Teoria da Computação

Guilherme Henrique de Souza Nakahata

Universidade Estadual do Paraná - Unespar

08 de Abril de 2024

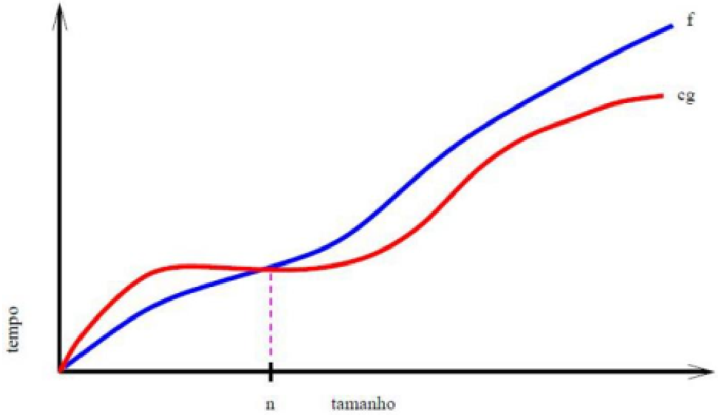
Notação assintótica

- Notação Ω e Θ;
- $f(n) = \Omega(g(n))$ significa que $g(n)$ é um limite inferior assintótico para $f(n)$;
- $f(n) = \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ é limitada assintoticamente superior e inferiormente por $g(n)$;

Definição

- Seja f(n) e g(n) função dos números inteiros para os reais;
- Dizemos que f (n) é Ω(g(n)) se existirem constantes positivas c e n_0 tais que:
- $f(n) \geq cg(n)$;
- Para todo n $\geq n_0$.

Definição



Definição

- f (n) é Ω (g(n)) se $\exists$ c$>$0 e $n_0 > 0$ tais que f (n) $\geq$ c g(n), $\forall$ n $\geq$ n_0;
- Ω(g(n)) $=$ $\{$f(n): $\exists$ c$>$0 e $n_0 > 0$ tais que f(n) $\geq$ cg(n), $\forall$ n $\geq$ n_0.

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 0$, então $10 \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplos de Limites Inferiores Assintóticos

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 0$, então $10 \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, então $n \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?

Exemplo 1: Seja $f(n) = 10$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 0$, então $10 \geq 1$ para $n \geq n_0$.

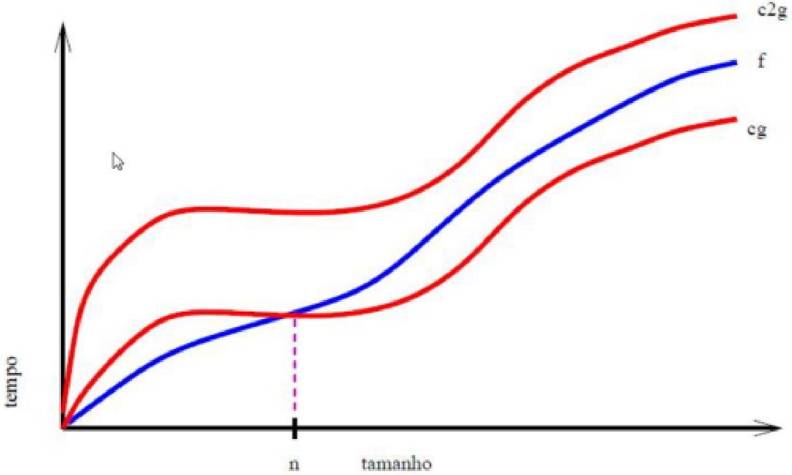
Exemplo 2: Seja $f(n) = n$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: SIM, pois tomando $c = 1$ e $n_0 = 1$, então $n \geq 1$ para $n \geq n_0$.

Exemplo 3: Seja $f(n) = \frac{1}{n}$. É $f(n) = \Omega(1)$?
Resposta: Não, pois $\frac{1}{n}$ tende para zero (0), logo não é possível limitar inferiormente por uma constante positiva.

Definição

- Dizemos que f (n) é $\Theta(g(n))$ se existirem constantes positivas c_1 e c_2 e n_0 tais que:
- c1 g(n) $\leq$ f (n) $\leq$ c2 g(n);
- para todo n $\geq n_0$;
- Dizemos que f (n) $= \Theta(g(n))$ se somente se:
  - $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = O(g(n))$

Definição



Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) $=$ Θ(g(n));

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) $=$ Θ(g(n));
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$;
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$;
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- n_0?
- c_1?
- c_2?

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) = Θ(g(n));
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- $n_0 = 1$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - 3$
- $c_1 \leq -2,5$;

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que f(n) = Θ(g(n));
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- $n_0 = 1$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - 3$
- $c_1 \leq -2,5$;
- $c_2 = ?$;

Exemplo

- Sejam $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$;
- Mostrar que $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$;
- Encontrar c_1, c_2 e n_0 tq
- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$;
- $n_0 = 1$;
- $c_1 \leq \frac{1}{2} - 3$
- $c_1 \leq -2,5$;
- $c_2 \leq -2,5$;

Notação assintótica e limite

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2}$$

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2}}{1}$$

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = 2n^2 + 3n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$$

  Como o limite é uma constante finita, podemos concluir que $f(n) = \Theta(g(n))$.

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
  - $f(n) = O(g(n))$

  Exemplo: Considere as funções $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

  Como o limite é 0, podemos concluir que $f(n) = O(g(n))$.

- Podemos usar limites para saber a taxa de crescimento de uma função em relação a outra:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$
  - $f(n) = \Omega(g(n))$

Exemplo: Considere as funções $f(n) = n^3$ e $g(n) = n^2$. Podemos calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Como o limite é ∞, podemos concluir que $f(n) = \Omega(g(n))$.

Exercício:

- Determine se a função $f(n) = \log n$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = \sqrt{n}$;
- Determine se a função $f(n) = \sqrt{n}$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = n$;
- Determine se a função $f(n) = n^2$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = n^3$.

Exercício sobre Limites e Taxa de Crescimento

Exercício: Determine se a função $f(n) = \log n$ é $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$, onde $g(n) = \sqrt{n}$.

Resolução: Podemos usar limites para determinar a relação entre $f(n)$ e $g(n)$.

- Calculamos o limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.
- Se o limite for uma constante finita, então $f(n) = \Theta(g(n))$.
- Se o limite for 0, então $f(n) = O(g(n))$.
- Se o limite for ∞, então $f(n) = \Omega(g(n))$.

Calculamos o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

Esse limite é indeterminado. Podemos aplicar a regra de L'Hôpital, derivando numerador e denominador uma vez:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0$$

Como o limite é 0, podemos concluir que $f(n) = O(g(n))$.

Exemplo de Algoritmo com Custo

Algoritmo 1:

```
1: for i = 1 to n:
2:     print(i)
```

Custo:

- Linha 1: n iterações
- Linha 2: n iterações

Algoritmo 2:

```
1: for i = 1 to n:
2:     for j = 1 to n:
3:         print(i, j)
```

Custo:

- Linha 1: n iterações
- Linha 2: n iterações, totalizando n^2 iterações
- Linha 3: n^2 iterações

Exemplo de Algoritmo para Análise

Algoritmo para Análise:

```
1: x = 0
2: for i = 1 to n:
3:     x = x + 1
4:
5: y = 0
6: for j = 1 to n:
7:     for k = 1 to j:
8:         y = y + 1
9:
10: z = 0
11: for p = 1 to n:
12:     for q = 1 to n:
13:         z = z + p * q
```

Análise de Custo:

- Linhas 1, 5 e 10: custo constante
- Linhas 2-3: n iterações, custo $O(n)$
- Linhas 6-8: n^2 iterações, custo $O(n^2)$
- Linhas 11-13: n^2 iterações, custo $O(n^2)$

Exercício: Algoritmo com Laços For

Algoritmo 3:

```
1: for i = 1 to n:
2:     for j = 1 to i:
3:         print(i, j)
4:
5: x = 0
6: for i = 1 to n:
7:     x = x + i
```

Exercício: Analise o custo do algoritmo 3 e escreva o custo de cada linha.

Exemplo

INSERTION-SORT(A)	*cost*	*times*
for $j \leftarrow 2$ **to** *length*$[A]$	c_1	n
do *key* $\leftarrow A[j]$	c_2	$n-1$
$\triangleright$ Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i \leftarrow j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do $A[i+1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$i \leftarrow i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$A[i+1] \leftarrow key$	c_8	$n-1$

Exemplo

INSERTION-SORT(A)	*cost*	*times*
for $j \leftarrow 2$ **to** *length*$[A]$	c_1	n
do *key* $\leftarrow A[j]$	c_2	$n-1$
$\triangleright$ Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i \leftarrow j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do $A[i+1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
$i \leftarrow i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
$A[i+1] \leftarrow key$	c_8	$n-1$

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1)$$

t_j = número de vezes que o teste do laço **while** é executado para cada valor de j.

- LEWIS, H. R.; PAPADIMITRIOU, C. H. **Elementos de Teoria da Computação**. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- VIEIRA, N. J. **Introdução aos Fundamentos da Computação**. Editora Pioneira Thomson Learning, 2006.
- DIVERIO, T. A.; MENEZES, P. B. **Teoria da Computação: Máquinas Universais e Computabilidade**. Série Livros Didáticos Número 5, Instituto de Informática da UFRGS, Editora Sagra Luzzato, 1 ed. 1999.

Obrigado!
Dúvidas?

Guilherme Henrique de Souza Nakahata

guilhermenakahata@gmail.com

https://github.com/GuilhermeNakahata/UNESPAR-2024