Recursão

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE22CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

Introdução

- Na matemática, vários objetos são definidos através de um processo que os produz

- Exemplo: função fatorial
  - Dado um número positivo n, o seu respectivo fatorial é
    - $n! = 1$, se $n = 0$ ou $n = 1$
    - $n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 1$, se $n > 1$

Introdução

- Exemplo de um algoritmo para o cálculo do fatorial de n

```
int fatorial(int n){
   int i, f = 1;

   for (i = n; i > 1; i--)
     f *= i;

   return f;
}
```

- Esse algoritmo é iterativo

Introdução

- O algoritmo anterior pode ser traduzido para uma função que retorne $n!$ quando recebe n como parâmetro
  - $n! = 1$, se $n = 0$
  - $n! = n * (n-1)!$, se $n > 0$
- A função fatorial está definida em termos de si mesma
- Essa é uma definição recursiva do fatorial

Sumário

Recursão

Recursão

- Recursão significa repetição
- Uma função recursiva é uma função chama a si própria
- Divisão conquista
- Exemplos de aplicação de recursão: árvores, grafos, ordenação, busca, etc

- Implementação recursiva da função fatorial

```
int fatorial(int n){
   if (n <= 1)
     return 1;
   else
     return n * fatorial(n - 1);
}
```

Recursão

- O critério de parada é uma preocupação (assim como em um comando repetitivo)

- A recursão pode ser infinita

Recursão

- Três regras para a recursão
  1. Saber quando parar (critério de parada)
     - Caso base
  2. Decidir como modificar o seu estado (ou entrada(s)) em direção ao caso base
  3. Analisar o problema de forma que possa ser dividido em subproblemas
     - Caso indutivo

Recursão

- Exemplo: função fatorial

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n <= 1 \text{ (caso base)} \\ n * (n-1)!, & \text{se } n > 1 \text{ (caso indutivo)} \end{cases}$$

```
int fatorial(int n){
   if (n <= 1)
     return 1;
   else
     return n * fatorial(n - 1);
}
```

  - Na função acima, é possível ver que o caso base é tomado quando $n \leq 1$
  - Caso $n > 1$, então não estaremos no caso base e o resultado será $n * (n-1)$

Recursão

- exemplo

  fatorial(5)
  5 * fatorial(4)
  5 * 4 * fatorial(3)
  5 * 4 * 3 * fatorial(2)
  5 * 4 * 3 * 2 * fatorial(1)
  5 * 4 * 3 * 2 * 1
  5 * 4 * 3 * 2
  5 * 4 * 6
  5 * 24
  120

Recursão

- Exemplo: somatório em vetor

```
int somatorio(int v[], int n){
   if (n < 1)
     return 0;
   else
     return v[n - 1] + somatorio(v, n - 1);
}
```

  - Caso base: $n < 1$
  - Caso indutivo: $n \geq 1$

- Exemplo: somatório em vetor (exemplo 2)

```
int somatorio_rec(int v[], int i, int m){
   if (i < m)
     return v[i] + somatorio_rec(v, i + 1, m);
   else
     return 0;
}

int somatorio(int v[], int m){
   return somatorio_rec(v, 0, m);
}
```

  - A *somatorio_ rec* é uma imitação explícita de um laço *for*
  - Caso base: quando o índice *i* atinge o tamanho do vetor
  - Caso indutivo: o índice i está dentro dos limites do vetor

Recursão

- É importante enfatizar que uma função recursiva pode ter mais de um caso base e/ou indutivo

- Para cada chamada de uma função, recursiva ou não, os parâmetros e as variáveis locais são empilhados na pilha de execução

- Execução
  - Em qualquer chamada recursiva é criado um registro de ativação na pilha de execução

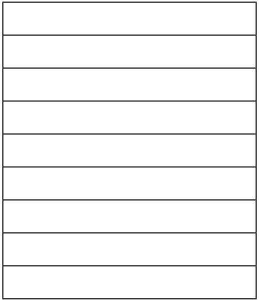
  - Na pilha são armazenados o endereço de retorno, os parâmetros, as variáveis locais da função

  - No final da execução, o registro é desempilhado e a execução volta ao subprograma que chamou
    - O processo é repetido até que a pilha esteja vazia ou até que a função recursiva seja completamente finalizada

Recursão

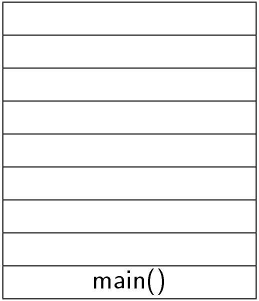
```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução



```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

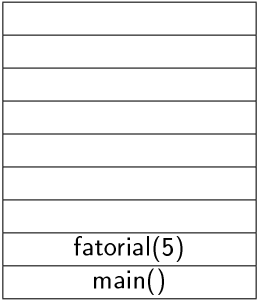
Pilha de Execução



Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução



Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(1)
fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

1
fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

2
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

6
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

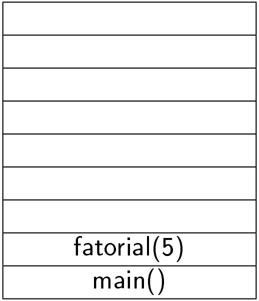
```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

24
fatorial(5)
main()

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução



Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

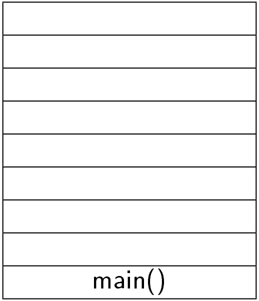
Pilha de Execução

120
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

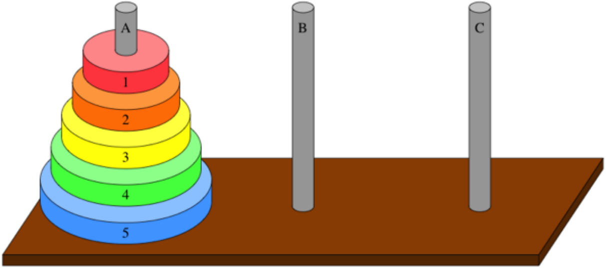
Pilha de Execução



Recursão

- O desenvolvimento de uma solução recursiva nem sempre é fácil
- Normalmente, não há porque propor uma solução recursiva
- Entretanto, para alguns problemas a solução recursiva é mais elegante
- Há problemas que são recursivos já na sua definição
  - Para estes, a solução recursiva é mais natural

Exemplos de Problemas Recursivos



- Dado três torres (A, B e C) e n discos de diâmetros diferentes
- O disco de menor diâmetro sempre deve estar em cima do disco de maior diâmetro

- Inicialmente, todos discos deve estar na torre A
- Problema: como colocar todos os discos na torre C, utilizando a torre intermediária B, sem inverter a ordem dos diâmetros em nenhum torre?
- Se há solução para $n-1$ discos, então há solução para n discos
- No caso trivial de $n = 1$, a solução é simples
- A solução para n discos é realizada em termos de $n-1$

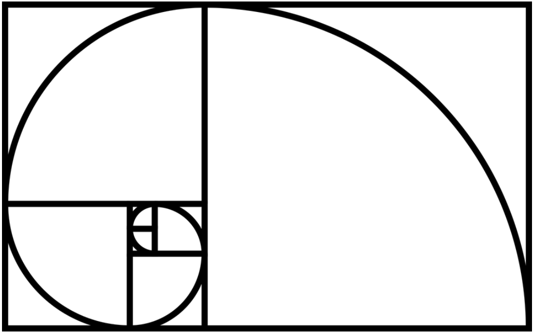
- Procedimento
  - Se $n = 1$, mover o disco da torre A para C
  - Mova os $n-1$ discos de A para C, usando B como auxiliar
  - Mova o último disco de A para C
  - Mova os $n-1$ discos de B para C, usando A como auxiliar

```
void hanoi(char de, char para, char via, int n){
  if (n >= 1)
    hanoi(de, via, para, n - 1);
    printf("disco %d de %c para %c\n", n, de, para);
    hanoi(via, para, de, n - 1);
  }
}
```

- Exemplo para $de = A$, $para = C$, $meio = B$ e $n = 5$

1. disco 1 de A para C
2. disco 2 de A para B
3. disco 1 de C para B
4. disco 3 de A para C
5. disco 1 de B para A
6. disco 2 de B para C
7. disco 1 de A para C
8. disco 4 de A para B
9. disco 1 de C para B
10. disco 2 de C para A
11. disco 1 de B para A
12. disco 3 de C para B
13. disco 1 de A para C
14. disco 2 de A para B
15. disco 1 de C para B
16. disco 5 de A para C
17. disco 1 de B para A
18. disco 2 de B para C
19. disco 1 de A para C
20. disco 3 de B para A
21. disco 1 de C para B
22. disco 2 de C para A
23. disco 1 de B para A
24. disco 4 de B para C
25. disco 1 de A para C
26. disco 2 de A para B
27. disco 1 de C para B
28. disco 3 de A para C
29. disco 1 de B para A
30. disco 2 de B para C
31. disco 1 de A para C

- Em uma sequência de Fibonacci, a partir de 0 e 1, cada número subsequente é correspondente à soma dos dois anteriores
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



- Presentes em configurações biológicas: caracol, desenrolar da samambaia

- Aplicação interessante: conversão de milhas para quilômetros
  - Exemplo: para converter 5 milhas, pode ser utilizado o número seguinte da sequência de Fibonacci (8 km)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

```
int fib(int n){
   if (n <= 0)
     return 0;
   else if (n == 1)
     return 1;
   else
     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
   }
}
```

- Exemplo para $n = 6$
  - $\text{fib}(6) = \text{fib}(5) + \text{fib}(4)$
  - $= \text{fib}(4) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= \text{fib}(3) + \text{fib}(2) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= \text{fib}(2) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= \text{fib}(1) + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 1 + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 1 + 0 + \text{fib}(1) + \text{fib}(2) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 1 + 1 + \text{fib}(2) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 2 + \text{fib}(1) + \text{fib}(0) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 2 + 1 + \text{fib}(0) + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 3 + 0 + \text{fib}(3) + \text{fib}(4)$
  - $= 3 + \text{fib}(2) + \text{fib}(1) + \text{fib}(4)$
  - $= 3 + \text{fib}(1) + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(4)$
  - $= 3 + 1 + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(4)$
  - $= 4 + 0 + \text{fib}(1) + \text{fib}(4)$
  - $= 4 + 1 + \text{fib}(4)$

- Exemplo para $n = 6$
  - $= 4 + 1 + \text{fib}(4)$
  - $= 5 + \text{fib}(3) + \text{fib}(2)$
  - $= 5 + \text{fib}(2) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 5 + \text{fib}(1) + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 5 + 1 + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 6 + 0 + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 6 + 1 + \text{fib}(2)$
  - $7 + \text{fib}(1) + \text{fib}(0)$
  - $7 + 1 + \text{fib}(0)$
  - $8 + 0$
  - 8

Simulando a Recursividade

Simulando a Recursividade

- Todo problema com solução recursiva pode ser resolvido iterativamente
  - Para isso, deve ser examinado, detalhadamente, os mecanismos usados para implementar a recursividade para que seja possível simulá-los usando técnicas não-recursivas
- A solução recursiva é geralmente mais cara computacionalmente do que a não-recursiva
- A possibilidade de gerar uma solução não-recursiva a partir de um algoritmo recursivo é mais interessante em várias situações

Simulando a Recursividade

- Geralmente, uma versão não-recursiva (iterativa) de um programa executará com mais eficiência
- Na versão iterativa, o trabalho extra dispendido para entrar e sair de um bloco é evitado
- Em programa não-recursivo, muita atividade de empilhamento e desempilhamento pode ser evitada

- Exemplo de quando não usar recursividade
  - Sequência de Fibonacci

```
int fib(int n){
   if (n <= 0)
     return 0;
   else if (n == 1)
     return 1;
   else
     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
   }
}
```

  - A versão recursiva é extremamente ineficiente, pois refaz os mesmos cálculos diversas vezes

Simulando a Recursividade

- Deve-se evitar uso de recursividade quando existe solução óbvia por iteração

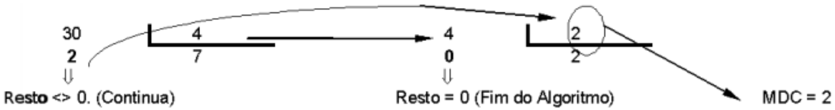
```
int fibonacci(int n){
   int i, fib1, fib2, fibN;

   if (n <= 0)
     return 0;
   else if (n == 1)
     return 1;
   else{
     fib1 = 0;
     fib2 = 1;
     fibN = 0;

     for (i = 2; i <= n; i++) {
      fibN = fib1 + fib2;
      fib1 = fib2;
      fib2 = fibN;
     }
     return fibN;
   }
}
```

Simulando a Recursividade

- Comparação versões recursiva e iterativa

n	**10**	**20**	**30**	**50**	**100**
Recursiva	8 ms	1 s	2 min	21 dias	10^2
Iterativa	1/6 ms	1/3 ms	1/2 ms	3/4 ms	1,5 ms

- Exercício: escreva uma função recursiva que calcule o MDC (máximo divisor comum) de 2 números a e b recebidos como parâmetros. Para o cálculo do MDC, deve-se usar o Algoritmo de Euclides. Ex: a = 30 e b = 4:



Referências I

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Rosa, J. L. G.
Recursão em C. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2008.

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.

Tenenbaum, A.; Langsam, Y.
Estruturas de Dados usando C.
Pearson, 1995.

Referências II

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.