# Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares com $n$ equações e $n$ incógnitas é representado genericamente por

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. .$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou seja, temos uma equação matricial da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{A}$ a matriz dos coeficientes, $\mathbf{x}$ a matriz (vetor) das incógnitas e $\mathbf{b}$ a matriz (vetor) dos termos independentes.

## Triangularização

A triangularização consiste em transformar um sistema de equações lineares da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em um sistema triangular equivalente (com o mesmo conjunto solução) utilizando o método de eliminação gaussiana. Este processo será realizado com duas operações:

1. $l_i \leftarrow l_i - ml_k$: a linha $i$ é trocada por ela menos um múltiplo ($m \in \mathbb{R}$) da linha $k$.

2. $l_i \leftrightarrow l_k$: trocar a linha $i$ e a linha $k$ de posição.

**Exemplo 1** $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$ .

Considere um sistema de equações lineares na forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Na coluna 1 eliminamos os elementos da primeira coluna que estão abaixo da diagonal:

$l_i = l_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} l_1$, para $i = 2, \cdots, n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Na coluna 2 eliminamos os elementos da segunda coluna que estão abaixo da diagonal:

$l_i = l_i - \dfrac{a_{i2}}{a_{22}} l_2$, para $i = 3, \cdots, n$.

Na coluna 3 eliminamos os elementos da terceira coluna que estão abaixo da diagonal:

$l_i = l_i - \dfrac{a_{i3}}{a_{33}} l_3$, para $i = 4, \cdots, n$.

De modo geral, na coluna $k$ eliminamos os elementos da $k$-ésima coluna que estão abaixo da diagonal:

$l_i = l_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} l_k$, para $i = k+1, \cdots, n$.

**Triangularização (sem trocas de linhas):**

```
Dados: A, b, n
for k=1:n-1
  for i=k+1:n
    m(i,k)=a(i,k)/a(k,k);
    a(i,k)=0;
    for j=k+1:n
      a(i,j)=a(i,j)-m(i,k)*a(k,j);
    end % loop j
    b(i)=b(i)-m(i,k)*b(k);
  end % loop i
end % loop k
```

## Sistemas triangulares

**Definição 1** *Um sistema triangular superior é aquele em que os coeficientes abaixo da diagonal principal são todos nulos.*

**Exemplo 2** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & & & 5x_3 & = & 5 \end{array}\right.$ *ou* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$

**Exemplo 3** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 19 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$

Um sistema triangular superior pode ser resolvido por substituição regressiva (de trás pra frente). A i-ésima equação de um sistema triangular superior genérico

$$a_{ii}x_i \ + \ a_{i,i+1}x_{i+1} \ + \ a_{i,i+2}x_{i+2} \ + \ \cdots \ + \ a_{in}x_n \ = \ b_i$$

pode ser escrita como

$$a_{ii}x_i \ + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k \ = \ b_i.$$

Isolando $x_i$ temos

$$x_i \ = \ \frac{b_i \ - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k}{a_{ii}}.$$

**Substituição regressiva:**

```
Dados: A, b, n
for i=n:-1:1
  soma=b(i);
  for k=i+1:n
    soma=soma-a(i,k)*x(k);
  end
  x(i)=soma/a(i,i);
end
```