SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

Profa. Dra. Fernanda Paula Barbosa Pola

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

INTRODUÇÃO

- Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Se a função é de uma só variável, então a equação diferencial se chama **equação diferencial ordinária (EDO).**
- Necessário conhecer equações diferenciais para:
  - Compreender e investigar problemas envolvendo o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmica, o aumento ou diminuição de populações, entre outros.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Ao estudar alguns fenômenos, é difícil estabelecer diretamente a relação de dependência entre uma variável independente x e uma dependente y.
- Todavia, é mais fácil estabelecer a relação entre x, y e as derivadas $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.
- Esta relação constitui uma equação diferencial.
  - Note que a grande maioria dos fenômenos físicos é modelada através de equações diferenciais.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Equação diferencial:
  - é uma equação envolvendo um função desconhecida e algumas de suas derivadas.
- Equação diferencial ordinária de ordem *n*:
  - equação que envolve derivadas até a ordem *n* da forma

$$Y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad (1)$$

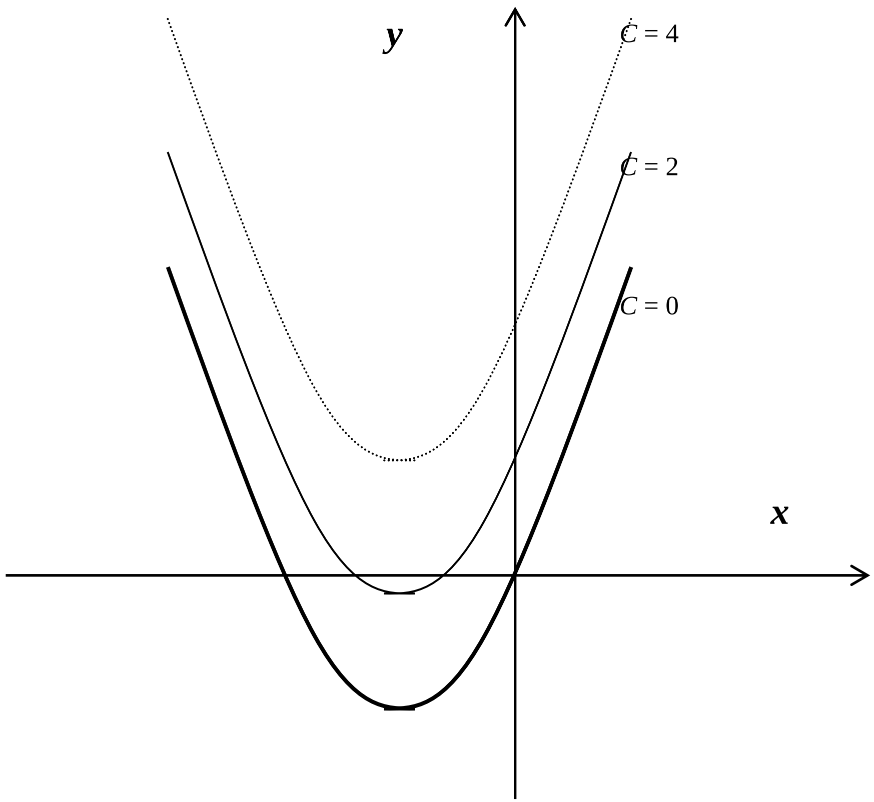
$a \leq x \leq b.$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Na solução de uma EDO, dois caminhos podem ser seguidos:
  - Método analítico - O que tenta levar à uma solução exata do problema
  - Método numérico - O que encontra uma solução aproximada.

- Do ponto de vista analítico, resolver uma EDO do tipo $y' = f(x,y)$ é encontrar uma função $y = F(x)$ que satisfaça a equação dada.
- Por exemplo, dada equação diferencial $y' = f(x,y) = 2x + 3$, sua solução é obtida por:
  - $y = \int(2x+3)dx = x^2 + 3x + C$
  - Na verdade, temos uma família de soluções (para cada $C \in R$ tem uma solução particular). A Figura 1 (próximo slide) mostra algumas soluções para $C = 0$, $C = 2$ e $C = 4$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS



Note que à medida que C varia, tem-se uma família de soluções.

Representações de soluções particulares, para alguns valores de C, da função

$$y = x^2 + 3x + C.$$

Figura 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Então, para se obter uma única solução de uma EDO, é necessário que ela esteja acompanhada de uma condição.

- ***Problema de Valor Inicial (PVI):***

O valor da função e suas derivadas são especificados no mesmo ponto (para o mesmo valor da variável independente, x);

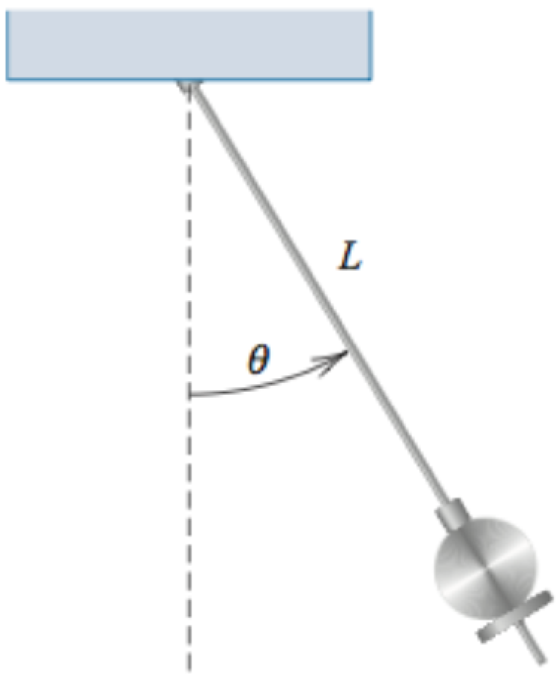
- ***Problema de Valor de Contorno (PVC):***

O valor da função e suas derivadas são dados em pontos distintos.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- O movimento de um pêndulo oscilante, sob certas hipóteses simplificadoras é descrito pela equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\theta = 0$$



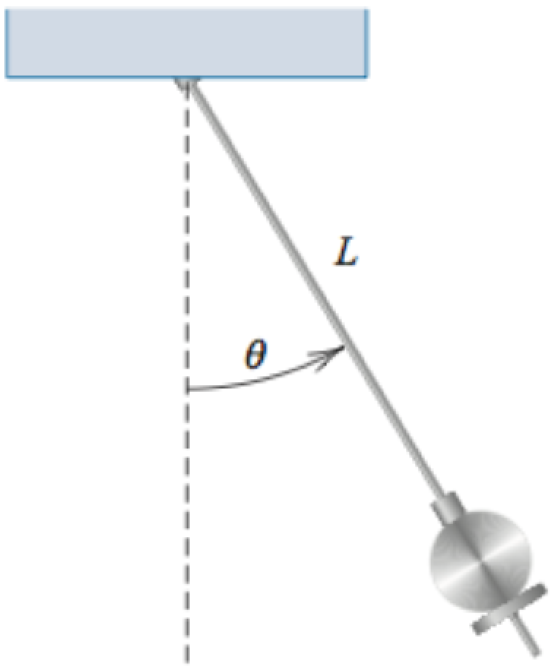
onde:

L é o comprimento do pêndulo;

g é a constante gravitacional ($g \approx 9{,}8\ m/s^2$);

θ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\theta = 0$$

Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$\theta'(t_0) = \theta_0'$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Para valores pequenos de θ, a aproximação $\theta = sen\theta$ pode ser utilizada para simplificar o problema, para um problema linear.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

- Com condições iniciais:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \qquad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

- Para valores maiores de θ, a solução se torna mais complexa e fogem do contexto de um curso básico de EDO. Então, é aconselhável a aplicação de um método numérico.

- Observe que especificar as condições iniciais não é a única maneira de individualizar as soluções, então temos:

- **Problema de Valor Inicial:** O valor da função e suas derivadas são especificados no mesmo ponto;
- **Problema de Valores de Contorno**: O valor da função e suas derivadas são dados em pontos distintos.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

MÉTODO DE EULER

MÉTODO DE EULER

- O método de Euler para resolver EDO com condições iniciais é o método numérico mais simples. Ele consiste em aproximar a solução $y(x)$, no sentido de uma linearização, por meio de suas tangentes, Figura 1.

- Considere o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ou seja, são dados um ponto de partida, (x_0, y_0), e uma direção a ser tomada, $f(x, y)$.

- Desejamos determinar $y(z)$.

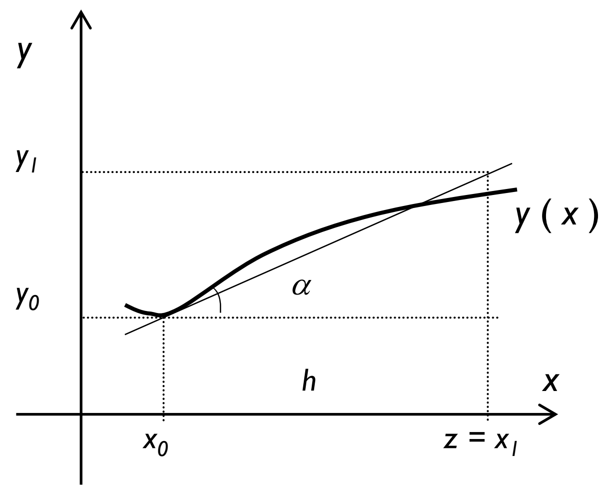
MÉTODO DE EULER

- A interpretação geométrica da Figura 1 nos permite escrever a equação:

$$F'(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

fazendo $x_1 - x_0 = h$, vamos ter

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$$



Interpretação geométrica do Método de Euler

Figura 1

MÉTODO DE EULER

$F(x_1) \cong F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0)$ (Taylor).

Diremos, portanto, que

$y_1 \cong F(x_1) = F(z)$

- Em verdade, estamos substituindo a função desconhecida $y(x)$ por, simplesmente uma reta em todo intervalo $[x_0 ; z]$ e calculando a imagem de z sobre ela o que pode ser uma aproximação ruim para $y(z)$.

MÉTODO DE EULER

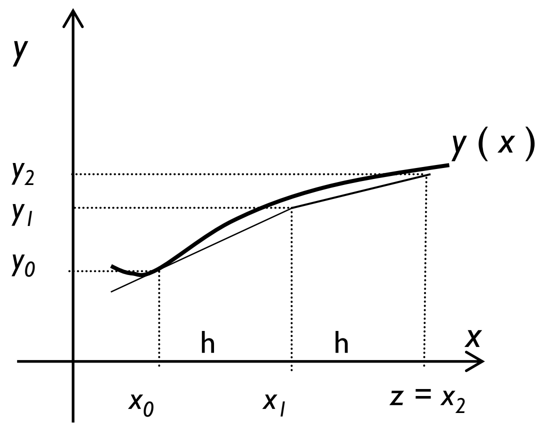
- Podemos, porém, melhorar esta aproximação se subdividirmos o intervalo $[x_0 ; z]$ em subintervalos de amplitude constante, genericamente chamada h, e como sabemos calcular a direção da função incógnita $y(x)$ em cada ponto, substituiremos tal função por um segmento de reta, em cada um destes subintervalos. Estes segmentos terão a direção que ela (função) tem no início de cada dos subintervalos. Figura 2.

MÉTODO DE EULER

- Obtemos então

$$y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i,\ y_i),\ i = 0, 1, \ldots$$

que vem a ser o método de Euler.



Método de Euler considerando dois subintervalos

Figura 2

MÉTODO DE EULER - EXEMPLO

Exemplo : Considere o problema de valor inicial $y\ (\ 1\ ) = 1$ da equação diferencial
$y' = f(x,\ y) = 2x + 3$. Dividindo o intervalo $[\ 1;\ 2\ ]$ em 1, 2 e 4 partes sucessivamente e aplicando o método de Euler, determine o valor aproximado de $y\ (\ 2\ )$ para a equação dada.

Solução:
Temos $y' = f(x,\ y) = 2x + 3$, com $y\ (1) = 1$ ou seja, $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$.
Com uma divisão do intervalo, isto é, $h = 1$, obtemos:

$$y_1 = y_0 + h\ f(x_0,\ y_0) = 1 + 1\ [\ 2 \times 1 + 3\ ] = 1 + 5 = 6.$$

Com duas divisões do intervalo, isto é, $h = 0,5$, *temos*

$$y_1 = y_0 + h\ f(x_0,\ y_0) = 1 + 0,5\ [\ 2 \times 1 + 3\ ] = 1 + 2,5 = 3,5$$
$$y_2 = y_1 + h\ f(x_1,\ y_1) = 3,5 + 0,5\ [\ 2 \times 1,5 + 3\ ] = 3,5 + 3,0 = 6,5$$

Finalmente, considerando quatro divisões, isto é, $h = 0,25$, *temos*

$$y_1 = y_0 + h\ f(x_0,\ y_0) = 1 + 0,25\ [\ 2 \times 1 + 3\ ] = 1 + 1,25 = 2,25$$
$$y_2 = y_1 + h\ f(x_1,\ y_1) = 2,25 + 0,25\ [\ 2 \times 1,25 + 3\ ] = 2,25 + 1,375 = 3,625$$
$$y_3 = y_2 + h\ f(x_2,\ y_2) = 3,625 + 0,25\ [\ 2 \times 1,5 + 3\ ] = 3,625 + 1,5 = 5,125$$
$$y_4 = y_3 + h\ f(x_3,\ y_3) = 5,125 + 0,25\ [\ 2 \times 1,75 + 3\ ] = 5,125 + 1,625 = 6,75$$

MÉTODO DE EULER - EXEMPLO

- Achar aproximações para a solução do PVI $\begin{cases} y' = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Na malha de [0,1] com h = 0,2 , usando o método de Euler.

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n-1$$

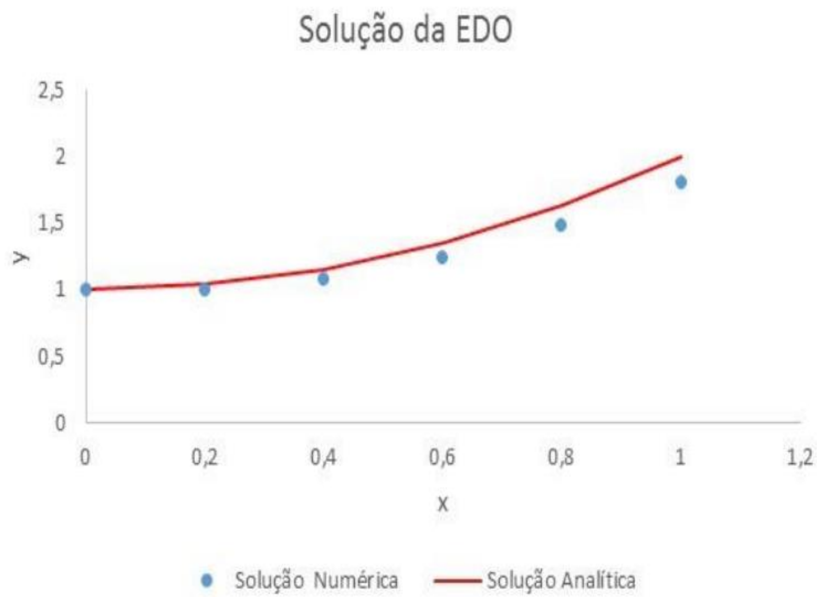
$$y_{i+1} = y_i + 0{,}2 \cdot 2x, i = 0, 1, \ldots, n-1$$

j	x_i	y_i
0	0	1
1	0,2	1
2	0,4	1,08
3	0,6	1,24
4	0,8	1,48
5	1,0	1,8

MÉTODO DE EULER - EXEMPLO

A solução analítica para a EDO dada é: $y = x^2 + 1$

j	x_j	y_j	$y(x_j)$	Erro
0	0	1	1	-
1	0,2	1	1,04	-0,04
2	0,4	1,08	1,16	-0,08
3	0,6	1,24	1,36	-0,12
4	0,8	1,48	1,64	-0,16
5	1,0	1,8	2	-0,2



MÉTODO DE EULER - EXEMPLO

- Use o método de Euler para integrar numericamente a equação:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5$$

de $x = 0$ a $x = 4$ com um tamanho de passo de 0,5.

A condição inicial em $x = 0$ é $y = 1$.

Lembre-se de que a solução exata é dada por:

$$y = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + 1$$

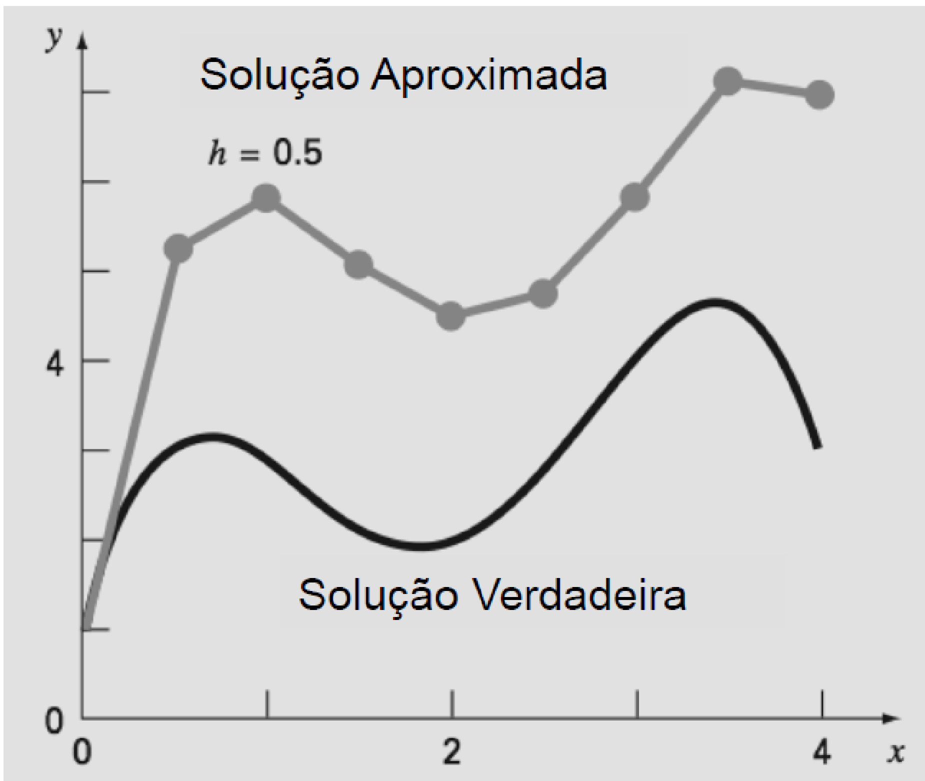
MÉTODO DE EULER

$$\varepsilon_t = \left(\frac{y_{verdadeiro} - y_{Euler}}{y_{verdadeiro}} \right) \times 100\%$$

x	*y* (*verdadeiro*)	*y* (Euler)	
0,0	1,00000	1,00000	
0,5	3,21875	5,25000	-63,1
1,0	3,00000	5,87500	-95,8
1,5	2,21875	5,12500	131,0
2,0	2,00000	4,50000	-125,0
2,5	2,71875	4,75000	-74,7
3,0	4,00000	5,87500	46,9
3,5	4,71875	7,12500	-51,0
4,0	3,00000	7,00000	-133,3

MÉTODO DE EULER

- Comparação da solução verdadeira com a solução numérica usando o método de Euler para o exemplo.



Observe

Apesar dos cálculos capturarem a tendência geral dos dados, o erro é considerável.

ERRO DO MÉTODO DE EULER

- Erros de Truncamento:
    - **Erro de Truncamento Local:** Resulta da aplicação do método em um único passo.
    - **Erro de Truncamento Propagado:** Resulta das aproximações produzidas durante os passos anteriores.
- A soma dos dois é o ***erro de truncamento global ou total***.

ERRO DO MÉTODO DE EULER

- Limitações para o uso do erro:
  - Podemos obter apenas uma estimativa do erro de truncamento local, não sendo possível obter o erro global.
  - Então, em geral devemos aplicar o método usando tamanhos de passo diferentes para obter uma estimativa indireta dos erros envolvidos.
  - Geralmente, as derivadas que são necessárias para calcular o erro de truncamento local nem sempre são fáceis de obter.

ERRO DO MÉTODO DE EULER

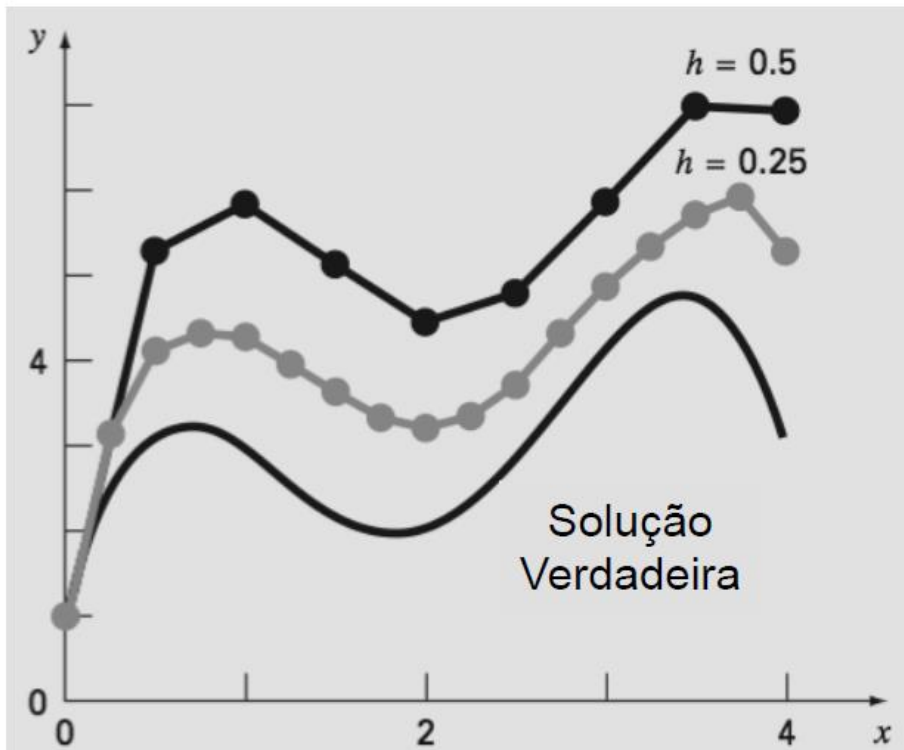
OBSERVAÇÃO

- O erro pode ser **reduzido** diminuindo-se o tamanho do passo;

- O método não terá erros se a solução da EDO for **linear**.

MÉTODO DE EULER

- Repita os cálculos do Exercício 1, mas use um tamanho de passo de 0,25.



ERRO

- Esse padrão geral de erro é válido para os métodos de passo único de ordem superior que iremos ver:
  - Um método de ordem n fornecerá um resultado perfeito se a solução subjacente for um polinômio de grau n.
  - O erro de truncamento local será $O(h^{n+1})$, e o erro global, $O(h^n)$

REFERÊNCIAS

- M. A. Gomes Ruggiero, V. L. da Rocha Lopes. Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª edição, Editora Pearson, 1997.
- M.C. Cunha. Métodos Numéricos. 2a edição, Editora da Unicamp, 2000.
- N.B. Franco. Cálculo Numérico. Pearson Prentice Hall, 2007.
- Richard L. Burden e J. Douglas Faires, Análise Numérica, Cengage Learning, Tradução da 8. Ed. Americana, 2008