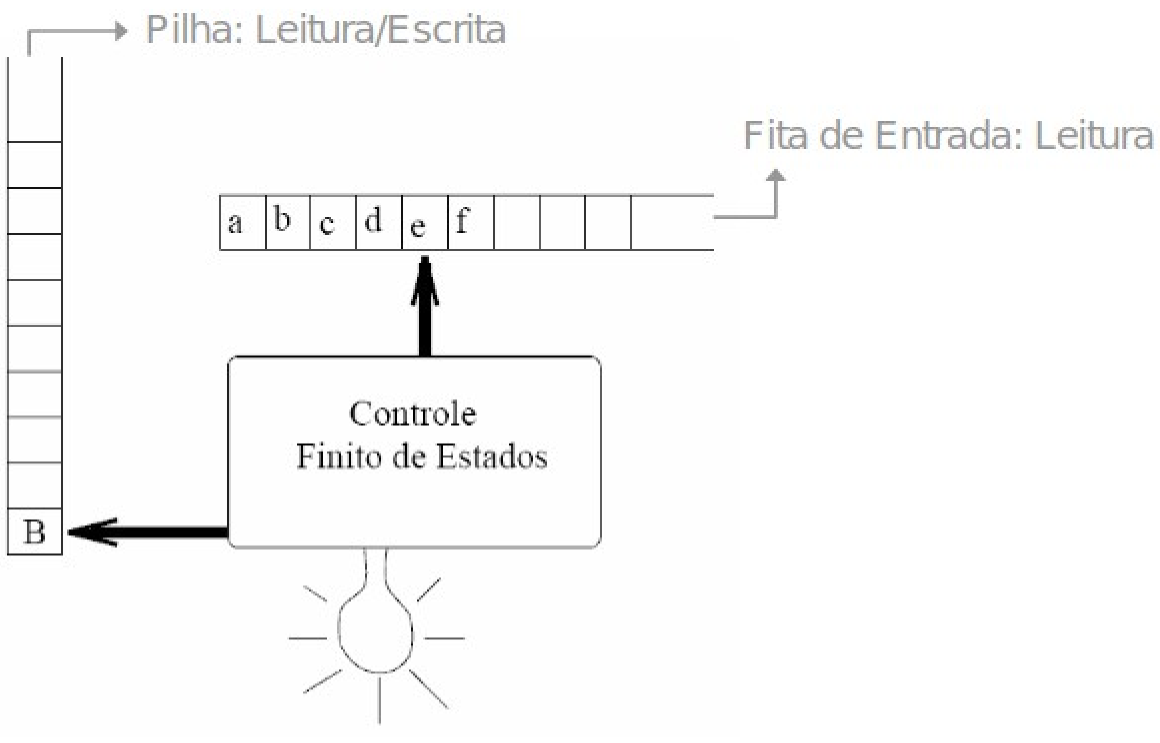
S_0 é o estado inicial, $S_0 \in S$;

δ é a função de transição de estados,

δ: $S \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow$ conjunto de subconjuntos finitos de $S \times \Gamma^*$

B é o símbolo da base da pilha, $B \in \Gamma$.

Autômato com Pilha



Abstração de um AP como reconhecedor de cadeias (DELAMARO, 1998).

Autômato com Pilha

- Ao contrário da fita de entrada, a pilha pode ser lida e alterada durante um processamento;
- O autômato verifica o conteúdo do topo da pilha, retira-o e substitui por uma cadeia $\alpha \in \Gamma^*$.
- Se $\alpha = A$, e $A \in \Gamma$, então o símbolo do topo é substituído por A e a cabeça de leitura escrita continua posicionada no mesmo lugar;
- Se $\alpha = A_1A_2...A_n$, $n>1$ então o símbolo do topo da pilha é retirado, sendo A_n colocado em seu lugar, A_{n-1} na posição seguinte, e assim por diante. A cabeça é deslocada para a posição ocupada por A_1 que é então o novo topo da pilha;
- Se $\alpha = \lambda$ então o símbolo do topo da pilha é retirado, fazendo a pilha decrescer.

Autômato com Pilha

- A função de transição δ, é função do estado corrente, da letra corrente na fita de entrada e do símbolo no topo da pilha;
- Além disso, esta função determina não só o próximo estado que o AP assume, mas também como o topo da pilha deve ser substituído;
- O AP inicia sua operação num estado inicial especial denotado por S_0 e com um único símbolo na pilha, denotado por B.

Autômato com Pilha

- A configuração de um AP é dada por uma tripla <s, x, α> onde s é o estado corrente, x é a cadeia da fita que falta ser processada e α é o conteúdo da pilha, com o topo no início de α;
- O AP anda ou move-se de uma configuração para outra através da aplicação de uma função de transição.

Autômato com Pilha

- Se o AP está na configuração $<s,ay,A\beta>$ e temos que $\delta(s,a,A)=<t,\gamma>$, então o AP move-se para a configuração $<t,y,\gamma\beta>$ e denota-se

$$<s,ay,A\beta> \vdash <t,y,\gamma\beta>$$

- Se o AP move-se de uma configuração $<s_1,x_1,\alpha_1>$ para uma configuração $<s_2,x_2,\alpha_2>$ por meio de um número finito de movimentos, denotamos

$$<s_1,x_1,\alpha_1> \vdash^* <s_2,x_2,\alpha_2>$$

- Se o valor de δ para uma determinada configuração for $\emptyset$ o AP pára.

Autômato com Pilha

- Note que, segundo esta definição, AP’s não possuem estados finais como os AF’s;
- Assim, uma cadeia x é aceita se, ao chegar ao final do processamento da mesma, a pilha estiver vazia, independentemente do estado em que o AP se encontra;

Autômato com Pilha

- Formalmente temos:

- Dado o AP $P = <\Sigma,\Gamma,S,S_0,\delta,B>$ e a cadeia x sobre Σ, diz-se que x é aceita por P se existe $s \in S$ tal que $<S_0,x,B> \vdash^* <s,\lambda, \lambda>$. Caso contrário, x é rejeitada.
- Dado o AP $P = <\Sigma,\Gamma,S,S_0,\delta,B>$, a linguagem L(P) definida por P é$\{x \in \Sigma^*| \exists s \in S \exists <S_0,x,B> \vdash^* <s,\lambda, \lambda>\}$

Autômato com Pilha

- Exemplo:

  Descrição formal para a linguagem livre de contexto:

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

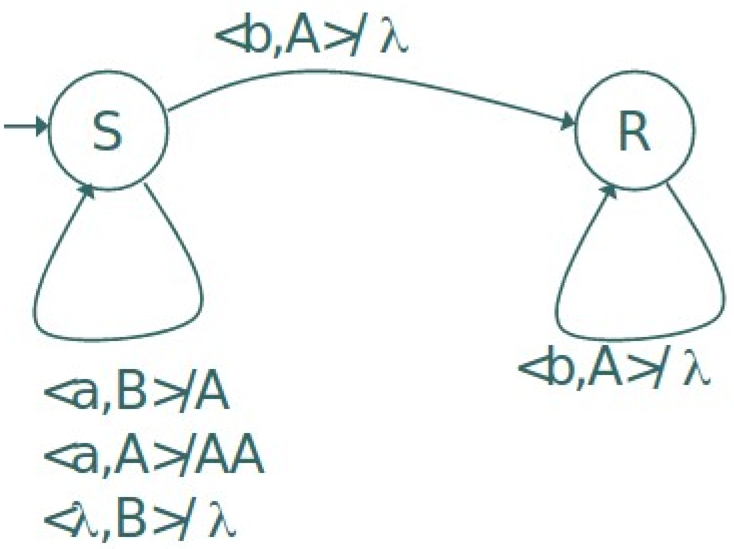
$\Sigma = \{a,b\}$;

$\Gamma = \{A,B\}$;

$S = \{S,R\}$;

$S_0 = S$;

$B = B$.



Autômato com Pilha

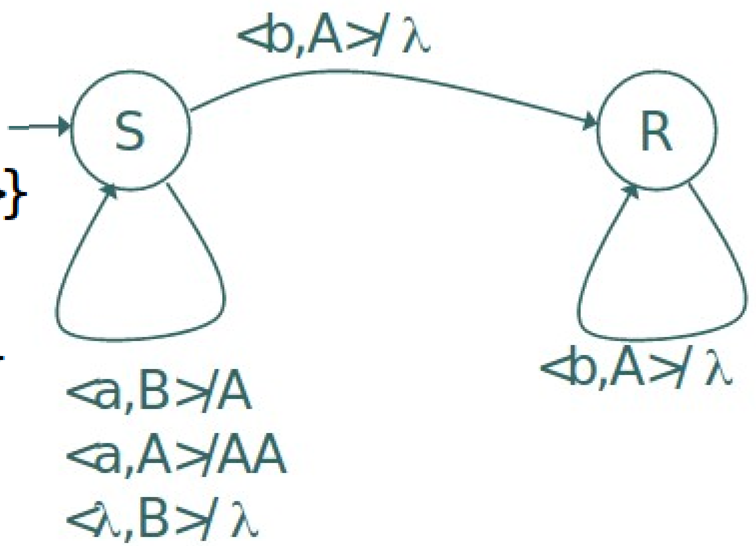
- Exemplo:

  Descrição formal para a linguagem livre de contexto:

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$\Delta =$

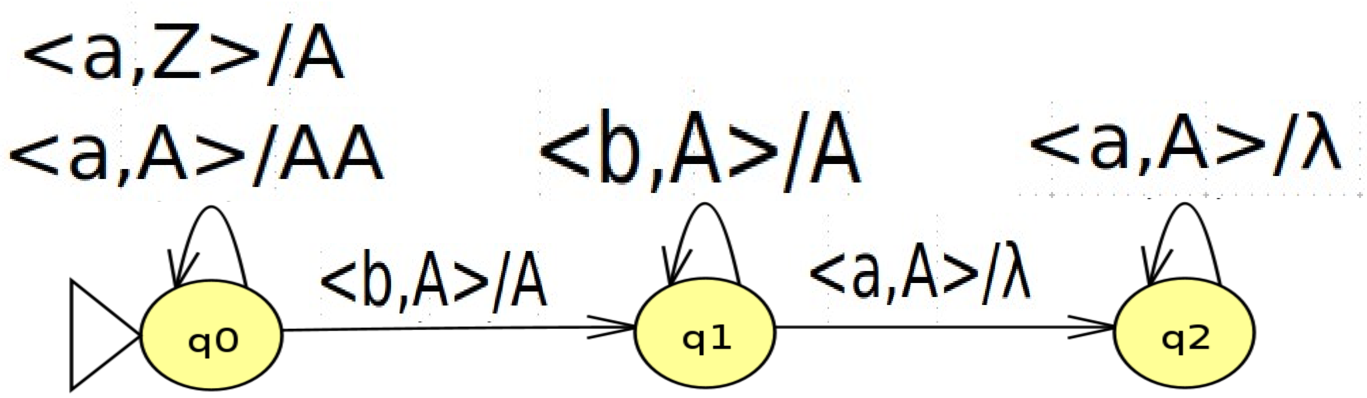
$$\delta(S,a,B) = \{\langle S,A \rangle\}$$
$$\delta(S,a,A) = \{\langle S,AA \rangle\}$$
$$\delta(S,b,A) = \{\langle R,\lambda \rangle\}$$
$$\delta(R,b,A) = \{\langle R,\lambda \rangle\}$$
$$\delta(S,\lambda,B) = \{\langle S,\lambda \rangle\}$$



Autômato com Pilha

Exemplo:
Descrição formal para a linguagem livre de contexto:

$$\{a^n b^m a^n \mid n > 0, m > 0\}$$



Base: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo:

  Descrição formal para a linguagem livre de contexto:

$$\{a^n b^m a^n \mid n > 0, m > 0\}$$

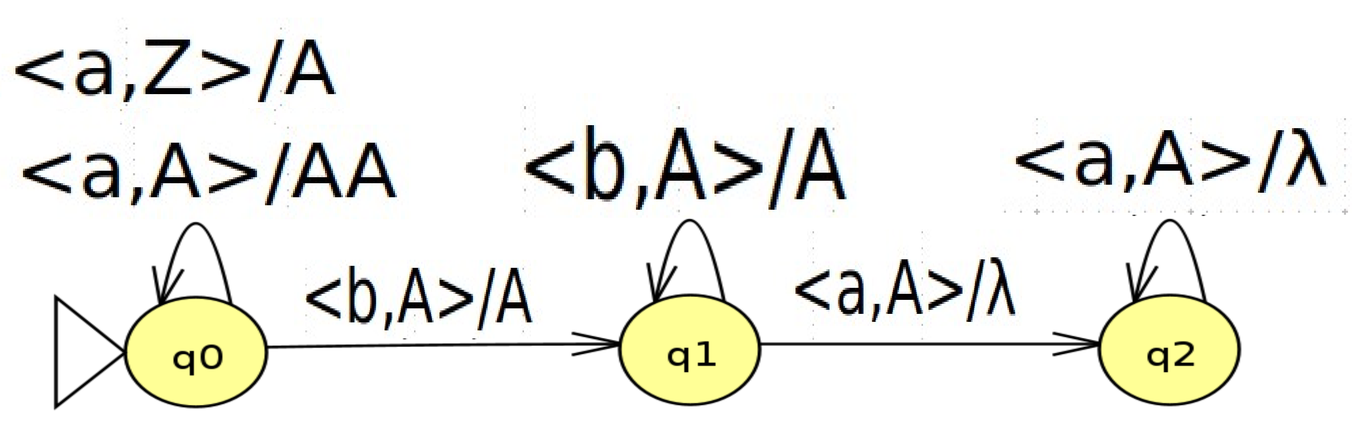
$\Sigma = \{a,b\}$;

$\Gamma = \{A,Z\}$;

S = {q0,q1,q2};

$S_0 = q0$;

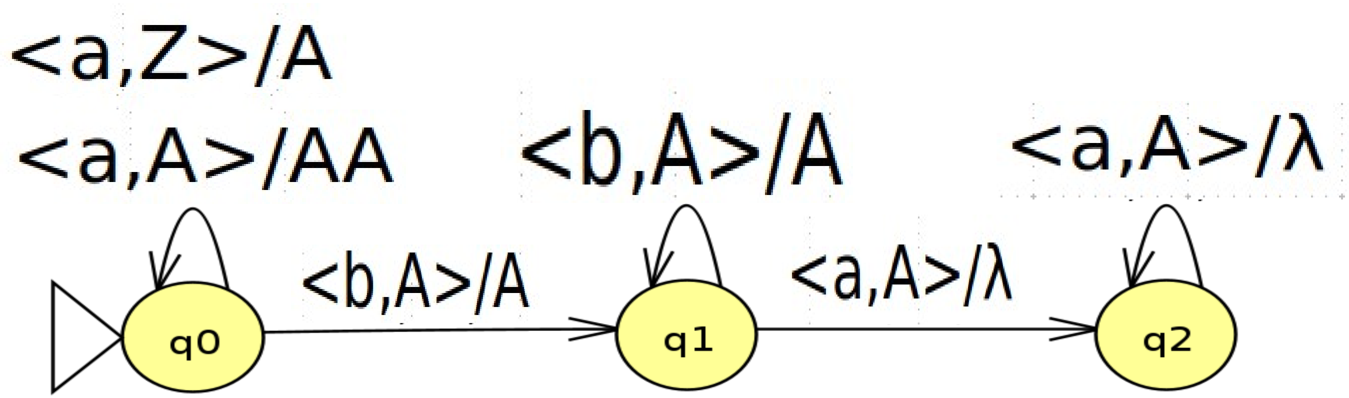
B = Z.



Autômato com Pilha

- Exemplo:

Descrição formal para a linguagem livre de contexto:



Δ =

δ(q0,a,Z) = {<q0,A>}

δ(q0,a,A) = {<q0,AA>}

δ(q0,b,A) = {<q1,A>}

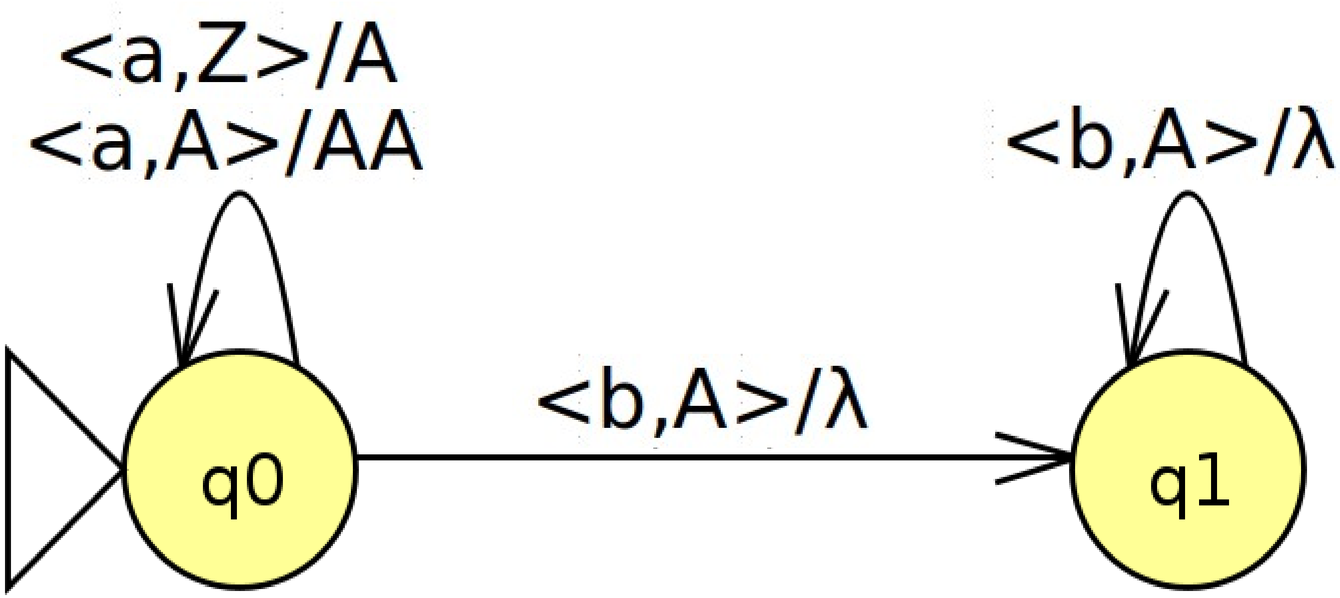
δ(q1,b,A) = {<q1,A>}

δ(q1,a,A) = {<q2,λ>}

δ(q2,a,A) = {<q2,λ>}

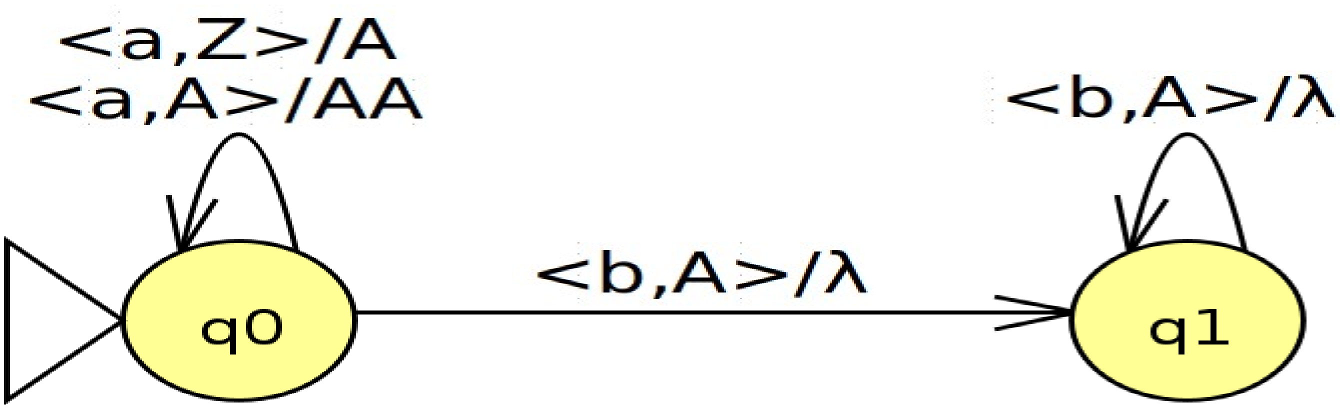
Autômato com Pilha

Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^n | n > 0\}$

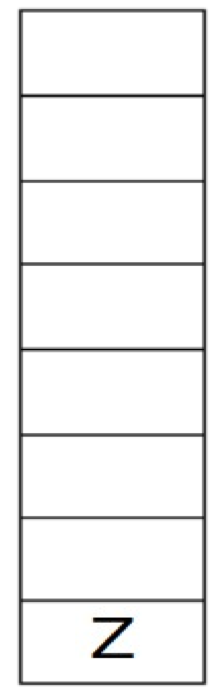


Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



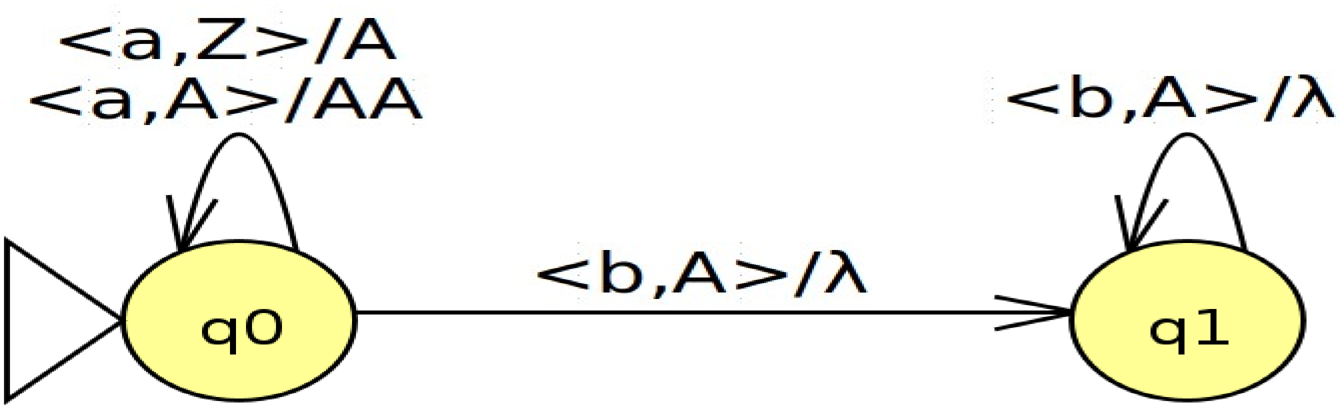
- Base da Pilha: Z



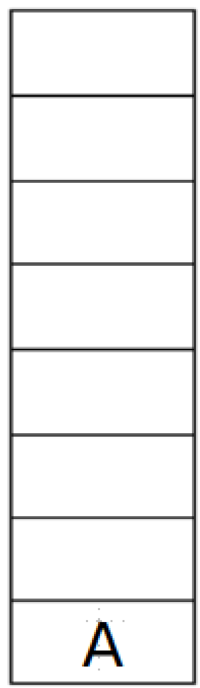
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



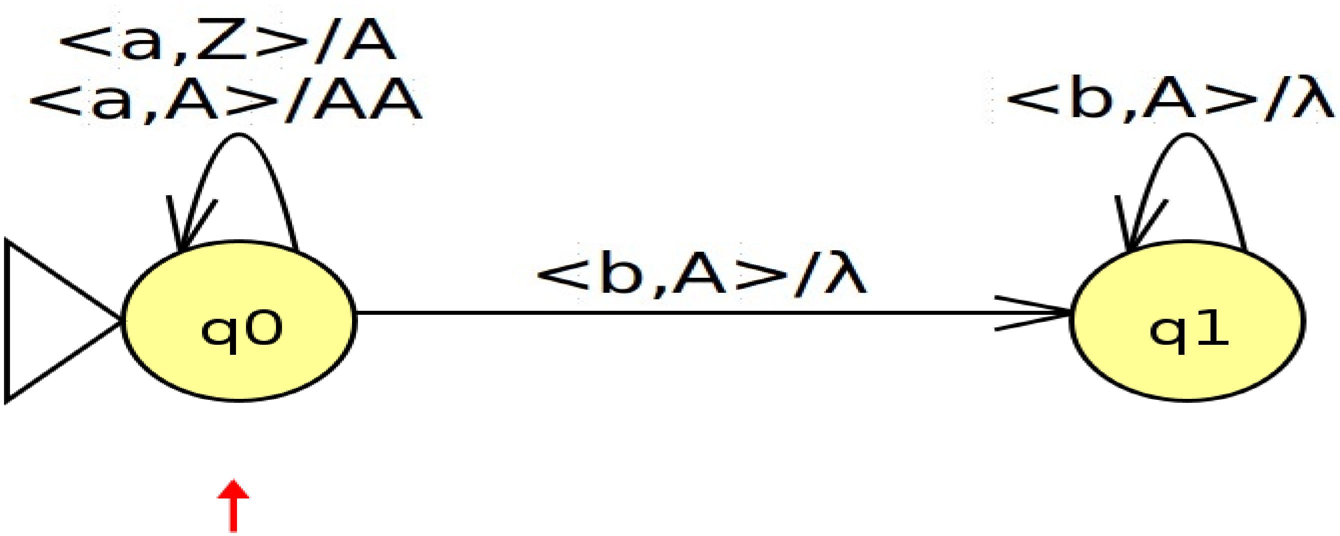
- Base da Pilha: Z



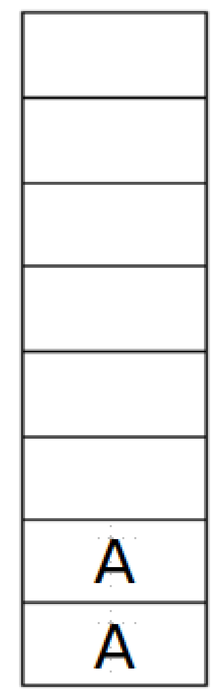
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



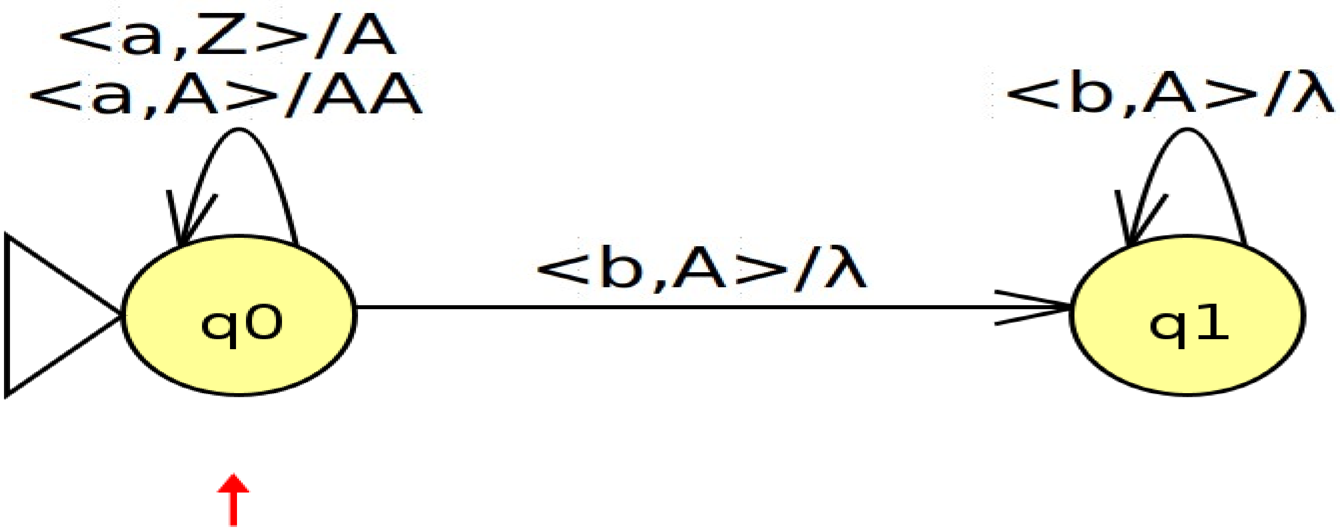
- Base da Pilha: Z

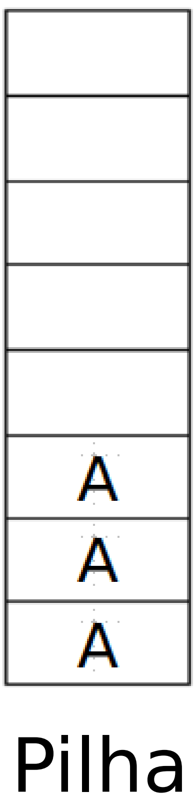


Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb

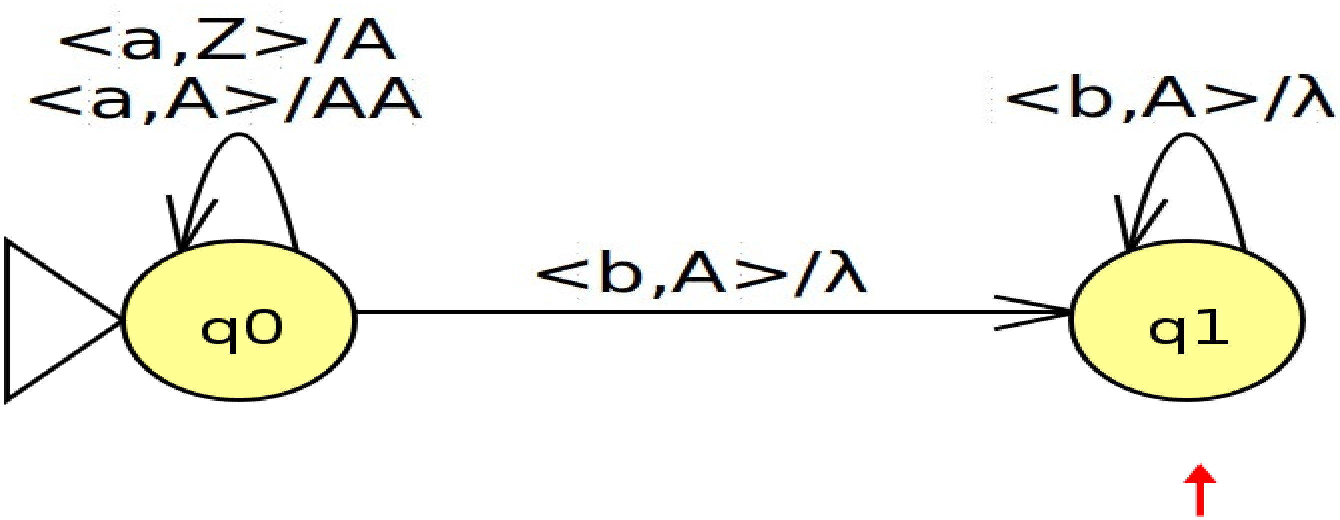




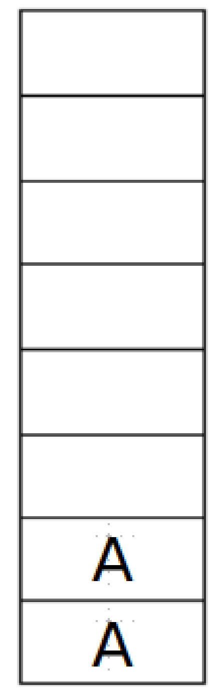
- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



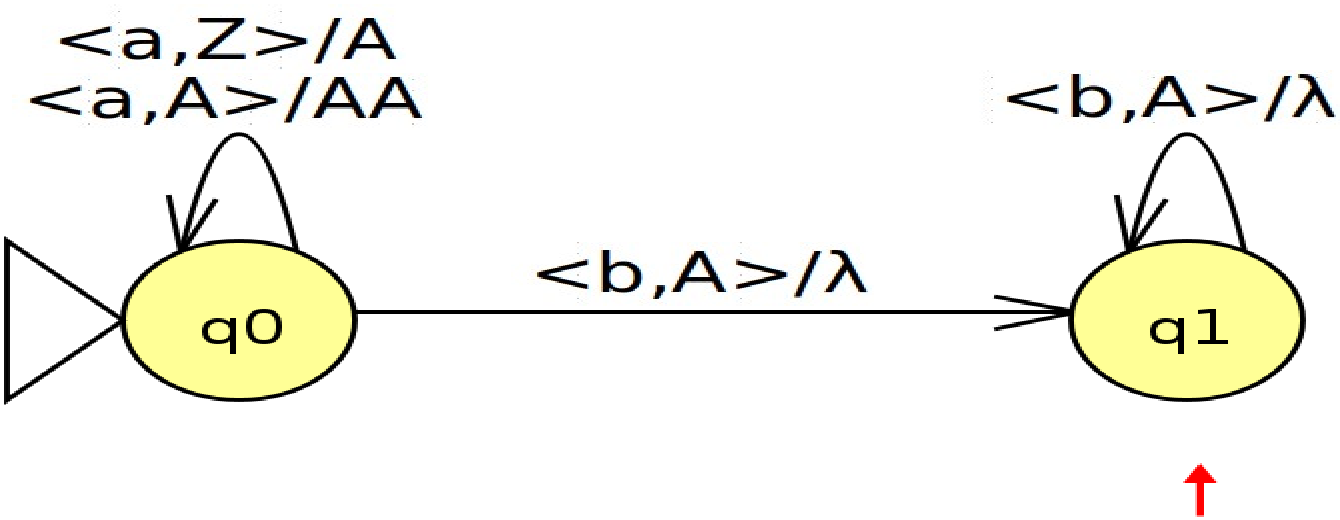
- Base da Pilha: Z



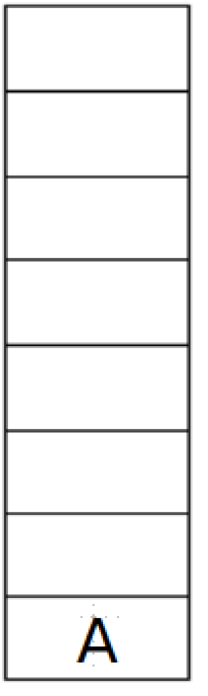
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



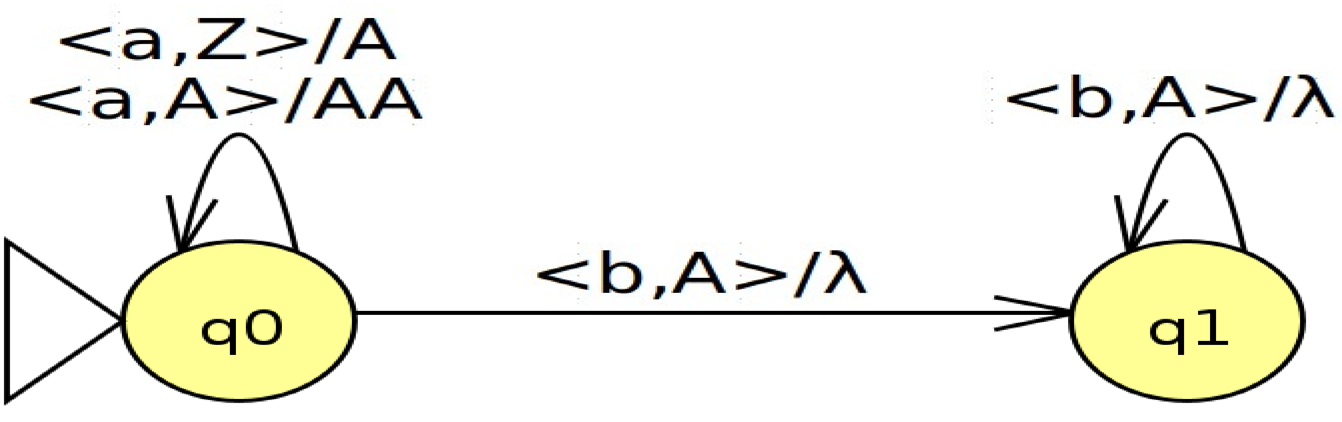
- Base da Pilha: Z



Pilha

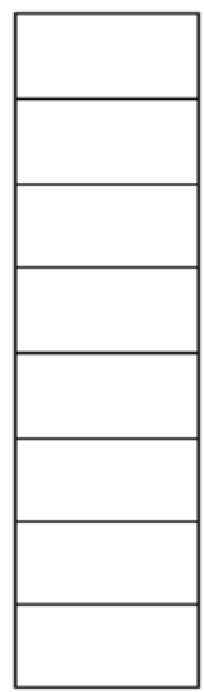
Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aaabbb



- Base da Pilha: Z

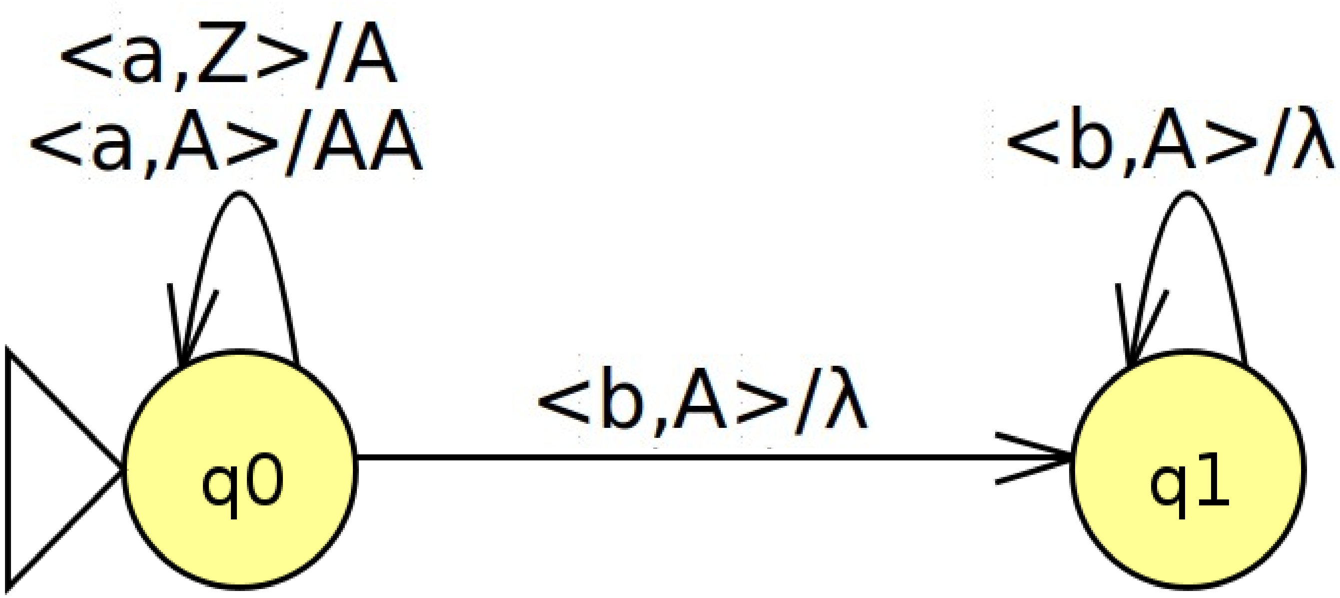
Cadeia aceita



Pilha

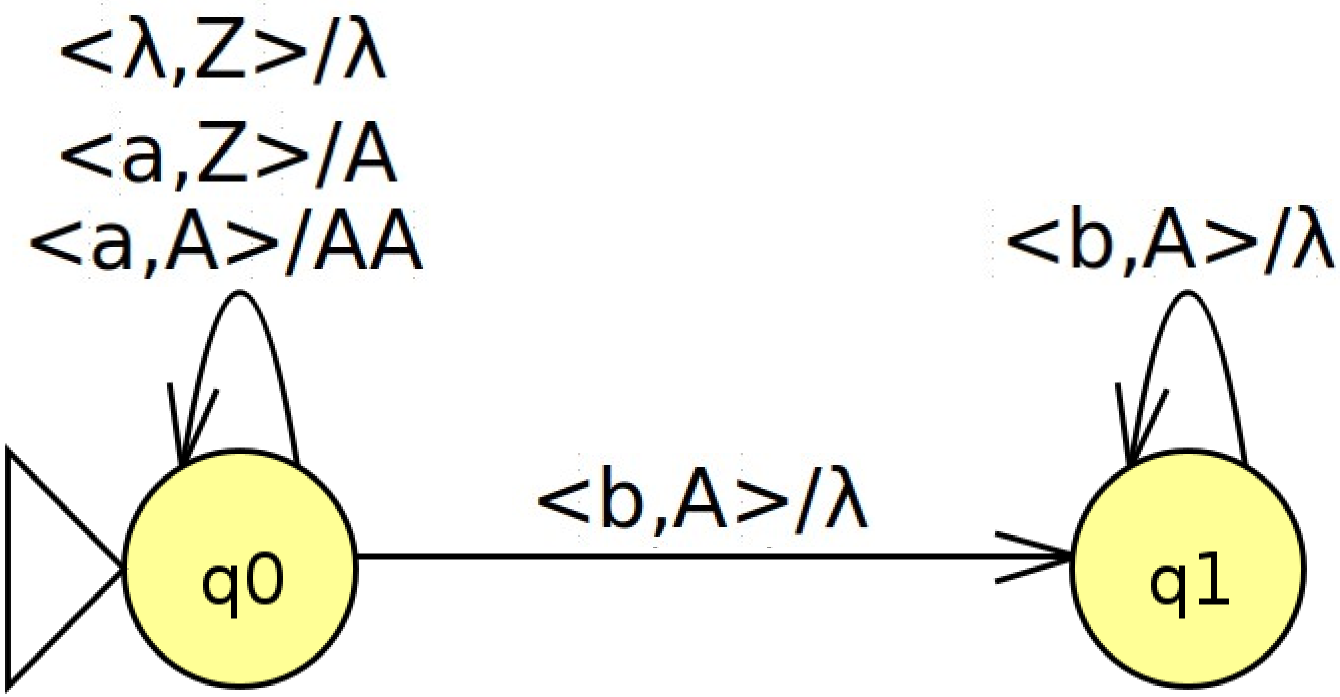
Autômato com Pilha

Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^n | n \geq 0\}$



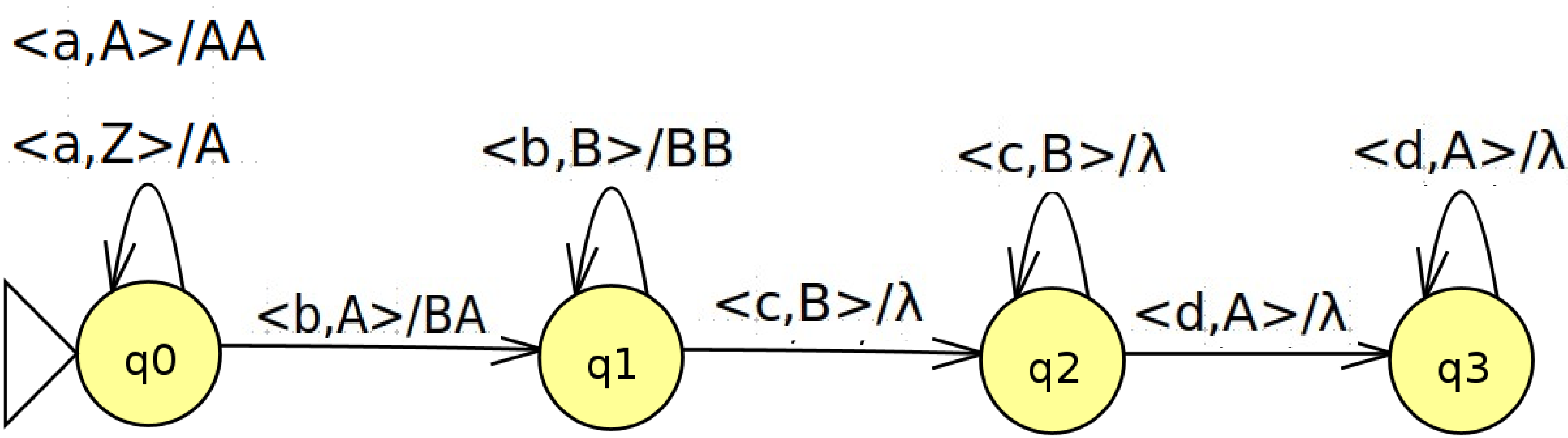
Autômato com Pilha

Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^n | n \geq 0\}$



Autômato com Pilha

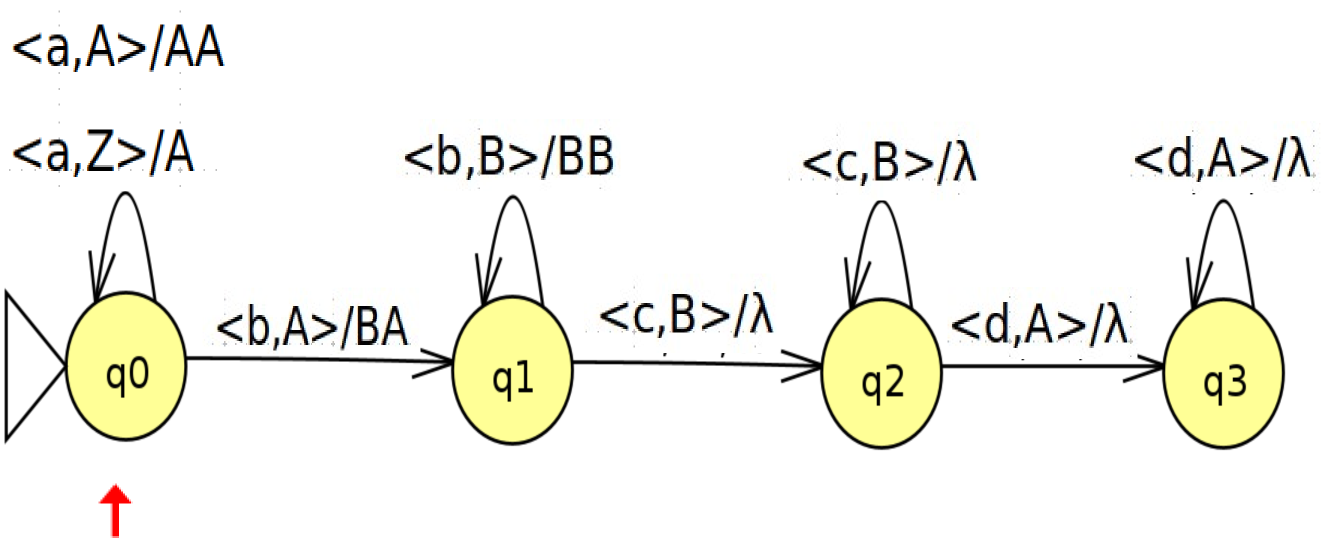
- Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^m c^m d^n\}$



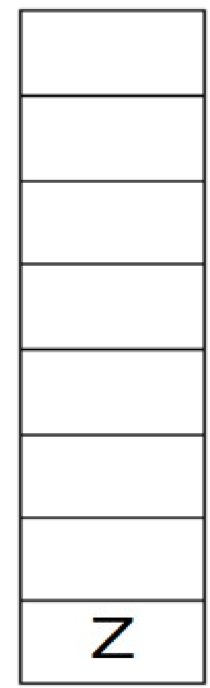
- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



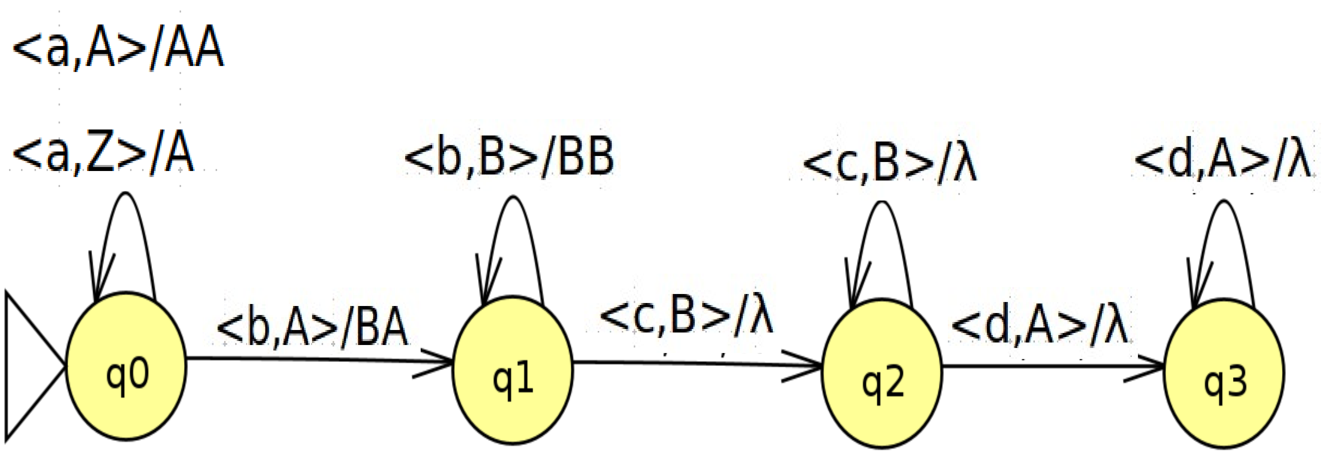
- Base da Pilha: Z



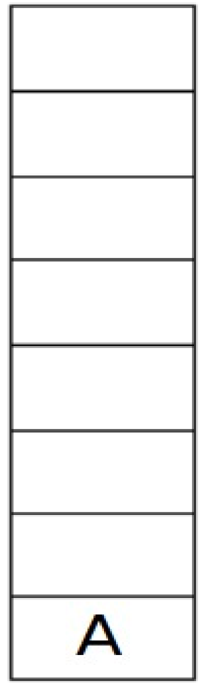
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



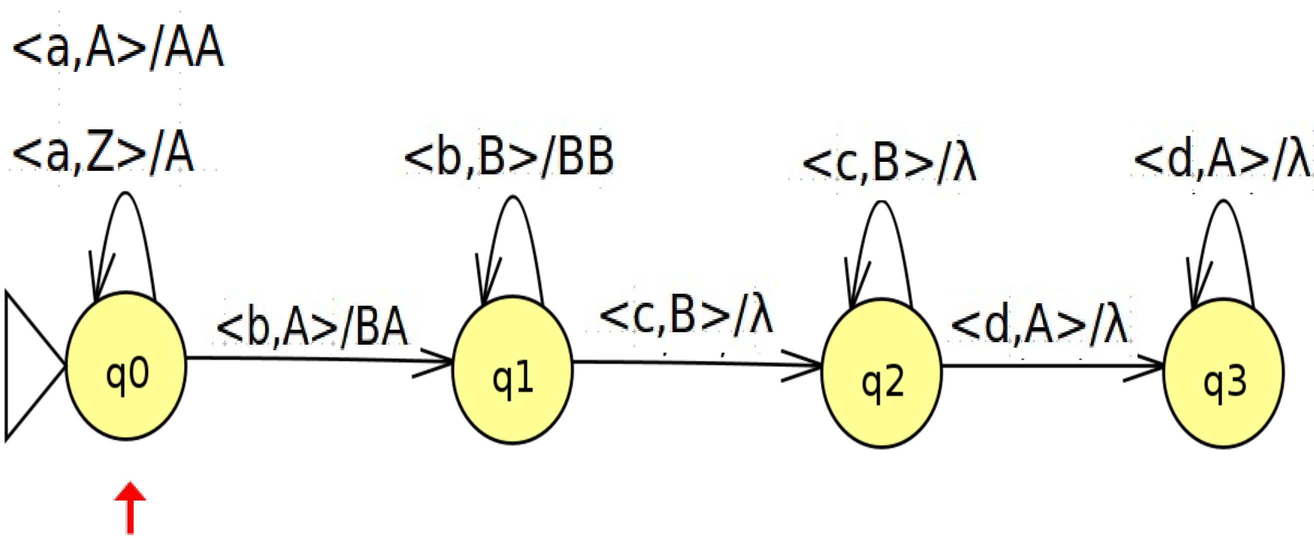
- Base da Pilha: Z



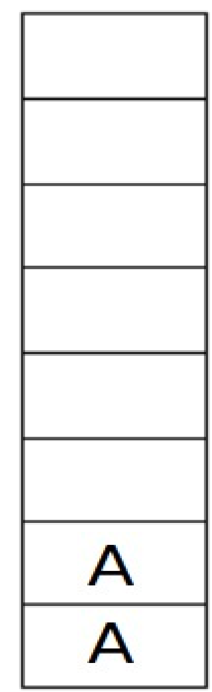
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



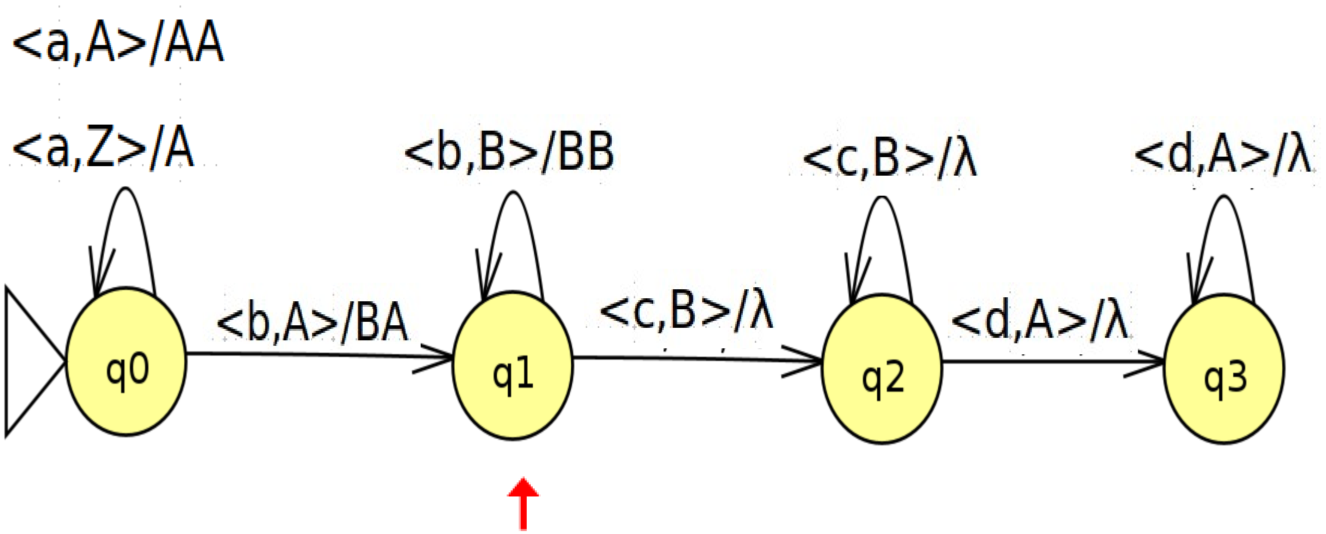
- Base da Pilha: Z



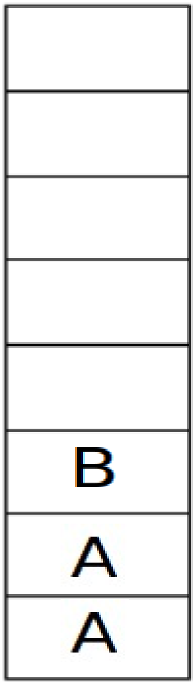
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



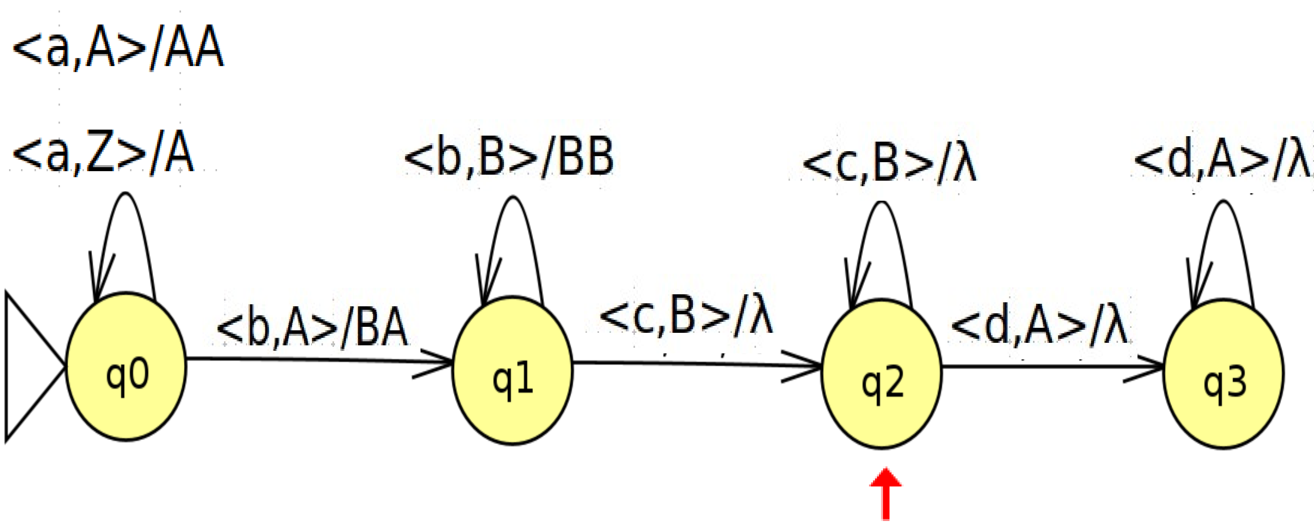
- Base da Pilha: Z

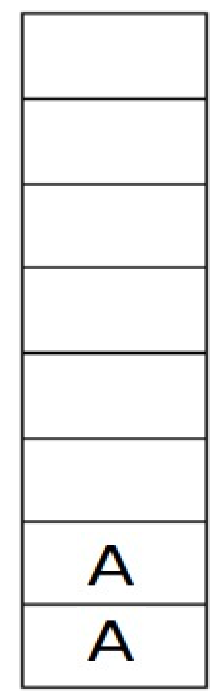


Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



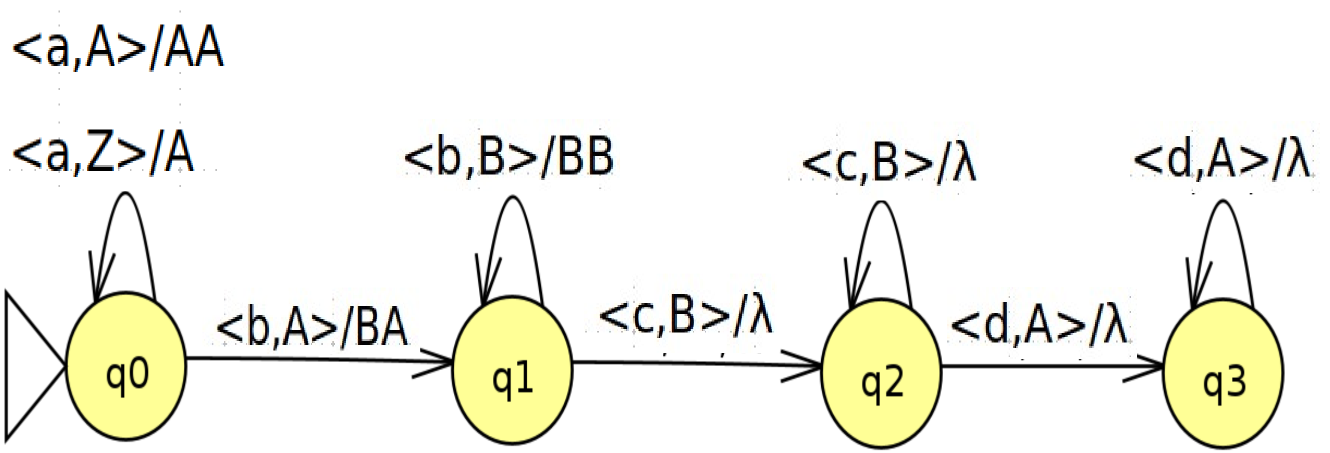


Pilha

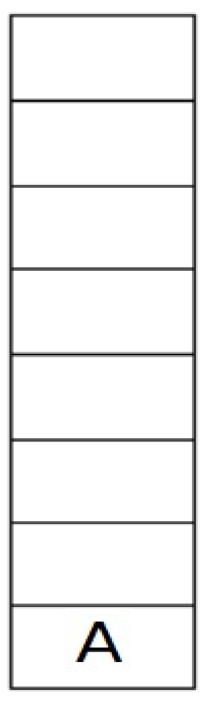
- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



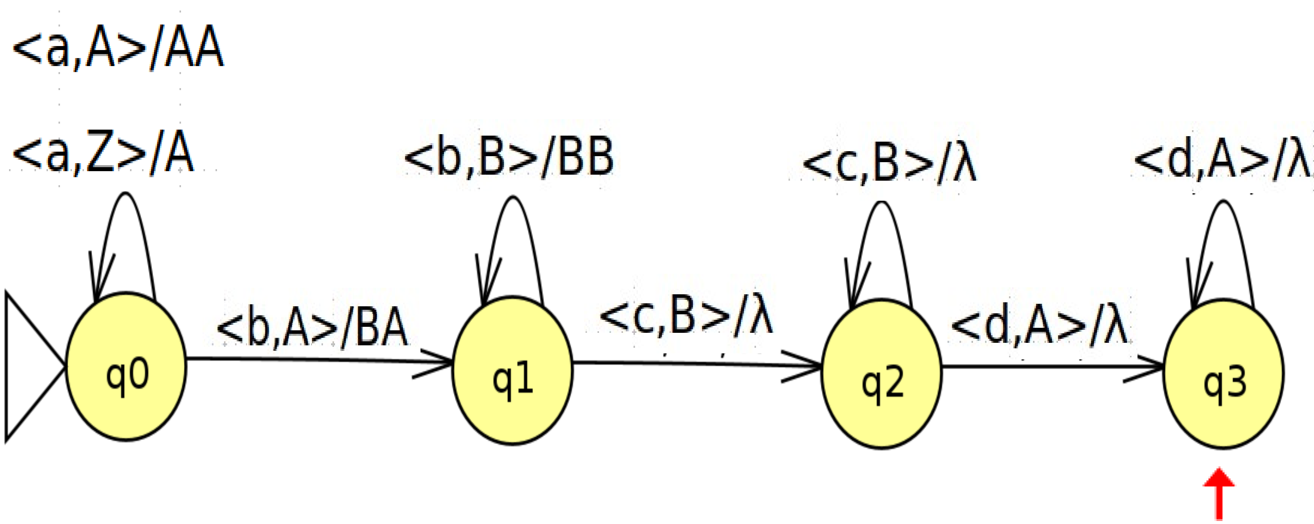
- Base da Pilha: Z



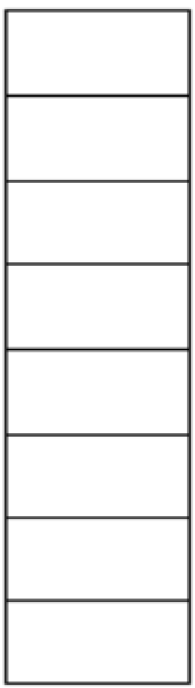
Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcdd



- Base da Pilha: Z

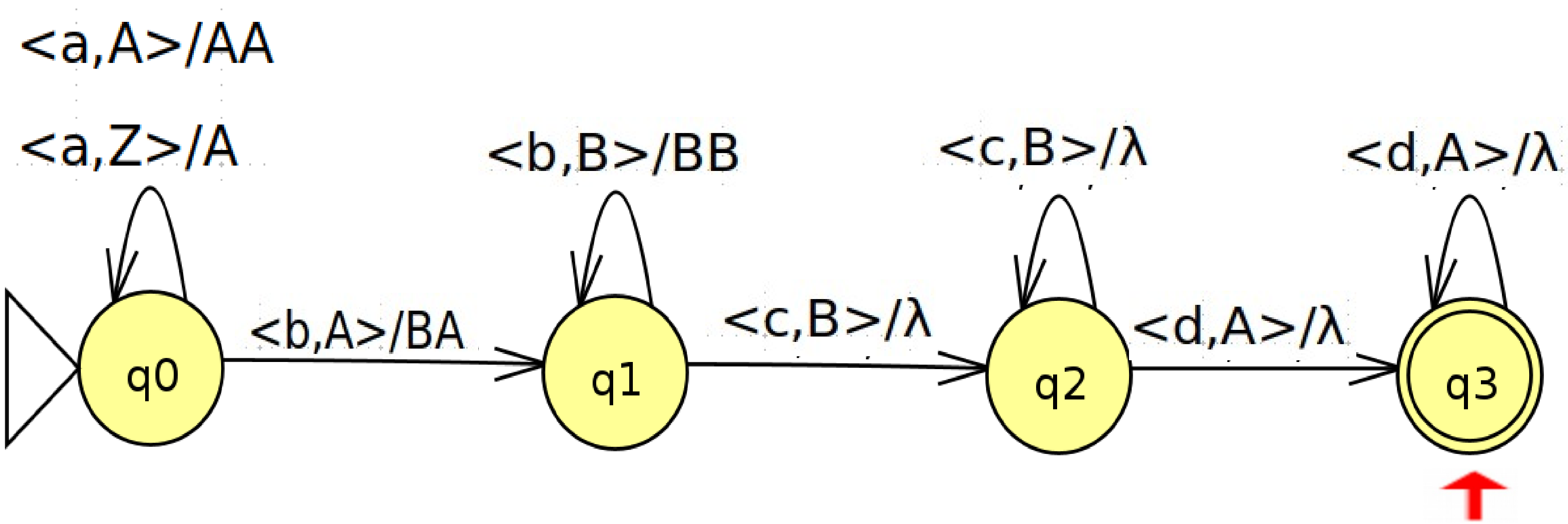


Cadeia aceita

Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^m c^m d^n\}$

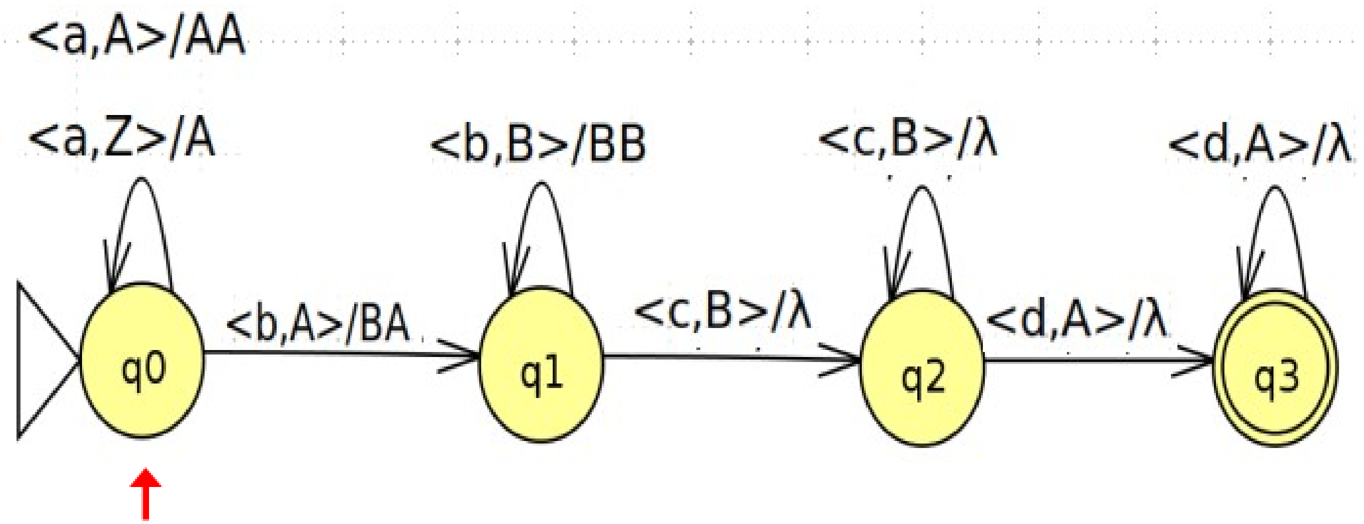


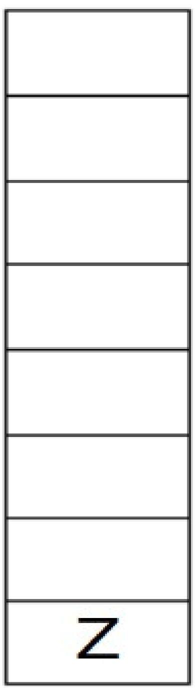
- Base da Pilha: Z

Só adicionar estado final?

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcd



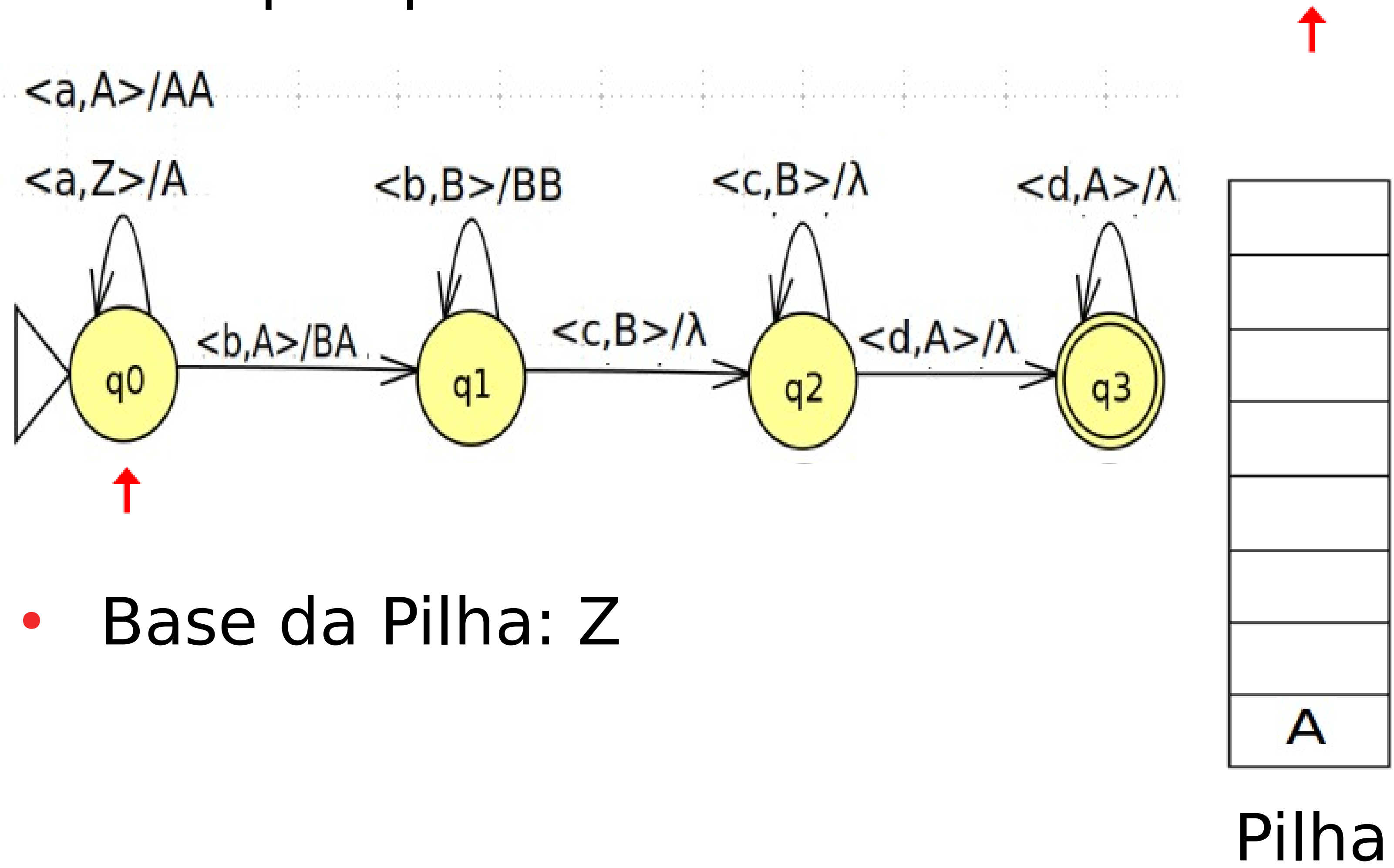


- Base da Pilha: Z

Pilha

Autômato com Pilha

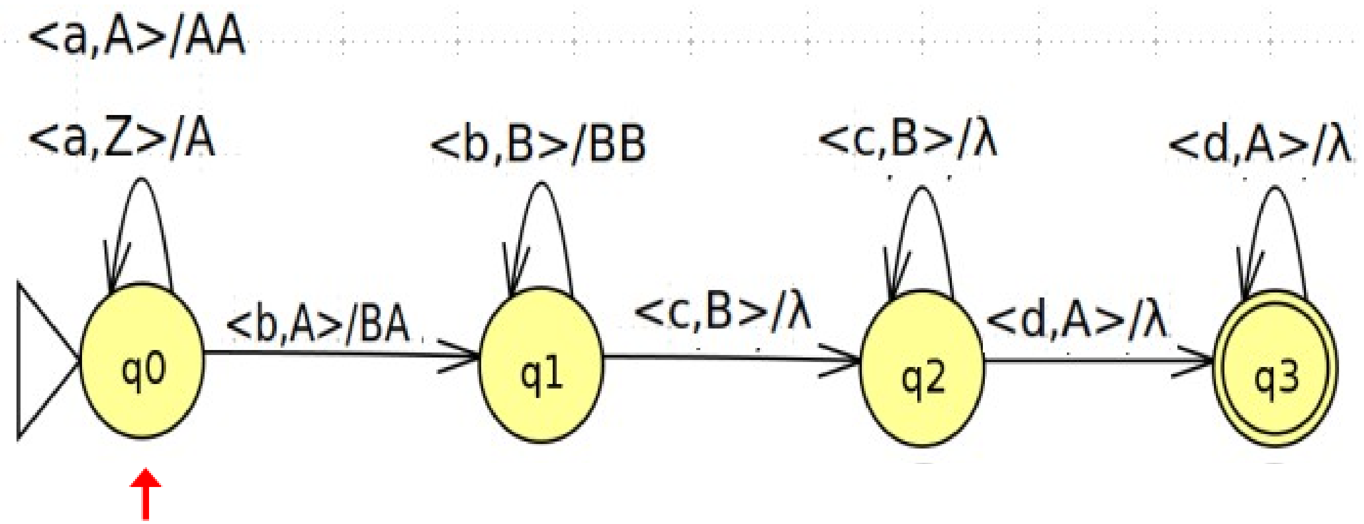
- Exemplo: processamento da cadeia aabcd



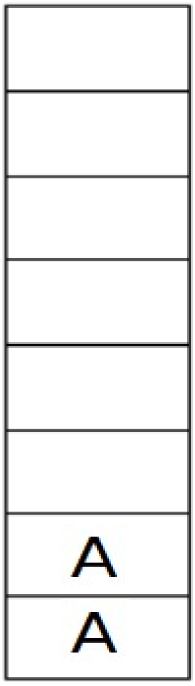
- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcd



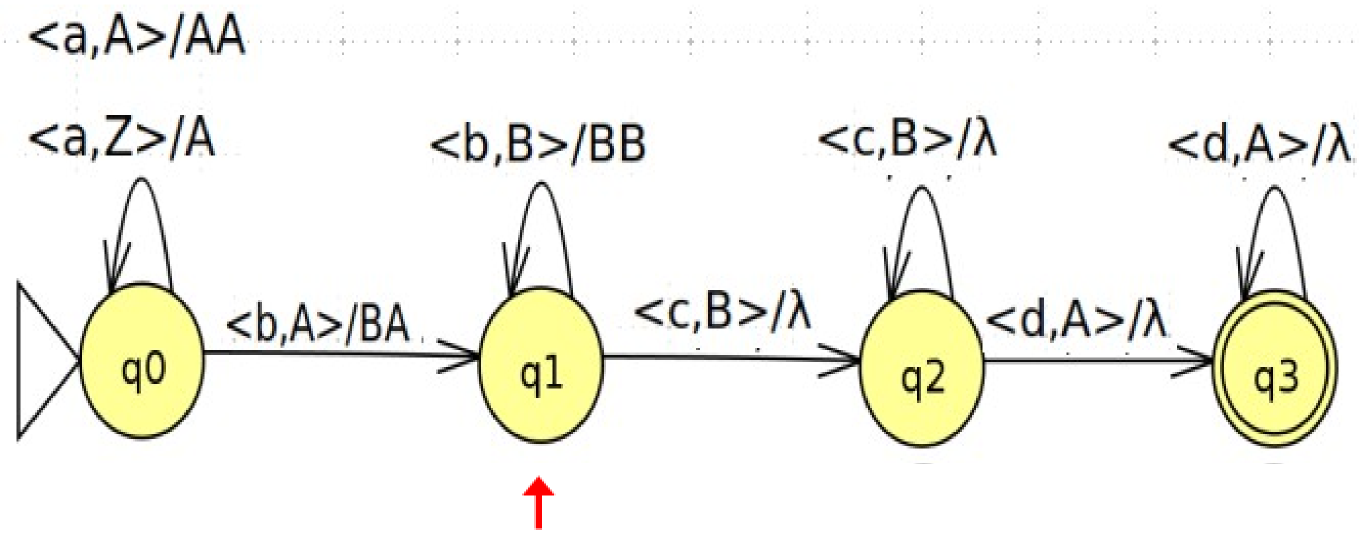
- Base da Pilha: Z

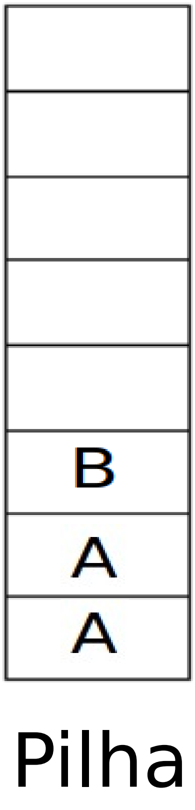


Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcd

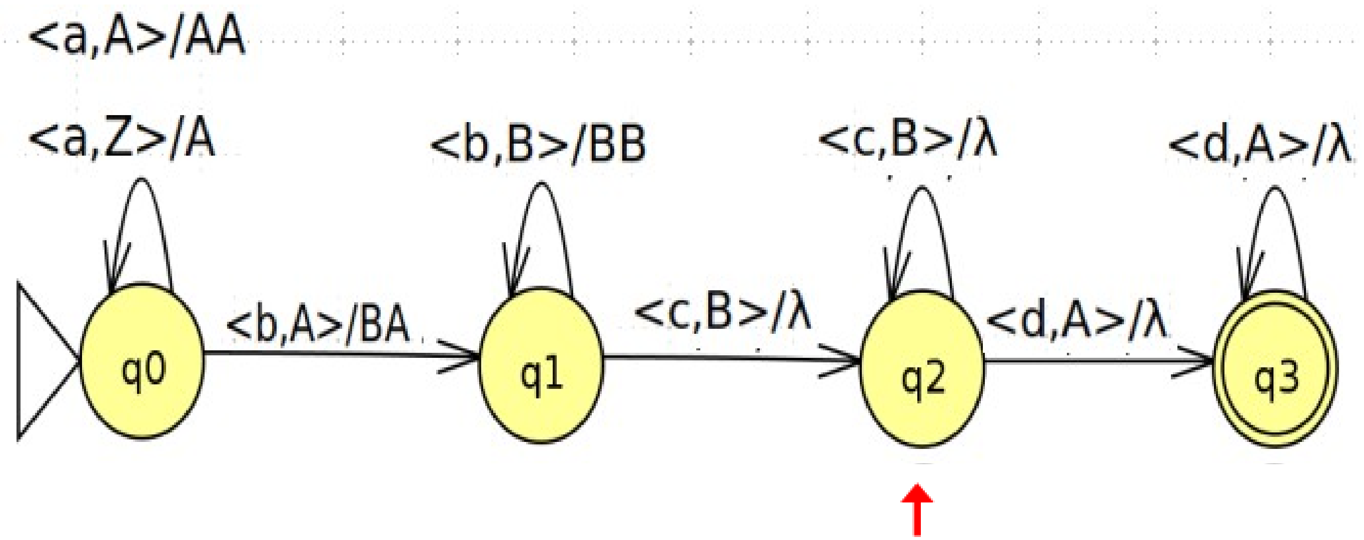




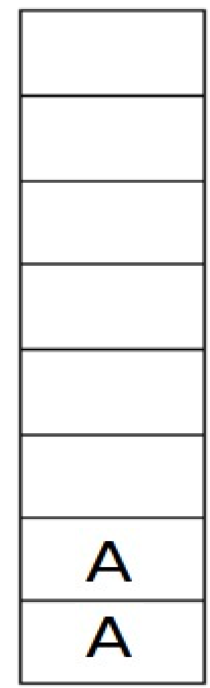
- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcd



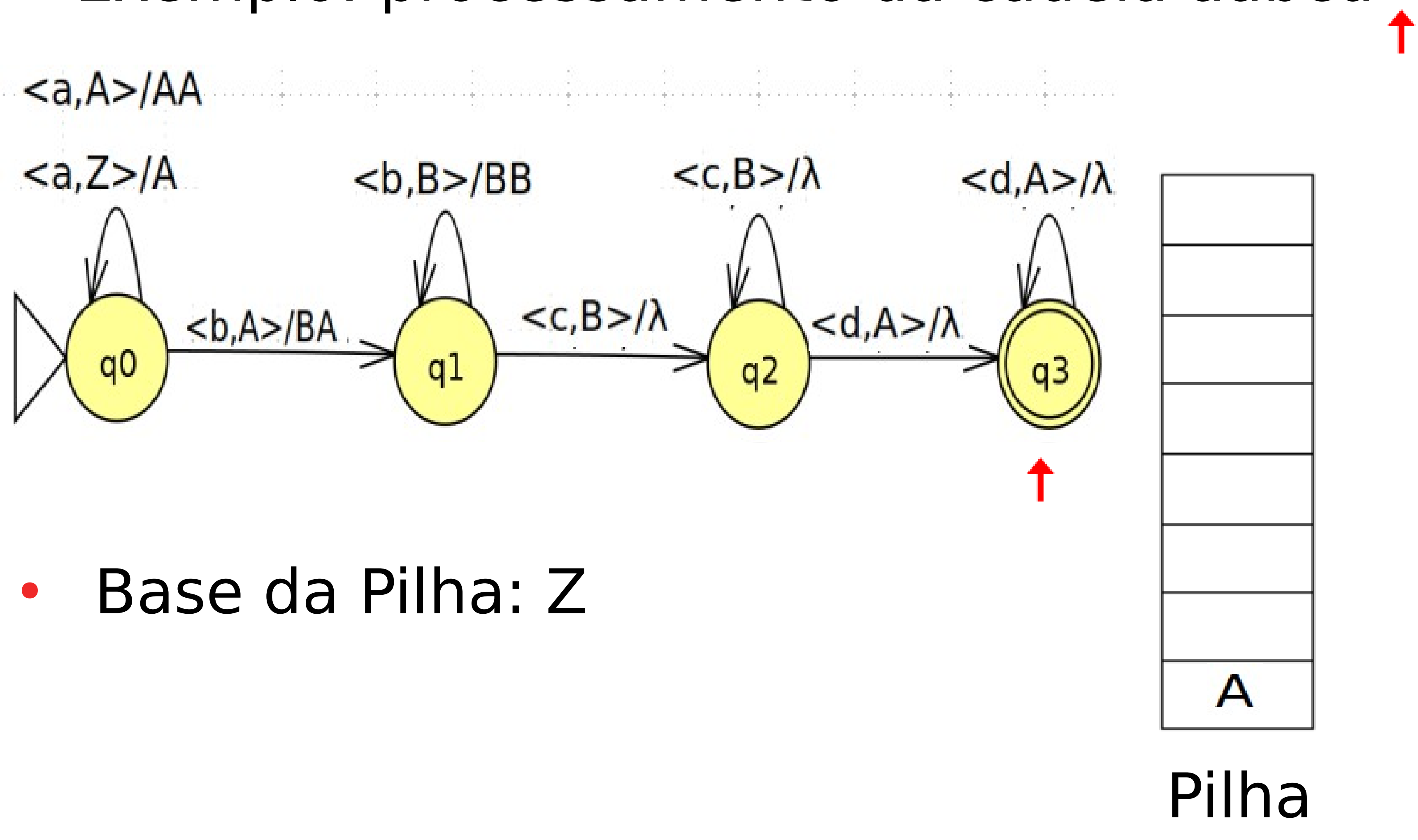
- Base da Pilha: Z



Pilha

Autômato com Pilha

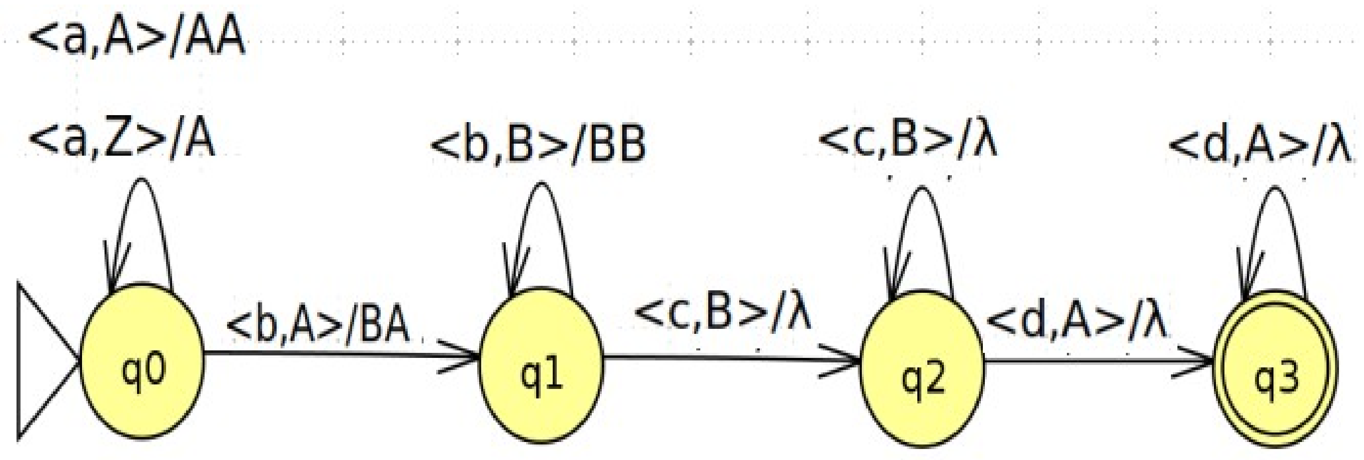
- Exemplo: processamento da cadeia aabcd



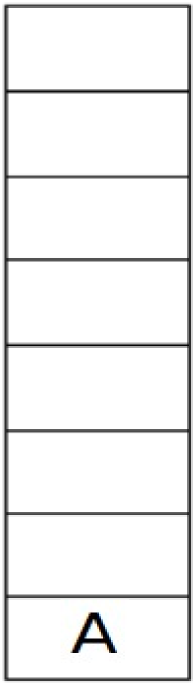
- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Exemplo: processamento da cadeia aabcd



- Base da Pilha: Z

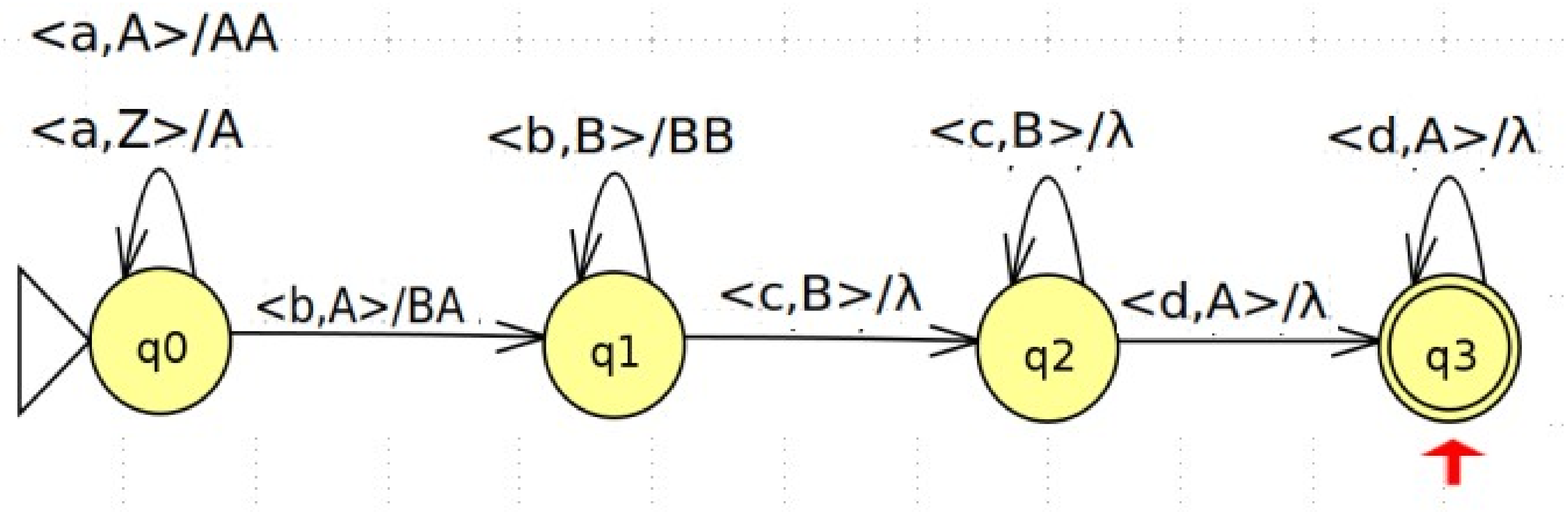


Cadeia aceita

Pilha

Autômato com Pilha

- Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^m c^m d^n\}$

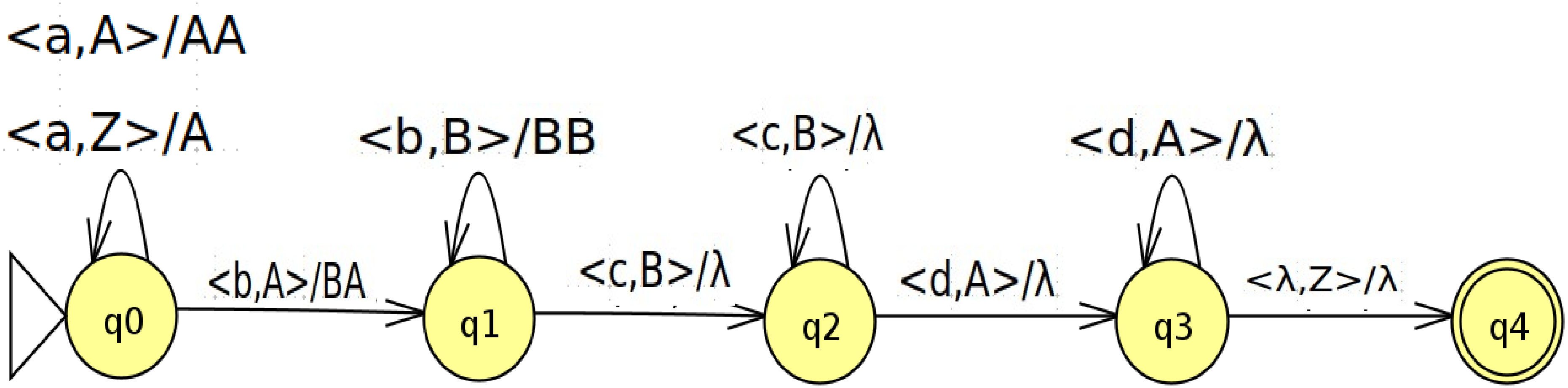


- Base da Pilha: Z

Só adicionar estado final?
Como arrumar?

Autômato com Pilha

- Exemplo AP para a linguagem $\{a^n b^m c^m d^n\}$



- Base da Pilha: Z

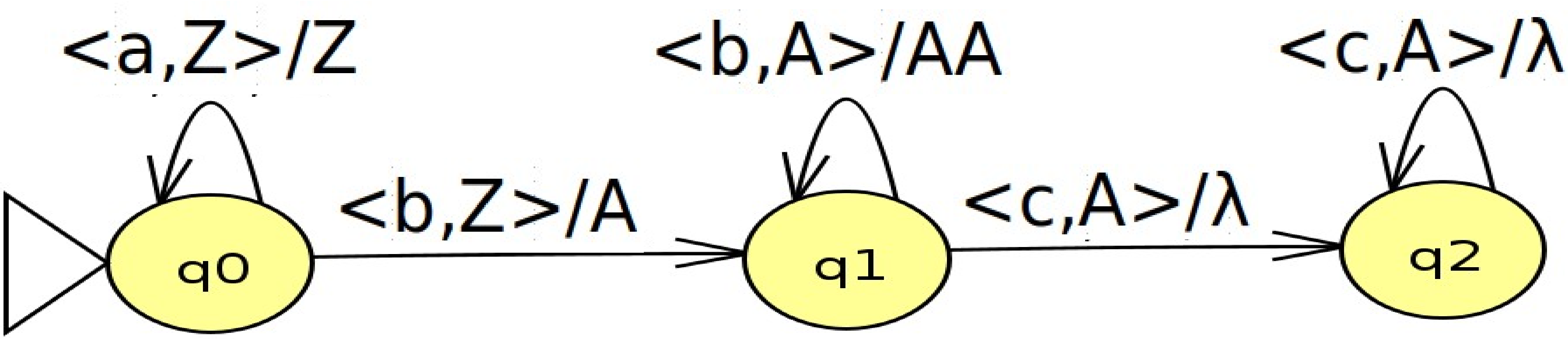
Autômato com Pilha

- Descreva um AP para a linguagem

$$\{a^n b^m c^m | n \geq 0, m > 0\}$$

Autômato com Pilha

- Descreva um AP para a linguagem



- Base da Pilha: Z

Autômato com Pilha

- Descreva um AP para a linguagem

$$\{X \in \{a, b\}^* \,|\, |X|_a = |X|_b\}$$

  Exemplos de cadeias:

  baba

  abab

  aabbaabb

- Resolução Próxima Aula.

Bibliografia

- SIPSER, M. Introdução à Teoria da Computação, 2a edição. Cengage Learning, 2007.
- DIVERIO, Tiarajú A.; MENEZES, Paulo Blauth. Teoria da computação: máquinas universais e computabilidade. Porto Alegre: Sagra Luzzatto, 2008. 205 p.
- MENEZES, Paulo Blauth. Linguagens Formais e Autômatos: Volume 3 da Série Livros Didáticos Informática UFRGS. Bookman Editora, 2009.
- DELAMARO, MARCIO. Linguagens Formais e Autômatos, notas didáticas.