Fatoração LU

Consiste em escrever a matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ como produto de duas matrizes $n \times n$ triangulares $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$, sendo:

- $\mathbf{L}$ triangular inferior com $l_{ii} = 1$ para $i = 1, \cdots, n$.
- $\mathbf{U}$ triangular superior.

Exemplo 1 *Para* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, *temos* $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Obs. 1 *Quando não é necessário trocar linhas,* $\mathbf{L}$ *é obtida a partir da matriz identidade fazendo* $l_{ij} = m_{ij}$ *para* $i > j$ *e* $\mathbf{U}$ *é a matriz resultante de* $\mathbf{A}$ *no processo de triangularização.*

Fatores L e U:

```
Dados: A
triangularizar A
% colocar os multiplicadores na posicao em que foram usados:
for i=2:n
  for j=1:i-1
    L(i,j)=m(i,j);
  end
end
% colocar 1 na diagonal:
for i=1:n
  L(i,i)=1;
end
U=A;
```

Usando a fatoração $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} = \mathbf{LU} \ \Rightarrow\ \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

Fazendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, resolvemos o sistema triangular (inferior) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ obtendo $\mathbf{y}$ e então resolvemos o sistema triangular (superior) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ obtendo $\mathbf{x}$.

Fatoração de Cholesky

Consiste em escrever a matriz simétrica $A_{n\times n}$ $(A^T = A)$ como produto de duas matrizes $n\times n$ triangulares G e G^T, sendo G triangular inferior com os elementos da diagonal positivos.
Para obter G resolvemos a equação matricial $GG^T = A$. Para a primeira coluna de G temos:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$g_{11}^2 = a_{11} \;\Rightarrow\; g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

e

$$g_{i1}g_{11} = a_{i1} \;\Rightarrow\; g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}} \quad \text{para} \quad i = 2, \cdots, n.$$

Para a segunda coluna de G temos:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$g_{21}^2 + g_{22}^2 = a_{22} \;\Rightarrow\; g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$$

e

$$g_{i1}g_{21} + g_{i2}g_{22} = a_{i2} \;\Rightarrow\; g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}g_{21}}{g_{22}} \quad \text{para} \quad i = 3, \cdots, n.$$

Para a terceira coluna de G temos:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = a_{33} \;\Rightarrow\; g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2}$$

e

$$g_{i1}g_{31} + g_{i2}g_{32} + g_{i3}g_{33} = a_{i3} \;\Rightarrow\; g_{i3} = \frac{a_{i3} - g_{i1}g_{31} - g_{i2}g_{32}}{g_{33}} \quad \text{para} \quad i = 4, \cdots, n.$$

Para a coluna k de G temos:

$$g_{k1}^2 + g_{k2}^2 + \cdots + g_{kk}^2 = a_{kk} \;\Rightarrow\; g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2}$$

e

$$g_{i1}g_{k1} + g_{i2}g_{k2} + \cdots + g_{ik}g_{kk} = a_{ik} \;\Rightarrow\; g_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij}g_{kj}}{g_{kk}} \quad \text{para} \quad i = k+1, \cdots, n.$$

Cholesky:

```
Dados: A (simétrica)
for k=1:n
  g(k,k)=a(k,k);
  for j=1:k-1
    g(k,k)=g(k,k)-g(k,j)^2;
  end
  g(k,k)=sqrt(g(k,k));
  for i=k+1:n
    g(i,k)=a(i,k);
    for j=1:k-1
      g(i,k)=g(i,k)-g(i,j)*g(k,j);
    end
    g(i,k)=g(i,k)/g(k,k);
  end
end
```

Exemplo 2 $A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{bmatrix}$

Pivotamento

Consiste em trocar linhas de modo que o pivô seja o elemento de maior valor absoluto possível. No k-ésimo passo da eliminação procuramos o elemento de maior valor absoluto dentre aqueles que estão na coluna k da diagonal para baixo, ou seja, procuramos $q \in \{k, k+1, \cdots, n\}$ tal que:

$$|a_{qk}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}|.$$

Exemplo 3 *Resolver o sistema* $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 0.004\ x_1 & + & 15.73\ x_2 & = & 15.77 \\ 0.423\ x_1 & - & 24.72\ x_2 & = & -20.49 \end{array} \right.$ *usando 4 dígitos na representação em ponto flutuante e arredondamento ao desprezar o quinto dígito.*

- **Primeira solução**: $m_{21} = \dfrac{0.423}{0.004} = 105.8$ (105.75 sem arredondamento) e o sistema fica

  $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 0.004\ x_1 & + & 15.73\ x_2 & = & 15.77 \\ & - & 1689\ x_2 & = & -1688 \end{array} \right.$,

  cuja solução é $x_1 = 12.5$, $x_2 = 0.9994$.

- **Segunda solução**: $m_{21} = \dfrac{0.004}{0.423} = 0.009456$ (0.009456265 sem arredondamento) e o sistema fica

  $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 0.423\ x_1 & - & 24.72\ x_2 & = & -20.49 \\ & & 15.96\ x_2 & = & 15.96 \end{array} \right.$,

  cuja solução é $x_1 = 10$, $x_2 = 1$, que é a solução exata do sistema.

Fatoração LU com pivotamento

Quando ocorre troca de linhas no processo de eliminação gaussiana (pivotamento parcial) obtemos $\mathbf{LU} = \mathbf{PA}$, sendo $\mathbf{P}$ uma matriz de permutação. $\mathbf{L}$ é construída na medida em que os multiplicadores são calculados, trocando linhas em $\mathbf{L}$ sempre que trocar em $\mathbf{A}$; a diagonal de $\mathbf{L}$ é colocada só no final do processo. Para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ precisamos guardar as trocas de linhas efetuadas. Isto pode ser feito com o vetor $\mathbf{p}$ dado por $p(i) = i$ para $i = 1, \cdots, n$, trocando linhas de $\mathbf{p}$ sempre que efetuada uma troca de linhas em $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$$

Fazendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, resolvemos o sistema triangular $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ obtendo $\mathbf{y}$ e então resolvemos o sistema triangular $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ obtendo $\mathbf{x}$.

Obs. 2 *Note que o produto* $\mathbf{Pb}$ *não precisa ser realizado; basta utilizar* $(Pb)(i) = b(p(i))$, *isto é, a i-ésima componente de* $\mathbf{Pb}$ *é* $b(p(i))$:

$$y(i) \ = \ b(p(i)) \ - \ \sum_{j=1}^{i-1} L(i,j)y(j).$$

Eliminação gaussiana com pivotamento:

```
% dados: A,b,n
clear
a=[1 1 2 3;3 2 4 4;2 -1 1 5;10 8 19 12]
b=[6;12;14;46]
n=4;
% triangularizacao
for k=1:n-1
  % escolha do pivo
  pivo=a(k,k);
  q=k;
  for i=k+1:n
    if abs(a(i,k))>abs(pivo)
      pivo=a(i,k);
      q=i;
    end
  end
  if q~=k % troca de linhas
    aux=a(k,:);
    a(k,:)=a(q,:);
    a(q,:)=aux;
    aux=b(k,:);
    b(k,:)=b(q,:);
    b(q,:)=aux;
  end
  % eliminacao
  for i=k+1:n
    m(i,k)=a(i,k)/a(k,k);
    a(i,k)=0;
    for j=k+1:n
      a(i,j)=a(i,j)-m(i,k)*a(k,j);
    endfor
    b(i)=b(i)-m(i,k)*b(k);
  endfor
endfor
a
b
% substituicao
for i=n:-1:1
  x(i)=b(i);
  for j=i+1:n
    x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
  endfor
  x(i)=x(i)/a(i,i);
endfor
x=x'
```