AJUSTE DE CURVAS. O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

CASO CONTÍNUO

Profa. Dra. Fernanda Paula Barbosa Pola

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

INTRODUÇÃO

- Analisaremos nesta aula os problemas e métodos de quadrados mínimos no caso **<u>contínuo.</u>** Estes problemas aparecem quando se quer aproximar ou ajustar uma curva disponibilizada f(x) dentro um padrão de curvas possíveis minimizando a distância da curva dada do padrão de curvas considerado. A melhor curva neste padrão será obtida através um método dos quadrados mínimos no caso contínuo.

INTRODUÇÃO

- Para o caso discreto temos um **conjunto de dados.**
- Para o caso contínuo temos **funções.**

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Dada uma função $f(x)$, **contínua** em [a, b] e escolhidas funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, todas **contínuas** em [a, b], determinar constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tal que:

$$\boxed{\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)}$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

- O objetivo é determinar um polinômio de grau máximo n ($\varphi(x) = P_n(x)$):

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

que minimize o erro total:

$$E = \int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 \, dx = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

- O problema é encontrar os coeficientes α_j que minimizem E.

- Uma condição necessária para que os números α_j minimizem E é que:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial \alpha_j}(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0}$$

para cada $j=0, 1, \ldots, n$.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Como:

$$E = \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

- As derivadas ficam na seguinte forma:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial \alpha_j}\left(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right) = -2\int_a^b x^j f\left(x\right)dx + 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = 0}$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Para encontrar $P_n(x)$, temos $(n + 1)$ equações normais:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx$$

que devem ser resolvidas para se determinar as $(n+1)$ incógnitas α_j, para cada $j = 0, 1, ..., n$.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Exemplo:

Encontrar o polinômio de aproximação por mínimos quadrados de **segundo grau** para a função abaixo no intervalo [0,1].

$$\boxed{f(x) = sen(\pi x)}$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \int_0^1 1dx + \alpha_1 \int_0^1 xdx + \alpha_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 sen(\pi x)dx \\ \alpha_0 \int_0^1 xdx + \alpha_1 \int_0^1 x^2 dx + \alpha_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 xsen(\pi x)dx \\ \alpha_0 \int_0^1 x^2 dx + \alpha_1 \int_0^1 x^3 dx + \alpha_2 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 sen(\pi x)dx \end{cases}$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Calculando as integrais do sistema, temos:

$$\int_0^1 1dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1,$$

$$\int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Calculando os termos do lado direito das equações, temos:

$$\int_0^1 \sin(\pi x)dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\int_0^1 x\sin(\pi x)dx = \frac{\sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x)}{\pi^2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{1}{\pi},$$

$$\int_0^1 x^2\sin(\pi x)dx = \frac{(2-\pi^2x^2)\cos(\pi x) + 2\pi x\sin(\pi x)}{\pi^3}\bigg|_0^1 =$$

$$\frac{\pi^2-2}{\pi^3} - \frac{2}{\pi^3} = \frac{\pi^2-4}{\pi^3}.$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

Montando o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 = \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}\alpha_0 + \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{cases}$$

- Resolvendo o sistema obtêm-se o seguinte polinômio:

$$\boxed{P_2(x) = -4,1225x^2 + 4,1225x - 0,0505}$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS – CASO CONTÍNUO

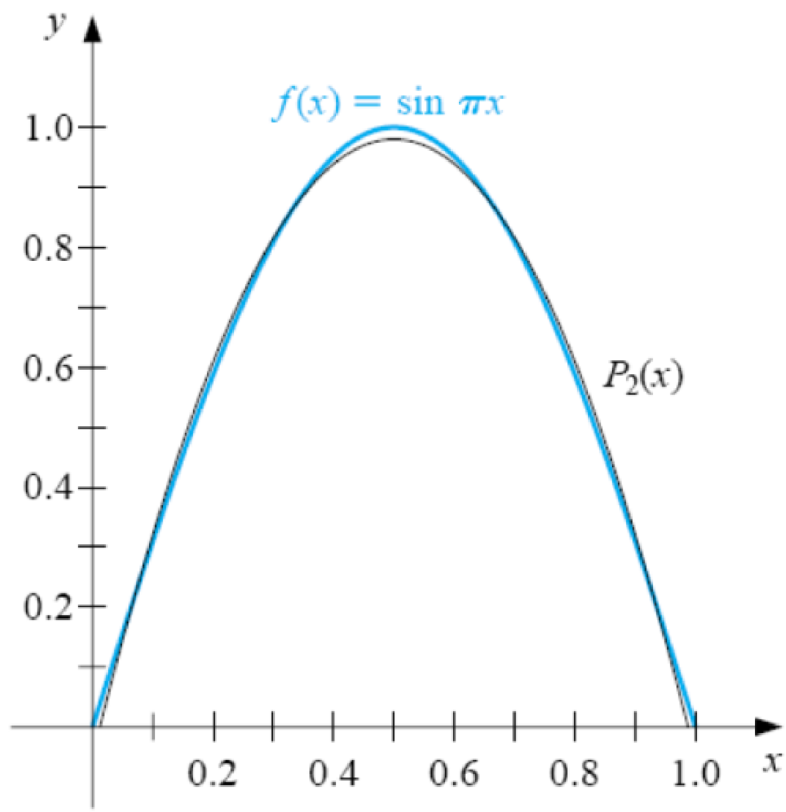

Figura . Aproximação de $f(x)$ pelo polinômio $P_2(x)$.

REFERÊNCIAS

- M. A. Gomes Ruggiero, V. L. da Rocha Lopes. Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª edição, Editora Pearson, 1997.
- M.C. Cunha. Métodos Numéricos. 2a edição, Editora da Unicamp, 2000.
- N.B. Franco. Cálculo Numérico. Pearson Prentice Hall, 2007.
- Richard L. Burden e J. Douglas Faires, Análise Numérica, Cengage Learning, Tradução da 8. Ed. Americana, 2008