Interpolação polinomial

Dados (x_i, y_i) para $i = 1, \cdots, n+1$ com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ ($n+1$ pontos distintos), queremos determinar um polinômio $p_n(x)$, de grau no máximo n, de modo que $p_n(x_i) = y_i$ para cada $i = 1, \cdots, n+1$.
Uma forma de obter o polinômio interpolador $p_n(x)$ consiste em construir e resolver um sistema de equações lineares. Escrevendo $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, determinar o polinômio significa determinar os coeficientes $a_0,\ a_1,\ a_2\ \cdots,\ a_n$. Para cada $i = 1, \cdots, n+1$, a condição $p_n(x_i) = y_i$ fornece uma equação linear cujas incógnitas são os coeficientes $a_0,\ a_1,\ a_2\ \cdots,\ a_n$. Isto resulta em um sistema de $n+1$ equações lineares com $n+1$ incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Como este sistema tem uma única solução, existe um único polinômio que satisfaz as condições dadas.

Exemplo 1 *Determinar o polinômio de grau no máximo* 2 *que passa pelos pontos* $(-2, -15)$*,* $(-1, 3)$ *e* $(1, 9)$*.*

Resolver um sistema de equações lineares para determinar o polinômio interpolador pode não ser a forma mais conveniente. Veremos duas maneiras alternativas para obter este polinômio: forma de Lagrange e forma de Newton.

Forma de Lagrange

A forma de Lagrange do polinômio interpolador é

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k L_k(x),$$

sendo que os polinômios de Lagrange $L_k(x)$ são dados por $L_k(x) = \displaystyle\prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$.

Obs. 1 $L_k(x_k) = 1$ *e* $L_k(x_i) = 0$ *para* $i \neq k$*.*

Exemplo 2 *Determinar o polinômio que interpola* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *nos pontos* $x_1 = 2$, $x_2 = 2.5$ *e* $x_3 = 4$.

```
% interpolacao: forma de Lagrange
clear
x=[2 2.5 4];
y=1./x.^2;
t=[1:0.1:5];
f=1./t.^2;
n=length(x)-1;
p=0;
for k=1:n+1
  L=1;
  for i=1:n+1
    if i!=k
      L=L.*(t-x(i))/(x(k)-x(i));
    end
  end
  p=p+y(k)*L;
end
plot(t,f,x,y,'*',t,p,'m')
```

Exercícios

1. Determine o polinômio que interpola $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, -1)$, $(2, -5)$ usando:
   - (a) um sistema linear.
   - (b) a forma de Lagrange.

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ com $x \in [-1, 1]$. Determine o polinômio interpolador (na forma de Lagrange para $n = 10$) usando 11 pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$. Faça os gráficos de $f(x)$ e $p(x)$.

Forma de Newton

Dados $(x_i, f(x_i))$ para $i = 1, \cdots, n+1$ com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ ($n+1$ pontos distintos), a forma de Newton do polinômio interpolador é

$$p(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + c_{n+1}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

que pode ser escrito como

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \prod_{i=1}^{k-1}(x - x_i).$$

Para determinar os coeficientes avaliamos o polinômio nos pontos conhecidos $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ (nesta ordem):

$$x = x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = p(x_1) = c_1$$

$$x = x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = p(x_2) = c_1 + c_2(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x = x_3 \quad \Rightarrow \quad f(x_3) = p(x_3) = c_1 + c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_3 = \frac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

$$\vdots$$

Diferenças divididas

Dados $(x_i, f(x_i))$ para $i = 1, \cdots, n+1$ com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ ($n+1$ pontos distintos), definimos

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$$\vdots$$

Com as diferenças divididas podemos reescrever os coeficientes c_k. Observe que $c_1 = f[x_1]$, $c_2 = f[x_1, x_2]$, $c_3 = f[x_1, x_2, x_3]$. De modo geral, os coeficientes são dados por

$$c_k = f[x_1, x_2, \cdots, x_k].$$

O cálculo das diferenças divididas pode ser organizado numa tabela. Para 3 pontos a tabela tem a seguinte forma:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$-$
x_3	$f(x_3)$	$-$	$-$

Note que os valores dos coeficientes c_k aparecem na primeira linha da tabela.

Exemplo 3 *Determinar as diferenças divididas dos pontos* $(-2, 15)$, $(-1, 3)$ *e* $(1, 9)$.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-2	15	$f[x_1, x_2] = \frac{3-15}{-1-(-2)} = -12$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{3-(-12)}{1-(-2)} = 5$
-1	3	$f[x_2, x_3] = \frac{9-3}{1-(-1)} = 3$	$-$
1	9	$-$	$-$

Se quisermos o polinômio que interpola estes 3 pontos temos (olhando na primeira linha da tabela) $c_1 = 15$, $c_2 = -12$ e $c_3 = 5$. Logo, a forma de Newton do polinômio interpolador é $p(x) = 15 - 12(x+2) + 5(x+2)(x+1)$.

```
% diferenças divididas
% dados: x=[x(1), ..., x(n+1)], y=[y(1), ..., y(n+1)]

m=length(x); % m=n+1
d(:,1)=y'
for k=2:m
  for i=1:m-(k-1)
    d(i,k)=(d(i+1,k-1)-d(i,k-1))/(x(i+k-1)-x(i))
  end
end
% coeficientes do polinomio interpolador na forma de Newton
for k=1:m
  c(k)=d(1,k);
end
```

Exercícios

1. Determine o polinômio que interpola $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, -1)$, $(2, -5)$ usando a forma de Newton.

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ com $x \in [-1, 1]$. Determine o polinômio interpolador (na forma de Newton para $n = 10$) usando 11 pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$. Faça os gráficos de $f(x)$ e $p(x)$.