UDESC
Universidade do Estado de Santa Catarina

MATEMÁTICA DISCRETA

Grupo de Estudos do Ensino de Matemática - UDESC/Ibirama

Matemática Discreta

Elaboração: *Dr. Paolo Moser*
Dr. Jarbas Cleber Ferrari

Instituição: UDESC - Universidade do Estado de Santa Catarina

CEAVI - Centro de Educação Superior do Alto Vale do Itajaí

O Grupo de Estudos do Ensino de Matemática tem como objetivo produzir material didático para servir de instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem buscando qualificar e uniformizar a práticas das disciplinas da grande área Matemática na UDESC/Ibirama, através de um embasamento teórico claro, aprofundando os temas mais relevantes e organizando os conteúdos em tópicos.

Ibirama, 5 de dezembro de 2019.

Sumário

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos

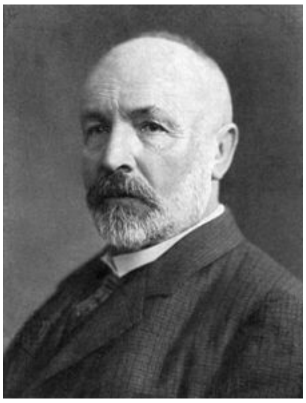


Figura 1.1: Georg Cantor (Rússia, 1845 - 1918)

"Ninguém nos poderá expulsar do paraíso que Cantor criou."
David Hilbert

1.1 Conceitos Primitivos

Definição 1: Denomina-se conjunto uma coleção de objetos.

Exemplo 1.1 :

a) O conjunto de todos os brasileiros.

b) O conjunto de todos os números naturais.

c) O conjunto de todos os números reais tao que $x^2 - 4 = 0$

A notação utilizada para representar um conjunto, em geral, é uma letra maiúscula do alfabeto latino: A, $B, C, ..., Z$.

Definição 2: Cada um dos componentes do conjunto, denomina-se elemento do conjunto.

Exemplo 1.2 :

a) José da Silva é um elemento do conjunto dos brasileiros;

b) 1 é um elemento do conjunto dos números naturais;

c) -2 é um elemento do conjunto dos números reais que satisfaz à equação $x^2 - 4 = 0$

Em geral um elemento de um conjunto é denotado por uma letra minúscula do alfabeto latino: $a, b, c, ..., z$.

Definição 3: Diz-se que um elemento pertence ao conjunto se este elemento faz parte deste conjunto. (Relação de pertença). Símbolo lógico: $\in$

Exemplo 1.3 :

a) José da Silva pertence ao conjunto dos brasileiros.

b) 1 pertence ao conjunto dos números naturais.

c) -2 pertence ao conjunto de números reais que satisfaz à equação $x^2 - 4 = 0$

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto, utiliza-se o símbolo "$\in$" que se lê: "pertence". Logo, para afirmar que 1 é um número natural ou que 1 pertence ao conjunto dos números naturais, escreve-se:

$$1 \in N$$

Para afirmar que -2 não é um número natural ou que -2 não pertence ao conjunto dos números naturais, escreve-se:

$$-2 \notin N$$

Obs.: Um símbolo matemático muito usado para a negação é a barra "/" traçada sobre o símbolo normal.

1.1.1 Representação de Conjuntos

Muitas vezes, um conjunto é representado com seus elementos dentro de duas chaves $\{\}$ através de duas formas básicas e de uma terceira forma geométrica:

1. **Extensão**: Denomina-se extensão a representação de conjuntos onde os elementos do conjunto estão dento de duas chaves $\{\}$

   Exemplo 1.4 :

   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$

   b) $N = \{0, 1, 2, 3, ..\}$

   c) $P = \{\text{Pedro, Paulo, Marcos}\}$

Exemplo 1.5 : Escreva, por extenso, o conjunto dos números primos compreendidos entre 0 e 20.

2. **Descrição/Compreensão**: Na descrição (ou compreensão), o conjunto é descrito por uma ou mais propriedades.

Exemplo 1.6 :

a) $A = \{x/x \text{ é uma vogal}\}$;

b) $N = \{x/x \text{ é um número natural}\}$

c) $P = \{x/x \text{ é irmão de Joelma }\}$

d) $R = \{x/x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Exemplo 1.7 : Determine, por compreensão, o conjunto $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

3. **Representação Pictórica (Diagrama de Venn-Euler)**[1]: Trata-se da formação de figuras planas fechadas delimitadas por linhas de contorno, onde os elementos do conjuntos se encontram no interior de tais figuras.

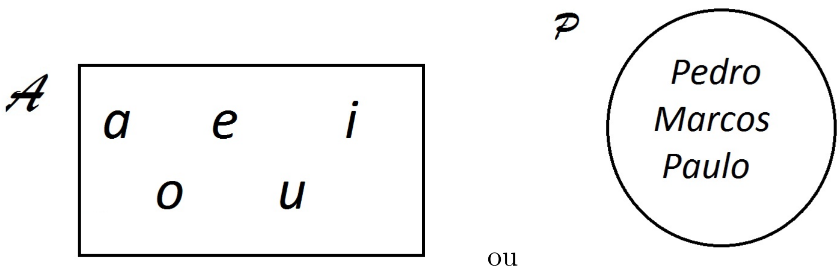


Figura 1.2: Representação de conjuntos através de diagramas de Venn-Euler

1.1.2 Subconjuntos

Definição 4: Dados os conjuntos A e B, diz-se que "A está contido em B" ("A é subconjunto de B" ou "B contém A"), se todos os elementos de A também estão em B. (Relação de inclusão). Símbolo lógico: $\subset$, matematicamente:

$$A \subset B \longleftrightarrow \forall a \in A, a \in B \tag{1.1}$$

Atenção: Quando escreve-se A $\subset$ B não se exclui a possibilidade de A=B. Se A $\subset$ B, mas A$\neq$B, diz-se que o conjunto A está propriamente contido em B("A é uma parte própria de B" ou "A é subconjunto próprio de B").

Definição 5: Denomina-se conjunto universo o conjunto que contém todos os conjuntos do contexto em que se está trabalhando. O conjunto universo é, normalmente, representado pela letra U.

Definição 6: Conjunto vazio é um conjunto que não possui elementos. É representado por {} ou por ϕ

[1] John Venn (Inglaterra, 1834-1923), Leonard Euler (Suíça, 1707-1783)

Teorema 1: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, U é o conjunto universo e ϕ o conjunto vazio. Então:

i. Para todo A, $\phi \subset A \subset U$

ii. Para todo A,$A \subset A$

iii. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

iv. $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$

Obs.: Se $A \subset B$, mas $A \neq B$, A é dito subconjunto próprio de B.

Exemplo 1.8 : $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 3, 2\}$. Analise todas as relações de inclusão e apresente os subconjuntos próprios, se existirem.

1.1.3 União de Conjuntos

Definição 7: A união dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B. Símbolo lógico: U

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\} \tag{1.2}$$

Exemplo 1.9 : Dados $A = \{a, e, i, o, 3, 5\}$ e $B = \{a, 3, 4\}$, escreva $A \cup B$

1.1.4 Interseção de Conjuntos

Definição 8: A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Símbolo lógico: $\cap$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\} \tag{1.3}$$

Exemplo 1.10 :

a) Dados $A = \{a, e, i, o, 3, 5\}$ e $B = \{a, 3, 4\}$, escreva $A \cap B$

b) Dados $A = \{a, e, i, o, 3, 5\}$ e $B = \{u, 4\}$, escreva $A \cap B$

Definição 9: Quando a interseção de dois conjuntos A e B é igual ao conjunto vazio, dizemos que estes conjuntos são disjuntos.

1.1.5 Diferença de Conjuntos

Definição 10: A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

$$A - B = \{x/x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\} \tag{1.4}$$

Do ponto de vista gráfico (Diagrama de Venn Euler) a diferença pode ser vista como a figura acima.

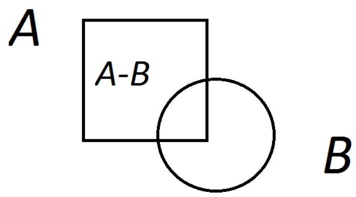


Figura 1.3: Representação da diferença de conjuntos $A - B$ através de diagramas de Venn-Euler

Note que não existe a necessidade do conjunto B estar contido na conjunto A para formar a diferença $A - B$.

Exemplo 1.11 : Sejam os conjuntos $A = \{x \in N/5 \leq x \leq 12\}$ e $B = \{x \in N/3 \leq x \leq 7\}$, calcule $A - B$

1.1.6 Conjunto Complementar

Definição 11: Sejam A e B conjuntos tais que $B \subset A$. O complemento do conjunto B em relação ao conjunto A, denotado por $C_A B$, é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

$$C_A B = A - B = \{x/x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\} \tag{1.5}$$

Graficamente, o complemento do conjunto B em relação ao A chamado complemento relativo, é dado por:

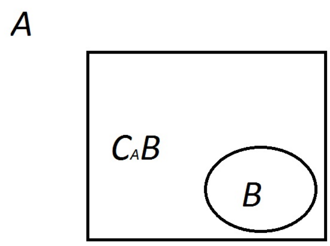


Figura 1.4: Representação do $C_A B$ através de diagramas de Venn-Euler

Caso $A = U$ (conjunto universo) denomina-se o complemento de B em relação a A apenas por B^C (complemento absoluto)

Atenção: Muitas vezes usamos a palavra complementar no lugar de complemento.

Exemplos de notação: $\phi^C = U$ e $u^C = \phi$

Exemplo 1.12 : Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$, encontre:

a) $C_A B$

b) $C_B A$

1.2 Propriedades dos Conjuntos

Propriedade 1: (Fechamento) Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, a reunião de A e B, denotada por $A \cup B$ e a interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, ainda são conjuntos no universo.

Propriedade 2: (Reflexiva) Quaisquer que seja o conjunto A, tem-se que:

$$A \cup A = A \text{ e } A \cap A = A$$

Propriedade 3: (Inclusão relacionada) Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se que:

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B, A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$$

Propriedade 4: (Associativa) Quaisquer que sejam os conjuntos A,B e C, tem-se que:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Propriedade 5: (Comutativa) Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se que:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Propriedade 6: (Elemento neutro para a reunião) O conjunto vazio ϕ é o elemento neutro para a reunião de conjuntos, tal que para todo conjunto A, tem-se:

$$A \cup \phi = A$$

Propriedade 7: (Elemento "nulo" para interseção) A interseção do conjunto vazio ϕ com qualquer outro conjunto A, fornece o próprio conjunto vazio.

$$A \cap \phi = \phi$$

Propriedade 8: (Elemento neutro para a interseção) O conjunto universo U é o elemento neutro para a interseção de conjuntos, tal que para todo conjunto A, tem-se:

$$A \cap U = A$$

Propriedade 9: (Distributiva) Quaisquer que sejam os conjuntos A,B e C, tem-se que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Propriedade 10: (De Morgan[2] I) O complementar da união de dois conjuntos A e B é a interseção

[2] August de Morgan (Índia, 1806 - 1871)

dos complementares desses conjuntos.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Propriedade 11: (De Morgan II) O complementar da união de uma coleção finita de conjuntos é a interseção dos complementares desses conjuntos.

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n)^C = A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap ... \cap A_n^C$$

Propriedade 12: (De Morgan III) O complementar da interseção de dois conjuntos A e B é a união dos complementares desses conjuntos.

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Propriedade 13: (De Morgan IV) O complementar da interseção de um coleção finita de conjuntos é a união dos complementares desses conjuntos.

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n)^C = A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C \cup ... \cup A_n^C$$

1.3 Resolução de Problemas com Diagramas de Venn

Resolver problemas com diagramas de Venn consiste em sistematizar de forma pictórica os dados fornecidos, particionando as interseções de forma a responder questionamentos lógicos.

Exemplo 1.13 : Em uma escola foi realizada uma pesquisa sobre o gosto musical dos alunos. Os resultados foram os seguintes: 458 alunos disseram que gostam de Rock; 112 alunos optaram por Pop; 36 alunos gostam de MPB; 62 alunos gostam de Rock e Pop. Determine quantos alunos foram entrevistados.

Exemplo 1.14 : De um grupo de 42 visitantes em um museu, 35 compraram pinturas, 20, esculturas, e 5 não compraram nem pintura nem escultura. Quantos compraram, apenas, pinturas?

1.4 Cardinalidade/Princípio da Enumeração

1.4.1 Conjuntos Finitos e Infinitos: Interpretação e Dualidade

Na teoria intuitiva de conjuntos introduziram-se três conceitos primitivos: o de *elemento*, o de *conjunto* e o de *pertença*. O símbolo designado para este último é $\in$ Para que a expressão:

$$\alpha \in \theta$$

tenha sentido é necessário que α seja um elemento e que θ seja um conjunto. Também, quando escreve-se um conjunto extensivamente é necessário que os símbolos que aparecem entre as chaves sejam elementos. Por exemplo, ao escrever:

$$\{\alpha, \theta, \delta\}$$

cada um destes tem de ser um elemento.

Claro que um conjunto pode também ele próprio ser um elemento. Por exemplo, o conjunto:

$$A = \{1, \alpha, \{1, 2\}\}$$

é constituído por três elementos: o número 1, a letra grega α e o conjunto $\{1, 2\}$. Um dos elementos do conjunto A é ele próprio um conjunto, nomeadamente o conjunto constituído pelos números naturais 1 e 2. A proposição:

$$1 \in A$$

é verdadeira, porque o elemento 1 pertence ao conjunto A. Mas a proposição:

$$2 \in A$$

é falsa, porque o elemento 2 não pertence ao conjunto A. Claro que a proposição:

$$\{1, 2\} \in A$$

é verdadeira, porque $\{1, 2\}$ é um elemento que pertence a A (o fato de $\{1, 2\}$ ser ele próprio um conjunto é irrelevante para a matéria em questão). Nesta ordem de ideias, e sendo α um elemento qualquer, é essencial distinguir os dois entes α e $\{\alpha\}$. enquanto α é um elemento, $\{\alpha\}$ é um conjunto que tem um único elemento, nomeadamente o elemento α. Pode-se "complicar" ainda mais a questão, considerando o conjunto:

$$B = \{\alpha, \{\alpha\}\}$$

Trata-se de um conjunto com dois elementos, nomeadamente α e $\{\alpha\}$. Quer dizer que o conjunto B tem dois elementos que são: α, e o conjunto cujo único elemento é elemento α. Assim são verdadeiras as seguintes proposições:

$$\alpha \in B$$

$$\{\alpha\} \in B$$

O conjunto $\{\alpha\}$ é um elemento do conjunto B, mas também é um subconjunto de B porque o único elemento de $\{\alpha\}$, também é o elemento de B. Pode-se por isso afirmar que :

$$\{\alpha\} \subset B$$

Repara-se que o símbolo de inclusão $\subset$ exige que, tanto à sua direita como à sua esquerda estejam conjunto. a expressão:

$$\alpha \subset \beta$$

só tem sentido se tanto α quanto β forem conjuntos. O mesmo se passa para os símbolos de reunião $\cup$, interseção $\cap$ e diferença $-$. Seja o conjunto N dos números naturais e o seguinte conjunto A:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Há uma diferença fundamental entre estes dois conjuntos; enquanto A tem apenas quatro elementos, N tem infinitos elementos. Em outras palavras, há apenas quatro elementos que são elementos do conjunto A, enquanto há uma infinidade de elementos que são elementos do conjunto N. Diz-se por isso, que o conjunto A é finito e que o conjunto N é infinito. Logo, um conjunto qualquer A é *infinito* se não for finito, o que significa que tem um número infinito de elementos. O "tamanho", ou seja, o número de elementos de um conjunto é denominado "cardinalidade". Logo, para exprimir que A é finito, diz-se que A *tem cardinal finito.* No caso de A ser infinito, diz-se também que A *tem cardinal infinito.*

No caso de um conjunto não vazio é fácil entender o que é o seu número de elementos. Por exemplo o conjunto

$$\{a, b, c, d\}$$

tem quatro elementos, enquanto o conjunto:

$$\{n \in N/1 \leq n \leq 100\}$$

tem 100 elementos. Por definição, o número de elementos do conjunto vazio é 0. A cardinalidade de um conjunto A será designada, usualmente por $\#A$. Assim, por exemplo, tem-se:

$$\#\{a, e, i, o, u\} = 5$$

$$\#\{n \in N/1 \leq n \leq 700\} = 700,$$

$$\#\varnothing = 0$$

Claro que a cardinalidade do conjunto vazio é, por definição, zero. E a cardinalidade do conjunto $\{\varnothing\}$? Este conjunto tem um único elemento, nomeadamente o elemento $\varnothing$; logo a cardinalidade é igual a 1. Outros exemplos do mesmo tipo:

$$\#\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 2$$

Repare-se que $\{\varnothing\}$ é um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio, pelo que são verdadeiras as proposições.

$$\varnothing \in \{\varnothing\}$$

$$\varnothing \subset \{\varnothing\}$$

Exemplos de conjunto finitos:

a) O conjunto das cidades de Santa Catarina.

b) O conjunto das letras do alfabeto português.

c) O conjunto de "pixel" de um display cristal líquido.

d) O conjunto de cidadãos do Brasil.

e) O conjunto de soluções da equação $x^{100} - 24x^3 - 127 = 0$.

f) O conjunto vazio.

g) O conjunto dos números complexos z tais que $z^2 + 127 = 0$.

h) O conjunto dos número reais x tais que $x^2 - 127$.

i) O conjunto dos número reais x tais que $x^2 + 127$.

Exemplos de conjunto infinitos:

a) O conjunto N dos números naturais.

b) O conjunto Z dos números inteiros.

c) O conjunto Q dos números racionais.

d) O conjunto R dos números reais.

e) O conjunto C dos números complexos.

f) O conjunto dos números primos.

g) O conjunto de números reais maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 1.

h) O conjunto dos números reais x da forma $x = \dfrac{1}{n}$, com n inteiro positivo.

Teorema 2: Cardinalidade da união de conjuntos.
Sejam A e B conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos, obedecendo à relação:

$$(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) \tag{1.6}$$

Obs.:

- Este resultado pode ser generalizado para qualquer número finito de conjuntos.
- No caso de A e B serem disjuntos, o teorema reduz-se a $\#(A \cup B) = \#A + \#B$

1.4.2 Partes de um conjunto

Para um dado conjunto S, pode-se falar do conjunto de todos os subconjuntos de S. Essa classe é chamada de conjunto das *partes* de S e é denotada por Partes(S). Se S é finito, então Partes(S) também é. Na verdade, o número de elementos de Partes(S) é elevado à cardinalidade de S; isso é:

$$\{Partes(S)\} = 2^{n(S)} \tag{1.7}$$

(Por esta razão, o conjunto das partes de S é geralmente denotado por 2^S.)

Exemplo 1.15 : Suponha que $S = \{1, 2, 3\}$. Então, Partes(S)= $[\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, S]$
Observe que o conjunto $\varnothing$ pertence a Partes(S), pois $\varnothing$ é um subconjunto de S. De maneira similar, S pertence a Partes(S). Como é de se esperar pela observação acima, Partes(S) tem $2^3 = 8$ elementos.

1.4.3 Partições

Seja S um conjunto não vazio. Uma partição de S é uma subdivisão de S em conjuntos não vazios disjuntos. Mais precisamente, uma *partição* de S é uma coleção $\{A_i\}$ de subconjuntos não vazios de S tais que:

i. Cada a em S pertence a algum dos A_i.

ii. Os conjuntos em $\{A_i\}$ são disjuntos dois a dois; isto é, se:

$$A_i \neq A_j, \text{então } A_i \cap A_j = \varnothing \tag{1.8}$$

Os subconjuntos de uma partição são chamados de *células*.

Exemplo 1.16 : Considere a seguinte coleção de subconjuntos de $S = \{1, 2, ..., 8, 9\}$:

a) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}]$

b) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}]$

c) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}]$

Verifique se alguma destas coleções é uma partição de S. Em caso negativo, justifique.

1.4.4 Produto Cartesiano

Definição 12: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Denomina-se produto cartesiano de A por B ao conjunto $A \times B$ constituído por todos os pares ordenados (a, b) tais que a pertence a A e b pertence a B:

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Se um dos conjuntos A ou B for vazio, então o produto cartesiano $A \times B$ é também vazio:

$$A \times \varnothing = \varnothing \times B = \varnothing$$

Da própria definição de produto cartesiano de dois conjuntos resulta que esse produto não verifica a propriedade comutativa. De fato $A \times B$ é um conjunto de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é um elemento de A, enquanto $B \times A$ é um conjunto de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é um elemento de B. Claro que pode-se pensar no produto cartesiano de um conjunto a por si próprio; nesse caso, em vez de se escrever $A \times A$, pode-se também escrever (com o mesmo significado) A^2, que é o quadrado cartesiano do conjunto A.

Exemplo 1.17 : Sendo $A = \{a, 1, 5\}$, encontre o quadrado cartesiano de A.

1.4.5 Cardinalidade de Produto Cartesiano

Dois conjuntos A e B finitos; é imediato que o produto cartesiano $A \times B$ também é finito. Sejam m a cardinalidade de A e n a cardinalidade de B, logo, fixado um elemento a de A, exitem tantos pares ordenados em que a é o primeiro elemento quanto os elementos de B. O número de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é a é portanto n, que é o número de elementos de B. cada elemento de A origina n pares ordenados; como A tem m elementos, o número total de pares ordenados é $m \times n$. Assim, no caso de A e B serem conjunto finitos tem-se:

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

Ainda pode-se pensar num outro conjunto intimamente relacionado com as anteriores, trata-se de $A \times (B \times C)$. Este conjunto é formado por elementos da forma: $(a, (b, c))$ que são pares ordenados onde o primeiro elemento do par é um elemento de A e o segundo elemento do par é um elemento $B \times C$. Com esta identificação pode-se escrever a equivalência:

$$A \times B \times C \equiv (A \times B) \times C \equiv A \times (B \times C)$$

A equivalência $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ exprime a associatividade do produto cartesiano. Obviamente, a cardinalidade deste duplo produto cartesiano é:

$$\#(A \times B \times C) = \#(A) \times \#(B) \times \#(C)$$

1.5 Lista de Exercícios - Teoria dos Conjuntos

1. Escreva por extenso:

   a) O conjunto dos números inteiros ímpares não negativos.

   b) O conjunto dos números inteiros entre 2 e 20.

   c) O conjunto dos números inteiros divisíveis por 5

2. Determine por descrição os conjuntos que estão determinados abaixo por extensão.

   a) $\{0, 1, 2.., 9\}$

   b) $\{-1, 1\}$

   c) $\{1, 3, 5, 7\}$

   d) $\{0, 2, 4, 6\}$

   e) $\{0, 1, 4, 9, 16, ..\}$

   f) $\{3, 10, 17, 24, 31, ..\}$

3. Determine por extensão os conjuntos que estão determinados abaixo por descrição.

   a) $\{x/x \in Z \text{ e } x > -2 \text{ e } x < 8\}$

   b) $\{x/x \in N \text{ e } x \text{ é par e } x < 10\}$

   c) $\{x/x \in Z \text{ e } x^2 < 17\}$

   d) $\{x/x \in Z \text{ e } x^2 + 4 = 0\}$

   e) $\{x/x \in Z \text{ e } (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x\}$

4. Coloque ao lado da sentença a letra V ou F conforme seja verdadeira ou falsa.

   a) $0 \in \varnothing$

   b) $3 \in \{1, 2, 3, 5\}$

   c) $\varnothing \in \{3\}$

   d) $5 \in \{\{5\}\}$

   e) $4 \in \{\{4\}, 4\}$

   f) $\{3, 4\} \subset \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

   g) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   h) $N \not\subset \{x/x \in N \text{ e } x \text{ é par}\}$

5. Em cada exercício abaixo, dados os conjuntos A e B, verifique qual das alternativas é correta: $A \subset B$ ou $A \not\subset B$.

   a) $A = \{x/x \in Z \text{ e } x < 5\}$ e $B = \{x/x \in Z \text{ e } (x + 1)^2 < 28\}$

   b) $A = \{x/x \text{ é quadrado de área menor que } 9m^2\}$ e $B = \{x/x \text{ é quadrado de perímetro} > 12m\}$

   c) $A = \{x/x \text{ é quadrilátero}\}$ e $B = \{x/x \text{ é polígono}\}$

   d) $A = \{x/x = 3y - 1, y \in N\}$ e $B = \{x/x = 3y - 1 =, y \in Z\}$

6. A determinação por extensão do conjunto $\{x/x \in N \text{ e } x < 1\}$ é:

   a) $\{0, 1\}$

   b) $\varnothing$

   c) $\{0\}$

   d) $\{\{0\}\}$

7. Sejam três conjuntos: A, B e C tais que: A é subconjunto de B e C é subconjunto de A. Devemos ter:

   a) C é o conjunto vazio

   b) A é o subconjunto de C

   c) B é subconjunto de A

   d) B não pode ser o conjunto vazio

   e) C é subconjunto de B

8. Determine por extensão os conjuntos:

   a) $A = \{x \in Z/x \text{ é par e } x < 5\}$

   b) $B = \{x \in N/x \text{ é primo}\}$

   c) $C = \{x \in N/x \text{ é par e primo}\}$

   d) $D = \{x \in N/x \text{ é número par e } 4 < x \leq 10\}$

9. Dentre os seguintes conjuntos o vazio é:

   a) $A = \{x \in N/x^2 = 9\}$

   b) $B = \{x \in Z/x^2 + x = 2\}$

   c) $C = \{x \in R/x^2 = 5\}$

   d) $D = \{x \in N/2 < x < 3\}$

   e) $E = \{x \in Z/x = 0\}$

10. Dentre o conjuntos do exercício anterior, cite quais são unitários.

11. Sejam os conjuntos $A = \{x \in N/x < 7\}$, $B = \{x \in N/x \leq 7\}$ e $H = \{x \in R/ -2 < x \leq 6\}$ Verifique as relações de inclusão entre cada dois conjuntos.

12. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{-1, -2, 1, 3, 5, 7, 9\}$. Em cada item abaixo, responda verdadeiro (V) ou (F).

   a) $2 \in A$

   b) $2 \subset A$

   c) $B \subset C$

   d) $\{2\} \subset A$

   e) $\{2, 3\} \subset B$

   f) $C \supset A$

g) $A \supset B$

h) $B \subset A$

i) $C \not\subset A$

j) $B \in C$

k) $\{-1, 5\} \subset C$

13. Com os dados da questão anterior, determine o que se pede e represente o resultado através de diagramas de Venn-Euler:

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $C \cap B =$

d) $A \cap C =$

e) $C \cup B =$

f) $A \cup C =$

g) $A - B =$

h) $C - B =$

i) $B - A =$

j) $A - (B \cap C) =$

14. Em um determinado bairro de uma cidade, existem apenas pessoas de cabelo preto, castanhos e loiros. Sabe-se que o total de habitantes deste bairro é de 300 pessoas, dentre estas, 180 tem cabelos pretos e 70 cabelos castanhos, determine o número de pessoas de cabelo loiro.

15. Considere o conjunto A com 25 elementos; O conjunto $A \cap B$ com 15 elementos e o conjunto $A \cup B$ com 70 elementos. Nestas condições determine o número de elementos do conjunto B.

16. Em um concurso foram cadastrados vários candidatos que declararam falar, pelo menos, um dos idiomas: Inglês, Francês ou Espanhol. Sabendo que 120 candidatos declararam falar Inglês, Francês e Espanhol; 220 Inglês e Espanhol; 120 Francês e Espanhol; e 170 Inglês e Francês, pergunta-se: Quantos concorrentes declararam falar exatamente uma das três línguas se eram 1500 candidatos?

17. Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de TV a que habitualmente assistem, obteve-se o resultado seguinte: 280 pessoas assistem ao canal A, 250 assistem ao canal B e 70 assistem ao outros canais distintos de A e B. Qual o número de pessoas que assistem ao canal A e não assistem ao canal B?

18. Sabendo-se que das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois e 110 não liam nenhum dos dois, determine o número de pessoas que foram consultadas.

19. Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações : Sabrina, Bianca e Mariana. Para isso pesquisou o mercado e concluiu que a cada mil pessoas consultadas, 600 leram Bianca, 400 leram Sabrina, 300 leram Mariana, 200 leram Bianca e Sabrina, 150 leram Bianca e Mariana, 100 leram Sabrina e Mariana, e 20 leram as três obras. Calcule:

a) O número de pessoas que leram apenas uma das três obras;

b) O número de pessoas que não leram nenhuma das obras;

c) o número de pessoas que leram duas ou mais obras.

20. Após conhecer a opinião de 500 clientes, pode-se que constatar que, destes 300 estavam satisfeitos com o atendimento recebido pelo departamento A, 350 estavam satisfeitos com o atendimento recebido pelo departamento B e 200 estavam satisfeitos com o atendimento recebido pelos dois departamentos, ou seja, A e B. Determine o número de clientes que manifestaram insatisfação com o atendimento recebido dos departamentos.

21. A empresa X proprietária de dois canais (A e B) de televisão, realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus telespectadores. Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de TV a que habitualmente assistem, obteve-se o seguinte resultado: 280 pessoas assistem ao canal A, 250 assistem ao canal B e 70 assistem a outros canais distintos de A e B. Determine o número de pessoas que assistem simultaneamente (em horários diferentes) aos dois canais.

22. Uma cidade que tem 10000 habitantes possui dois times de futebol: A e B. Nume pesquisa feita com todos os habitantes, constatou-se que 1200 pessoas não apreciam nenhum dos times, 1300 apreciam os dois times e 4500 apreciam o time A. Determine:

    a) Quantas pessoas apreciam apenas o time A?

    b) Quantas pessoas apreciam o clube B?

    c) Quantas pessoas apreciam apenas o clube B?

23. Numa classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20 de História. O número de alunos que gostam de Matemática e de História é?

24. Uma empresa consultou 300 dos seus funcionários a respeito de três embalagens para lançamento de um novo produto. Considerando as embalagens como A, B e C, 160 pessoas indicaram a embalagem A, 120 indicaram a embalagem B, 90 indicaram a embalagem C, 30 indicaram as embalagens A e B, 40 indicaram as embalagens A e C, 50 as embalagens B e C e 10 indicaram as três embalagens. Dos funcionários consultados, quantos não tinham preferência por nenhuma das três embalagens?

25. Numa cidade são consumidos três produtos: A,B e C. Feito um levantamento de mercado sobre o consumo desses produtos, obteve-se o seguinte resultados;

Produtos	**Número de consumidores**
A	150
B	200
C	250
A e B	70
A e C	90
B e C	80
A,B e C	60
Nenhum dos três	180

a) Quantas pessoas consomem apenas o produto A.

b) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B ou o produto C.

c) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B.

d) Quantas pessoas consomem apenas o produto C.

e) Quantas pessoas foram consultadas

26. Uma Universidade pública, preocupada com o grande número de alunos que recebem nota zero ao serem “pegos” utilizando meios ilícitos para obter notas nas referidas avaliações, resolve realizar uma pesquisa para saber se há necessidade de utilização de meios ilícitos está relacionada com a falta de estudo das teorias utilizadas na avaliação de cada disciplina Esta mesma Universidade, ao consultar 700 alunos sobre a sua preparação prévia para a realização das avaliações, constatou que, entre estes, 250 alunos estudaram o conteúdo necessário para a realização da avaliação de Matemática, 310 estudaram o conteúdo necessário para a realização da avaliação de Língua Portuguesa, 280 estudaram o conteúdo necessário para a realização da avaliação de Teoria de Administração, 150 estudaram para a realização da avaliação de Matemática e Língua Portuguesa, 170 estudaram para a avaliação de Língua Portuguesa e Teoria de Administração, 130 estudaram para a avaliação de Matemática e Teoria de Administração e 50 estudaram para a avaliação de Matemática, de Língua Portuguesa e de Teoria de Administração. Determine:

   a) O número de alunos que não estudaram o conteúdo necessário para a realização de nenhuma das três avaliações citadas.

   b) O número de alunos que estudaram o conteúdo necessário para a realização da avaliação de Matemática ou de Teoria de Administração.

   c) O número de alunos que estudaram o conteúdo necessário para a realização da avaliação de Matemática, mas não estudaram o conteúdo necessário para a avaliação de Teoria de Administração

27. Responda verdadeiro (V) ou falso (F), em cada uma das afirmativas abaixo:

   a) ( ) Podemos dizer que um conjunto A é subconjunto do conjunto B quando algum dos elementos do conjunto A estão no conjunto B.

   b) ( ) Dois conjuntos, digamos A e B, são disjuntos quando a interseção entre eles é igual ao conjunto vazio.

   c) ( ) Sejam $A = \{1, \pi, 3, \sqrt[3]{8}, -2\}$, $B = \{-1, 30, -3, \sqrt[3]{7}, 5\}$ e $C = \{-1, \sqrt[3]{7}, -2\}$. Podemos dizer que $A \cup C = \{1, \pi, \sqrt[3]{8}, -2, -1, \sqrt[3]{7}\}$ e que os conjuntos A e C são disjuntos.

   d) ( ) Podemos afirmar que $A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$, $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$ e $A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$

28. Considerando os conjuntos: $A = \{1, 2, 7\}$, $B = \{1, -2, 7\}$ e $C = \{-1, -2 - 7\}$, marque somente a alternativa correta:

   a) ( ) Os conjuntos B e C são disjuntos e $A \cap B = \{1, 7\}$.

   b) ( ) Os conjuntos A e C são disjuntos e $A \cup B = \{1, 7\}$.

   c) ( ) Os conjuntos A e C são disjuntos e $B \cap C = \{-2\}$.

d) ( ) Os conjuntos A e C são disjuntos e $B \cup C = \{-2\}$.

e) ( ) Nenhuma das alternativas estão corretas.

29. Uma escola disponibiliza a 80 de seus alunos cursos extras de inglês, francês e espanhol, em horários distintos. Sabe-se que ao todo 73 alunos frequentam esses cursos e que:

- 35 alunos cursam inglês.
- 25 alunos cursam francês.
- 7 alunos cursam inglês e francês, 5 alunos cursam inglês e espanhol e 5 alunos cursam francês e espanhol.
- 2 cursam as 3 disciplinas

Com base nesses dados, julgue os itens seguintes referentes a esses 80 alunos.

a) Menos de 20 alunos cursam somente inglês.

b) Mais de 15 alunos cursam somente espanhol.

c) Cinco alunos cursam somente inglês e francês.

d) Mais de 5 alunos não cursam nenhuma dessas disciplinas.

30. Em uma escola, 100 alunos praticam vôlei, 150 futebol, 20 os dois esportes e 110 alunos nenhum. O número total de alunos é?

31. Em um concurso foram entrevistados 979 candidatos, dos quais 527 falam a língua inglesa, 251 a língua francesa e 321 não falam nenhum desses idiomas. O número de candidatos que falam as línguas inglesa e francesa é?

32. Uma pesquisa de mercado sobre a preferência de 200 consumidores por três produtos P_1, P_2 e P_3 mostrou que dos entrevistados: 20 consumiam os três produtos, 30 os produtos P_1 e P_2, 50 os produtos P_2 e P_3, 60 os produtos P_1 e P_3, 120 o produto P_1 e 85 o produto P_2. Se todas as 200 pessoas entrevistadas deram preferência a pelo menos um dos produtos, pergunta-se:

a) Quantas consumiam somente o produto P_3?

b) Quantas consumiam pelo menos dois dos produtos?

c) Quantas consumiam os produtos P_1 ou P_2, e não P_3?

33. Considere a sequência de operações aritméticas na qual cada uma atua sobre o resultado anterior. Comece com um número x. Subtraia 2, multiplique por $\frac{3}{2}$, some 1, multiplique por 2, subtraia 1 e finalmente multiplique por 3 para obter o número 21. O número x pertence ao conjunto?

a) $\{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{-3, -2, -2, 0\}$

c) $\{5, 6, 7, 8\}$

d) $\{-7, -6, -5, -4\}$

34. Numa prova constituída de dois problemas, 300 alunos acertaram somente um deles, 260 o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro, quantos fizeram a prova?

1.6 Gabarito - Teoria dos Conjuntos

1. a) $\{1, 3, 5, ...\}$
   b) $\{3, 4, 5, ..., 19\}$
   c) $\{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\}$
2. a) $\{x \in N / x \leq 9\}$
   b) $\{x \in Z / x^2 = 1\}$
   c) $\{x \in N / x \leq 7$ e x é ímpar$\}$
   d) $\{x \in N / x \leq 6$ e x é par$\}$
   e) $\{x \in N / x = \alpha^2, \alpha \in N\}$
   f) $\{x \in N / x = 7\alpha + 3, \alpha \in N\}$
3. a) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   b) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
   c) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
   d) $\varnothing$
   e) $\{Z\}$
4. a) F
   b) V
   c) F
   d) F
   e) V
   f) F
   g) V
   h) V
5. a) $A \not\subset B$
   b) $A \not\subset B$
   c) $A \subset B$
   d) $A \subset B$
6. c) 0
7. e) C é subconjunto de B.
8. a) $A = \{..., -4, -2, 0, 2, 4\}$
   b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$
   c) $C = \{2\}$
   d) $D = \{6, 8, 10\}$
9. $D = \{x \in N / 2 < x < 3\} = \varnothing$
10. $A = \{x \in N / x^2 = 9\}$
    $E = \{x \in Z / x = 0\}$
11. i. $A \subset B$; $A \subset H$
    ii. $B \not\subset A$; $B \not\subset H$
    iii. $H \not\subset A$; $H \not\subset B$
12. a) V
    b) F
    c) V
    d) V
    e) F
    f) F
    g) V
    h) V
    i) V
    j) F
    k) V
13. a) $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
    b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
    c) $C \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
    d) $A \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
    e) $C \cup B = \{-1, -2, 1, 3, 5, 7, 9\}$
    f) $A \cup C = \{-1, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
    g) $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$
    h) $C - B = \{-1, -2\}$
    i) $B - A = \varnothing$
    j) $A - (B \cap C) = \{2, 4, 6, 8\}$
14. 50 pessoas com cabelos loiros.
15. 60 elementos
16. 1230 candidatos falam somente 1 língua.
17. 180 pessoas assistem estritamente o canal A.
18. 340 pessoas
19. a) 460 pessoas
    b) 130 pessoas
    c) 410 pessoas

20. 50 clientes
21. 100 pessoas
22. a) 3200 pessoas
    b) 5600 pessoas
    c) 4300 pessoas
23. 6 alunos
24. 40 funcionários
25. a) 50 pessoas
    b) 420 pessoas
    c) 280 pessoas
    d) 140 pessoas
    e) 600 pessoas
26. a) 260 alunos
    b) 400 alunos
    c) 120 alunos
27. a) F
    b) V
    c) F
    d) V
28. a) F
    b) F
    c) V
    d) F
    e) F
29. a) F
    b) V
    c) V
    d) V
30. 340 alunos
31. 120 candidatos
32. a) 25 candidatos
    b) 100 candidatos
    c) 85 candidatos
33. a) $\{1, 2, 3, 4\}$
34. 450 alunos

Capítulo 2

Relações

"Para descobrir todos os fenômenos que deseja, basta ao sábio três coisas: pensar, pensar e pensar"
Isaac Newton

2.1 Relações Binárias

Dados dois conjuntos A e B, uma relação binária R de A em B é um subconjunto de um produto cartesiano $A \times B$, ou seja, $R \subset A \times B$, onde:

- A é o domínio, origem ou conjunto de partida de R.
- B é o contra-domínio, destino ou conjunto de chegada de R.

Para $R \subset A \times B$, se $(a, b) \in R$, então afirma-se que "a relaciona-se com b". Pode-se denotar uma relação R da seguinte forma: $R : A \longrightarrow B$ e, para um elemento $(a, b) \in R$, pode-se denota-lo como aRb.

Exemplo 2.1 : Sejam os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, então:

a) $\varnothing$ é uma relação de A em B.

b) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$ é uma relação de A em B.

c) Relação de igualdade de A em A: $\{(a, a)\}$.

d) Relação "menor" de C em C: $\{(0, 1), (0, 2), (1, 2)]\}$

e) Relação de C em B: $\{(0, a), (1, b)\}$.

Uma relação binária pode ser representada no diagrama de Venn, como mostra a figura abaixo:

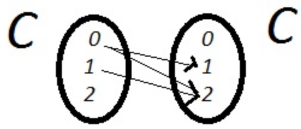


Figura 2.1: Relação “menor” de C em C:=$\{(0,1),(0,2),(1,2)\}$

A seguir, algumas proposições referentes ao conceito de relação:

a) Se $< a, b > \in R$, diz-se que R está definida para “a” e que “b” é imagem de “a”.

b) **Domínio da definição:** Conjunto de todos os elementos de A para os quais R está definida.

c) **Imagem da definição:** Conjunto de todos os elementos de B que estão relacionados com algum elemento de A.

Exemplo 2.2 : Defina os conjuntos domínio e imagem para as relações do **Exemplo 1.1**

2.1.1 Endorrelação ou Auto-relação

Dado um conjunto A, uma relação do tipo $R : A \longrightarrow A$ é dita uma Endorrelação ou Auto-relação. Assim, temos que domínio e contra-domínio são o mesmo conjunto. Endorrelações são denotadas por:

$$< A, R >$$

Lê-se: “R é uma endorrelação em A”, ou “ R é uma relação de A em A”.

Exemplo 2.3 : Seja A um conjunto. Então, são endorrelações:

a) $< N, \leq >$

b) $< Q, = >$

2.2 Propriedades das Relações

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades. A seguir serão apresentadas as propriedades que envolvem as endorrelações.

2.2.1 Relação Reflexiva

Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa) \tag{2.1}$$

Obs.: A negação da propriedade reflexiva é como segue: $(\exists a \in A)(\neg(aRa))$

Exemplo 2.4 : Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, tem-se que as seguintes relações são reflexivas:

a) $< A, \leq >$

b) A^2

2.2.2 Relação Simétrica

Seja A um conjunto e R uma endorrelação. R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in a)(\forall b \in A)(aRb \longrightarrow bRa) \tag{2.2}$$

Exemplo 2.5 : Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, tem-se que as seguintes relações são simétricas:

a) A^2

b) $< A, = >$

c) $< A, \neq >$

d) $\varnothing : A \longrightarrow A$

2.2.3 Relação Anti-Simétrica

Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)((aRb \wedge bRa) \longrightarrow a = b) \tag{2.3}$$

Exemplo 2.6 : Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, tem-se que as seguintes relações são anti-simétricas;

a) $< A, = >$

b) $\varnothing : A \longrightarrow A$

c) $< A, b = a^2 >$

Obs.: As propriedades de simetria e anti-simetria NÃO são mutuamente excludentes.

2.2.4 Relação Transitiva

Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)((aRb \wedge bRc) \longrightarrow aRc) \tag{2.4}$$

Exemplo 2.7 : Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, tem-se que as seguintes relações são transitivas.

a) A^2

b) $\varnothing : A \longrightarrow A$

c) $< A, = >$

d) $< A, < >$

2.2.5 Relação de Equivalência

A relação de equivalência dá a noção de igualdade semântica, ou seja, de elementos que apresentam um mesmo significado.

Relação de equivalência é toda relação binária em um conjunto A que é, simultaneamente, *reflexiva, simétrica e transitiva.*

Exemplo 2.8 : São exemplos de relações de equivalência:

a) $< X, = >$

b) $< A, a = b^2 >$, se $A = \{0, 1\}$

2.2.6 Relação Inversa

Seja uma relação $R : A \longrightarrow B$. Então, a **relação inversa** é como segue:

$$R^{-1} : B \longrightarrow A = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.9 :

a) Dados os conjuntos $A = \{a, b\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$ e a relação $R : B \longrightarrow A = \{(2, a), (3, b)\}$. Determine R^{-1}.

b) Dados o conjunto $C = \{2, 3, 4\}$ e a relação $< C, < >$. Determine $< C, < >^{-1}$.

2.2.7 Relação Composta

Sejam A, B e C conjuntos, e $R : A \longrightarrow B$ e $S : B \longrightarrow C$ relações. A **composição de R e S**, denotada por $R \circ S : A \longrightarrow C$, é tal que:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)(aRb \wedge bSc \longrightarrow a(R \circ S)c) \tag{2.6}$$

ou seja

$$R \circ S = \{(a, c) / \exists\, b \in B \wedge \exists < a, b > \in R \wedge \exists (b, c) \in S\} \tag{2.7}$$

Por exemplo, a composição de relações fica clara com o uso de diagramas de Venn. Dados os conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{x, y, z\}$ e as relações $R : A \longrightarrow B = \{(a, 1), (b, 3), (b, 4), (d, 5)\}$ e $S : B \longrightarrow C = \{(1, x), (2, y), (5, y), (5, z)\}$, tem-se que a composição de R e S é como segue:

$$R \circ S = \{< a, x >, < d, y >, < d, z >\}$$

Propriedade: A composição de relações é **associativa**, ou seja: Sejam as relações $R : A \longrightarrow B, S : B \longrightarrow C$ e $T : C \longrightarrow D$. Então, tem-se que:

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) = T \circ S \circ R$$

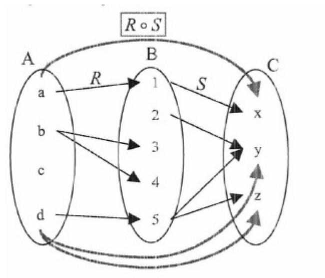


Figura 2.2: Composição das funções R e S

Exemplo 2.10 : Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as relações R e S sobre A definidas por:
$R = \{(1, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ e $S = \{(1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$. Calcule:

a) $R \circ S$

b) $S \circ R$

2.3 Relação de Ordem Parcial

Relação de ordem parcial é toda relação binária em um conjunto A que é, simultaneamente, *reflexiva, anti-simétrica e transitiva.*

São exemplos de relação de ordem parcial:

a) $< N, \leq >$

b) $< Z^+, x$ divide $y >$

Se R é uma relação de ordem parcial em A, então dizemos que $< A, R >$ é um conjunto parcialmente ordenado.

2.3.1 Elemento Mínimo

Suponha A um conjunto e $< A, R >$ uma relação de ordem. Dizemos que m é **o** elemento mínimo de R se: (note que $m \in D(R)$)

$$(\forall a \in A)(mRa) \tag{2.8}$$

2.3.2 Elemento Máximo

Suponha A um conjunto e $< A, R >$ uma relação de ordem. Dizemos que m é **o** elemento máximo de R se: (note que $m \in Im(R)$)

$$(\forall a \in A)(aRm) \tag{2.9}$$

2.3.3 Elemento Minimal

Suponha A um conjunto e $< A, R >$ uma relação de ordem. Diz-se que m é elemento minimal R se: (note que $m \in Im(R)$)

$$(\forall a \in A)(aRm \longrightarrow a = m) \tag{2.10}$$

2.3.4 Elemento Maximal

Suponha A um conjunto e $< A, R >$ uma relação de ordem. Diz-se que m é elemento maximal de R se: (note que $m \in D(R)$)

$$(\forall a \in A)(mRa \longrightarrow a = m) \tag{2.11}$$

Teorema 1: Um conjunto A parcialmente ordenado contém pelo menos um elemento minimal e pelo menos um elemento maximal. Se estes elementos forem únicos, eles correspondem aos elementos máximos e mínimos, respectivamente.

Atenção: Para uma dada relação R, existe, no máximo, um elemento máximo e um elemento mínimo (podendo não haver nenhum). Os elementos maximal e minimal podem acontecer em qualquer quantidade (sempre existem, se R é uma Relação de Ordem).

Exemplo 2.11 : Dado o conjunto $A\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e a relação de ordem "x divide y", determine:

a) Elemento Mínimo

b) Elemento Máximo

c) Elemento Minimal

d) Elemento Maximal

2.4 Recursão e Relações de Recorrência

2.4.1 Definições Recorrentes

Uma definição[1] onde o item definido aparece como parte da definição é chamada de **definição por recorrência, definição recorrente, definição recursiva**, ou ainda **definição por indução**.

Uma definição recorrente é formada por duas partes:

1. Base ou condição básica, onde algum(s) caso(s) simples do item que está sendo definido é dado explicitamente.

2. Um passo de indução ou recorrência, onde novos casos do item que está sendo definido são dados em função de casos anteriores.

A parte 1 da definição permite começar, fornecendo alguns casos simples e concretos. A parte 2 permite construir novos casos, a partir destes mais simples e assim por diante. Daí o nome definição por indução, devido à analogia com as demonstrações por indução.

2.4.2 Sequências Definidas por Recorrência

Uma sequência S é uma lista de elementos numerados em determinada ordem. Existe um primeiro elemento, um segundo elemento, e assim por diante. $S(k)$ denotada o k-ésimo elemento de sequência. Uma sequência é definida por recorrência nomeando-se o primeiro valor da sequência e depois definindo os valores subsequentes na sequência em termos de valores anteriores.

Por exemplo, A sequência S é definida por recorrência por:

[1]Neste capítulo, o termo "definição" será usado como sinônimo de "relação"

1. $S(1) = 2$
2. $S(n) = 2S(n-1)$ para $n \geq 2$

Assim, o primeiro valor da sequência é 2, o segundo valor da sequência é $S(2) = 2S(2-1) = 2S(1) = 2.2 = 4$, o terceiro valor da sequência é $S(3) = 2S(2) = 2.4 = 8$, e assim por diante. Continuando a sequência, tem-se

$$2, 4, 8, 16, 32, ...$$

Exemplo 2.12 : Escreva os cinco primeiros valores da sequência T, tal que:

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$

Exemplo 2.13 : Sequência de Fibonacci:[2] É uma sequência introduzida pelo matemático italiano Fibonacci e é definida por recorrência da seguinte forma:

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 1$$

$$F(n) = F(n-2) + F(n-1), \text{para } n \geq 2$$

Traduzindo: *qualquer valor da sequência de Fibonacci, exceto os dois primeiros, é dado pela soma de seus valores anteriores.*

Por exemplo, pode-se escrever os dez primeiros números da sequência de Fibonacci, utilizando a sua definição por recorrência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Escreva recursivamente o 5^{o} e o 7^{o} termo da sequência de Fibonacci.

Exemplo 2.14 : Sejam a e b inteiros positivos e suponha que a relação Q é definida recursivamente como a seguir:

$$Q(a, b) = \begin{cases} 0, \ se \ a < b \\ Q(a-b, b) + 1, \ se \ a \geq b \end{cases}$$

Calcular recursivamente:

a) $Q(2, 5)$

b) $Q(12, 5)$

c) O que faz a relação Q? Calcule $Q(5861, 7)$.

[2] Leonardo Fibonacci (Itália, $1170 - 1250$)

2.5 Relação de Congruência (Aritmética Modular)

O conceito de números inteiros congruentes foi introduzido por Gauss[3] em um trabalho publicado em 1801 (*Disquisitiones Arithmeticae*) quando tinha apenas 24 anos. Várias ideias de grande importância, que serviram de base para o desenvolvimento da teoria dos números, aparecem neste trabalho. Até mesmo a notação, lá introduzida, é a que utiliza-se hoje.

Definição: Se a e b são inteiros, diz-se que a é *congruente* a b módulo m $(m > 0)$ se $m \mid (a - b)$. Denota-se isto por $a \equiv b\ (mod\ m)$. Se $a \nmid (a-b)$, diz-se que a é *incongruente* a b módulo m e denota-se $a \not\equiv b\ (mod\ m)$.

Exemplo 2.15 : $11 \equiv 3\ (mod\ 2)$, pois $2 \mid (11 - 3)$. Como $5 \nmid 6$ e $6 = 17 - 11$, tem-se que $17 \not\equiv 11\ (mod\ 5)$.

Teorema 2: Se a e b são inteiros, temos que $a \equiv b\ (mod\ m)$ se, e somente se, existir um número inteiro k tal que $a = b + km$.

Propriedades: Se a, b, m e d são inteiros, $m > 0$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

1. $a \equiv a\ (mod\ m)$ (Reflexividade)
2. Se $a \equiv b\ (mod\ m)$, então $b \equiv a\ (mod\ m)$ (Simetria)
3. Se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $b \equiv d\ (mod\ m)$, então $a \equiv d\ (mod\ m)$ (Transitividade)

Atenção: A relação de congruência é uma relação de equivalência.

2.5.1 Resolvendo Relações de Congruência

Uma relação de congruência do tipo $ax \equiv b\ (mod\ m)$ pode ser solucionada com o auxílio de técnicas de resolução de equações diofantinas [4], utilizando o algoritmo abaixo:

i. Escrever a congruência na forma de uma equação do tipo $ax - km = b$ (equação diofantina);

ii. Encontrar uma solução inicial, de acordo com o caso:
   Se b é múltiplo de a então $x_0 = \dfrac{b}{a}$;
   Se b é múltiplo de m então $x_0 = 0$;
   Se b é múltiplo de $a - m$ então $x_0 = \dfrac{b}{(a-m)}$;

iii. Encontrar o Máximo Divisor Comum entre a e m, ou seja $MDC(a, m)$.

iv. A solução geral da relação de congruência é dada por $x = x_0 + k.\dfrac{m}{MDC(a, m)}$

Exemplo 2.16 : Encontre os valores de x que satisfazem a seguinte relação de congruência em Z: $5x \equiv 4\ (mod\ 3)$

[3]Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 1777 - 1855)
[4]Diofante de Alexandria (Grécia, 250 a.C - 166 a.C)

2.6 Lista de Exercícios - Relações

1. Sejam $A\{2,3,4,5\}$ e $B = \{3,4,5,6,10\}$. Para cada uma das seguintes relações: Determine o domínio de definição e o conjunto imagem.

   a) $R_1 = \{(x,y) \in B \times A \mid x$ é divisível por y$\}$

   b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid x.y = 12\}$

   c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = y + 1\}$

   d) $R_4 = \{(x,y) \in B \times A \mid x \leq y\}$

2. Seja $A = \{1,2,3\}$. Para cada uma das seguintes endorrelações em A, determine se é: Reflexiva, Simétrica, Anti-simétrica ou Transitiva.

   a) $R_1 = \{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1),(3,3)\}$

   b) $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$

   c) $R_3 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,3),(3,1)\}$

   d) $R_4 = A \times A$

3. Seja $S = \{0,1,2,4,6\}$. Teste se as relações binárias em S a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

   a) $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(0,1),(1,2),(2,4),(4,6)\}$

   b) $R = \{(0,1),(1,0),(2,4),(4,2),(4,6),(6,4)\}$

   c) $R = \{(0,1),(1,2),(0,2),(2,0),(2,1),(1,0),(0,0),(1,1),(2,2)\}$

   d) $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(4,6),(6,4)\}$

4. Teste se as relações binárias em S dadas a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

   a) $S = Z, x \leq y$

   b) $S = Z, x - y$ é múltiplo inteiro de 3

   c) $S = N, x.y$ é par

   d) $S = N, (x,y)$ / x é ímpar

5. Dadas as relações R e S em $A = \{1,2,3,4\}$ definidas por: $R = \{(1,1),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}$ e $S = \{(1,3),(2,1),(3,1),(3,2),(4,4)\}$, encontre:

   a) $R \circ S$

   b) $S \circ R$

   c) $R^2 = R \circ R$

6. Dada a relação $R = \{(a,b),(a,c),(b,a)\}$ em $A = \{a,b,c\}$, encontre $R^{\circ}R^{-1}$.

7. Seja R seguinte relação em $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$, determine o domínio e a imagem de R, encontre R^{-1} e determine a relação $R \circ R$

8. Seja R e S as seguinte relações em $B = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d), (d, b)\}$ e $S = \{(b, a), (c, c), (c, d), (d, a)\}$. Encontre as seguintes relações compostas:

   a) $R \circ S$

   b) $S \circ R$

   c) $R \circ R$

9. Seja R a relação nos Naturais definida pela equação $x + 3y = 12$, isto é: $R = \{(x, y)/x + 3y = 12\}$

   a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.

   b) Encontre o domínio e a imagem de R.

   c) Determine R^{-1}

   d) Encontre a relação composta $R \circ R$

10. Fornecer o conjunto solução para as seguintes relações de congruência:

    a) $3x \equiv 15\ (mod\ 24)$

    b) $5x \equiv 20\ (mod\ 10)$

    c) $3x \equiv 6\ (mod\ 15)$

    d) $7x \equiv 18\ (mod\ 4)$

    e) $25x \equiv 80\ (mod\ 15)$

11. Determine os elementos Mínimo, Minimal, Máximo, Maximal para as relações abaixo (se existirem):

    a) $A = \{a, b, c, p, q, x, y\}$;
    $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p), (q, q), (x, x), (y, y), (a, p), (b, q), (c, q), (x, a), (x, b), (x, p), (x, q), (y, b), (y, c), (y, q)\}$

    b) $A = \{2, 4, 6\}$, relação “x divide y”

    c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, relação “$\leq$”

    d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
    $R = \{(1, 1), (1, 6), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 5), (6, 1), (6, 6)\}$

    e) Relação “divide”, definida sobre o conjunto dos divisores positivos de 24.

12. Seja n um inteiro positivo. Suponha que a relação L é definida recursivamente como a seguir: **($\lfloor\ \rfloor$ é o símbolo de truncamento)**

$$L(n) = \begin{cases} 0, \ se\ n = 1 \\ L\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, \ se\ n > 1 \end{cases}$$

    Ache $L(25)$ e descreva o que a relação recursiva faz.

13. Sejam a e b inteiros e suponha que a relação Q é definida recursivamente abaixo. Calcule:

$$Q(a,b) = \begin{cases} 5, \ se \ a < b \\ Q(a-b, b+2) + a, \ se \ a \geq b \end{cases}$$

a) $Q(2,7)$

b) $Q(5,3)$

c) $Q(15,2)$

2.7 Gabarito - Relações

1. a) $D(R_1) = \{3, 4, 5, 6, 10\}$;
   $Im(R_1) = \{2, 3, 4, 5\}$;
   b) $D(R_2) = \{2, 3, 4\}$;
   $Im(R_2) = \{3, 4, 6\}$;
   c) $D(R_3) = \{4, 5\}$;
   $Im(R_3) = \{3, 4\}$;
   d) $D(R_4) = \{3, 4, 5\}$;
   $Im(R_4) = \{3, 4, 5\}$;

2. a) Reflexiva, Simétrica e Transitiva.
   b) Reflexiva e Anti-simétrica.
   c) Anti-simétrica.
   d) Reflexiva, Simétrica e Transitiva.

3. a) Reflexiva e Anti-simétrica.
   b) Simétrica.
   c) Simétrica e Transitiva.
   d) Reflexiva, Simétrica e Transitiva.

4. a) Reflexiva, Anti-simétrica e Transitiva.
   b) Reflexiva, Simétrica e Transitiva.
   c) Simétrica.
   d) Transitiva.

5. a) $R^{\circ}S = \{(1, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$
   b) $S^{\circ}R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
   c) $R^{\circ}R = \{(1, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

6. $R^{\circ}R^{-1} = \{(a, a), (b, b)\}$

7. $D(R) = \{1, 3\}$;
   $Im(R) = \{2, 3, 4\}$;
   $R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$
   $R^{\circ}R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

8. a) $R^{\circ}S = \{(a, c), (a, d), (c, a), (d, a)\}$
   b) $S^{\circ}R = \{(b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, c)\}$
   c) $R^{\circ}R = \{(a, a), (a, c), (a, b), (a, d), (c, b)\}$

9. a) $R = \{(3, 3), (6, 2), (9, 1), (12, 0), (0, 4)\}$
   b) $D(R) = \{0, 3, 6, 9, 12\}$;
   $Im(R) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   c) $R^{-1} = \{(3, 3), (2, 6), (1, 9), (0, 12), (4, 0)\}$
   d) $R^{\circ}R = \{(3, 3), (12, 4)\}$

10. a) $x = 5 + 8k, \forall k \in R$
    b) $x = 4 + 2k, \forall k \in R$
    c) $x = 2 + 5k, \forall k \in R$
    d) $x = 6 + 4k, \forall k \in R$
    e) $x = 8 + 3k, \forall k \in R$

11. a) Mínimo: $\nexists$; Máximo: $\nexists$;
    Minimal: x e y; Maximal: p e q
    b) Mínimo: 2; Máximo: $\nexists$;
    Minimal: 2; Maximal: 4 e 6
    c) Mínimo: 1; Máximo: 5;
    Minimal: 1; Maximal: 5
    d) Mínimo: $\nexists$; Máximo: $\nexists$;
    Minimal: $\nexists$; Maximal: $\nexists$
    e) Mínimo: 1; Máximo: 24;
    Minimal: 1; Maximal: 24

12. $L(25) = 4$. L fornece o maior inteiro tal que $2^{L(n)} \leq n$.

13. a) $Q(2, 7) = 5$
    b) $Q(5, 3) = 10$
    c) $Q(15, 2) = 42$

Capítulo 3

Análise Combinatória

"Os números governam o mundo."
Platão

A análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, procurando responder, basicamente dois tipos de problemas:

1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado que satisfazem certas condições.

2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

3.1 Princípio Aditivo

Se existem duas hipóteses para ocorrer um fato, havendo M opções para a primeira hipótese e N opções para a segunda hipótese, sem que haja opções repetidas, então o fato pode ocorrer de $M + N$ maneiras diferentes.

Exemplo 3.1 : Numa sorveteria há dois sabores de picolés e 4 sabores de sorvete. Se uma menina tem dinheiro para comprar apenas um picolé **ou** um sorvete, de quantas maneiras ela pode fazer seu pedido?

3.2 Princípio Multiplicativo: Princípio Fundamental da Contagem

O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos. Se um fato se compõe de duas etapas independentes, podendo a primeira ocorrer de M maneiras e a segunda de N maneiras, então o fato pode ocorrer de **M.N** maneiras diferentes.

Atenção: Quando trabalha-se com elementos de um mesmo conjunto, o princípio multiplicativo só é válido, na forma em que foi enunciado, nos casos em que é importante a ordem da escolha dos elementos.

Exemplo 3.2 : Num restaurante são oferecidas quatro opções de pratos distintos e duas opções de sobremesa distintas. De quantas maneiras um cliente pode fazer seu pedido?

3.3 Permutação Simples

Um agrupamento de **n** elementos distintos é chamado *permutação simples* de **n** elementos cada um dos agrupamentos **ordenados** que possam ser formados, contendo, sem repetição, os n elementos do agrupamento. Desta forma:

$$P_n = n! = n(n-1).(n-2)....3.2.1 \tag{3.1}$$

Exemplo 3.3 : Com os algarismos $2, 5, 6$ e 7 quantos números de 4 algarismos distintos pode-se formas? Quantos números pares de quatro algarismos distintos podemos formar?

Exemplo 3.4 : De quantas maneiras, sete rapazes e sete moças podem formar pares para uma dança?

3.3.1 Permutação com Elementos Repetidos

Se em um agrupamento de **n** elementos existem **a** elementos repetidos, **b** elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é definido por:

$$P_n^{a,b..} = \frac{n!}{a!b!...} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.5 : Quantos são os anagramas da palavra SUCESSO?

3.4 Arranjo Simples

Um agrupamento de **n** elementos distintos é chamado arranjo simples dos n elementos, tomados **p** a **p** (com **p** $\leq$ **n**), cada um dos agrupamentos **ordenados** que possam ser formados, contendo, sem repetição, p elementos do agrupamento. Desta forma:

$$A_n^p = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{3.3}$$

Exemplo 3.6 : Com os algarismos $1, 3, 4, 6$ e 7 quantos números de 2 algarismos distintos são possíveis?

3.4.1 Arranjo com Repetição

Um agrupamento de **n** elementos, tomados **p** a **p**, contendo elementos com possibilidade de repetição, de forma **ordenada** é chamado arranjo com repetição. Desta forma:

$$Ar_m^p = Ar_{m,p} = m^p \tag{3.4}$$

Exemplo 3.7 : Num determinado país, as placas dos automóveis são formados por 3 letras do alfabeto (de 26 letras) e por 4 números (de 0 a 9). Quantas placas podem ser formadas?

3.5 Combinação Simples

Um agrupamento de **n** elementos distintos é chamado combinação simples dos **n** elementos, tomados **p** a **p** (com **p** $\leq$ **n**), cada um dos agrupamentos **não ordenados** (subconjuntos do agrupamento) contendo, sem repetição, p elementos do agrupamento. Desta forma:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{3.5}$$

Exemplo 3.8 : Um time de futebol é constituído de 5 jogadores. De quantas maneiras o seu treinador pode formar um time para participar de uma partida sabendo que ele possui um grupo de 12 jogadores? Nessa mesma situação, se admitirmos que dois desses jogadores sejam goleiros, de quantas maneiras o time poderia participar da partida?

Exemplo 3.9 : Sobre uma reta r marcam-se 7 pontos distintos e sobre uma reta s, paralela a r marca-se 5 pontos distintos. Quantos triângulos existem com os vértices em 3 desses 12 pontos ?

3.5.1 Combinação com Repetição

Um agrupamento de **n** elementos, tomados **p** a **p**, contendo elementos com possibilidade de repetição, de forma **não ordenada** é chamado combinação com repetição. Desta forma:

$$Cr_n^p = Cr_{n,p} = C_{(n+p-1),p} \tag{3.6}$$

Exemplo 3.10 : De quantas maneiras uma oficina pode pintar 5 automóveis, recebendo cada um, tinta de uma única cor, se a oficina dispõe apenas 3 cores e não que misturá-las?

3.6 Lista de Exercícios - Análise Combinatória

1. Para fazer uma viagem de Rio do sul até Presidente Getúlio, pode-se usar como transporte: ônibus, carro ou moto. De quantos modos pode-se escolher os trasportes, não se usando na volta o mesmo meio usado na ida?

2. Em uma sala, há 3 homens e 5 mulheres. De quantos modos é possível escolher um par para uma dança do tipo "homem e mulher", dentre as pessoas desta sala?

3. Quantos números naturais pares com algarismos distintos entre 100 e 1000.

4. Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Sabendo que somente 2 pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?

5. Em uma reunião social haviam n pessoas, cada uma saudou as outras com um aperto de mão. Sabendo-se que houveram ao todo 66 apertos de mão, determine o número de pessoas que estavam na reunião?

6. Quantos são os anagramas da palavra APÊNDICE (considere $\hat{E} \neq E$):

   a) Que começam por vogal e terminam por consoante?

   b) Que têm as letras A, P e E juntas nessas ordem?

   c) Que têm as letras A, P e E juntas em qualquer ordem?

   d) Que tem vogais e consoantes intercaladas (em ordem qualquer)?

   e) Que têm letra A na primeira posição e a letra P em segundo?

   f) Que têm a letra A no primeiro lugar ou a letra P no segundo?

7. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras enfileiradas de modo que duas determinadas pessoas não fiquem juntas?

8. a) De quantas maneiras pode-se colocar 5 livros de literatura, 3 de biologia e 2 de matemática (todos diferentes) em uma prateleira de modo que os todos livros da mesma disciplina fiquem juntos?

   b) E se os livros da mesma disciplina fossem iguais?

9. Quantos anagramas da palavra URUGUAI que começam por vogal?

10. Quantos são os jogos distintos que se pode organizar num campeonato em um só turno entre 12 clubes?

11. Sabe-se que um time de futebol de salão é formado por cinco jogadores, sendo que um deles é o goleiro. Sendo assim, quantos times de futebol de salão pode-se formar com 15 jogadores, sabendo-se que três são estritamente goleiros e os demais são estritamente jogadores de linha?

12. a) Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

    b) Na mesma situação, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

13. Uma bandeira é formada por 5 listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores azul, branco, vermelho e preto, não devendo listras vizinhas terem a mesma cor. De quantos modos pode-se colorir esta bandeira?

14. Num conjunto de 12 moças e 10 rapazes, onde 3 moças e 2 rapazes são irmãos (são todos da mesma família) e os demais não possuem parentesco. Quantos casamentos são possíveis?

15. Escrevendo os números de 5 algarismos distintos usando apenas os algarismos $1, 2, 4, 6$ e 7 e dispondo em ordem crescente:

    a) Que posição ocupa o número 62.417?

    b) Qual o número que ocupa o 66° lugar?

16. Considere um baralho de 52 cartas, formado por 4 naipes (ouro, copas, espada e paus), cada naipe com 13 cartas. Retiram-se 6 cartas deste baralho, formando uma "mão". De quantas maneiras isto pode ocorrer de modo que sempre tenha somente uma carta de ouro nesta mão?

17. Cinco rapazes e uma moça pretendem sentar-se num banco de cinco lugares. Se a moça nunca deve ficar em pé, quantas maneiras podem sentar-se?

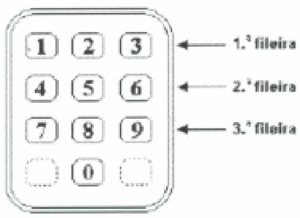
18. Uma organização dispõe de 8 economistas e 5 engenheiros. De quantos modos podemos formar uma comissão com 6 membros, se cada comissão deve ter, no mínimo, 3 engenheiros?

19. Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que , para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é?

20. Com os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ formam-se números de 4 algarismos distintos. Quantos dos números formados **não** são divisíveis por 5?

21. Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

22. Num aparelho telefônico, as dez teclas numeradas estão dispostas em fileiras horizontais, conforme indica a figura a seguir. Seja N a quantidade de números de telefone com 8 dígitos (com repetição), que começam pelo dígito 3 e terminam pelo dígito zero, e, além disso, o 2° e o 3° dígitos são da primeira fileira do teclado, o 4° e o 5° dígitos são da segunda fileira, e o 6° e o 7° são da terceira fileira. O valor de N é?



23. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos $0, 1, 2, ..., 9$, O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tenta abrir o cofre, quantas tentativas deverão fazer (no máximo) para conseguir abri-lo?

24. Um sapo e um pernilongo encontram-se respectivamente na origem e no ponto $(8, 2)$ de um sistema cartesiano ortogonal. Se o sapo só pudesse saltar nas direções positivas do eixo cartesiano e cobrisse uma unidade de comprimento em cada salto, o número de trajetórias possíveis para o sapo alcançar o pernilongo seria igual a:

25. O prefeito de uma cidade está trabalhando com sua equipe, decidindo as metas de sua administração. Seus assessores lhe apresentaram uma lista de 12 metas, dividas em 3 grupos:

    - 4 metas de curto prazo;
    - 5 metas de médio prazo;
    - 3 metas de longo prazo.

    O prefeito então ordena que seus assessores escolham 2 metas de cada grupo, em uma ordem de prioridade em cada grupo. Quantas listas diferentes podem ser geradas, considerando-se sempre a disposição curto, médio e longo prazo?

26. Quantas são as diagonais de um decágono? E de um polígono de n lados?

27. Com 5 alunos da turma A e 6 alunos da turma B, quantos são os grupos de 7 alunos que podemos formar com no mínimo 2 alunos da turma A?

28. De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par?

29. Um químico possui 10 tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser misturadas porque produzem mistura explosiva?

30. Em um determinado jogo de baralho, todas as 52 cartas são distribuídas igualmente entre os 4 jogadores. Quantas são as possíveis distribuições das cartas?

31. Qual é o número de maneiras distintas possíveis que dois alunos específicos terão para sentar-se, simultaneamente, em duas das cinquenta cadeiras de uma sala de aula?

32. Quantos números de três algarismos, sem repetição, podemos formar com os algarismos e 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9, incluindo sempre o algarismo 4?

33. Um conjunto tem n elementos. O número de seus subconjuntos de p elementos é 136, e o número de seus subconjuntos ordenados de elementos distintos é 272. Determinar n e p.

34. Uma embarcação deve ser tripulada por 8 homens , 2 só remam do lado direito e um apenas do lado esquerdo. De quantos modos podemos formar uma tripulação, se a cada lado devemos ter 4 tripulantes? (A ordem dos tripulantes em cada lado distingue as tripulações)

35. São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em três quaisquer dos 12 pontos?

36. De quantas maneiras pode-se colocar 10 pessoas em uma fila, sendo que tem-se 6 homens e 4 mulheres e que a fila terá:
    (a) Homens e as mulheres agrupados.
    (b) Homens e mulheres estritamente misturados (as pessoas do mesmo sexo não podem estar todas juntas).
37. Uma palavra tem 7 letras sendo que uma delas aparecem n vezes e as outras não se repetem. Sabendo que o número de anagramas que se obtém permutando as letras desta palavra é 210, calcule n.
38. Designando-se por A, B, C, D, E e F seis cidades (todas interligadas), qual será o número de maneiras possíveis para se ir de A até F, passando por todas as demais cidades (sem repetição)?
39. Um vendedor de livros tem oito livros de assuntos distintos para distribuir a três professores A, B e C. De quantos modos poderá fazer a distribuição, dando três livros ao professor A, quatro ao B e um livro ao professor C?
40. Com os dígitos $1, 2, 3, 4$ e 5 deseja-se formar números com cinco algarismos não repetidos, de modo que o 1 sempre preceda o 5. Qual é a quantidade de números assim constituídos?
41. Uma urna contém 12 bolas: 5 pretas, 4 brancas e 3 vermelhas. Determine o número de maneiras possíveis de se tirar simultaneamente dessa urna grupos de 6 bolas que contêm pelo menos uma de cada cor.
42. Seis times de futebol, entre os quais estão A e B, vão disputar um campeonato. Suponha que na classificação final não existam empates. Um indivíduo fez duas apostas sobre a classificação final. Na primeira, apostou que A seria campeão; na segunda, apostou que B não seria o último colocado. Em quantas das 720 classificações possíveis esse indivíduo ganha as duas apostas simultaneamente?
43. Usando-se os algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9, existem x números de 4 algarismos de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais. Determine o valor de x.
44. Seis pessoas A,B,C,D,E e F, ficam em pé uma ao lado da outra, para uma fotografia. Se A e B se recusam a ficar lado a lado e C e D insistem em aparecer uma ao lado da outra, determine o número de possibilidades distintas para as seis pessoas se disporem.
45. Entre 20 professores de uma escola, devem ser escolhidos três para os cargos de diretor, vice diretor e orientador pedagógico. De quantas maneiras a escolha pode ser feita, sabendo-se que a ordem de escolha influencia no cargo atribuído ao professor?
46. Uma sala tem seis lâmpadas com interruptores independentes. De quantos modos pode-se iluminá-la, se pelo menos uma das lâmpadas deve ficar acesa?
47. Determine a quantidade de números de três algarismos que tem pelo menos dois algarismos repetidos.
48. No Hall de um prédio existem 7 lâmpadas, 4 de 20W e 3 de 40W. Devido ao racionamento pretende-se consumir 60W. De quantas maneiras distintas pode-se iluminar o hall?

49. Com os doze atletas de um time de vôlei, de quantas maneiras distintas pode-se colocar na quadra seis jogadores, considerando as posições geradas por rodízio?

50. Os 20 alunos de uma turma de bacharelado em música (prática instrumental) resolveram formar uma banda para tocar na formatura. A banda será formada por um guitarrista, um vocalista, um baixista e um baterista. Como o Felipe, o Heron e o Eduardo divergem quanto aos gostos musicais eles não podem estar simultaneamente juntos. De quantas maneiras distintas será possível formar a banda (considerando-se que todos os 20 alunos podem ocupar qualquer função)?

3.7 Gabarito - Análise Combinatória

1. 6 modos
2. 15 modos
3. 328 algarismos
4. 48 formas
5. 12 pessoas
6. a) 11520 anagramas
   b) 720 anagramas
   c) 4320 anagramas
   d) 1152 anagramas
   e) 720 anagramas
   f) 9360 anagramas
7. 3600 modos
8. (a) 8640 modos
   (b) 6 modos
9. 600 anagramas
10. 66 jogos
11. 1485 times
12. a) 60 comissões
    b) 81 comissões
13. 324 modos
14. 114 casamentos
15. a) 81ª posição
    b) 46721
16. 7.484.841 maneiras
17. 600 maneiras
18. 708 comissões
19. 10 maneiras
20. 720 números
21. 60 números
22. 729 números
23. 720 tentativas
24. 45 trajetórias
25. 1440 listas
26. a) 35 diagonais
    b) $\dfrac{n^2 - 3n}{2}$
27. 325 grupos
28. 2030 maneiras
29. 140 misturas
30. $C_{52,13}.C_{39,13}.C_{26,13}.C_{13,13}$
31. 2450 maneiras
32. 168 números
33. $k = 17$; $p = 2$
34. 5760 modos
35. 210 triângulos
36. a) 34.560 modos
    b) 3.594.240 modos
37. $a = 4$
38. 24 modos
39. 280 modos
40. 60 números
41. 9 maneiras
42. 96 classificações
43. 505 números
44. 144 modos
45. 6840 maneiras
46. 63 modos
47. 252 números
48. 16 maneiras
49. 665.280 maneiras
50. 4828 bandas

Capítulo 4

Gavetas de Dirichlet (Princípio da Casa dos Pombos)

"A matemática do tempo é simples. Você tem menos do que pensa e precisa mais do que acha."

Kevin Ashton

Muitas vezes não deseja-se contar elementos de conjuntos, mas determinar a existência ou não de conjuntos com certas propriedades. Uma ferramenta simples para resolver alguns destes problemas é o seguinte princípio:

Princípio das gavetas de Dirichlet[1] (Original): Se n objetos forem colocados em no máximo $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá no mínimo dois objetos.

Prova: Suponha que cada gaveta contém no máximo um objeto. Então o número total de objetos é no máximo $n-1$. Absurdo!

Exemplo 4.1 :

a) Suponha que existem n pares distintos de sapatos em um armário. Mostre que, se você escolher aleatoriamente $n+1$ sapatos avulsos no armário, com certeza haverá entre eles um par.

b) Suponha que existem três homens e cinco mulheres em uma festa. Mostre que, se estas pessoas estiverem alinhadas em fila, pelo menos duas mulheres ocuparão posições consecutivas.

O Princípio de Dirichlet pode ser reformulado como se segue:

Princípio das gavetas de Dirichlet (Modificado): Se m objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta contém $\dfrac{m-1}{n}+1$ objetos.

Prova: Suponha que cada gaveta tem no máximo $\dfrac{m-1}{n}+1$ objetos. Então o número total de objetos será no máximo $n\dfrac{m-1}{n} \leq n\dfrac{m-1}{n} = m-1 < m$. Absurdo!

[1] Johann P. G. L. Dirichlet (Alemanha, 1805 – 1859)

Com base nisso, é possível o cálculo da população mínima para que uma determinada quantidade apareça em, ao menos uma gaveta. Este princípio, metaforizando para uma população de pombos é popularmente conhecida como "Princípio da casa dos pombos", enunciado a seguir:

Princípio da Casa dos Pombos (Dirichlet estendido): "Se n casas de pombos são ocupadas por $kn + 1$ ou mais pombos, onde k é um inteiro positivo, então pelo menos uma casa de pombo é ocupada por $k + 1$ (ou mais) pombos".

Há ainda uma outra formulação possível:

Princípio da Casa dos Pombos (Modificado): Sejam n casas de pombos e μ um inteiro positivo dado. Coloquemos a_2 pombos na primeira casa, a_2 pombos na segunda casa, e assim sucessivamente, até a_n pombos na enésima casa. Então se a média $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ for maior de que μ, uma das casas conterá pelo menos $\mu + 1$ pombos.

Exemplo 4.2 :

a) Encontre um número mínimo de estudantes necessários que garanta que cinco deles pertencem à mesma turma (primeira, segunda, terceira e quarta série).

b) Um estudante precisa assistir a cinco aulas de três áreas de conhecimento. Muitas aulas são oferecidas para cada disciplina, mas o estudante não pode assistir a mais de duas turmas em qualquer uma das áreas. Usando o princípio da casa do pombo, mostre que o estudante precisará assistir a pelo menos uma aula de cada área.

c) Seja L uma lista (não necessariamente em ordem alfabética) de 26 letras do alfabeto (que consiste em cinco vogais A, E, I, O, U e 21 consoantes), mostre que L tem uma sublista consistindo em quatro ou mais consoantes consecutivas.

d) Para o **Exemplo 2c**, assumindo que L comece com uma vogal, por exemplo A, mostre que L tem uma sublista consistindo em cinco ou mais consoantes consecutivas.

4.1 Lista de Exercícios - Princípio das Gavetas de Dirichlet

1. Quantas cartas precisam ser retiradas de um baralho de 52 cartas, divididas em 4 naipes, para garantir-se que serão tiradas duas cartas do mesmo naipe?
2. Se 12 cartas são tiradas de um baralho, pode-se afirmar que duas tem valores iguais, independentes do naipe (existem 4 naipes e 13 valores distintos)?
3. Quantos estudantes devem ter em uma turma para garantir que pelo menos dois estudantes possuam a mesma nota no exame final, se a nota do exame varia entre 0 e 100 pontos (inclusive)?
4. Entre 100 pessoas, quantas pelo menos nasceram no mesmo mês?
5. Qual é o menor número de estudantes que se deve ter em um curso para garantir que pelo menos cinco irão receber a mesma nota, sabendo que as possíveis notas são A,B,C,D e E?
6. Em uma gaveta, há 6 lenços brancos, 8 azuis e 9 vermelhos. Lenços serão retirados, ao acaso, de dentro dessa gaveta. Quantos lenços, no mínimo, devem ser retirados para que se possa garantir que, dentre os lenços retirados haja um de dada cor?
7. Em um grupo de 25 pessoas, pode-se afirmar que existem pelo menos três que nasceram no mesmo mês?
8. Um restaurante possui 62 mesas com um total de 314 cadeiras. É possível garantir a existência de pelo menos uma mesa com pelo menos 6 cadeiras?
9. Dados 12 livros de português, 14 de história, 9 de química e 7 de física, quantos livros deve-se retirar ao acaso para que se tenha certeza de que 6 são da mesma disciplina?
10. Considere um torneio em que cada um dos p jogadores joga contra todos os outros (turno único) e cada jogador ganha pelo menos uma vez. Mostre que existem pelo menos 2 jogadores com o mesmo número de vitórias.

4.2 Gabarito - Princípio das Gavetas de Dirichlet

1. 5 cartas
2. Não, são necessárias 14 cartas
3. 102 estudantes
4. 9 pessoas
5. 21 estudantes
6. 18 lenços
7. Sim, 25 pessoas é o mínimo necessário
8. Sim, 311 cadeiras é o mínimo necessário
9. 21 livros
10. Número de vitórias: $n = p - 1$ ("Casas")
    Número de jogadores $kn + 1 = p$ ("População de pombos")
    Determinando k: $k(p-1) + 1 = p \Rightarrow k = \dfrac{p-1}{p-1} \Rightarrow k = 1$
    Número de jogadores em pelo menos uma casa: $k + 1 = 2$ ("Condição")

Capítulo 5

Binômio de Newton (Teorema Binomial)

"Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter paciência do que qualquer outro talento."
Isaac Newton

5.1 Introdução

Pelos produtos notáveis, sabe-se que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, portanto para calcular-se $(a+b)^3$, pode-se escrever:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Para calcular $(a+b)^4$, adota-se o mesmo procedimento:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

De modo análogo, pode-se calcular as quintas e sextas potências e, de modo geral, obter o desenvolvimento da potência $(a+b)^n$ a partir da anterior, ou seja, de $(a=b)^{n-1}$. Porém quando o valor de n é grande, este processo gradativo de cálculo é muito trabalhoso. Existe um método para desenvolver a enésima potência de um binômio, conhecido como **Binômio de Newton**[1]. Para esse método é necessário saber o que são coeficientes binominais, algumas de suas propriedades e o triângulo de Pascal[2] (também conhecido como triângulo de Tartaglia[3]).

5.2 Coeficientes Binominais

Sendo n e p dois números naturais $(n \geq p)$, chama-se de **coeficiente binomial** de classe p, do número n, o número $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, que indica-se por $\dbinom{n}{p}$ (lê-se: n sobre p). Pode-se escrever:

$$dbinomnp = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \forall n, p \in Nen \geq p \tag{5.1}$$

O coeficiente binomial também é chamado de **número binomial**. Por analogia com as frações, diz-se que n é seu **numerador** e p, o **denominador.** Pode-se escrever:

[1]Isaac Newton (Inglaterra, 1642 – 1727)
[2]Blase Pascal (França, 1623 – 1662)
[3]Nicollò Fontana Tartaglia (Itália, 1500 – 1557)

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} \tag{5.2}$$

É também imediato que, para qualquer n natural, temos:

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n \quad \text{e} \quad \binom{n}{0} = 1 \tag{5.3}$$

5.3 Propriedades dos Coeficientes Binominais

Propriedade 1: (Complementares) Se $n, p, k \in N$ e $p + k = n$, então:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k} \tag{5.4}$$

Coeficientes binominais como esses, que tem o mesmo numerador e a soma dos denominadores igual ao numerador, são chamados **complementares.**

Exemplo 5.1 :

a) $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

b) $\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$

c) $\binom{8}{1} = \binom{8}{7}$

Propriedade 2: (Relação de Stifel[4]) Se $n, p, k \in N$ e $p \geq p - 1 \geq 0$, então:

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} \tag{5.5}$$

Exemplo 5.2 :

a) $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$

b) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$

c) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$

5.4 Triângulo de Pascal

A disposição ordenada dos números binominais, como na tabela a seguir, recebe o nome de **Triângulo de Pascal**

[4]Michael Stifel (Alemanha, 1487 – 1567)

$$\begin{array}{llllllll}
n=0 & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
n=n & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{n}
\end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cc}
n=0 & \binom{0}{0} \\
n=1 & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
n=2 & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
n=3 & \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}
\end{array}$$

Escrito na forma de um triângulo retângulo, os números binominais com o mesmo numerados são escritos na mesma linha e os de mesmo denominador, na mesma coluna.

Substituindo cada número binomial pelo seu respectivo valor, temos:

$$\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

5.4.1 Sobre a Construção do Triângulo de Pascal

Para construir o triângulo de Pascal na forma equilátera, basta lembrar as seguintes propriedades dos números binominais, não sendo necessário calculá-los:

1. Como $\binom{n}{0} = 1$, o primeiro elemento de cada linha é igual a 1.
2. Como $\binom{n}{n} = 1$, o último elemento de cada linha é igual a 1.
3. O elemento i, na linha n, é a soma dos elementos $i-1$ e i da linha $n-1$.

5.4.2 Propriedades do Triângulo de Pascal[5]

Propriedade 1: Em qualquer linha, dois números binominais equidistantes dos extremos são iguais. Note na figura a seguir

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & \mathit{3} & \mathit{3} & 1 & & & \\
1 & \mathit{4} & 6 & \mathit{4} & 1 & & \\
1 & \mathit{5} & \mathit{10} & \mathit{10} & \mathit{5} & 1 & \\
1 & \mathit{6} & \mathit{15} & 20 & \mathit{15} & \mathit{6} & 1
\end{array}
$$

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2}$$

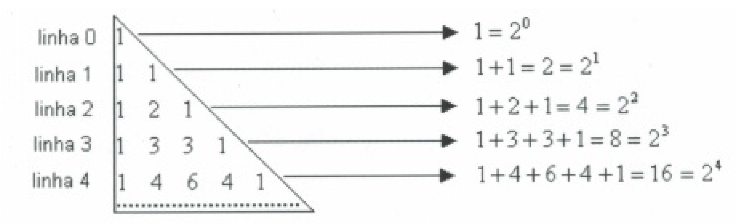
$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} \text{e} \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

$$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} \text{e} \binom{6}{2} = \binom{6}{4}$$

De fato, esses binominais são **complementares**.

Propriedade 2: (Teorema das linhas) A soma dos elementos da enésima linha é 2^n

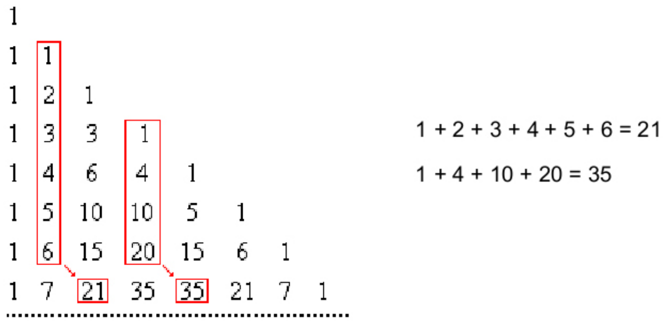


De modo geral temos:

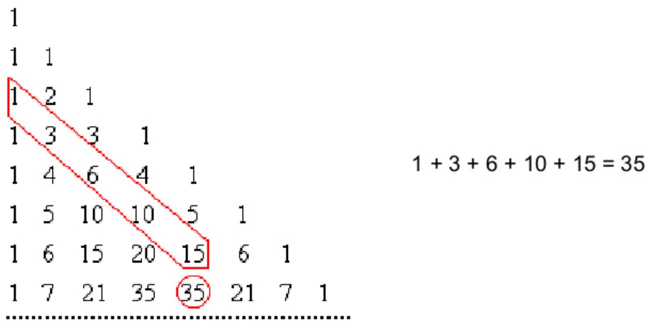
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n \tag{5.6}$$

Propriedade 3: (Teorema das colunas): A soma dos elementos de qualquer coluna, do 1° elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo.

[5]Para facilitar a visualização das propriedades, utiliza-se nesta seção o triângulo de Pascal na forma de triângulo retângulo



Propriedade 4: (Teorema das diagonais) A soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de uma qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste.



5.5 Desenvolvimento do Binômio de Newton

Como demonstrado, a potência da forma $(a+b)^n$, em que $a, b \in R$ e $n \in N$, é chamada binômio de Newton. Além disso:

- Quando $n = 0$ tem-se $(a+b)^0 = 1$
- Quando $n = 1$ tem-se $(a+b)^1 = a + b$
- Quando $n = 2$ tem-se $(a+b)^2 = a^2 = 2ab + b^2$
- Quando $n = 3$ tem-se $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Quando $n = 4$ tem-se $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Observe que os coeficientes dos desenvolvimentos foram o triângulo de Pascal. Então, pode-se escrever também:

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0b^0$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

De modo geral, quando o expoente é n, pode-se escrever a **fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton,** chamado Teorema Binomial.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n}a^0b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \tag{5.7}$$

Note que os expoentes de a vão diminuindo de unidade em unidade, variando de n até 0, e os expoente de b vão aumentando de unidade, variando de 0 até n. O desenvolvimento de $(a+b)^n$ possui $n+1$ termos.

Exemplo 5.3 : Construa o triângulo de Pascal e desenvolva o binômio de Newton $(3x-6y)^5$

5.6 Termo Geral do Binômio de Newton

Observando os termos do desenvolvimento de $(a+b)^n$, nota-se que cada um deles é na forma $\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$.

- Quando $p=0$ tem-se o 1° termo: $\binom{n}{0}a^nb^0$
- Quando $p=1$ tem-se o 2° termo: $\binom{n}{1}a^{n-1}b^1$
- Quando $p=2$ tem-se o 3° termo: $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$
- Quando $p=3$ tem-se o 4° termo: $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$

Percebe-se ,então, que um termo qualquer T de ordem $p+1$ pode ser expresso por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Logo, o termo T, de ordem p é dado por:

$$T_p = \binom{n}{p-1}a^{(n-p)+1}b^{p-1} \tag{5.8}$$

Exemplo 5.4 : Encontre o décimo termo do binômio $\left(7x - \dfrac{1}{4}\right)^{15}$

5.7 Lista de exercícios - Teorema Binomial

1. Use o teorema binomial para expandir cada expressão.

   a) $(x+y)^2$
   b) $(a+b)^2$
   c) $(5x-y)^2$
   d) $(a-3b)^2$
   e) $(3s+2t)^2$
   f) $(3p-4q)^2$
   g) $(u+v)^3$
   h) $(b-c)^3$
   i) $(2x-3y)^3$
   j) $(4m+3n)^3$
   k) $(2x+y)^4$
   l) $(2y-3x)^5$
   m) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^6$
   n) $(\sqrt{x}+\sqrt{3})^4$
   o) $(x^{-2}+3)^5$
   p) $(a-b^{-3})^7$
   q) $(x-2)^5$
   r) $(x+3)^6$
   s) $(2x-1)^7$
   t) $(3x+4)^5$

2. Encontre o coeficiente do termo dado na expressão binomial.

   a) $x^{11}y^3, (x+y)^{14}$
   b) $x^5y^8, (x+y)^{13}$
   c) $x^4, (x-2)^{12}$
   d) $x^7, (x-3)^{11}$

3. Qual é o coeficiente de x^4 na expansão de $(2x+1)^8$?

4. Qual dos seguintes números não pertence à décima linha do triângulo de Pascal?

   a) 1
   b) 5
   c) 10
   d) 120
   e) 252

5. A soma dos coeficientes de $(3x-2y)^{10}$ é?

6. A soma de $(x+y)^3+(x-y)^3$ resulta em?

5.8 Gabarito - Teorema Binomial

1. a) $x^2 + 2xy + y^2$
   b) $a^2 + 2ab + b^2$
   c) $25x^2 - 10xy + y^2$
   d) $a^2 - 6ab + 9b^2$
   e) $9s^2 + 12st + 4t^2$
   f) $9p^2 - 24pq + 16q^2$
   g) $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
   h) $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$
   i) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
   j) $64m^3 + 144m^2n + 108mn^2 + 27n^3$
   k) $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$
   l) $32y^5 - 240y^4x + 720y^3x^2 - 1080y^2x^3 + 810yx^4 - 243x^5$
   m) $x^3 - 6x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 15x^2y - 20x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 15xy^2 - 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}} + y^3$
   n) $x^2 + 4x^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{2}} + 18x + 4x^{\frac{1}{2}}3^{\frac{3}{2}} + 9$
   o) $x^{-10} + 15x^{-8} + 90x^{-6} + 270x^{-4} + 405x^{-2} + 243$
   p) $a^7 - 7a^6b^{-3} + 21a^5b^{-6} - 35a^4b^{-9} + 35a^3b^{-12} - 21a^2b^{-15} + 7ab^{-18} - b^{-21}$
   q) $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$
   r) $x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1215x^2 + 1458x + 729$
   s) $128x^7 - 448x^6 + 672x^5 - 560x^4 + 280x^3 - 84x^2 + 14x - 1$
   t) $243x^5 + 1620x^4 + 4320x^3 + 5760x^2 + 3840x + 1024$

2. a) $T_4 = 364x^{11}y^3$
   b) $T_9 = 1287x^5y^8$
   c) $T_9 = 126720x^4$
   d) $T_5 = 26730x^7$

3. $T_5 = 1120x^4$

4. b) 5

5. $S_{coef} = 1$

6. $2x^3 + 6xy^2$

Capítulo 6

Indução Matemática

"O último esforço da razão é reconhecer que existe uma infinidade de coisas que a ultrapassam."

Blaise Pascal

6.1 Introdução

Para entender intuitivamente o que é a indução matemática, será ilustrada a técnica:

- Você está subindo uma escada infinitamente alta. Como saber se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?
- Suponha as seguintes hipóteses:

  i. Você consegue alcançar o primeiro degrau.

  ii. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo.

- Pela primeira hipótese , você é capaz de chegar ao primeiro degraus, pela segunda, você consegue chegar ao segundo, novamente pela segunda hipótese, chega ao terceiro ao quarto e assim sucessivamente.

Este mesmo raciocínio é utilizado para provar propriedades dos números inteiros positivos, através de uma técnica chamada **Indução Matemática** ou **Indução Finita**. Esta técnica aparece pela primeira vez nos trabalhos de Maurolico[1], em 1575. No séc XVII, Fermat[2] e Pascal[3] usam essa técnicas em seus trabalhos. Fermat dá o nome de *"método do descendente infinito"*.Em 1883, De Morgan[4] descreve o processo cuidadosamente e dá o nome de *"Indução Matemática"*.

Considere que $P(n)$ denota que o número inteiro positivo n possui a propriedade P.

1. Prova-se que o número 1 tem a propriedade P : $\mathbf{P(1)}$.
2. Supõe-se que a propriedade P é válida para qualquer inteiro positivo k : $\mathbf{P(k)}$.
3. Prova-se que, se a mesma propriedade P é válida para qualquer número inteiro k, então é válida para o próximo inteiro positivo $k+1$: $P(k) \longrightarrow P(k+1)$.

[1]Francesco Maurolico (Itália, 1494 - 1575)
[2]Pierre Di Fermat (França, 1601 - 1665)
[3]Blaise Pascal (França, 1623 – 1662)
[4]August de Morgan (Índia, 1806 - 1871)

6.2 Princípio da Indução Matemática

O primeiro princípio de indução matemática é formulado da seguinte forma:

- $P(1)$ é verdade.
- $(\forall k)(P(k))$ é verdade $\longrightarrow P(k+1)$ é verdade.

E com isso, prova-se que a propriedade é verdadeira para todo inteiro positivo **n**, ou seja, que $P(n)$ é verdade.

Exemplo 6.1 : Suponha que um ancestral casou-se e teve dois filhos. Vamos chamar esses dois filhos de geração 1. Suponha agora que cada um desses filhos teve dois filhos. Então a geração 2 contém quatro descendentes Imagine que esse processo continua de geração em geração.

Então pode-se deduzir que:

- A geração 1 possui 2 descendentes.
- A geração 2 possui 4 descendentes
- A geração 3 possui 8 descendentes.
- E assim sucessivamente..

Então pode-se fazer a seguinte conjectura: *A geração n possui* 2^n *descendentes*, ou seja, pode-se escrever que:

$$P(n) = 2^n$$

Agora, irá se provar que essa conjectura está correta, através das três etapas necessárias para o desenvolvimento do princípio de indução matemática, a saber:

1. **Base de Indução:** Estabelece-se a veracidade da propriedade para $n = 1$:

$$P(1) = 2^1 = 2$$

2. **Hipótese de Indução:** Supõe-se que a propriedade é válida para algum inteiro $k, k \geq 1$:

$$P(k) = 2^k$$

3. **Passo de Indução:** Prova-se que a propriedade é válida para o inteiro seguinte $k+1$, ou seja, que $P(k) \longrightarrow P(k+1)$:

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

$P(k+1) = 2P(k)^{HI} = 2.2^k = 2^{k+1}$ (o número de descendentes dobra de uma geração para outra).

6.3 Lista de exercícios - Indução Matemática

1. Prove que a equação a seguir é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

   $1 + 3 + 5 + .. + (2n - 1) = n^2$

2. Prove que a equação a seguir é verdadeira para todo $n \geq 1$.

   $1 + 2 + 2^2 + .. + 2^n = 2^{n+1} - 1$

3. Prove que, para qualquer inteiro positivo n

   $1 + 2 + 3 + .. + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

4. Prove que, para qualquer inteiro positivo n

   $1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Capítulo 7

Notação Somatória e Produtória

"O leitor não encontrará figuras neste trabalho. Os métodos que estabeleci não requerem construções e raciocínios geométricas ou mecânicos: somente operações algébricas, sujeitas a uma regra de procedimento regular e uniforme"

Joseph-Louis Lagrange

Atenção: para todos os exemplos deste capítulo, será usado o conjunto de dados S, a saber: $S = \{X_i \in N/1 \leq i \leq 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7.1 Somatório

O símbolo X_i (lê-se X índice i) representa qualquer um dos n valores assumidos pela variável X no conjunto S.

Exemplo 7.1 : Para o conjunto S, tem-se:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Notação de Somatório[1]**:** $\sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$

Exemplo 7.2 : Para o conjunto S, faça $\sum_{i=4}^{7} X_i$.

Número de termos do somatório (NT): Corresponde ao número de termos que farão parte da soma. Pode-se calcular o NT de duas formas distintas, a saber:

$$NT = L_{sup} - L_{inf} + 1 \text{ (sem restrição)}$$
$$NT = L_{sup} - L_{inf} + 1 - r \text{ (com restrição)}$$

onde: L_{sup} = Limite superior do somatório.
L_{inf} = Limite inferior do somatório.
r = Número de restrições (termos que não farão parte do somatório).

[1] Joseph-Louis Lagrange (Itália, 1736 - 1813)

Exemplo 7.3 : Para o conjunto S, calcule o valor e o número de termos do somatório $\sum\limits_{\substack{i=2\\ i\neq 3,5}}^{8} X_i$.

Propriedades dos Somatórios

Atenção: Para todas as propriedades apresentadas aqui, tem-se a seguinte nomenclatura:

- k = Constante $\in R$.
- NT = Número de termos.

Propriedade 1: $\sum\limits_{i=1}^{n} k = NT.k$

Propriedade 2: $\sum\limits_{i=1}^{n} k.X_i = k.\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Propriedade 3: $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i \pm Y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i + \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$

Propriedade 4: $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i \pm k) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} k = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \pm NT.k$

Propriedade 5: $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i.Y_i) \neq \sum\limits_{i=1}^{n} X_i.\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$

Obs.: Ao termo $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i.Y_i)$ dá-se o nome de *"Soma de Produtos"* e ao termo $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i.\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ dá-se o nome de *"Produto da Soma"*

Propriedade 6: $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i)^2 \neq (\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)^2$

Obs.: Ao termo $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i)^2$ dá-se o nome de *"Soma de Quadrados"* e ao termo $(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)^2$ dá-se o nome de *"Quadrado da Soma"*.

Propriedade 7: $\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \neq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$

7.1.1 Somatórios Duplos

É um procedimento para somar dados de dupla entrada, fazendo om que a variável X seja duplamente indexada, a saber: X_{ij}. Para dados em tabelas, o índice i representa as linhas (cujo valor máximo será denotado por m)e o índice j representa as colunas (cujo valor máximo será denotado por n).

Notação: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$

Exemplo 7.4 : Considere os dados da tabela de dupla entrada abaixo representada:

i	j		
	1	**2**	**3**
1	4	5	7
2	5	7	1
3	3	8	2
4	2	6	3

Com base nestes dados, calcule os seguintes somatórios duplos:

a) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

b) $\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=1}^{2} X_{ij}$

c) $\sum_{i=1}^{4} X_{ij},\ \forall j$

d) $\sum_{j=1}^{3} X_{ij},\ \forall i$

Propriedade (Soma de produtos): $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_i.Y_j = \sum_{i=1}^{m} X_i.\sum_{j=1}^{n} Y_j$

Obs.: A soma de produtos aparece quando tem-se dados bivariados.

Exemplo 7.5 : Considere a tabela abaixo e verifique a propriedade $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_i.Y_j = \sum_{i=1}^{m} X_i.\sum_{j=1}^{n} Y_j$

i	X_i	Y_j
1	2	1
2	4	3
3	6	5
4	8	7
5	10	

7.2 Produtório

Para designar o produtório utiliza-se a letra grega *pi* maiúsculo, que deve ser lido como *"produtório"* ou *"produto de"*.

Notação de Produtório: $\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1.X_2.X_3...X_n$

Propriedades dos Produtórios

Propriedade 1: $\prod_{i=1}^{n} i = 1.2.3...n = n!$

Propriedade 2: $\prod_{i=1}^{n} k = k^{NT}$

Propriedade 3: $\prod_{i=1}^{n}(X_i \pm k) = (X_1 \pm k).(X_2 \pm k).(X_3 \pm k)...(X_n \pm k)$

Propriedade 4: $\prod_{i=1}^{n} X_i.k = k^n.\prod_{i=1}^{n} X_i$

Propriedade 5: $\prod_{i=1}^{n} X_i^a.k = k^n.\prod_{i=1}^{n} X_i^a,\ a \in R$

Propriedade 6: $\prod_{i=1}^{n} X_i.Y_i = \prod_{i=1}^{n} X_i.\prod_{i=1}^{n} Y_i$

Propriedade 7: $\log(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \log(X_1.X_2.X_3...X_n) = \log(X_1) + \log(X_2) + \log(X_3) + ... + \log(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$

Exemplo 7.6 : Considere a tabela abaixo e verifique a propriedade $\prod_{i=1}^{n} X_i.Y_i = \prod_{i=1}^{n} X_i.\prod_{i=1}^{n} Y_i$

i	X_i	Y_i
1	-4	3
2	3	10
3	6	-5
4	2	2

7.3 Lista de Exercícios - Somatório e Produtório

1. Considerando os seguintes valores, calcular o que se pede:

i,j	X_i	Y_j
1	2	1
2	6	4
3	7	5
4	9	11

a) $\sum_{j=1}^{3}(Y_j-2)^2$

b) $\sum_{i=1}^{4}(X_i-4Y_i)$

c) $\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=2}^{3}3(X_i-Y_j)$

2. Efetuar:

a) $\sum_{i=-1}^{3}(i^2+\frac{i}{j})$

b) $\sum_{i=3}^{6}\sum_{j=0}^{2}(i+j).\frac{(i-3)}{i}$

3. Seja $X=\{5,2,3,0,1,2,6,9,4,8\}$, calcule:

a) $\sum_{i=1}^{10}X_i$

b) $\sum_{i=1}^{10}X_i^2$

c) $(\sum_{i=1}^{10}X_i)^2$

d) $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}X_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{10}X_i)^2}{10}}{10-1}$

e) $\sum_{i=1}^{10}(X_i-4)$

f) $\sum_{i=1}^{10}(X_i-4)^2$

g) $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-4)^2}{10-1}$

h) $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$

4. Desenvolver e calcular:

a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{6}(i+b.j)$

b) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{5}(i-j)$

c) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(i-3j)^2$

d) $\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=0}^{8}cb$

e) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} i^2$

5. Calcule X_1 e X_3, dado que: $\sum_{i=1}^{6} X_i = 42$, $\sum_{i=1}^{6} X_i^2 = 364$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1,3}}^{6} X_i = 34$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1,3}}^{6} X_i^2 = 324$

6. Utilizando os dados da tabela abaixo, calcule:

i	**j**			
	1	**2**	**3**	**4**
1	8	7	5	9
2	4	0	10	2

a) $\sum_{i=1}^{2} X_{i1}$

b) $\sum_{j=1}^{4} X_{1j}$

c) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} X_{ij}$

d) $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 3}}^{4}\sum_{i=1}^{2} X_{ij}$

e) $\sum_{j=2}^{3} X_{2j}$

f) $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{4} \frac{1}{X_{2j}}$

g) $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 3}}^{4} 6X_{1j}$

h) $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{4} X_{2j}$

7. Escreva usando notação de somatório ou produtório, conforme o caso:

a) $(\frac{X_1 - Y_1}{2} + \frac{X_2 - Y_2}{2} + \frac{X_4 - Y_4}{2})^2$

b) $a!$

c) $(X_1 + Y_1)(X_1 + Y_2)(X_1 + Y_3)$

d) $(X_1Y_1) + (X_1Y_2) + (X_1Y_3) + (X_2Y_1) + (X_2Y_2) + (X_2Y_3)$

e) $(X_1Y_1)(X_2Y_2)...(X_nY_n)$

8. Considere os seguintes valores:

i	**X**	**Y**
1	2	1
2	4	3
3	6	5
4	8	7
5	10	9
6	12	11
7	14	13
8	16	15

a) $\sum_{i=1}^{8}(\frac{X_i}{2} - Y_i)^2$

b) $\sqrt{\prod_{i=1}^{4} X_i}$

c) $\prod_{i=2}^{4} \frac{X_i Y_i}{3}$

9. Desenvolver:

a) $\sum_{i=1}^{3}(i^2 + \frac{1}{j})$

b) $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 4}}^{5} \sum_{i=2}^{4} \frac{(i^2 - j^2)j}{i+j}$

c) $(\sum_{i=1}^{5}(i+8))^2$

d) $\prod_{i=1}^{5}(i+8)$

10. Se $\sum_{i=1}^{3} X_i = 12$, $\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = 56$ e $Y_1 = 3$, $Y_2 = 5$ e $Y_3 = 6$, calcule:

a) $\sum_{i=1}^{3} 12X_i$

b) $\sum_{i=1}^{3}(X_i^2 - 2)$

c) $\sum_{i=1}^{3}(X_i Y_i)$

11. Calcule X_9 e X_{21}, dado que: $\sum_{i=1}^{50} X_i = 200$, $\sum_{i=1}^{50} X_i^2 = 1206$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 9,21}}^{50} X_i = 190$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 9,21}}^{50} X_i^2 = 1154$

7.4 Gabarito - Somatório e Produtório

1. a) 14

   b) -60

   c) 51

2. (a) $15 + \frac{5}{j}$

   (b) $\frac{429}{20}$

3. a) 40

   b) 240

   c) 1600

   d) $\frac{80}{9}$

   e) 0

   f) 80

   g) $\frac{80}{9}$

   h) 4

4. a) $30 + 60b$

   b) -16

   c) 46

   d) $63cb$

   e) 150

5. $x_1 = 6$ e $x_2 = 2$ (ou vice-versa)

6. a) 12

   b) 29

   c) 45

   d) 30

   e) 10

   f) $\frac{17}{20}$

   g) 108864

   h) 80

7. a) $\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^{4} \frac{X_i - Y_i}{2} \right)^2.$

   b) $\prod_{i=1}^{a} i$

   c) $\prod_{i=1}^{3} (X_1 + Y_i)$

   d) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (X_i.Y_i)$

   e) $\prod_{i=1}^{n} X_i.Y_i$

8. a) 140

   b) $19,60$

   c) $746,67$

9. a) $14 + \frac{3}{j}$

   b) -18

   c) 3025

   d) 154440

10. a) 144

    b) 50

    c) $3X_1 + 5X_2 + 6X_3$

11. $x_1 = 6$ e $x_2 = 4$ (ou vice-versa)

Capítulo 8

Progressões Aritméticas e Geométricas

"Os encantos desta ciência sublime chamada matemática só são revelados àqueles que tem o valor de se aprofundar nela"

Carl Friedrich Gauss

8.1 Progressões Aritméticas

Definição 1: Sequência numérica é uma lista formada por termos (números) ordenados e expressos na forma de um conjunto.

Definição 2: Um termo qualquer de uma sequência é denominado a_n, onde n é o índice que indica a posição ou ordem do termo, a saber

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...) \tag{8.1}$$

Definição 3: Sequências *finitas* possuem um último termo. Caso contrário, a sequência é dita *infinita* e, para indicá-la, colocam-se reticências no final.

Definição 4: *Progressão aritmética* (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado *razão* da progressão.

Matematicamente, uma PA é definida como:

$$PA \longleftrightarrow a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in N^*, \forall r \in R \tag{8.2}$$

Obs.: Note que $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n$

Exemplo 8.1 :

a) PA com $r = 2$: $(1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)$

b) PA com $r = -6$: $(18, 12, 6, 0, -6, -12, ...)$

c) PA com $r = \frac{1}{2}$: $\left(3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, ...\right)$

8.1.1 Termo Geral de Uma PA

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ de razão r, então o termo geral desta PA pode ser deduzido através do seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{8.3}$$

Exemplo 8.2 : Três números estão em PA, de tal forma que a soma deles é 18 e o produto é 66. Encontre o termo geral desta PA, sabendo que sua razão é **positiva**.

8.1.2 Soma dos Termos de Uma PA Finita

O algoritmo para determinar a soma de uma PA finita baseia-se na seguinte propriedade:

Propriedade: Numa PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Baseado nesta propriedade, a fórmula [1] para a soma da PA finita é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{8.4}$$

S_n = soma dos n termos a_1 = primeiro termo a_n = enésimo termo n = número de termos

Exemplo 8.3 : Resolva a equação $2 + 5 + 8 + ... + x = 77$ sabendo que os termos do primeiro membro estão em PA.

8.2 Progressões Geométricas

Definição 5: Progressão Geométrica (PG) é uma sequência de números não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamada **razão (r)**. De modo geral, tem-se:

$$PG \longleftrightarrow a_{n+1} = a_n.r, \forall n \in N^*, \forall r \in R \tag{8.5}$$

Obs.: Note que $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Uma PG pode ser:

- **Crescente:** se $r > 1$ e os termos são positivos ou se $0 < r < 1$ e os termos são negativos.

[1] A obtenção deste algoritmo é atribuída a Gauss [2], quando este frequentava a escola primária

- **Decrescente:** se $r > 1$ e os termos são negativos ou se $0 < r < 1$ e os termos são positivos.
- **Constante:** se $r = 1$.
- **Alternante:** se $r < 0$.

Exemplo 8.4 :

a) PG com $r = 2$: $(4, 8, 16, 32, 64, ...)$

b) PG com $r = \frac{1}{4}$: $\left(8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, ...\right)$

c) PG com $r = 1$: $(10, 10, 10, ...)$

d) PG com $r = -2$: $(4, -8, 16, -32, ...)$

8.2.1 Termo Geral de uma PG

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ de razão r, então o termo geral desta PG pode ser deduzido através do seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1.r^0 \\ a_2 &= a_1.r \\ a_3 &= a_2.r = a_1.r^2 \\ a_4 &= a_3.r = a_1.r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}.r = a_1.r^{n-1} \end{aligned}$$

$$a_n = a_1.r^{n-1} \tag{8.6}$$

Exemplo 8.5 : A sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG. Pede-se:

a) Calcular x, sabendo que ele é positivo.

b) Determinar o termo geral da PG.

c) Calcular a_5, utilizando o termo geral.

8.2.2 Soma dos Termos de Uma PG Finita

Seja a PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ou $(a_1, a_1r, a_1r^2, a1r^3, ..., a_1r^{n-1})$ de razão r e seja S_n a soma dos n termos.

Caso 1: Se $r = 1$, então:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + ... + a_1r^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1$$

$$S_n = n.a_1 \tag{8.7}$$

Caso 2: Se $r \neq 1$, então:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a1r^3 + ... + a_1r^{n-1} \textbf{ (I)}$$
$$S_n.r = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + ... + a_1r^{n-1} + a^1r^n \textbf{ (II)}$$

Agora, fazendo **II-I** tem-se que:

$$II - I = S_n.r - S_n = a_1.r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \tag{8.8}$$

Exemplo 8.6 : Dada a PG $(1, 3, 9, 27, ...)$, determine:

a) O termo geral.

b) O valor de n para que a soma dos n primeiros termos seja 29524.

8.2.3 Soma dos Termos de Uma PG Infinita

O valor da soma dos termos de uma PG infinita depende do valor da razão r. Convém lembrar que nem toda PG infinita possui soma finita; as que possuem são chamadas *séries geométricas convergentes*, enquanto as que não possuem soma finita são chamadas de *séries geométricas divergentes*.

Caso 1: Se $|r| = 1$ e $a_1 \neq 0$, a série é, obrigatoriamente, *divergente*.

Caso 2: Se $r > 1$ a série é, obrigatoriamente, *divergente*. Neste caso, o resultado depende do valor de a_1. Se $a_1 > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Se $a_1 < 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$.

Caso 3: Se $r < -1$, a série é, obrigatoriamente, *divergente*.

Caso 4: Se $-1 < r < 1$, a série é *convergente* e sua soma é dada por:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \tag{8.9}$$

Exemplo 8.7 : Determine o valor de convergência da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$, quando $n \to \infty$

8.3 Progressões e Logaritmos

Sejam duas progressões, uma geométrica, onde o primeiro termo é igual a 1, e a outra, aritmética, tendo 0 como o primeiro termo, a saber:

$$PG(1, 2, 4, 8, 6, 32); PA(0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Os termos 0,1,2,3,4 e 5 da PA são os *logaritmos*, base 2, dos termos 1,2,4,8,6,32 da PG. O conjunto das duas progressões forma um *sistema de logaritmos*. Pode-se elaborar uma infinidade de sistemas de logaritmos, os quais se distinguem pela base. Briggs[3] criou o sistema de *logaritmos decimais* (base 10) utilizando as seguintes progressões:

$$PG(1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ...); PA(0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

[3] Henry Briggs (Inglaterra, 1561-1630)

8.4 Lista de Exercícios - Progressões Aritméticas e Geométricas

1. Encontre o termo geral da PA $(2, 7, ...)$.

2. Encontre o termo geral da PA $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, ...\right)$.

3. Qual é o décimo quinto termo da PA $(4, 10, ...)$.

4. Qual é o centésimo número natural par (considere que $0 \in N$)?

5. Ache o quinto termo da PA $(a + b, 3a - 2b, ...)$.

6. Ache o sexagésimo número natural ímpar.

7. Numa PA de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual é a posição do termo igual a 44?

8. Ache a_1 numa PA, sabendo que $r = \frac{1}{4}$ e $a_{17} = 21$.

9. Quantos termos tem uma PA finita, de razão 3, sabendo-se que o primeiro termo é -5 e o último é 16?

10. Calcule o número de termos da PA $(5, 10, ..., 785)$.

11. Qual é o primeiro termo de uma PA cujo sétimo termo é 46, sendo o termo precedente 39?

12. Numa estrada existem dois telefones instalados no acostamento: um no km 3 e outro no km 88. Entre eles serão colocados mais 16 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Determine em quais marcos quilométricos deverão ficar esses novos telefones.

13. Uma fábrica produziu, em 1986, 6530 unidades de um determinado produto e, em 1988, produziu 23330 unidades do mesmo produto. Sabendo que a produção anual desse produto vem crescendo em progressão aritmética, pede-se:

    a) Quantas unidades do produto essa fábrica produziu em 1987?

    b) Quantas unidades foram produzidas em 1991?

14. Calcule a soma dos dez primeiros termos de uma PA cujo primeiro termo é 1,87 e a razão é 0,004.

15. Calcule a soma dos múltiplos de 5 entre 100 e 2000 (Obs.: Não inclua os extremos).

16. Calcule a soma dos números inteiros positivos inferiores a 500 (inclusive) e que **não** sejam divisíveis por 7.

17. O dono de uma fábrica pretende iniciar a produção com 2000 unidades mensais, e a cada mês, produzir 175 unidades a mais. Mantidas essas condições, em um ano quantas unidades a fábrica terá produzido no total?

18. Dois corredores vão se preparar para participar de uma maratona. Um deles começará correndo 8 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 2 km; o outro correrá 17 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 1 km. A preparação será encerrada no dia em que eles percorrerem, em km, a mesma distância. Calcule a soma, em km, das distâncias que serão percorridas pelos dois corredores durante todos os dias do período de preparação.

19. Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em Progressão Aritmética. O valor da segunda hora é R$ 4,00 e o da sétima é R$ 0,50. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado 5 horas nesse local?

20. Qual deve ser o número mínimo de termos da sequência $(-133, -126, -119, -112, ...)$ para que a soma de seus termos seja maior que zero.

21. Numa PG em que $a_1 = \dfrac{1}{4}$ e $r = 2$, qual é o lugar ocupado na sequência pelo termo igual a 32?

22. Em uma PG com cinco termos, o segundo termo é 8 e o último é 512. Escreva essa PG.

23. Numa PG crescente, o oitavo termo vale 8 e o décimo vale 32. Encontrar a_9 e a razão r.

24. Qual é a razão de uma PG de quatro termos, na qual a soma dos dois primeiros é igual a 15 e a soma dos dois últimos é igual a 240?

25. Em uma progressão geométrica $a_4 + a_6 = 120$ e $a_7 + a_9 = 960$. Encontrar r e a_1.

26. A sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG crescente.

    a) Calcular o valor de x.

    b) Escrever essa progressão.

27. Em uma PG decrescente a soma do segundo termo com o terceiro é 18 e a soma do sexto com o sétimo é 288. Calcular a razão dessa PG.

28. A soma do segundo, quarto e sétimo termos de uma PG é 370; a soma do terceiro, quinto e oitavo termos é 740. Calcule a razão e o primeiro termo da PG.

29. Uma cultura de bactérias, mantida sob determinadas condições, triplica o volume a cada dia. Se o volume inicial dessa cultura é de 5 cm^3, qual será o volume no 5º dia?

30. Insira 4 meios geométricos entre 6 e 192.

31. Entre os números 18 e x foram inseridos dois meios geométricos. Obteve-se, assim, uma PG de razão 3. Qual é o valor de x?

32. Quantos números devem ser escritos entre 100 e 1.000.000 de modo que a sequência obtida seja uma PG de razão 10?

33. Calcular a soma dos dez primeiros termos de uma PG em que o primeiro termo é 10 e a razão é 2.

34. Os termos do primeiro membro da equação $3 + 6 + ... + x = 381$ formam uma PG. Encontre o conjunto solução dessa equação.

35. Uma pessoa aposta na loteria durante 5 semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da semana anterior. Se o valor da aposta na primeira semana é R$ 60,00, qual o total apostado após 5 semanas?

36. Calcule a soma dos termos da PG $(20, 10, 5, ...)$.

37. Determine a PG **crescente** de três elementos que são números inteiros, sabendo que a soma deles é igual a 31 e o produto é 125.

38. Em uma progressão geométrica, $a_1 = 5$, $a_n = 1280$ e $r = \sqrt{2}$. Determinar o número de termos dessa progressão.

39. Achar x de modo que $x - 2$, $x + 2$ e $x + 17$ estejam em progressão geométrica.

40. Ache o valor para o qual converge cada uma das seguintes séries:

    a) $20 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + ...$

    b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$

8.5 Gabarito - Progressões Aritméticas e Geométricas

1. $a_n = -3 + 5n$
2. $a_n = \dfrac{23 + 5n}{12}$
3. $a_{15} = 88$
4. $a_{100} = 198$
5. $a_5 = 9a - 11b$
6. $a_{60} = 119$
7. $n = 9$
8. $a_1 = 17$
9. $n = 8$
10. $n = 157$
11. $a_1 = 4$
12. Km=(8,13,18,23,28,33,38,43,48,53,58, 63,68,73,78,83)
13. a) 14930
    b) 48530
14. $S_{10} = 18,88$
15. $S_{379} = 397950$
16. 107358
17. 35550 peças
18. 385 Km
19. R$ 17,80
20. 40 termos
21. 8º lugar
22. PG:(2,8,32,128,512)
23. $a_9 = 16$
24. $r = \pm 4$
25. $r = 2$, $a_1 = 3$
26. a) $x = 2$
    b) PG:(2,8,32)
27. $r = -2$
28. $r = 2$; $a_1 = 5$
29. 405 cm^3
30. PG:(6,12,24,48,96,192)
31. $x = 486$
32. 3 números
33. $S_{10} = 10230$
34. $x = 192$
35. R$ 1860,00
36. $S_n = 40$
37. PG:(1,5,25)
38. 17 termos
39. $x = \dfrac{38}{11}$
40. a) $S_n = 25$
    b) $S_n = \dfrac{2}{3}$

Capítulo 9

Álgebra Booleana

> "Podemos ver pouco do futuro, porém o suficiente para nos darmos conta de que ainda há muito o que fazer."
>
> Alan Turing

9.1 Introdução

Em 1854, Boole[1] introduziu o formalismo que até hoje se usa para o tratamento sistemático que é chamada Álgebra Booleana. Em 1938, C. E. Shannon[2] aplicou esta álgebra para mostrar que as propriedades de circuitos elétricos de chaveamento podem ser representadas por uma Álgebra Booleana com dois valores.

Diferentemente da álgebra ordinária dos reais, onde as variáveis podem assumir valores no intervalo $(-\infty, +\infty)$, as variáveis Booleanas só podem assumir um número finito de valores. Em particular, na Álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por $[F, V]$ (falso ou verdadeiro), $[H, L]$ (high and low) ou ainda $[0, 1]$. Nesta disciplina, adotaremos a notação $[0, 1]$, a qual também é utilizada em eletrônica digital. Como o número de valores que cada variável pode assumir é finito (e pequeno), o número de estados que uma função Booleana pode assumir também é finito.

9.2 Definição e Propriedades

Definição: Uma **Álgebra Booleana** é um conjunto B de elementos e duas operações binárias definidas em B, a soma "+"; e o produto "." tais que, $0, 1 \in$ B, todo $x \in$ B possui um complementar x', e para quaisquer $x, y, z \in$ B, valem as seguintes propriedades básicas (axiomas):

[1] George Boole (Inglaterra, 1815-1864)

[2] Clause Elwood Shannon (EUA, 1916-2001)

P1	Lei Comutativa	$x + y = y + x$	$x.y = y.x$
P2	Lei Associativa	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x.y).z = x(y.z)$
P3	Lei Distributiva	$x + (y.z) = (x + y).(x + z)$	$x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$
P4	Identidade	$x + 0 = x$	$x.1 = x$
P5	Complemento	$x + x' = 1$	$x.x' = 0$
P6	Absorção	$x + (xy) = x$	$x.(x + y) = x$
P7	Idempotência	$x + x = x$	$x.x = x$
P8	Elemento Absorvente	$x + 1 = 1$	$x.0 = 0$
P9	Dupla Negação	$(x')' = x$	
P10	Negação	$1' = 0$	$0' = 1$
P11	Leis de Morgan	$(x + y)' = x'.y'$	$(x.y)' = x' + y'$

As operações entre os elementos identidade 0 e 1 pode ser resumidas nas seguintes duas tabelas operatórias.

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

.	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

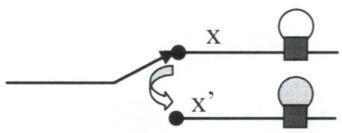
O exemplo mais simples de Álgebra Booleana consiste exatamente do conjunto $B = [0, 1]$. Propriedades operatórias como $1' + 1 = 1'$ e a lei distributiva $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$ nos permitem concluir também que as estruturas numéricas usuais de números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos não constituem exemplos de Álgebra Booleana. Embora não seja definido como operador básico, o operador **ou exclusivo**, representado pelo símbolo $\oplus$ pode ser definido como $x \oplus y = x.y' + x'y$. Assim, sua tabela operatória é:

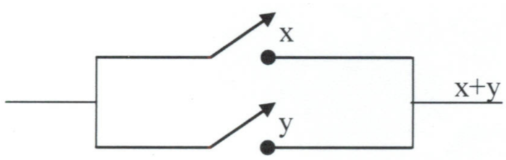
$\oplus$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

Uma expressão $x_1 \oplus x_2 \oplus ..... \oplus x_n z$ só terá valor 1 se o número de variáveis de $\oplus$ valor 1 for ímpar.

9.3 Interpretação Através de Chaves

Estados : 0 = chave aberta (não passa corrente); 1 = chave fechada (passa corrente)





9.4 Funções de Boole: Descrição e Simplificação

Qualquer expressão consistindo de combinações de operações + e . de um número finito de variáveis de uma Álgebra Booleana e seus complementares será chamada de uma *função de Boole.* Exemplo de uma função de Boole: $f(x, y, z) = (x'.y.z) + (y'.z') + x.(y + z')$. Uma função de Boole está na *forma normal disjuntiva* ou *forma canônica* se ela é escrita como uma soma de produtos entre variáveis e seus complementares, como por exemplo em:

$f(x, y, z) = (x'.y.z) + (x'.y'.z) + (x.y'.z)$.

Adotando-se a norma de precedência do operador "." sobre "+", podemos dispensar o uso dos parênteses e, como na aritmética usual, escrever simplesmente:

$f(x, y, z) = x'.y.z + x'.y'.z + x.y'.z$

Uma forma normal disjuntiva (FND) de n variáveis pode conter no máximo 2^n termos distintos. A forma canônica contendo todos estes 2^n termos é chamada de *forma normal disjuntiva completa de n variáveis* (FNDC). Para 3 variáveis x, y, z a FNDC é:

$$x.y.z + x.y.z' + x.y'.z + x.y'.z' + x'.y.z' + x'.y.z' + x'.y'.z + x'.y'.z'$$

Teorema 1: Numa FNDC, se é atribuído a casa variável o valor 0 ou 1, então apenas um termo terá valor 1, enquanto os demais terão valor 0.

Exemplo 9.1 : Tome-se a forma canônica completa:$x.y.z + x.y.z' + x.y'.z + x.y'.z' + x'.y.z' + x'.y.z' + x'.y'.z + x'.y'.z'$.

A tabela abaixo mostra todo os possíveis $2^3 = 8$ valores das variáveis que tornam um determinado termo de uma FNDC igual a 1. Note que esta tabela corresponde a uma tabela-verdade na Lógica Proposicional, trocando-se $1 = V$ e $0 = F$.

i	x	y	z	Termo da FND cujo valor é 1
1	1	1	1	$x.y.z$
2	1	1	0	$x.y.z'$
3	**1**	**0**	1	**x.y'.z**
4	1	0	0	$x.y'.z'$
5	0	1	1	$x'.y.z$
6	0	1	0	$x'.y.z'$
7	0	0	1	$x'.y'.z$
8	0	0	0	$x'.y'.z'$

Se por exemplo, $x = 1, y = 0$ e $z = 1$, tem-se o valor da FNDC calculado por:

$x.y.z = 1.0.1 = 0$	$x.y.z' = 1.0.0 = 0$	$x.y'.z = 1.1.1 = 1$	$x.y'.z' = 1.1.0 = 0$
$x'.y.z = 0.0.1 = 0$	$x'.y.z' = 0.0.0 = 0$	$x'.y'.z = 0.1.1 = 0$	$x'.y'.z' = 0.1.0 = 0$

Duas funções de Boole $f(x_1, ..x_n)$ e $g(x_1, ..., x_m)$ são iguais, e escreve-se $f = g$, se (i) $n = m$; e (ii) $f(x_1, ..., x - n) = g(x_1, ..., x_m)$ para todas as 2^n possíveis combinações de valores de $x_1, ..., x_n$.

Podemos encontrar funções booleanas a partir de seus resultados, tomando apenas os termos que tornam a função verdadeira (= 1). Segue um exemplo. Parte-se de uma tabela contendo as combinações dos valores 1 e 0 das variáveis x, y, z, e do valor que $f(x, y, z)$ assumo em cada situação.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	0
1	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
0	1	1	0
0	**1**	**0**	**1**
0	0	1	0
0	**0**	**0**	**1**

As linhas em que $f(x,y,z) = 1$ estão destacadas. Cada uma permite a construção de um termo, de forma que: $f(x,y,z) = x.y.z' + x.y'.z + x.y'.z' + x'.y.z' + x'.y' + z'$.

Vale lembrar que, por intermédio das propriedades operatórias, é possível simplificar funções booleanas, eliminando redundâncias e contradições que, muitas vezes, são intrínsecas às funções. A esta forma de simplificação, dá-se o nome de **método algébrico**.

Exemplo 9.2 : Simplifique a função booleana através do método algébrico:

$$f(x,y,z) = x.y.z' + x.y'.z + x.y'.z' + x'.y.z' + x'.y'.z'$$

9.4.1 O Método dos Mapas de Karnaugh

Os Mapas de Karnaugh[3] são dispositivos pictóricos que permitem a simplificação de expressões booleanas envolvendo, no máximo, seis variáveis. Tratar-se-á, neste texto, de, no máximo, 4 variáveis.

Neste processo, constroem-se diagramas ("mapas") que permitem expressar todos os produtos fundamentais de uma expressão booleana. A cada conjunto de dois quadrados "vizinhos", dá-se o nome de **produtos adjacentes**. Os produtos adjacentes são termos de uma expressão booleana que diferem em **exatamente** um literal, sendo que estes literais diferentes devem ser complementares. A soma de produtos adjacentes sempre resulta na eliminação dos complementares.

Os diagramas supracitados, para até 4 variáveis, estão listados abaixo.

	y	y'
x		
x'		

2 variáveis

	yz	yz'	y'z'	y'z
x				
x'				

3 variáveis

	zt	zt'	z't'	z't
xy				
xy'				
x'y'				
x'y				

4 variáveis

[3]Criados por Edward Veitch (EUA, 1924-atual), em 1952 e aperfeiçoados por Maurice Karnaugh (EUA, 1924-atual)

O procedimento é definido pelo seguinte algoritmo:

i. Identifique o número de variáveis e utilize o mapa adequado.

ii. Marque os quadrados correspondentes aos termos da expressão original.

iii. Identifique os termos em que aparecem variáveis complementares. Estas variáveis podem ser eliminadas (constituem uma tautologia).

Obs.: É estritamente necessário que a expressão a ser simplificada esteja representada na forma de uma soma de produtos.

Exemplo 9.3 : Simplifique as expressões abaixo utilizando Mapas de Karnaugh

a) $f(x,y) = xy + xy'$

b) $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z$

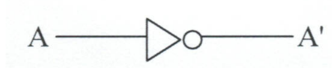
c) $f(x,y,z,t) = xy' + xyz + x'y'z' + x'yzt'$

9.5 Portas Lógicas Básicas

Circuitos digitais são dispositivos eletrônicos de dois estados caracterizados por tensões de entrada e de saída que assumem apenas dois valores, como 0V e -5V, aos quais se atribuem os níveis lógicos 0 e 1, respectivamente. As portas lógicas são os elementos básicos da construção de circuitos digitais, e os computadores digitais são formados por circuitos digitais. As portas lógicas funcionam segundo as operações da Álgebra Booleana.

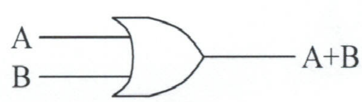
1. Porta NÃO (Inversor)

A	A’
1	0
0	1



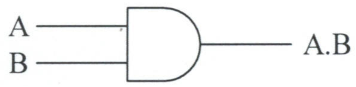
2. Porta OU (OR)

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



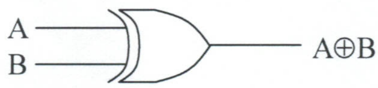
3. Porta E (AND)

A	B	A.B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

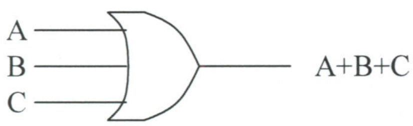


4. Porta OU EXCLUSIVO (XOR)

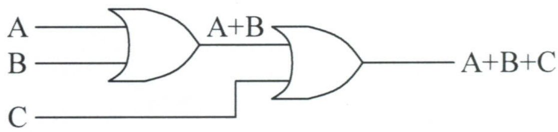
A	B	A⊕ B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0



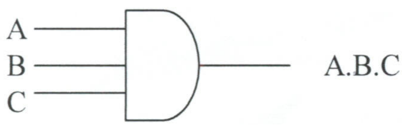
5. Porta OU de três entradas ($A + B + C = 0$ se, e somente se, $A = B = C = 0$)



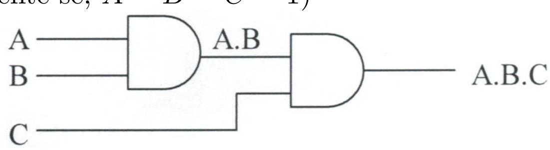
equivale a



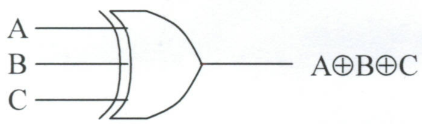
6. Porta E de três entradas ($ABC = 1$ se, e somente se, $A = B = C = 1$)



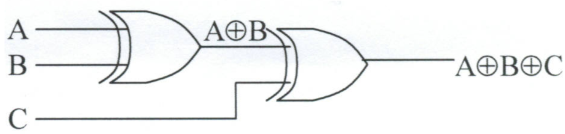
equivale a



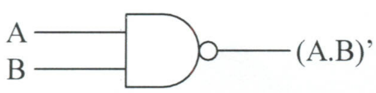
7. Porta OU EXCLUSIVO de três entradas ($A \oplus B \oplus C = 1 \longleftrightarrow$ o número de entradas 1 for ímpar)



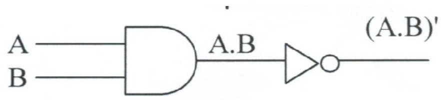
equivale a



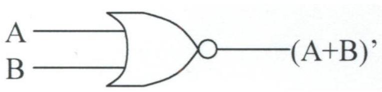
8. Porta NAND (Not And - nega a saída de A.B)



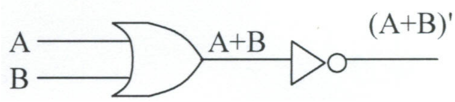
equivale a



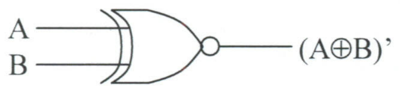
9. Porta NOR (Not Or - nega a saída de $A + B$)



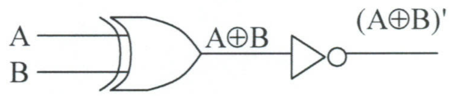
equivale a



10. Porta NXOR



equivale a



Exemplo 9.4 : Desenhe o circuito para cada função booleana do **Exemplo 9.3**, na forma de portas lógicas.

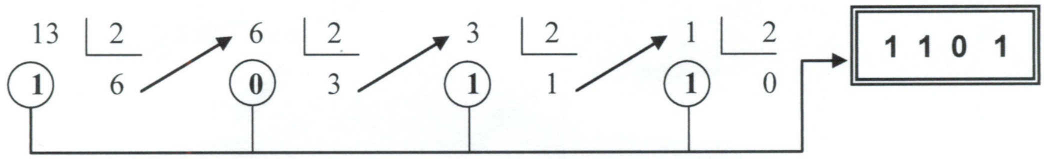
9.6 Sistema Binário de Representação Numérica

Quando trabalhamos com mais de uma base de representação para escrever um número, adota-se a convenção de colocar a base como sufixo após notação posicional, a fim de evitar confusão. Assim,

Sistema Decimal: base 10	Sistema binário: base 2
Dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	Dígitos: $0, 1$
Notação posicional na base 10:	Notação posicional na base 2:
$8125_{10} = 8.10^3 + 1.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0$	$1101_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 13_{10}$

Uma representação binária qualquer : $B_{n-1}.2^{n-1}$+**...**+$B_2.2^2$ + $B_1.2^1$ + $B_0.2^0$

Para converter um número escrito em notação decimal para a notação binária, pode-se empregar o método de tomar os restos por sucessivas divisões por 2 até atingir o quociente 0. Os restos são dispostos em ordem inversa. Para converter o decimal 13:



9.7 Aritmética Binária

9.7.1 Adição

Para efetuarmos a adição no sistema binário, devemos agir como numa adição convencional no sistema decimal, lembrando que, no sistema binário temos apenas dois algarismos. Temos então:

$0 + 0 = 0$	
$1 + 0 = 1$	
$0 + 1 = 1$	
$1 + 1 = 0$	transporta 1

Convém observar que no sistema decimal $1 + 1 = 2$ e, no sistema binário, $2_{10} \equiv 10_2$. Assim sendo: $1_2 + 1_2 = 10_2$.

Exemplo 9.5 : Some os seguintes binários:

a) $11_2 + 10_2$

b) $110_2 + 111_2$

9.7.2 Subtração

A subtração requer um pouco de atenção. Quando subtraírmos números às vezes temos que fazer um empréstimo da próxima coluna à esquerda. Esse caso ocorre quando temos que subtrair 1 de 0. Observe as operações:

0 - 0 = 0	
1 - 1 = 0	
1 - 0 = 1	
0 - 1 = 1	empresta 1

Exemplo 9.6 : Subtraia os seguintes binários:

a) $111_2 - 100_2$

b) $1000 - 111$

9.7.3 Multiplicação

As regras da multiplicação de binários são iguais às regras da multiplicação de decimais.

0 x 0 = 0
0 x 1 = 0
1 x 0 = 0
1 x 1 = 1

Exemplo 9.7 : Multiplique os seguintes binários

a) 11×11

b) 101×111

9.7.4 Divisão

A divisão é análoga à uma divisão de decimais, trabalhando com multiplicação e subtração.

Exemplo 9.8 : Divida os seguintes binários.

a) $1100 \div 10$

b) $110 \div 11$

9.8 Representação de Números Binários Negativos

A operação de subtração binária representou um sério problema ao desenvolvimento de microprocessadores pois, por ser diferente de adição, a subtração exigiria, em princípio, um circuito diferente, específico, para ser realizada. Mas se houver um jeito de representarmos números negativos em binário, a subtração seria transformada em uma simples adição, pois:

$$A - B = A + (-B)$$

Portanto, o problema deixa de ser de um circuito subtrator e passa a ser a representação de números negativos em binário.

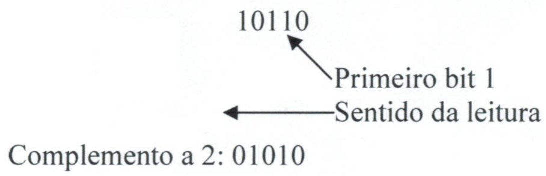
Os computadores primitivos usavam o chamado "sistema de sinal-magnitude" para representar números binários com sinal. Nesta convenção o MSB (magnitude Sinal Bit)era o bit do sinal e resto da palavra era sempre o próprio valor absoluto do número; se o $MSB = 0$, o número era positivo, e se o $MSB = 1$, o número era negativo. Por exemplo:

$$+3_{10} = 0011_2$$

$$-3_{10} = \underbrace{1}_{\text{Bit de sinal}}\underbrace{011}_{\text{Bits de magnitude}}\,{}_2$$

Embora a representação do sistema sinal-magnitude seja direto, calculadoras e computadores não o utilizam normalmente porque a implementação em circuito é mais complexa do que em outros sistemas. O sistema mais amplamente usado para representação de números binários com sinal é o sistema de complemento a 2.

Para determinar o complemento a 2 de um número binário existe uma técnica muito simples, a saber: efetuamos a leitura da palavra binária qualquer da direita para a esquerda até encontrarmos o primeiro bit 1 e a seguir invertemos o valor lógico de todos os bits à esquerda do primeiro 1. Vejamos um exemplo:

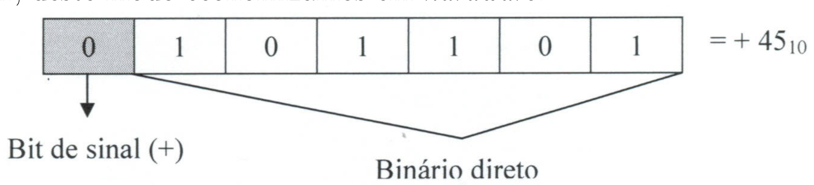


9.8.1 Operações Binárias Usando Complemento a 2

O sistema de complemento a 2 para representar números com sinal funciona do seguinte modo:

- Se o número é positivo, a magnitude é a forma binária direta e um bit de sinal 0 é colocado na frente do bit mais significativo (à esquerda).
- Se o número é negativo, a magnitude é representada na forma de seu complemento a 2, e um bit de sinal 1 é colocado na frente do bit mais significativo.

O sistema de complemento a 2 é usado para representar números com sinal porque, conforme veremos, ele permite realizar a operação de subtração efetuando na verdade uma adição. Isto é importante, pois significa que um computador digital pode usar os mesmo circuitos tanto para somar como para subtrair, deste modo economizamos em *hardware.*



Caso I: Dois números positivos - A adição de dois números positivos é bastante direta e segue as regras de adição já vistas anteriormente, Considere a soma entre +10 e +5:

Observações:

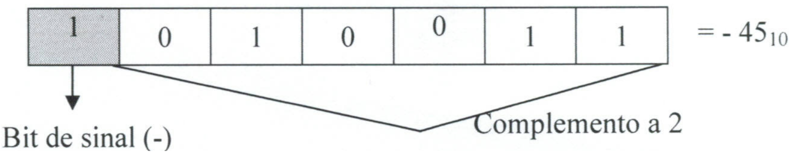
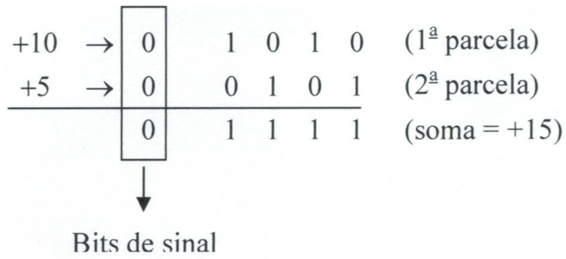
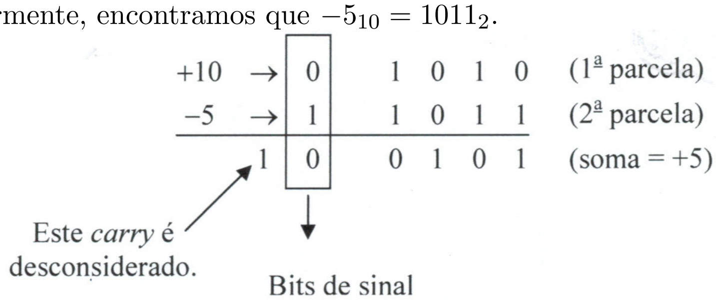


Figura 9.1: Exemplos de adição e subtração no sistema de complemento a 2



- Os bits de sinal são iguais a zero, indicando que as parcelas e o resultado são positivos;
- As parcelas são escritas de modo a terem o mesmo número de bits, isto sempre deve ser feito no sistema de complemento a 2.

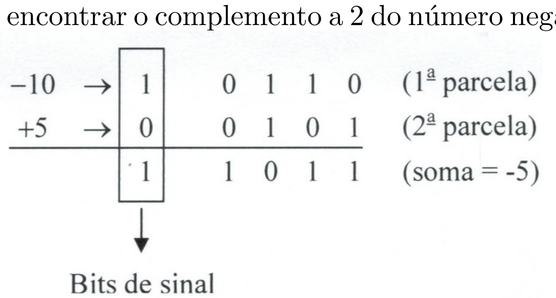
Caso II: Um número positivo e um outro menor e negativo - Vamos considerar a operação entre $+10$ e -5. Primeiramente, devemos encontrar o complemento a 2 e de $+5_{10} = 0101_2$. Usando o métodos visto anteriormente, encontramos que $-5_{10} = 1011_2$.



Observações:

- O bit de sinal da segunda parcela é igual a 1, indicando ser um número negativo;
- O resultado do bit de sinal é 0, indicando que o mesmo é positivo. O *carry* ("vai um") gerado pela última posição da adição é sempre descartado. Observe que a operação de adição é feita, também, sobre os bits de sinal.

Caso III: Um número positivo e um outro maior negativo - Considere a operação entre -10 e $+5$. Novamente, primeiro devemos encontrar o complemento a 2 do número negativo, isto é. $-10_{10} = 0110_2$.

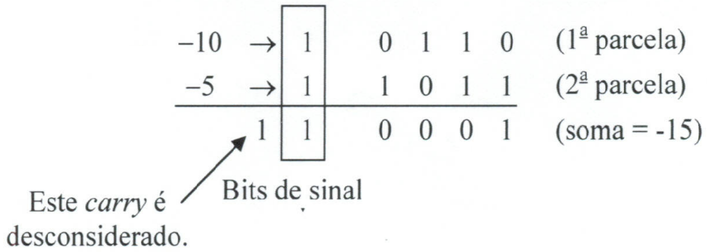


Observações:

- Como era de se esperar, o bit de sinal do resultado é igual a 1, indicando resultado negativo;

- Como o resultado é negativo, ele está representando em complemento a 2, de de modo que os últimos 4 bits (bits de magnitude), 1011, de fato representam o complemento a 2 do resultado. Para encontrar a magnitude verdadeira, basta encontrar o complemento a 2 de 1011, que é $0101 = 5$. Logo, 11011 representa -5.

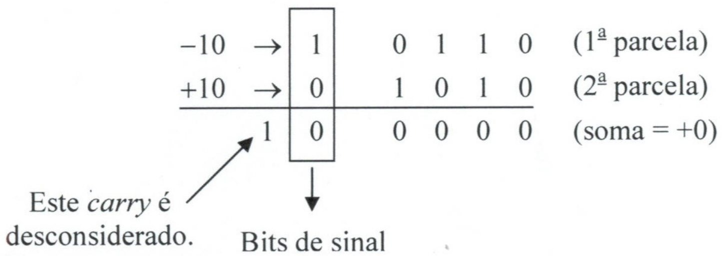
Caso IV: Dois números negativos - Considere a operação entre -10 e -5. A operação de soma se dará entre os complementos a dois de ambos os números:



Observações:

- Como o resultado é negativo, a sua magnitude está na forma de complemento a 2. Portanto, devemos encontrar o complemento a 2 do resultado para encontrar a magnitude verdadeira. Logo, 11111 representa -15.

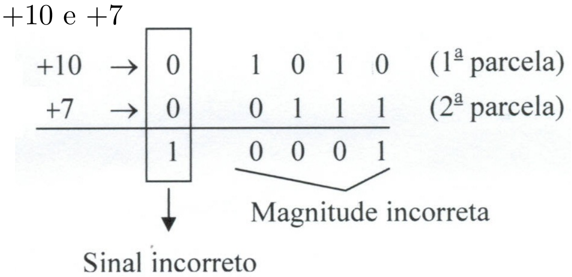
Caso V: Dois números iguais em magnitude, mas de sinais contrários - Considere a operação entre $+10$ e -10.



Obs.: O resultado é, como esperado, 0.

9.8.2 Overflow Aritmético

Considere a soma entre $+10$ e $+7$



A resposta tem um bit de sinal negativo, o que obviamente está errado visto que estamos somando números positivos. O erro é causado porque a magnitude (17) precisa de 5 e não 4 bits como as parcelas tinham e, portanto, ocorreu um *overflow* na posição do bit de sinal. Esta condição somente ocorre quando somamos dois números positivos ou dois números negativos, e ela sempre produz um resultado incorreto. A ocorrência de *overflow* pode ser detectada examinando-se o bit de sinal do resultado e comparando-o com os bits de sinal dos números que estão sendo adicionados. Nos computadores, um circuito especial é usado para detectar qualquer condição de *overflow* para indicar que a resposta está errada.

9.9 Lista de Exercícios - Operações Binárias e Funções Booleanas

1. Simplifique as funções booleanas abaixo utilizando o método algébrico, desenhando os circuitos lógicos equivalentes, originais e simplificados:

   a) $f(x, y, z) = x.y.z + x.z' + x.y'$

   b) $f(x, y, z) = (x.y.z').(x' + y' + z')$

   c) $f(x, y, z, t) = ((x.z)' + y + t)' + z.(x.z.t)'$

   d) $f(x, y, z, t) = [(x + y).z]' + [t(z + y)]'$

   e) $f(x, y, z) = x'.y'.z + x'.y.z + x'.y.z' + x.y.z' + x.y.z$

   f) $f(x, y) = x'.y + x.y' + x.y$

   g) $f(x, y, z) = [x'.y'.z'.(x + y + z')]'$

   h) $f(x, y, z) = x'(x + y) + z' + z.y$

   i) $f(x, y) = (x + y' + x.y)(x + y')(x'.y)$

   j) $f(x, y, z) = (x + y' + x.y)(x.y + x'.z + y.z)$

   k) $f(x, y, z, t, u) = (x.y + z + t)(z + t')(z + t' + u)$

   l) $f(x, y, z, t) = x'.y(t' + t.z') + (x + x'.z.t)y$

   m) $f(x, y, z, t) = (t + x + y)(t + x' + y)(y' + z)(t + z)$

2. Simplifique as funções booleanas abaixo utilizando Mapas de Karnaugh:

   a) $f(x, y) = x.y + x'.y + x'.y'$

   b) $f(x, y) = x.y + x'.y'$

   c) $f(x, y, z) = x.y.z + x.y.z' + x'.y.z' + x'.y'.z$

   d) $f(x, y, z) = x.y.z + x.y.z' + x'.y.z' + x'.y'.z' + x'.y'.z$

   e) $f(x, y, z, t) = x.y.z'.t' + x.y.z'.t + x.y'.z.t + x.y'.z.t' + x'.y'.z.t + x'.y'.z.t' + x'.y.z'.t'$

   f) $f(x, y, z, t) = x'.y.z + x'.y.z'.t + y'.z.t' + x.y.z.t' + x.y'.z'.t'$

   g) $f(x, y, z, t) = y'.t' + y'.z'.t + x'.y'.z.t + y.z.t'$

   h) $f(x, y, z) = (x + y)(x.z + x.z') + x.y + y$

   i) $f(x, y) = x'(x + y) + (y + x)(x + y')$

   j) $f(y, z, t) = y'.z + y'.z'.t' + z'.t$

   k) $f(x, y, z, t) = y'.z.t + x.z.t' + x.y'.z'$

3. Efetue as seguintes operações utilizando a aritmética binária e,ao final, apresente seu valor decimal correspondente:

   a) $1010_2 + 0101_2$

   b) $010100_2 + 10101_2$

   c) $11010_2 + 111001_2$

   d) $10011101_2 + 1001_2$

   e) $10101010_2 + 100100100_2$

f) $101_2 + 1100111_2$

g) $1100110011_2 + 10101010_2$

h) $111_2 + 1111_2$

i) $101010000_2 + 1010110_2$

j) $10001_2 + 1101_2$

k) $111000111_2 + 1001111100_2$

l) $11000000_2 - 111_2$

m) $1111_2 - 111_2$

n) $1011_2 - 1010_2$

o) $10001_2 - 1101_2$

p) $101111_2 - 101_2$

q) $1100110011_2 - 10101010_2$

r) $11001_2 - 1101_2$

s) $101010000_2 - 1010110_2$

t) $1011000_2 - 1011_2$

u) $111_2 - 111_2$

v) $1001_2.1100_2$

w) $1001_2.101_2$

x) $101_2.100_2$

4. Converta para a base binária os seguintes números em base decimal:

a) 72_{10}

b) 127_{10}

c) 35_{10}

d) 23_{10}

e) 165_{10}

f) 40_{10}

g) 22_{10}

h) 14_{10}

5. Converta para base decimal os seguintes números em base binária:

a) 100001_2

b) 11011_2

c) 1100100_2

d) 10000000_2

e) 11001011_2

f) 10110001_2

g) 100110000_2

9.10 Gabarito - Operações Binárias e Funções Booleanas

1. a) $f(x,y,z) = x$
   b) $f(x,y,z) = xyz'$
   c) $f(x,y,z,t) = z(x' + t')$
   d) $f(x,y,z,t) = x'y' + t' + z'$
   e) $f(x,y,z) = x'z + y$
   f) $f(x,y) = x + y$
   g) $f(x,y,z) = x + y + z$
   h) $f(x,y,z) = y + z'$
   i) $f(x,y) = 0$
   j) $f(x,y,z) = xy + x'y'z$
   k) $f(x,y,t,z) = xyt' + z$
   l) $f(x,y,z,t) = y$
   m) $f(x,y,z,t) = ty' + tz + zy$
2. a) $f(x,y) = x' + y$
   b) $f(x,y) = xy + x'y'$
   c) $f(x,y,z) = xy + yz' + x'y'z$
   d) $f(x,y) = xy + yz' + x'y'$ ou
   $f(x,y) = xy + x'z' + x'y'$
   e) $f(x,y,z,t) = y'z + xyz' + yz't'$
   f) $f(x,y,z,t) = zt' + xy't' + x'yt$
   g) $f(x,y,z,t) = x'y' + zt' + y'z'$
   h) $f(x,y) = x + y$
   i) $f(x,y) = x + y$
   j) $f(y,z,t) = y' + z't$
   k) $f(x,y,z,t) = xy' + xzt' + y'zt$
3. a) 15_{10}
   b) 41_{10}
   c) 83_{10}
   d) 166_{10}
   e) 462_{10}
   f) 108_{10}
   g) 989_{10}
   h) 22_{10}
   i) 422_{10}
   j) 30_{10}
   k) 1091_{10}
   l) 185_{10}
   m) 8_{10}
   n) 1_{10}
   o) 4_{10}
   p) 42_{10}
   q) 649_{10}
   r) 12_{10}
   s) 250_{10}
   t) 77_{10}
   u) 0_{10}
   v) 108_{10}
   w) 45_{10}
   x) 20_{10}
4. a) 1001000_2
   b) 1111111_2
   c) 100011_2
   d) 10111_2
   e) 10100101_2
   f) 101000_2
   g) 10110_2
   h) 1110_2
5. a) 33_{10}
   b) 27_{10}
   c) 100_{10}
   d) 128_{10}
   e) 203_{10}
   f) 177_{10}
   g) 304_{10}

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica Matemática**. 18ed. Editora Nobel. SP. 1999.

[2] CAPUANO, Francisco G.; IDOETA, Ivan V. **Elementos da Eletrônica Digital** 19^{o}ed. Editora Érica. São Paulo SP. 2001.

[3] FLOYD, Thomas L. **Sistemas Digitais - Fundamentos e Aplicações** 9^{o}ed. Editora Bookman. Porto Alegre RS. 2007.

[4] GERSTING, Judith L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.** 3ed. Editora LTC. Rio de Janeiro RJ. 1995.

[5] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Teoria e Problemas de Matemática Discreta**. 2ed. Editora Bookman. Porto Alegre RS, 2004.

[6] ROSEN, Kenneth H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações.** 6ed. Editora McGraw Hill. São Paulo SP.

[7] TOCCI, Ronald J.; WIDMER, Neal S. **Sistemas Digitais - Princípio e Aplicações** 7^{o}ed. Editora LTC. Rio de Janeiro RJ. 2007.