Teoria da Computação

Guilherme Henrique de Souza Nakahata

Universidade Estadual do Paraná - Unespar

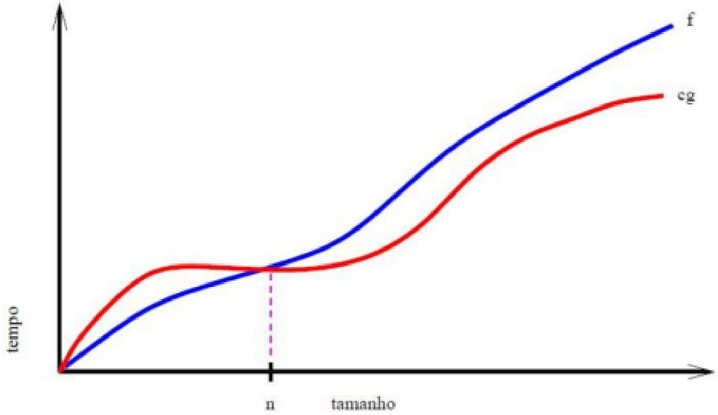
08 de Maio de 2024

Notação assintótica

- Notação Ω e Θ;
- $f(n) = \Omega(g(n))$ significa que $g(n)$ é um limite inferior assintótico para $f(n)$;
- $f(n) = \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ é limitada assintoticamente superior e inferiormente por $g(n)$;

- Seja f(n) e g(n) função dos números inteiros para os reais;
- Dizemos que f (n) é Ω(g(n)) se existirem constantes positivas c e n_0 tais que:
- $f(n) \geq cg(n)$;
- Para todo n $\geq n_0$.

Definição



Definição

- f (n) é Ω (g(n)) se $\exists$ c>0 e $n_0 > 0$ tais que f (n) $\geq$ c g(n), $\forall$ n $\geq n_0$;
- Ω(g(n)) = {f(n): $\exists$ c>0 e $n_0 > 0$ tais que f(n) $\geq$ cg(n), $\forall$ n $\geq n_0$.

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 0$, então $10 \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplos de Limites Inferiores Assintóticos

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 0$, então $10 \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, então $n \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplos de Limites Inferiores Assintóticos

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 0$, então $10 \geq 1$ para $n \geq n_0$.

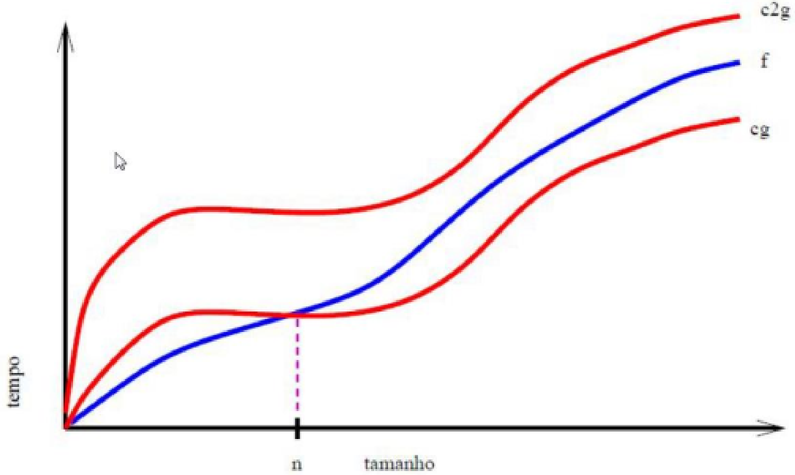
Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, então $n \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: Não, pois $\frac{1}{n}$ tende para zero (0), logo não é possível limitar inferiormente por uma constante positiva.

Definição

- Dizemos que f (n) é $\Theta(g(n))$ se existirem constantes positivas c_1 e c_2 e n_0 tais que:
- c1 $g(n) \leq f(n) \leq$ c2 $g(n)$;
- para todo n $\geq n_0$;
- Dizemos que f (n) $= \Theta(g(n))$ se somente se:
  - $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = O(g(n))$

Definição



Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\text{f(n)} = \Theta(\text{g(n)})$;

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$;
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) $=$ Θ(g(n));
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$;
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- n_0?
- c_1?
- c_2?

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$;
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- $n_0 = 1$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - 3$
- $c_1 \leq -2,5$;

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) = Θ(g(n));
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- $n_0 = 1$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - 3$
- $c_1 \leq -2,5$;
- $c_2 = ?$;

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) $= \Theta$(g(n));
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- $n_0 = 1$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - 3$
- $c_1 \leq -2,5$;
- $c_2 \leq -2,5$;

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2}$$

Notação assintótica e limite

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2}}{1}$$

Notação assintótica e limite

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
    - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
    - $f(n) = \Theta(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$$

Como o limite é uma constante finita, podemos concluir que $f(n) = \Theta(g(n))$.

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
  - $f(n) = O(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

  Como o limite é 0, podemos concluir que $f(n) = O(g(n))$.

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$
  - $f(n) = \Omega(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = n^3$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

  Como o limite é ∞, podemos concluir que $f(n) = \Omega(g(n))$.

Exercício:

- Determine se a função $f(n) = \log n$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = \sqrt{n}$;
- Determine se a função $f(n) = \sqrt{n}$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = n$;
- Determine se a função $f(n) = n^2$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = n^3$.

Exercício sobre Limites e Taxa de Crescimento

Exercício: Determine se a função $f(n) = \log n$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = \sqrt{n}$.

Resolução: Podemos usar limites para determinar a relação entre $f(n)$ e $g(n)$.

- Calculamos o limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.
- Se o limite for uma constante finita, então $f(n) = \Theta(g(n))$.
- Se o limite for 0, então $f(n) = O(g(n))$.
- Se o limite for ∞, então $f(n) = \Omega(g(n))$.

Calculamos o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

Esse limite é indeterminado. Podemos aplicar a regra de L'Hôpital, derivando numerador e denominador uma vez:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0$$

Como o limite é 0, podemos concluir que $f(n) = O(g(n))$.

Exemplo de Algoritmo com Custo

Algoritmo 1:

```
1: for i = 1 to n:
2:     print(i)
```

Custo:

- Linha 1: n iterações
- Linha 2: n iterações

Algoritmo 2:

```
1: for i = 1 to n:
2:     for j = 1 to n:
3:         print(i, j)
```

Custo:

- Linha 1: n iterações
- Linha 2: n iterações, totalizando n^2 iterações
- Linha 3: n^2 iterações

Exemplo de Algoritmo para Análise

Algoritmo para Análise:

```
1: x = 0
2: for i = 1 to n:
3:     x = x + 1
4:
5: y = 0
6: for j = 1 to n:
7:     for k = 1 to j:
8:         y = y + 1
9:
10: z = 0
11: for p = 1 to n:
12:     for q = 1 to n:
13:         z = z + p * q
```

Análise de Custo:

- Linhas 1, 5 e 10: custo constante
- Linhas 2-3: n iterações, custo $O(n)$
- Linhas 6-8: n^2 iterações, custo $O(n^2)$
- Linhas 11-13: n^2 iterações, custo $O(n^2)$

Exercício: Algoritmo com Laços For

Algoritmo 3:

```
1: for i = 1 to n:
2:     for j = 1 to i:
3:         print(i, j)
4:
5: x = 0
6: for i = 1 to n:
7:     x = x + i
```

Exercício: Analise o custo do algoritmo 3 e escreva o custo de cada linha.

Exemplo

INSERTION-SORT(A)	*cost*	*times*
for $j \leftarrow 2$ **to** $length[A]$	c_1	n
do $key \leftarrow A[j]$	c_2	$n-1$
$\triangleright$ Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i \leftarrow j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do $A[i+1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
$i \leftarrow i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
$A[i+1] \leftarrow key$	c_8	$n-1$

INSERTION-SORT(A)	*cost*	*times*
for $j \leftarrow 2$ **to** *length*$[A]$	c_1	n
do *key* $\leftarrow A[j]$	c_2	$n-1$
$\triangleright$ Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \,..\, j-1]$.	0	$n-1$
$i \leftarrow j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do $A[i+1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$i \leftarrow i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$A[i+1] \leftarrow key$	c_8	$n-1$

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1)$$

t_j = número de vezes que o teste do laço **while** é executado para cada valor de j.

Exercício

1	2	87	86	83	82	79	78	75	74	71	70	69
4	3	88	85	84	81	80	77	76	73	72	67	68
5	6	89	90	143	142	139	138	135	134	133	66	65
8	7	92	91	144	141	140	137	136	131	132	63	64
9	10	93	94	145	146	167	166	165	130	129	62	61
12	11	96	95	148	147	168	163	164	127	128	59	60
13	14	97	98	149	150	169	162	161	126	125	58	57
16	15	100	99	152	151	156	157	160	123	124	55	56
17	18	101	102	153	154	155	158	159	122	121	54	53
20	19	104	103	108	109	112	113	116	117	120	51	52
21	22	105	106	107	110	111	114	115	118	119	50	49
24	23	28	29	32	33	36	37	40	41	44	45	48
25	26	27	30	31	34	35	38	39	42	43	46	47

Bibliografia Básica

- LEWIS, H. R.; PAPADIMITRIOU, C. H. **Elementos de Teoria da Computação**. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- VIEIRA, N. J. **Introdução aos Fundamentos da Computação**. Editora Pioneira Thomson Learning, 2006.
- DIVERIO, T. A.; MENEZES, P. B. **Teoria da Computação: Máquinas Universais e Computabilidade**. Série Livros Didáticos Número 5, Instituto de Informática da UFRGS, Editora Sagra Luzzato, 1 ed. 1999.

Obrigado!
Dúvidas?

Guilherme Henrique de Souza Nakahata

guilhermenakahata@gmail.com

https://github.com/GuilhermeNakahata/UNESPAR-2024