Métodos iterativos

Usados para resolver sistemas de equações lineares em que a matriz dos coeficientes é esparsa (por exemplo, sistemas lineares provenientes da discretização de equações diferenciais). Iniciam com uma aproximação (chute) inicial e constroem novas aproximações que, espera-se, convirjam para a solução exata do sistema.

Método de Jacobi

Para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. ,$$

isolamos x_i na i-ésima equação:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Dada uma aproximação $\mathbf{x^{(k)}}$ para a solução $\mathbf{x}^*$ do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o método constrói uma nova aproximação $\mathbf{x^{(k+1)}}$ por

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Critério de parada: especificada uma tolerância $\varepsilon > 0$, repetimos o procedimento até que

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon.$$

Convergência: se a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ é diagonalmente dominante por linhas então a sequência gerada pelo método de Jacobi converge para a solução do sistema linear independente da escolha do chute inicial.

Obs. 1 *A matriz* $\mathbf{A}$ *é dita diagonalmente dominante por linhas quando para cada* $i = 1, 2, \cdots, n$ *tem-se*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Exemplo 1 $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{array}\right.$.

```
% Dados: A, b, x(:,1) (chute inicial), tol, itmax
A=[10 2 1; 1 5 1; 2 3 10];
b=[7;-8;6];
n=length(b);
x(:,1)=zeros(n,1);
tol=10^(-3);
itmax=100;
for k=1:itmax
  for i=1:n
    soma=b(i);
    for j=1:i-1
      soma=soma-a(i,j)*x(j,k);
    end
    for j=i+1:n
      soma=soma-a(i,j)*x(j,k);
    end
    x(i,k+1)=soma/a(i,i);
  end
  d=max(abs(x(:,k+1)-x(:,k)));
  if d<tol
    break
  endif
end
```

Método de Gauss-Seidel

Para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, isolamos x_i na i-ésima equação e usamos os valores $x_i^{(k+1)}$ já calculados na etapa atual. Dada uma aproximação $\mathbf{x^{(k)}}$ para a solução $\mathbf{x}^*$ do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o método constrói uma nova aproximação $\mathbf{x^{(k+1)}}$ por

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Critério de parada: idem método de Jacobi.
Convergência: idem método de Jacobi.

Exercícios

Use suas implementações dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel para resolver os sistemas de equações lineares com tolerância $\varepsilon = 0.0005$.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & -40 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 9x_3 & = & -26 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & -18 \end{array}\right.$.

2. O sistema definido por

$$\begin{array}{rcll} -2(1+h^2)x_1 + x_2 & = & 1, & (i=1) \\ x_{i-1} - 2(1+h^2)x_i + x_{i+1} & = & 0, & \text{para } \ i = 2 : n-1 \\ x_{n-1} - 2(1+h^2)x_n & = & 1, & (i=n) \end{array}$$

   com $h = 0.1$ e $n = 5,\ 10$ e 30.