CN24NB — Cálculo Numérico

Zeros de funções

Definição 1 *O número x^* é um zero da função f se é solução da equação $f(x) = 0$, ou seja, se $f(x^*) = 0$.*

Exemplo 1 *O número $x^* = 2$ é um zero (único) de $f(x) = 2x - 4$.*

Definição 2 *O número x_k está próximo de x^* com tolerância (precisão) ε se $|x_k - x^*| < \varepsilon$.*

Teorema 1 *Se a função f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$ então existe (pelo menos um) x^* com $a < x^* < b$ tal que $f(x^*) = 0$ (ou seja, existe um zero de f entre a e b).*

Exemplo 2 *A função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ tem um zero no intervalo $[-5, -3]$, um zero no intervalo $[0, 1]$ e outro no intervalo $[2, 3]$.*

Obs. 1 *Como $x^3 - 9x + 3 = 0$ é equivalente a $x^3 = 9x - 3$, podemos localizar os zeros de f localizando os pontos de intersecção dos gráficos de $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$.*

Método da bissecção

Dados $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a)f(b) < 0$ e $\varepsilon > 0$, o método consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio, decidir em qual dos subintervalos está o zero de f, atualizar o intervalo que contém o zero e repetir o procedimento até que o intervalo resultante tenha comprimento menor que ε.

Obs. 2 *Outro critério de parada é repetir o procedimento até que $|f(x_k)| < \varepsilon$.*

```
Dados: f, a, b, tol, maxit
% exemplo: f=@(x) x^3-9*x+3; a=0; b=1; tol=0.005; maxit=1000;
for k=1:maxit
  x(k)=(a+b)/2;
  if f(a)*f(x(k))<0
    b=x(k);
  else
    a=x(k);
  endif
  if ( abs(b-a)<tol || f(x(k))==0 )
    break
  endif
endfor
k
x_aprox=x(k)
```

Exemplo 3 *A função $f(x) = x \ln x - 1$ tem um zero no intervalo $[1, 2]$.*

Método de Newton

Dada uma aproximação x_k, o método de Newton constrói uma nova aproximação x_{k+1} pela intersecção da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_k, f(x_k))$ com o eixo x.
A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_k, f(x_k))$ é

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k).$$

Esta reta corta o eixo x quando $y = 0$ (e $x = x_{k+1}$): $0 - f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Portanto,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Exemplo 4 *Para* $f(x) = x^3 - 9x + 3$, *com* $x_1 = 0$.

Exemplo 5 *Para* $f(x) = x^2 - 2$, *com* $x_1 = 1$. *[*$x^* = \sqrt{2}$*]*

Critério de parada: é possível usar $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ (ou $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ e $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$).

```
Dados: x(1), f, df, tol, itmax
% exemplo: x(1)=0; f=@(x) x^3-9*x+3; df=@(x) 3*x^2-9; tol=0.005; itmax=1000;
for k=1:itmax
  x(k+1)=x(k)-f(x(k))/df(x(k));
  if ( abs(x(k+1)-x(k))<tol && abs(f(x(k+1)))<tol )
     break
  endif
endfor
```

Teorema 2 *Se* f, f' *e* f'' *são contínuas num intervalo* I *que contém* x^* *(solução de* $f(x) = 0$*) e* $f'(x^*) \neq 0$ *então existe um intervalo* $I_1 \subset I$ *contendo* x^* *tal que se* $x_1 \in I_1$, *a sequência* (x_k) *gerada pelo Método de Newton converge para* x^*.

Definição 3 (Ordem de convergência) *Seja* $e_k = |x_k - x^*|$. *Se* $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$ *com* $C > 0$ *e* $p \geq 1$, *diz-se que a sequência* (x_k) *converge para* x^* *com ordem de convergência* p.

Obs. 3 *Para o método de Newton* $e_{k+1} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha_k)}{f'(\beta_k)}\right| e_k^2$.

Método da secante

Dadas duas aproximações x_k e x_{k+1}, o método da secante constrói uma nova aproximação x_{k+2} pela intersecção da reta secante ao gráfico da função f passando pelos pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ com o eixo x.
A equação da reta secante ao gráfico da função f é

$$y - f(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k).$$

Esta reta corta o eixo x quando $y = 0$ (e $x = x_{k+2}$): $0 - f(x_k) = \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_{k+2} - x_k)$.
Portanto,

$$x_{k+2} = \frac{x_k f(x_{k+1}) - x_{k+1} f(x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}.$$

Exemplo 6 $f(x) = x^3 - 9x + 3$, *com* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 1$.

Exemplo 7 $f(x) = x^2 - 2$, *com* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 2$. *[*$x^* = \sqrt{2}$*]*

Critério de parada: é possível usar $|x_{k+2} - x_{k+1}| < \varepsilon$ (ou $|x_{k+2} - x_{k+1}| < \varepsilon$ e $|f(x_{k+2})| < \varepsilon$).

Ordem de convergência: $e_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{f''(\alpha_k)}{f'(\beta_k)}\right| e_k e_{k-1}$.

```
Dados: x(1), x(2), f, tol, itmax
% exemplo: x(1)=0; x(2)=1; f=@(x) x^3-9*x+3; tol=0.005; itmax=1000;
for k=1:itmax
  x(k+2)=(x(k)*f(x(k+1))-x(k+1)*f(x(k)))/(f(x(k+1))-f(x(k)));
  if ( abs(x(k+2)-x(k+1))<tol && abs(f(x(k+2)))<tol )
     break
  endif
endfor
```