Notas de Aula - AEDII – Técnicas e Análise de Algoritmos: programação dinâmica
Prof. Jefferson T. Oliva

Nas aulas anteriores, estudamos duas técnicas para projeto de algoritmos:

Força-bruta: também conhecida como tentativa-e-erro, esses algoritmos geram todas as soluções possíveis, incluindo as erradas, e no final, retornar a melhor solução (ótima).

Métodos gulosos: técnicas que consideram melhores objetos locais como parte da solução global. Como vocês viram, métodos gulosos são geralmente simples de serem implementados, mas nem sempre geram a solução ótima.

Divisão e conquista: dividir, conquistar e combinar. Os métodos também são geralmente simples de serem implementados, muitas vezes são rápidos e simplificam problemas complexos. No entanto, podem haver repetições de subproblemas e é necessária uma quantidade extra de memória.

Hoje veremos uma outra técnica para a solução de problemas: programação dinâmica.

Programação Dinâmica

Essa técnica divide o problema em vários subproblemas mais simples (similar à divisão e conquista). Esses subproblemas são resolvidos e as soluções são armazenadas em uma tabela para serem reusadas para a solução de subproblemas pouco maiores. Isso é feito até que o problema original seja resolvido. Como o problema é resolvido em partes, dos menores aos maiores subproblemas, a solução é feita iterativamente. Nessa abordagem, como a solução de subproblemas menores é utilizada em problemas maiores, o recálculo pode ser evitado, economizando operações computacionais.

A ideia básica da programação dinâmica é construir a solução por etapas.

Primeiro, o problema é decomposto em subproblemas de tamanho mínimo.

Durante a solução do problema, os resultados são combinados para a geração da resposta para subproblemas maiores.

Isso é feito até que o problema original seja resolvido.

Cada passo é feito uma única vez, mas as soluções podem ser reusadas quando for necessário.

Com o reuso de resultados, o número de verificações é reduzido drasticamente. Para isso, durante a aplicação da programação dinâmica, as soluções que não são ótimas são descartadas em cada passo.

Consequentemente, a solução final é ótima.

A programação dinâmica tem duas desvantagens: o desenvolvimento de uma solução pode ser mais complexa e pode ser necessário uso de grande espaço de memória (para armazenar resultados).

Existem algoritmos exponenciais que podem ter a sua complexidade reduzida por meio da programação dinâmica.
Um exemplo é a sequência de Fibonacci, cuja solução recursiva tem complexidade O(2^n) e a iterativa tem o custo na ordem de O(n). Na programação dinâmica, pode ser utilizado um vetor de tamanho n + 1 para o armazenamento da sequência, em que os resultados subproblemas menores estão armazenados nas primeiras posições do vetor. Quanto maior for o índice do vetor, maior é o subproblema e o problema fica na posição n.

```
Fib1(n)
if f[n] != ∞ then
return f [n]
end if
if n ≤ 1 then
return f [n] = n
end if
return f [n] = Fib1(n − 1) + Fib1(n − 2)
```

Assim, o vetor é inciado com valores infinitos, nas posições zero e um são armazenados 0 e 1 respectivamente. Nos demais campos do vetor, são armazenados os resultados da soma entre v[i – 2] e v[i – 1].

Em diversos problemas podem ser aplicada a programação dinâmica, dos quais abordaremos nessa aula: multiplicação de cadeias de matrizes e mochila binária

Multiplicação de Cadeias de Matrizes

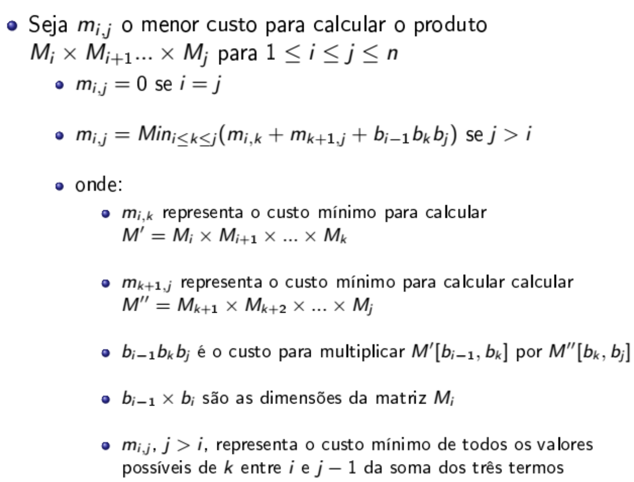
Cálculo de multiplicação de cadeias de matrizes: minimizar as operações escalares

Considere o produto: M = M_{1}[10,20] x M_{2}[20,50] x M_{3}[50,1] x M_{4}[1,100]

M = M_{1} x (M_{2} x (M_{3} x M_{4})) requer 125.000 operações

M = (M_{1} x (M_{2} x M_{3})) x M_{4} requer 2.200 operações

A figura abaixo é o slide 9 da aula “Programação Dinâmica”



m[i,j] é um elemento de uma tabela onde serão armazenados os custos mínimos para multiplicação de cadeias de matrizes. Essa tabela é uma matriz quadrática onde a quantidade de linhas e colunas são diretamente proporcionais à quantidade de matrizes consideradas na multiplicação.

Na tabela (ou matriz) de custos, por exemplo, o elemento m[1,3] representa o custo mínimo para multiplicar M1 x M2 x M3.

Nessa matriz, os elementos da diagonal principal são iniciados com o valor 0, pois i = j. Quando j > i, deve ser considerada a minimização apresentada no slide 9 (figura na página anterior). Se j – i for igual a 1, significa que m[i,j] é a quantidade de operações para calcular Mi x Mj, ou seja, não é necessário incluir parênteses para minimizar a multiplicação das matrizes. Caso, j – i > 1, deve-se definir onde deverá haver a parentesiação (por isso, k entra na equação). Por exemplo, a m[1,3] é o menor custo entre (M1 x M2) x M3 e M1 x (M2 x M3).

A figura abaixo é o

- Considerando o exemplo anterior: $M = M_1[10,20] \times M_2[20,50] \times M_3[50,1] \times M_4[1,100]$. Como minimizar as operações escalares?

$m_{11} = ?$	$m_{12} = ?$	$m_{13} = ?$	$m_{14} = ?$
	$m_{22} = ?$	$m_{23} = ?$	$m_{24} = ?$
		$m_{33} = ?$	$m_{34} = ?$
			$m_{44} = ?$

$b_0 = 10$	$b_1 = 20$	$b_2 = 50$	$b_3 = 1$	$b_4 = 100$

- Relembrando:
  - $m_{i,j} = 0$ se $i = j$
  - $m_{i,j} = Min_{i \le k \le j}(m_{i,k} + m_{k+1,j} + b_{i-1} b_k b_j)$ se $j > i$

No exemplo apresentado em aula

m[1,2] = m[1,1] + m[2,2] + b[0] * b[1] * b[2] => M1 x M2
m[2,3] = m[2,2] + m[3,3] + b[1] * b[2] * b[3] => M2 x M3
m[3,4] = m[3,3] + m[4,4] + b[2] * b[3] * b[4] => M3 x M4

m[1,3] =
m[1,1] + m[2,3] + b[0] * b[1] * b[3] => 0 + M2 x M3 + (M1 x (M2 x M3)) => A
m[1,2] + m[3,3] + b[0] * b[2] * b[3] => M1 x M2 + 0 + ((M1 x M2) x M3) => B
M1 x M2 x M3

m[2,4] =
m[2,2] + m[3,4] + b[1] * b[2] * b[4] => 0 + M3 x M4 + (M2 x (M3 x M4)) => C
m[2,3] + m[4,4] + b[1] * b[3] * b[4] => M2 x M3 + 0 + ((M2 x M3) x M4) => D
M2 x M3 x M4

m[1,4] =
m[1,1] + m[2,4] + b[0] * b[1] * b[4] => 0 + (C ou D) + (M1 x (C ou D))
m[1,2] + m[3,4] + b[0] * b[2] * b[4] => M1 x M2 + M3 x M4 + ((M1 x M2) x (M3 x M4))
m[1,3] + m[4,4] + b[0] * b[3] * b[4] => (A ou B) + 0 + ((A ou B) x M4)

A resolução do exemplo acima é apresentada entre os slides 11 e 15.

Implementação da solução em C

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define inf 2147483647

int** create_matrix(int l, int c){
   int i = 0;
   int** mat = (int**) malloc(sizeof(int*) * l);

   for (i = 0; i < l; i++)
      mat[i] = (int*) malloc(sizeof(int) * c);

   return mat;
}


int multiplicacao_minima(int** m, int n, int b[]){
   int h, i, j, k, aux;

   for (i = 0; i < n; i++)
      m[i][i] = 0;

   for (h = 1; h < n; h++) { // indica qual diagonal após a principal será processada. Por exemplo: se h = 1,
a diagonal processada é logo após a principal
      for (i = 1; i <= n - h; i++){ // n - h é a quantidade de elementos analisados na diagonal
         j = i + h; // i => linhas; j => colunas
         m[i - 1][j - 1] = INT_MAX;

         for (k = i; k <= j - 1; k++){
            aux = m[i - 1][k - 1] + m[k][j - 1] + b[i - 1] * b[k] * b[j];

            if (aux < m[i - 1][j - 1])
               m[i - 1][j - 1] = aux;
         }
      }
   }

   return m[0][n - 1];
}
```

```
int main(){
    int b[] = {10, 20, 50, 1, 100};
    int** m = create_matrix(4, 4);
    int min = multiplicacao_minima(m, 4, b);

    printf("Operacoes minimas: %d", min);

    free(m);

    return 0;
}
```

Como determinar a parentesiação?
Solução: utilizar uma outra tabela auxiliar para determinar onde vai a parentesiação em m[i,j]

$m_{11} = 0$	$m_{12} = 10.000$	$m_{13} = 1.200$	$m_{14} = \mathbf{2.200}$
	$m_{22} = 0$	$m_{23} = 1.000$	$m_{24} = 3.000$
		$m_{33} = 0$	$m_{34} = 5.000$
			$m_{44} = 0$

$b_0 = 10$	$b_1 = 20$	$b_2 = 50$	$b_3 = 1$	$b_4 = 100$

0	1	1 (M1 x (M2 x M3))	3 ((M1 x (M2 x M3)) x M4)
	0	2	3 ((M2 x M3) x M4)
		0	3
			0

Na matriz auxiliar deve ser colocado o valor de k da escolha

Primeiro, olhar na posição 1,4 da matriz, no qual indica que a separação deve ser na matriz 3, ou seja, de M1 x M2 x M3 x M4, agora será (M1 x M2 x M3) x (M4). O próximo passo será olhar o campo da matriz na posição 1,3 (já que ainda falta colocar parênteses entre as matrizes de 1 a 3).

Na posição 1,3, é indicado que a separação deve ser na matriz 1, ou seja, de M1 x M2 x M3, passa para (M1) x (M2 x M3). Assim, no problema original passa a ser de (M1 x M2 x M3) x (M4) para ((M1) x (M2 x M3)) x (M4).

Problema da Mochila Binária

Considere **n** itens a serem levados para uma viagem, dentro de uma mochila de capacidade **b**

Cada item **x[i]** tem um peso **a[i]** e um valor **c[i]**. Quais itens escolher, que modo que o valor total dos itens levados seja o maior possível?

As figuras a seguir são os slides 18--21.

- O problema da mochila é definido em programação matemática:

$$P : z = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ x_j \in \{0,1\}$$

Princípio para aplicação de programação dinâmica: imagine que o lado direito da desigualdade assume um valor λ que varia de 0 até b e as soluções ótimas são $x_0, ..., x_k, ..., x_b$

Isto nos leva a definir o problema $P_k(\lambda)$, a sua respectiva solução ótima $x_k(\lambda)$ e o seu respectivo valor objetivo $f_k(\lambda)$

$$Pk(\lambda) : f_k(\lambda) = \max \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \leq \lambda,\ x_j \in \{0,1\},\ \{a\}_{j=1}^{n},\ j = 1, \ldots, k$$

$P_k(\lambda)$ é o problema da mochila restrito aos k primeiros itens e uma mochila de capacidade λ

Resta-nos obter um procedimento que permita calcular $f_k(\lambda)$ em termos dos valores $f_s(u)$ com $s \leq k$ e $u \leq \lambda$

O que podemos dizer sobre a solução ótima $x*$ para o problema $P_k(\lambda)$ com valor $f_k(\lambda)$?

- $x_k^* = 0$ ou $x_k^* = 1$

Considerando cada caso, temos:

1. Se $x_k^* = 0$, então a solução ótima satisfaz $f_k(\lambda) = f_{k-1}(\lambda)$
2. Se $x_k^* = 1$, então a solução ótima satisfaz$f_k(\lambda) = c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)$

Combinando os casos (1) e (2), obtêm-se a recorrência abaixo:

$$f_k(\lambda) = \max\{f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)\} \qquad (1)$$

Definindo-se os valores iniciais como $f_0(\lambda) = 0$ para $\lambda \geq 0$, pode-se utilizar a recorrência 1 para calcular sucessivamente os valores de $f_1, f_2, ..., f_n$ para todos os valores inteiros de $\lambda \in \{0, \ldots, b\}$

Quando x_{k}^{*} é igual a zero, significa que o item k não é considerado.

O que a Equação 1 quer dizer? Se o item x_k não for selecionado, então o valor de f_k(lambda) será o mesmo de f_{k – 1}(lambda). Se o item x_k for selecionado, então o valor de f_k(lambda) será o custo do item k mais o valor de f_k(lambda – peso do item k), ou seja, o custo do item k mais mais o maior custo para a inclusão de outros itens antes de k

A questão que resta é como encontrar a solução ótima associada ao valor ótimo.

Exemplo: considere a instância do problema da mochila
- z = max 10x_1 + 7x_2 + 25x_3 + 24x_4, sujeito a
- 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 ≤ 7

O que isso quer dizer? Que temos 4 itens (x1, x2, x3 e x4), cada um com determinado custo (10, 7, 25 e 24) e peso (2, 1, 6, e 5). Desejamos colocar esses itens em uma mochila com capacidade 7,

λ	f0	f1	f2	f3	f4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	7	7	7
2	0	10	10	10	10
3	0	10	17	17	17
4	0	10	17	17	17
5	0	10	17	17	24
6	0	10	17	25	31
7	0	10	17	32	34

a1 = 2, a2 = 1, a3 = 6, a4 = 5, c1 = 10, c2 = 7, c3 = 25, c4 = 24, b = 7

$$f_k(\lambda) = \max\{f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)\}$$

f1(0) = max(f0(0); c1 + f0(0 – a1)) = max(0; 10 + f0(0 - 2)) = 0 (não existe f0(-2)) – Extrapola peso
f1(1) = max(f0(1), c1 + f0(1 – a1)) = max(0; 10 + f0(1 - 2))= 0 (não existe f0(-1)) – Extrapola peso
f1(2) = max(f0(2), c1 + f0(2 – a1)) = max(0; 10 + f0(2 - 2)) = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução
f1(3) = max(f0(3), c1 + f0(3 – a1)) = max(0; 10 + f0(3 - 2)) = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução
f1(4) = max(f0(4), c1 + f0(4 – a1)) = max(0; 10 + f0(4 - 2)) = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução
f1(5) = max(f0(5), c1 + f0(5 – a1)) = max(0; 10 + f0(5 - 2)) = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução
f1(6) = max(f0(6), c1 + f0(6 – a1)) = max(0; 10 + f0(6 - 2)) = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução
f1(7) = max(f0(7), c1 + f0(7 – a1)) = max(0; 10 + f0(7 - 2)) = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução

f2(0) = max{f1(0); c2 + f1(0 - a2)} = max{0; 7 + f1(0 - 1)} = 0 (não existe f0(-1)) – Extrapola peso
f2(1) = max{f1(1); c2 + f1(1 - a2)} = max{0; 7 + f1(1 - 1)} = 7 // Neste caso, c2 faz parte da solução
f2(2) = max{f1(2); c2 + f1(2 - a2)} = max{10; 7 + f1(2 - 1)} = 10 // Neste caso, c1 faz parte da solução
f2(3) = max{f1(3); c2 + f1(3 - a2)} = max{10; 7 + f1(3 - 1)} = 17 // Neste caso, c1 e c2 fazem parte da solução
f2(4) = max{f1(4); c2 + f1(4 - a2)} = max{10; 7 + f1(4 - 1)} = 17 // Neste caso, c1 e c2 fazem parte da solução
f2(5) = max{f1(5); c2 + f1(5 - a2)} = max{10; 7 + f1(5 - 1)} = 17 // Neste caso, c1 e c2 fazem parte da solução
f2(6) = max{f1(6); c2 + f1(6 - a2)} = max{10; 7 + f1(6 - 1)} = 17 // Neste caso, c1 e c2 fazem parte da solução
f2(6) = max{f1(7); c2 + f1(7 - a2)} = max{10; 7 + f1(7 - 1)} = 17 // Neste caso, c1 e c2 fazem parte da solução

f3(0) = max{f2(0); c3 + f2(0 - a3)} = max{0; 25 + f2(0 - 6)} = 0 (não existe f0(-6))
f3(1) = max{f2(1); c3 + f2(1 - a3)} = max{7; 25 + f2(1 - 6)} = 7 (não existe f0(-5))
f3(2) = max{f2(2); c3 + f2(2 - a3)} = max{10; 25 + f2(2 - 6)} = 10 (não existe f0(-4))
f3(3) = max{f2(3); c3 + f2(3 - a3)} = max{17; 25 + f2(3 - 6)} = 17 (não existe f0(-3))
f3(4) = max{f2(4); c3 + f2(4 - a3)} = max{17; 25 + f2(4 - 6)} = 17 (não existe f0(-2))
f3(5) = max{f2(5); c3 + f2(5 - a3)} = max{17; 25 + f2(5 - 6)} = 17 (não existe f0(-1))
f3(6) = max{f2(6); c3 + f2(6 - a3)} = max{17; 25 + f2(6 - 6)} = 25 // Neste caso, c1 e c3 fazem parte da solução
f3(7) = max{f2(7); c3 + f2(7 - a3)} = max{17; 25 + f2(7 - 6)} = 32 // Neste caso, c2 e c3 fazem parte da solução

f4(0) = max{f3(0); c4 + f3(0 - a4)} = max{0; 24 + f2(0 - 5)} = 0 (não existe f0(-5))
f4(1) = max{f3(1); c4 + f3(1 - a4)} = max{7; 24 + f2(1 - 5)} = 7 (não existe f0(-4))
f4(2) = max{f3(2); c4 + f3(2 - a4)} = max{10; 24 + f2(2 - 5)} = 10 (não existe f0(-3))
f4(3) = max{f3(3); c4 + f3(3 - a4)} = max{17; 24 + f2(3 - 5)} = 17 (não existe f0(-2))
f4(4) = max{f3(4); c4 + f3(4 - a4)} = max{17; 25 + f3(4 - 5)} = 17 (não existe f0(-1))
f4(5) = max{f3(5); c4 + f3(5 - a4)} = max{17; 24 + f3(5 - 5)} = 24 // Neste caso, c3 e c4 fazem parte da solução
f4(6) = max{f3(6); c4 + f3(6 - a4)} = max{25; 24 + f3(6 - 5)} = 31 // Neste caso, c1, c2 e c3 fazem parte da solução
f4(7) = max{f3(7); c4 + f3(7- a4)} = max{32; 24 + f3(7 - 5)} = 34 // Neste caso, c1 e c4 fazem parte da solução

Programação Dinâmica

Vantagens:
- Explora todas as alternativa de maneira eficiente
- A cada iteração, a decisão pode ser reconsiderada
- Tem prova de correção simples

Desvantagens:
- Solução pode ser lenta, pois a complexidade pode ser exponencial
- Necessita de maior espaço de memória

Outros exemplos de aplicação:
- Algoritmo de Dijkstra
- Subsequência crescente máxima
- Sequência de Fibonacci
- Entre outras

Referências

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S. Algoritmos: teoria e prática. Elsevier, 2012.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S. Computer Algorithms. Computer Science Press, 1998.

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. LTC, 2010.

Ziviani, M. Projetos de Algoritmos: com implementações em Pascal e C. Thomson, 2004.