Árvores: árvores B

Prof. Jefferson T. Oliva
Material da Profa. Luciene de Oliveira Marin

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

Introdução

- Busca em memória primária
  - Busca sequencial
  - Busca sequencial indexada
  - Busca binária
  - Busca por interpolação
  - Hashing
  - Árvore binária de busca
  - Árvore AVL
  - Árvore rubro-negra

Introdução

- Pesquisa em memória primária vs. secundária
  - Primária: acesso mais rápido, portanto, mais caro

  - Secundária: mais barato, portanto, acesso mais lento

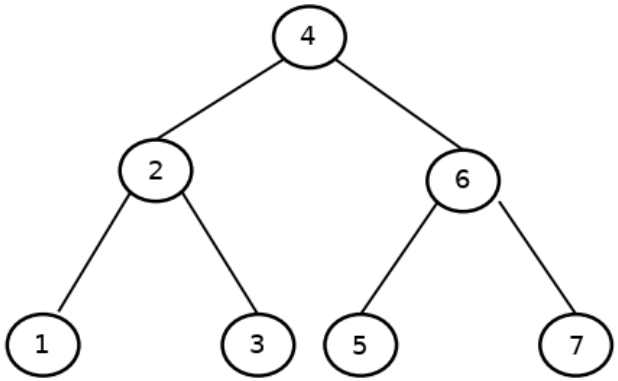
Sumário

Árvores B

- Amplamente utilizadas para o armazenamento em memória secundária
- Diversas aplicações/ferramentas utilizam árvores B (*B-tree*)
  - Sistemas de arquivos (*e.g.* NTFS e ext4)
  - Banco de dados (*e.g.* Oracle e PostgreSQL)
- Árvores B são estruturas de dados projetadas para a indexação de dados
  - Estrutura mais avançada em relação ao arquivo sequencial indexado

Árvores B

- Árvore B é n-ária
  - Exemplo de árvore binária de busca



  - Exemplo de árvore B

Árvores B

- Árvore binária de busca: cada nó tem um elemento e entre 0 e 2 nós filhos

- Árvore n-ária: cada nó pode ter entre 1 e $n - 1$ elementos e até n filhos

Árvores B

Definições

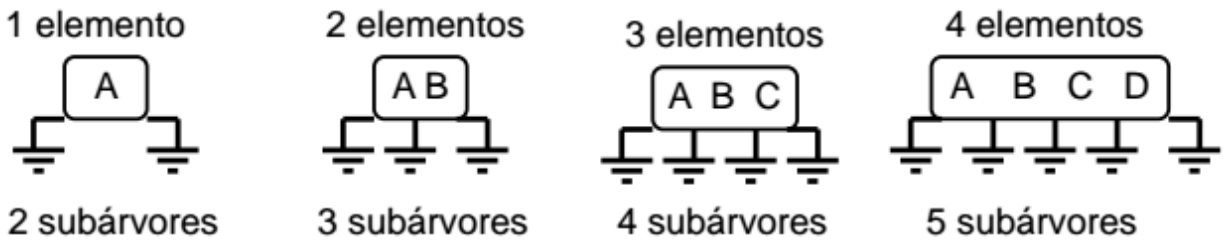
- Árvore de busca balanceada
- O nó de uma árvore B também é chamado de **página**
  - Cada nó pode ter mais de um elemento
- Ordem de árvore B: é o número máximo de páginas descendentes que uma página pode ter (Knuth)
  - Em Cormen et al. (2012) é definida como o número mínimo de páginas descentes que uma página pode ter
  - Nesse material de aula é considerada a definição de Knuth

- Dada uma árvore B de ordem N:
  - Página raiz
    - Elementos: entre 1 (mínimo) e $N-1$ (máximo)
    - Descendentes (subárvores): entre 2 e N
  - Página interna
    - Elementos: entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ e $N-1$
    - Descendentes (subárvores): entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ e N
  - Página folha
    - Elementos: entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ e $N-1$
    - Não possui descendentes
    - Todas as páginas folhas estão no mesmo nível (*i.e.* possuem a mesma profundidade)

- Exemplos para uma árvore B de ordem 5 ($N = 5$):

Página raiz

- Elementos: entre 1 (mínimo) e $N - 1$
- Descendentes (subárvores): entre 2 (mínimo) e N

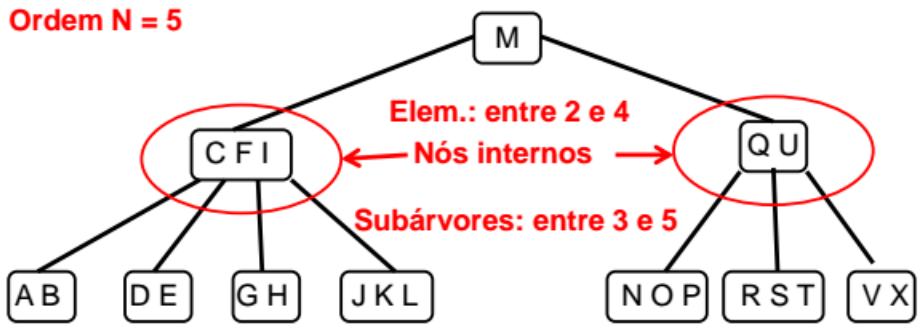


- Quando uma página de árvore B de ordem N tem $N - 1$ elementos, diz-se que a mesma está cheia

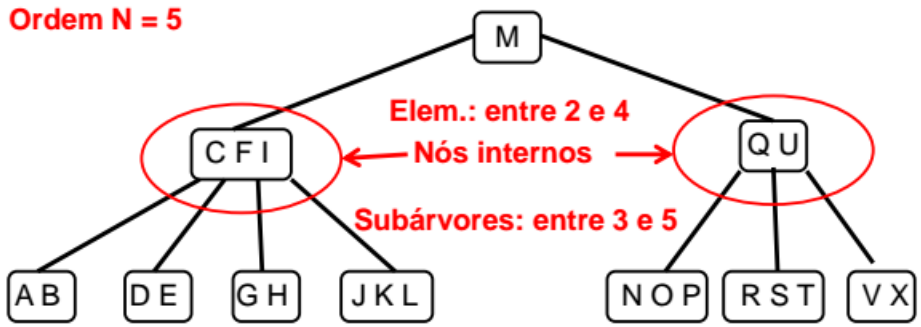
- Exemplos para uma árvore B de ordem 5 ($N = 5$):

Página (nó) interna

- Elementos: entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ (mínimo) e $N - 1$
- Descendentes (subárvores): entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ e N

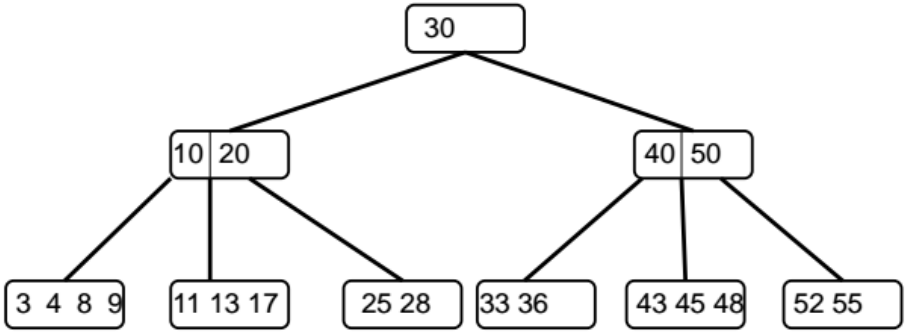


- Exemplos para uma árvore B de ordem 5 ($N = 5$):

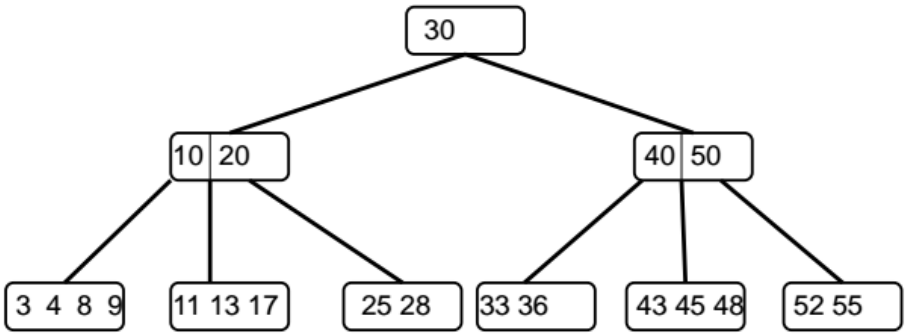


  - Dada uma árvore B de ordem 5
    - Cada página interna ou folha pode ter entre 2 (mínimo) e 4 (máximo) elementos
    - Cada página interna pode ter entre 3 (mínimo) e 5 (máximo) descendentes

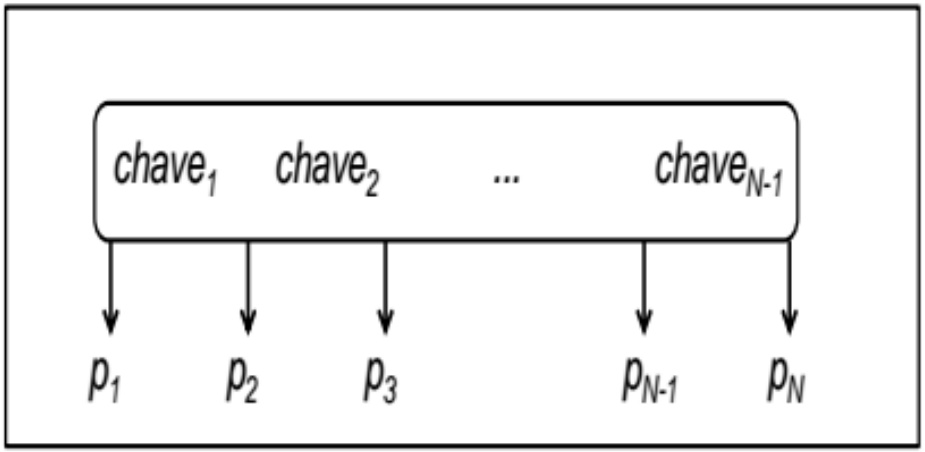
- Qual é a ordem da árvore B abaixo:



- Qual é a ordem da árvore B abaixo:
  - R.: $N = 5$



```
#define N ?

typedef struct NodeB NodeB;

struct NodeB{
   int nro_chaves;
   int chaves[N - 1];
   NodeB *filhos[N];
   int eh_no_folha;
};
```


chave1
chave2
...
chaveN-1
p1
p2
p3
pN-1
pN

- Função para inicialização de um ponteiro do tipo NodeB (1)

```
NodeB* criar(){
   NodeB *tree = (NodeB *) malloc(sizeof(NodeB));
   int i;

   tree->eh_no_folha = 1;
   tree->nro_chaves = 0;

   for (i = 0; i < N; i++)
     tree->filhos[i] = NULL;

   return tree;
}
```

- Função para inicialização de um ponteiro do tipo NodeB (2)

```
NodeB* criar(){
   NodeB *tree = (NodeB *) calloc(sizeof(NodeB));
   int i;

   tree->eh_no_folha = 1;

   return tree;
}
```

Operações em Árvore B

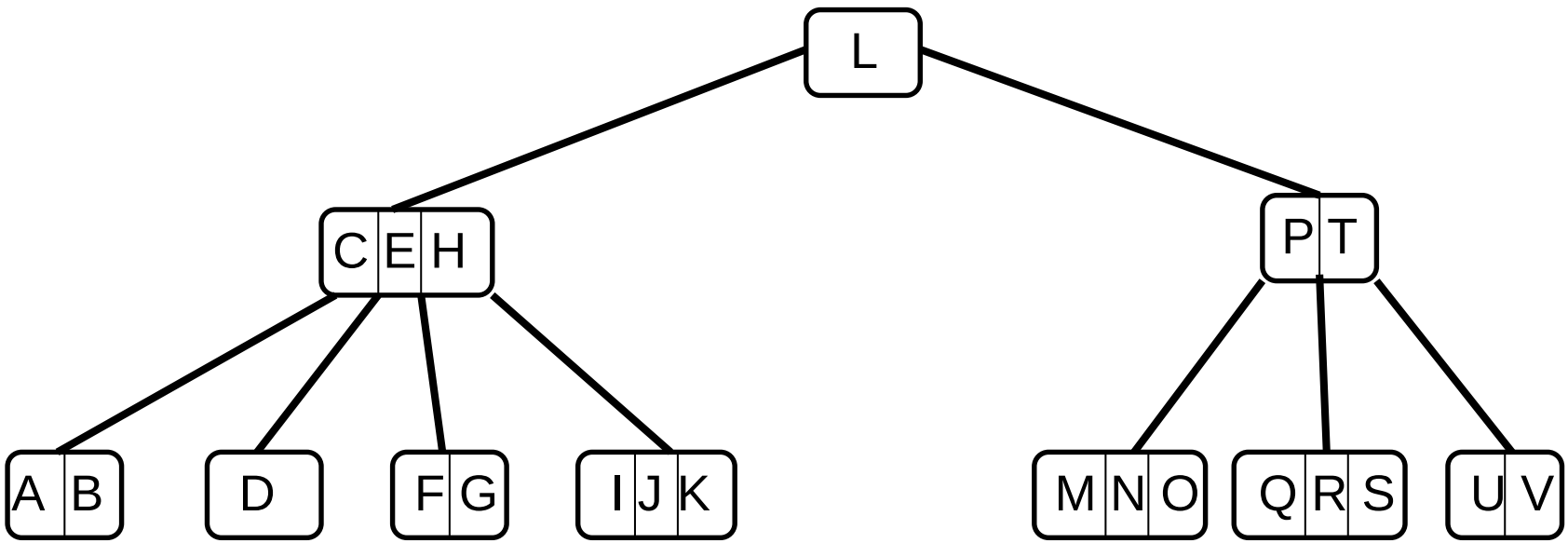
- Pesquisa
- Inserção
- Remoção

Pesquisa em Árvore B

- Semelhante a busca em árvores binárias de busca e AVL.

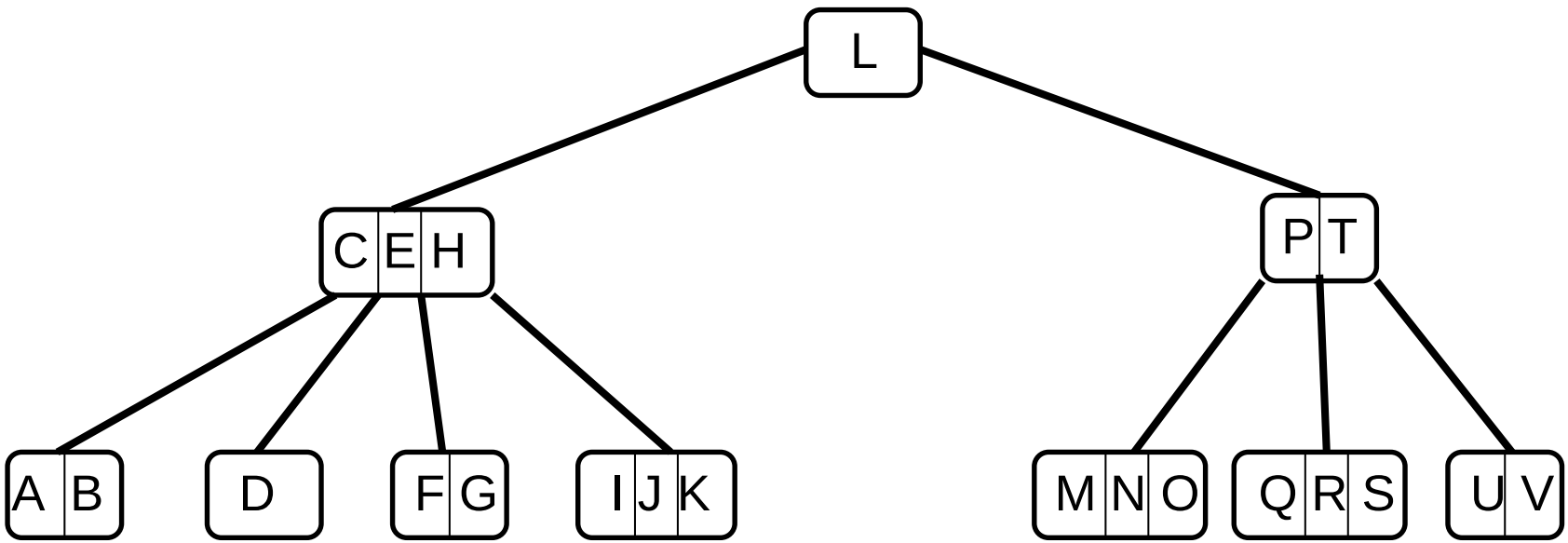
```
int busca_binaria(arvoreB *no, int info)
    {
      int meio, i, f;   i = 0;
      f = no->num_chaves-1;

      while (i <= f)
      {
        meio = (i + f)/2;
        if (no->chaves[meio] == info)
           return(meio); //Encontrou. Retorna a posíção em que a chave está.
        else if (no->chave[meio] > info
              f = meio - 1;
           else i = meio + 1;
      }
      return(i); //Não encontrou. Retorna a posição do ponteiro para o filho.
    }
bool busca(arvoreB *raiz, int info)
    {
      arvoreB *no;
      int pos; //posição retornada pelo busca binária.
    no = raiz;
      while (no != NULL)
       {
        pos = busca_binaria(no, info);
        if (pos < no->num_chaves && no->chaves[pos] == info)
           return(true);
        else no = no->filhos[pos];
       }
      return(false);
```

Pesquisa em Árvore B



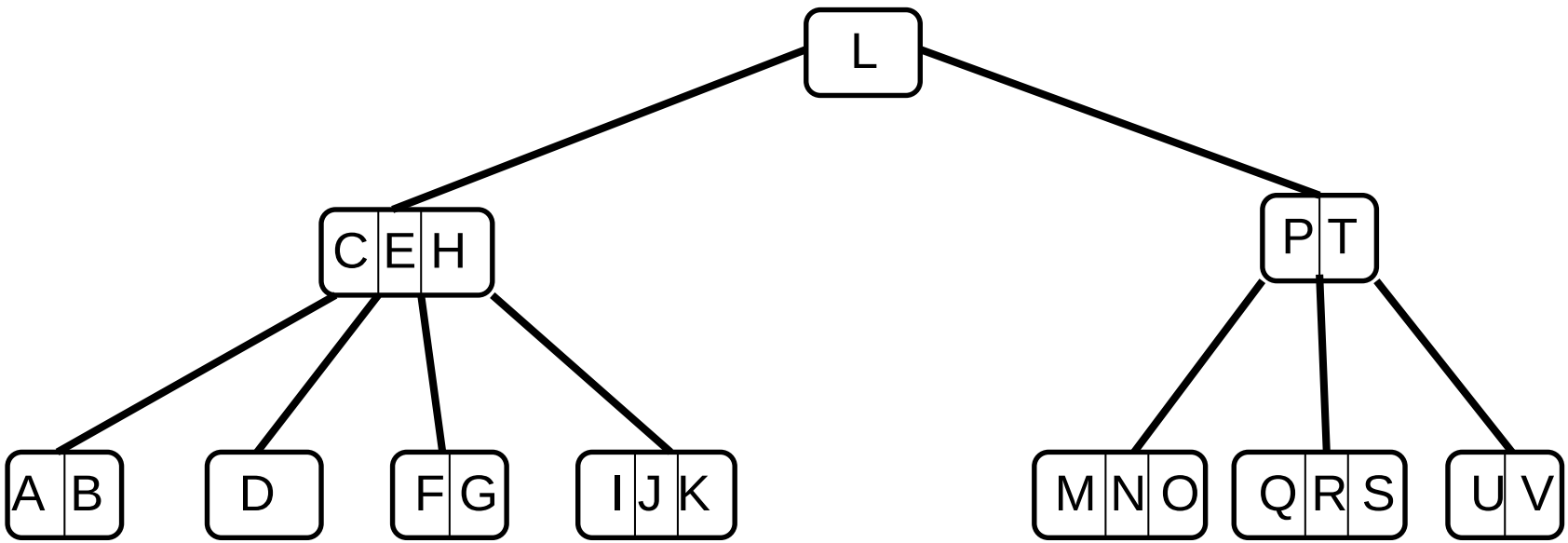
Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore?



Pesquisa em Árvore B

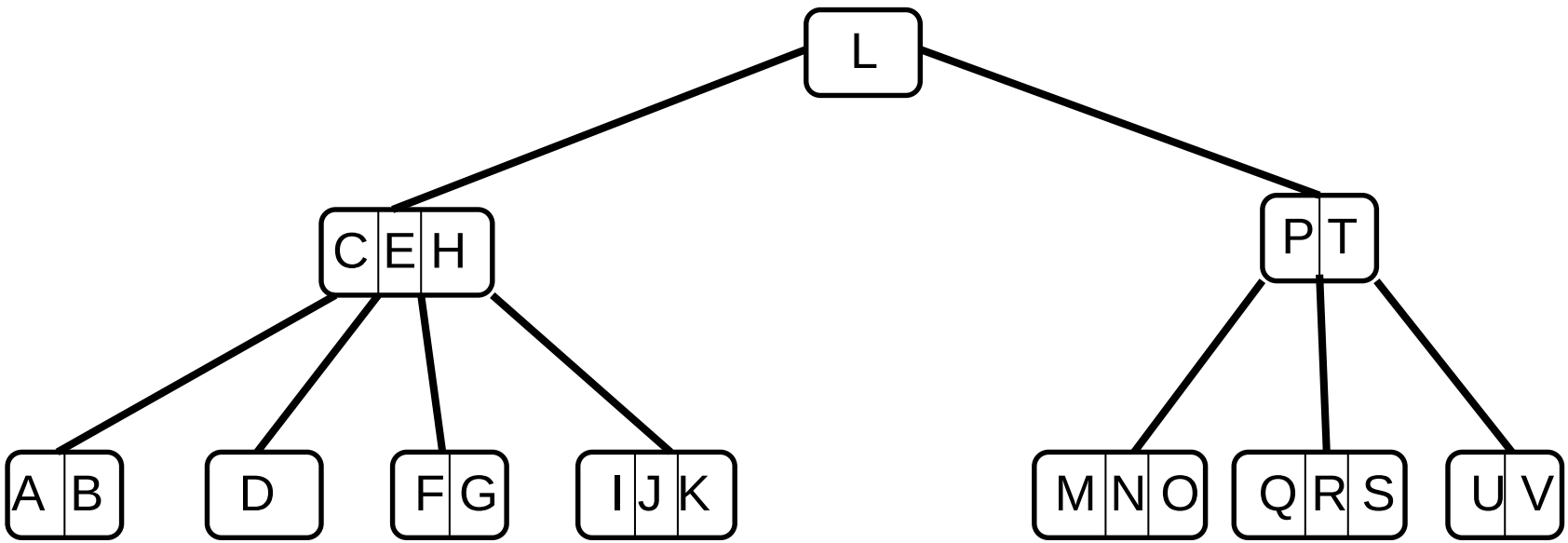
Qual a ordem desta árvore? N = 4



Pesquisa em Árvore B

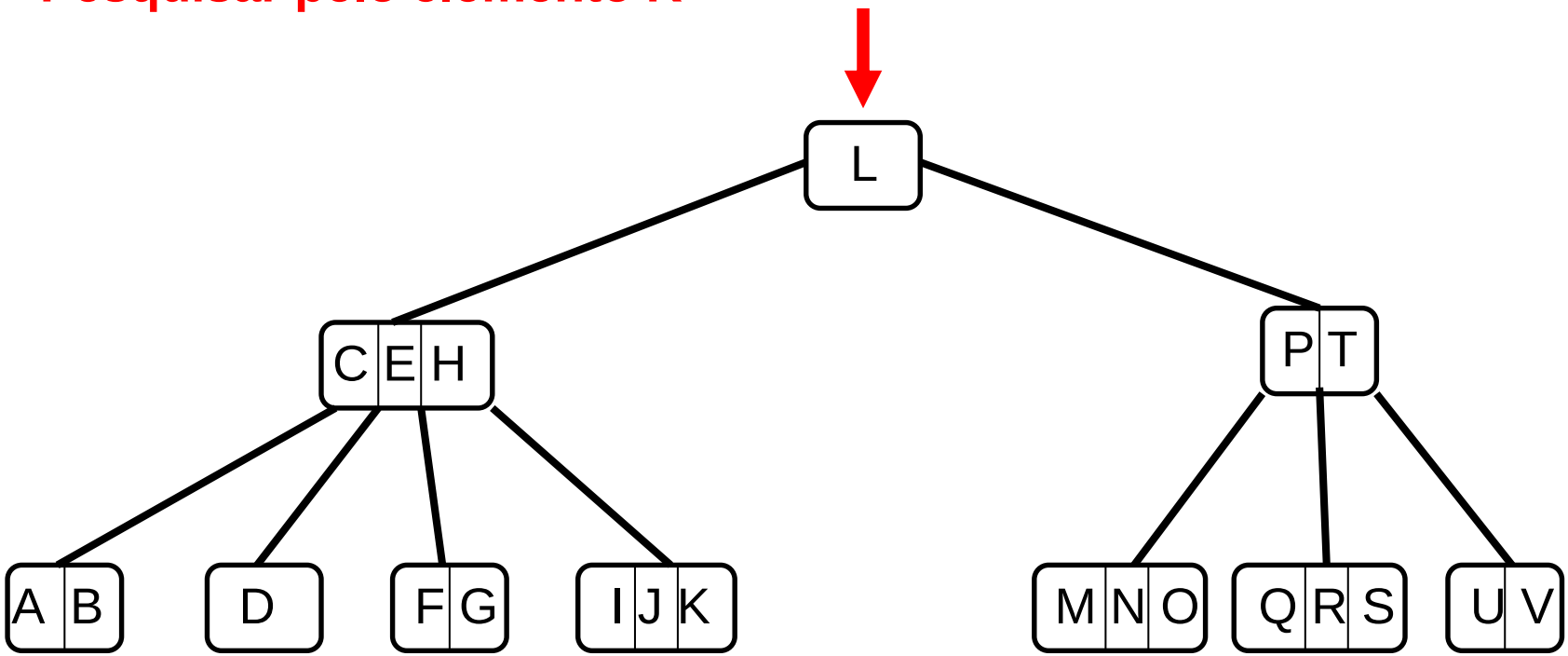
Qual a ordem desta árvore? N = 4

Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

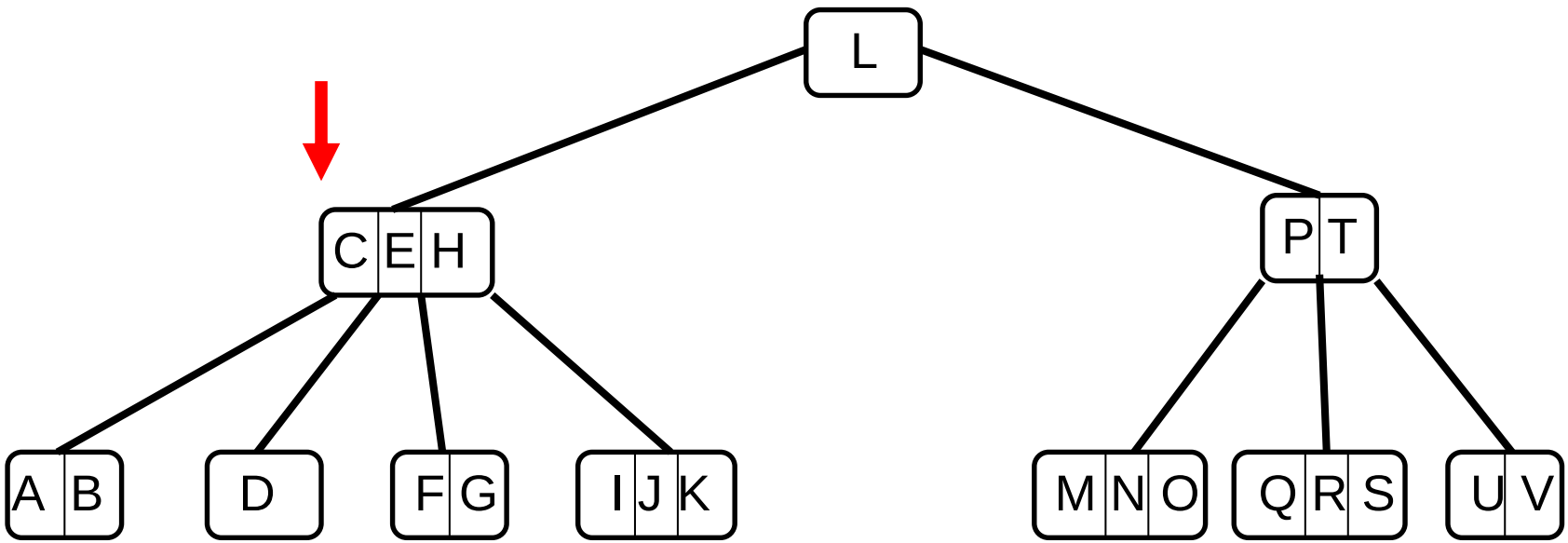
Qual a ordem desta árvore? N = 4
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

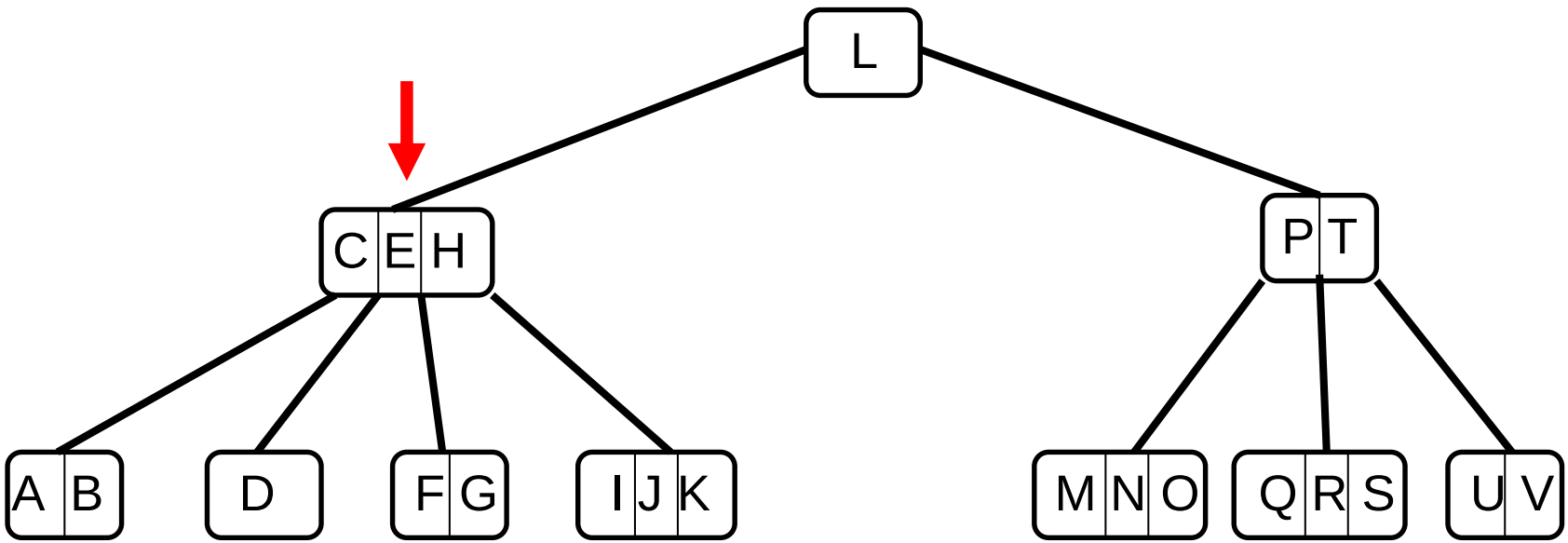
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

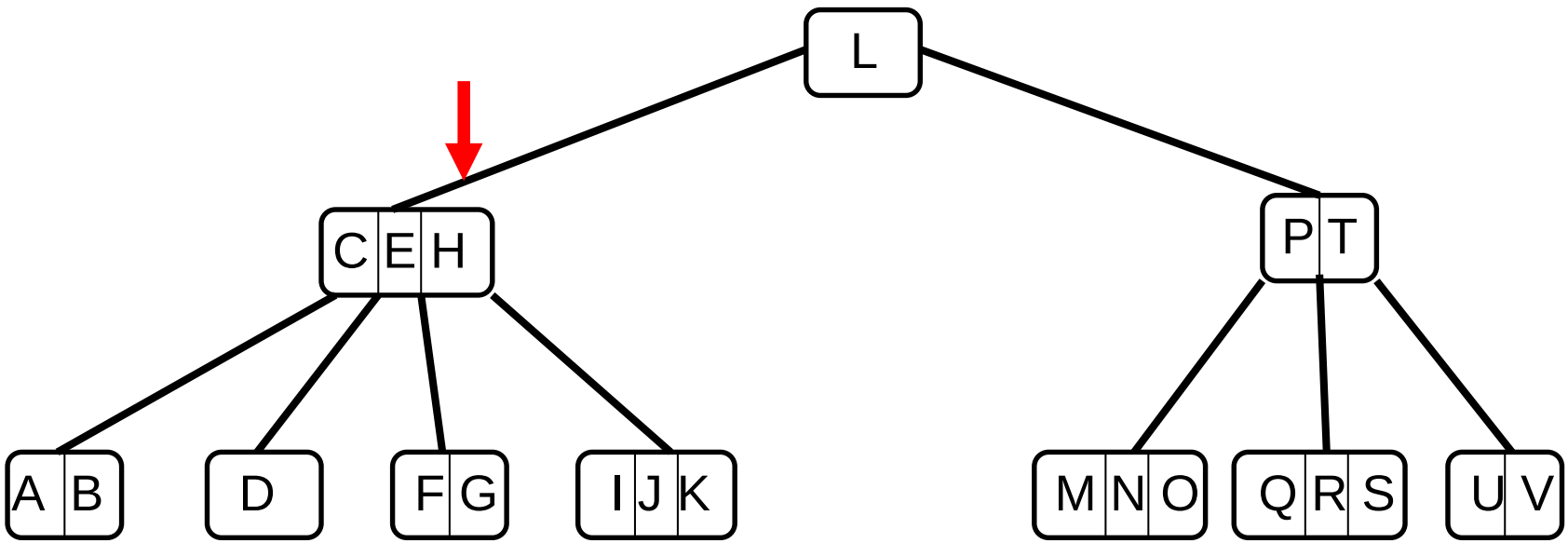
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

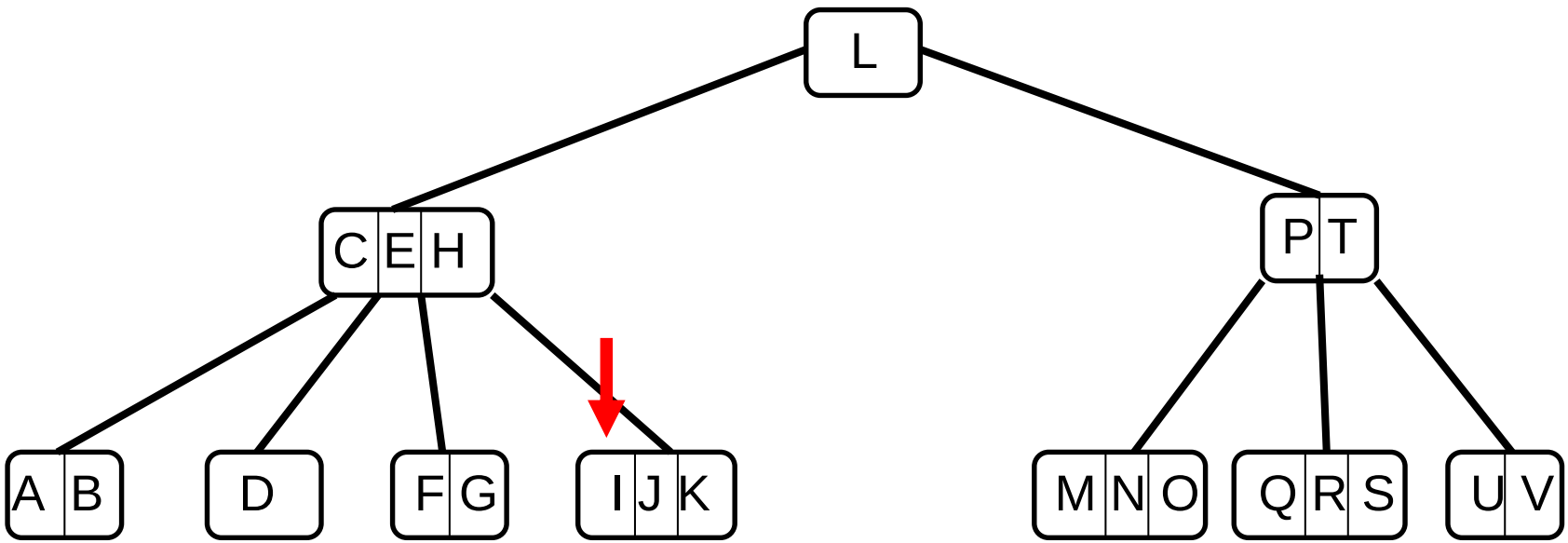
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

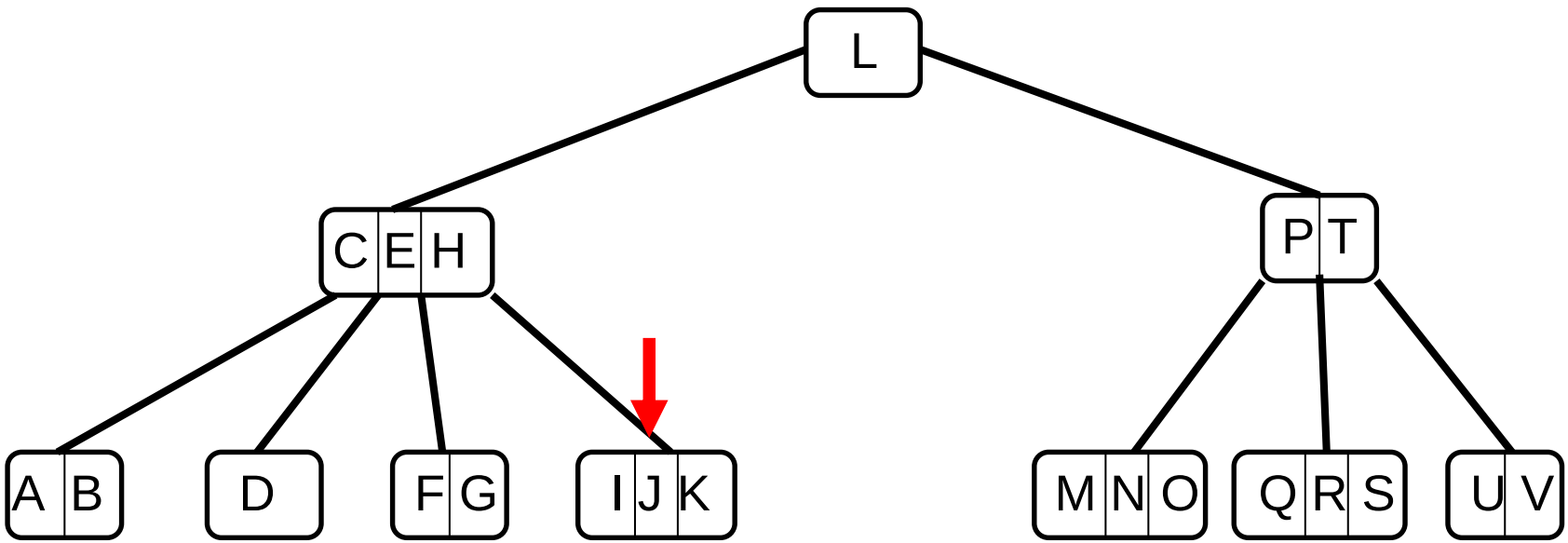
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

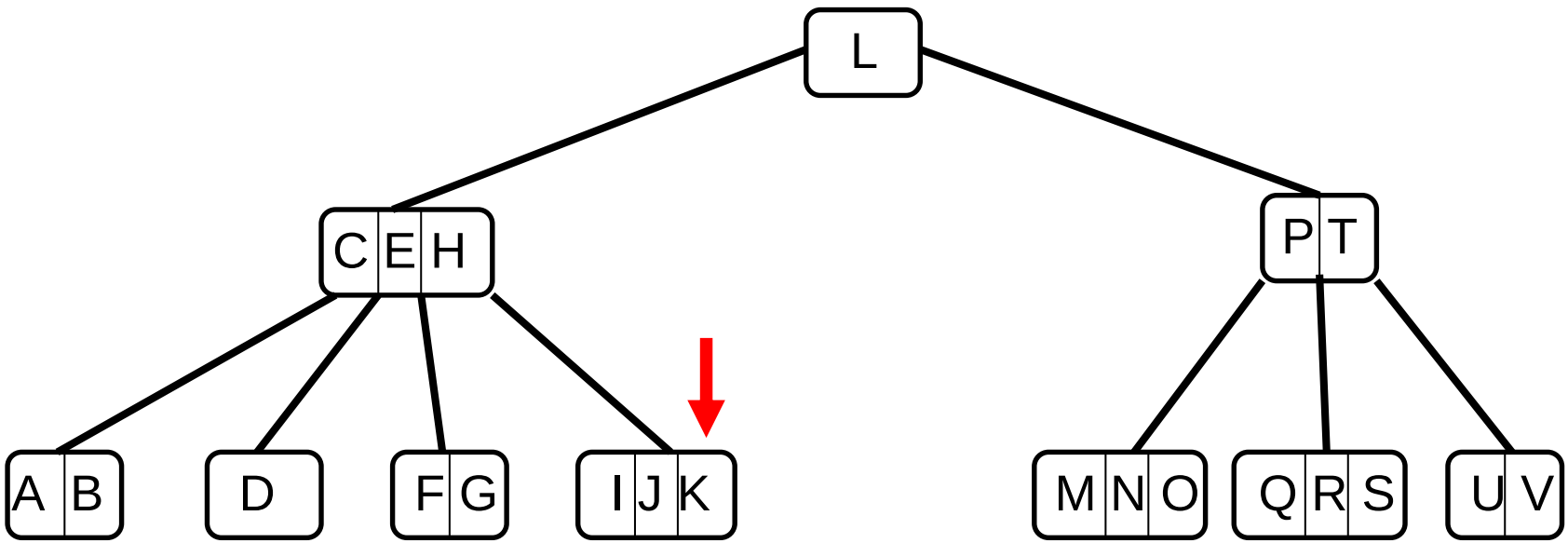
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

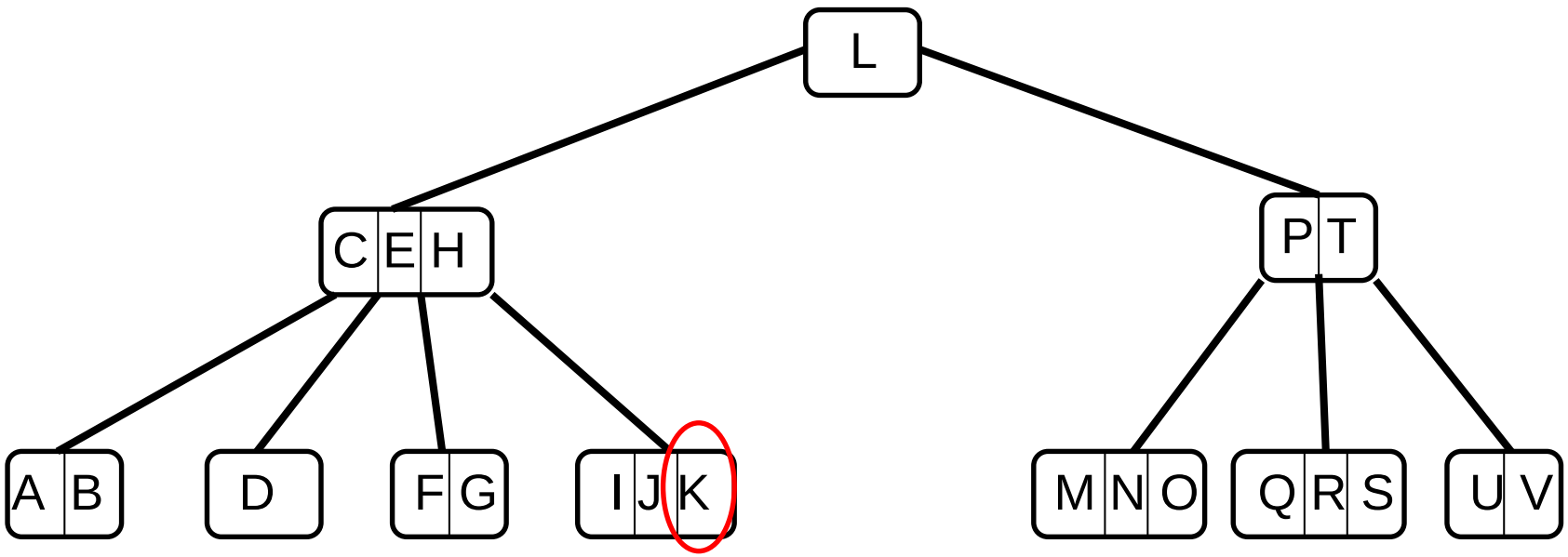
Pesquisar pelo elemento K



Pesquisa em Árvore B

Qual a ordem desta árvore? N = 4

Pesquisar pelo elemento K



Inserção

- Primeiro é preciso localizar a página onde o elemento deve ser inserido;

- Se a página onde o elemento deve ser inserido tiver menos de N - 1 elementos, este é alocado nesta página;

- Se a página já estiver cheia o processo irá provocar a criação de uma nova página.

Inserção

Criação de nova página

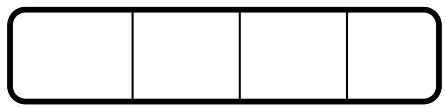
- Primeiramente escolhe-se um valor intermediário na sequência ordenada de chaves da página incluindo-se a nova chave que deveria ser inserida
- Cria-se uma nova página e os valores maiores do que a chave intermediária são armazenados nessa nova página e os menores continuam na página anterior (operação de split).
- Esta chave intermediária escolhida deverá ser inserida na página pai, na qual poderá também sofrer *overflow* ou deverá ser criada caso em que é criada uma nova página raiz. Esta série de *overflows* pode se propagar para toda a árvore B, o que garante o seu **balanceamento** na inserção de chaves.

Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10, 20, 30, 40 e 50 em uma árvore B de ordem 5

Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5

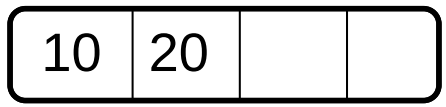


Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5

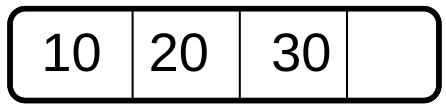
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



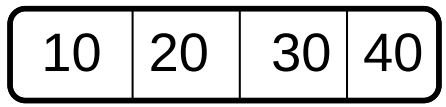
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



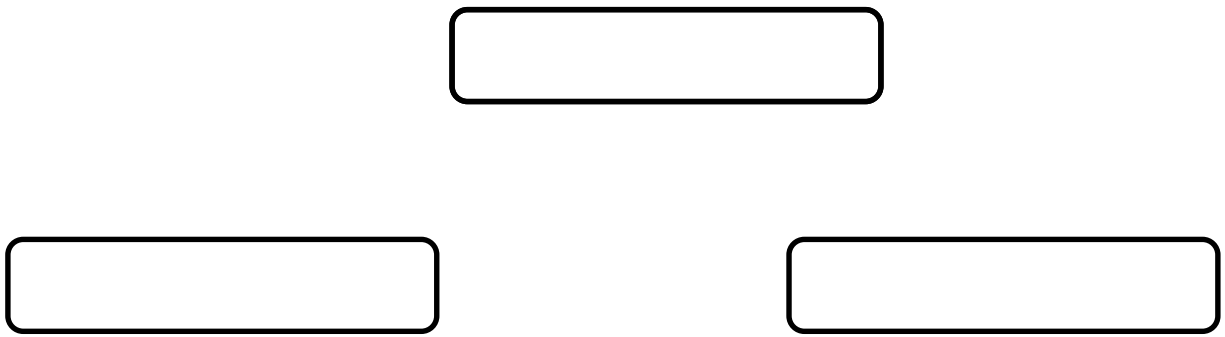
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



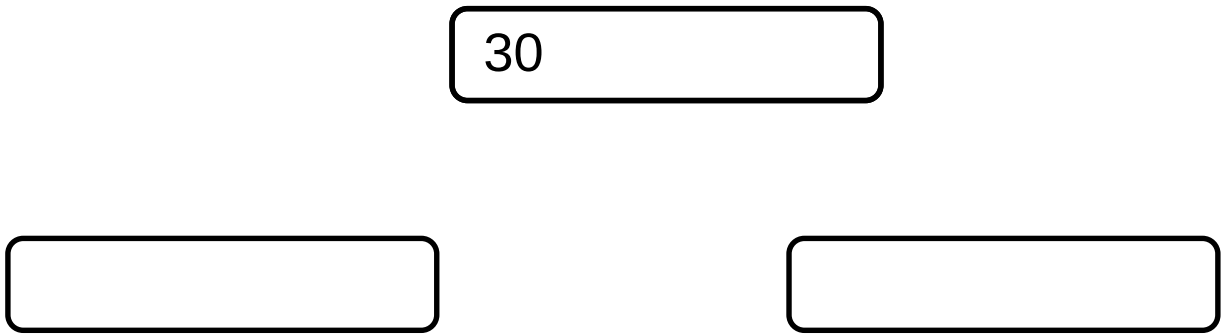
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



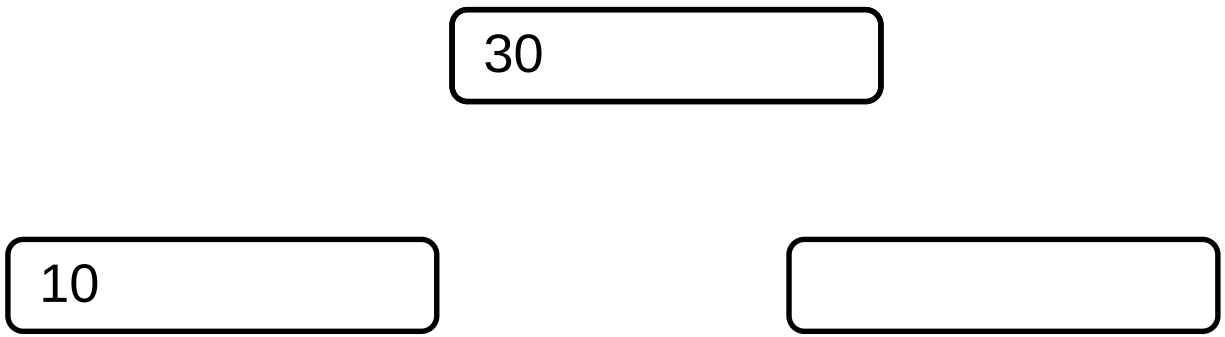
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



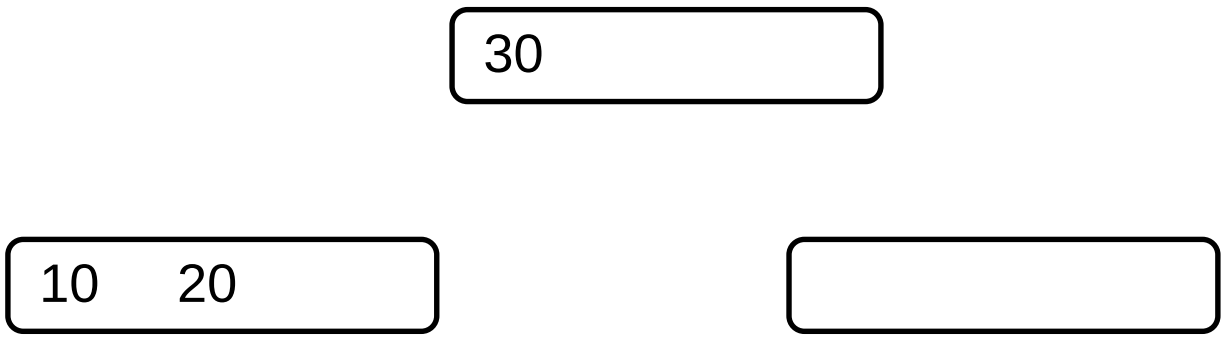
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



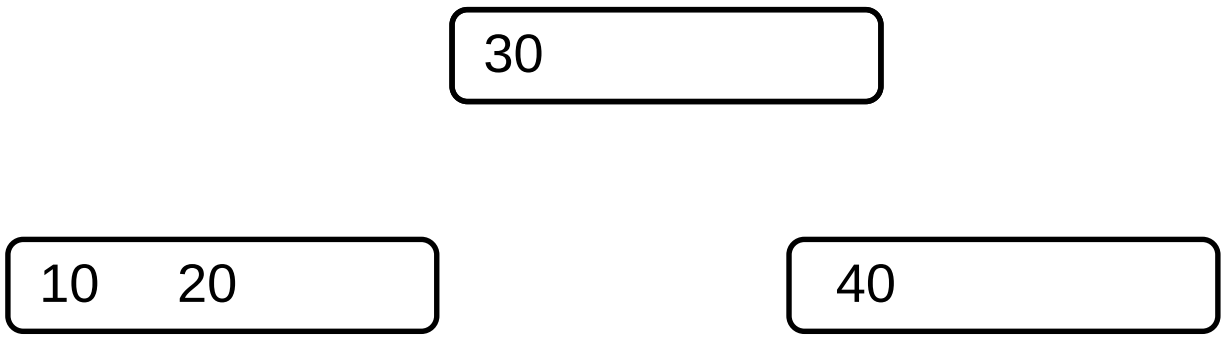
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



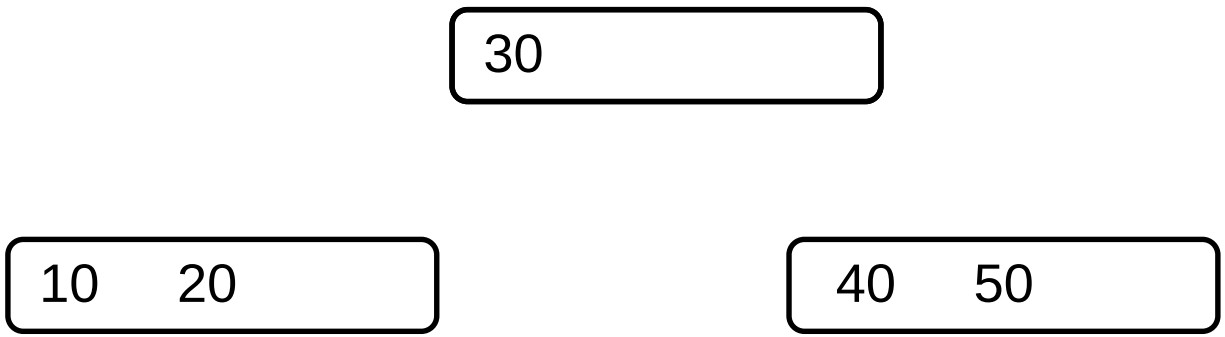
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



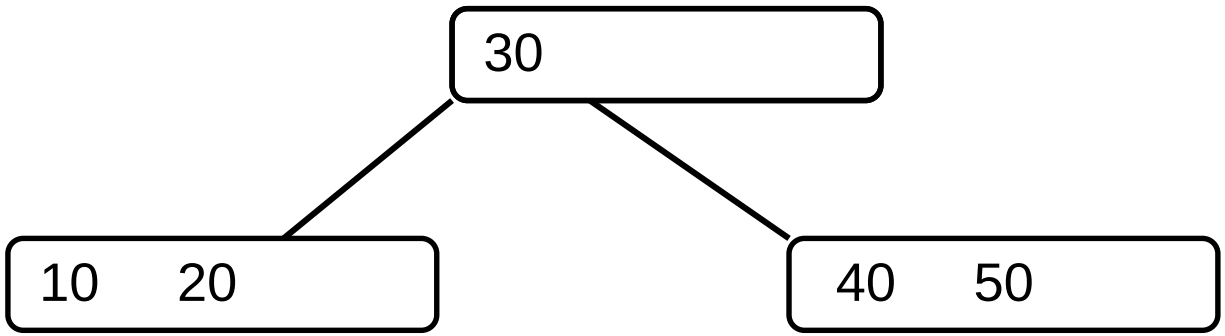
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



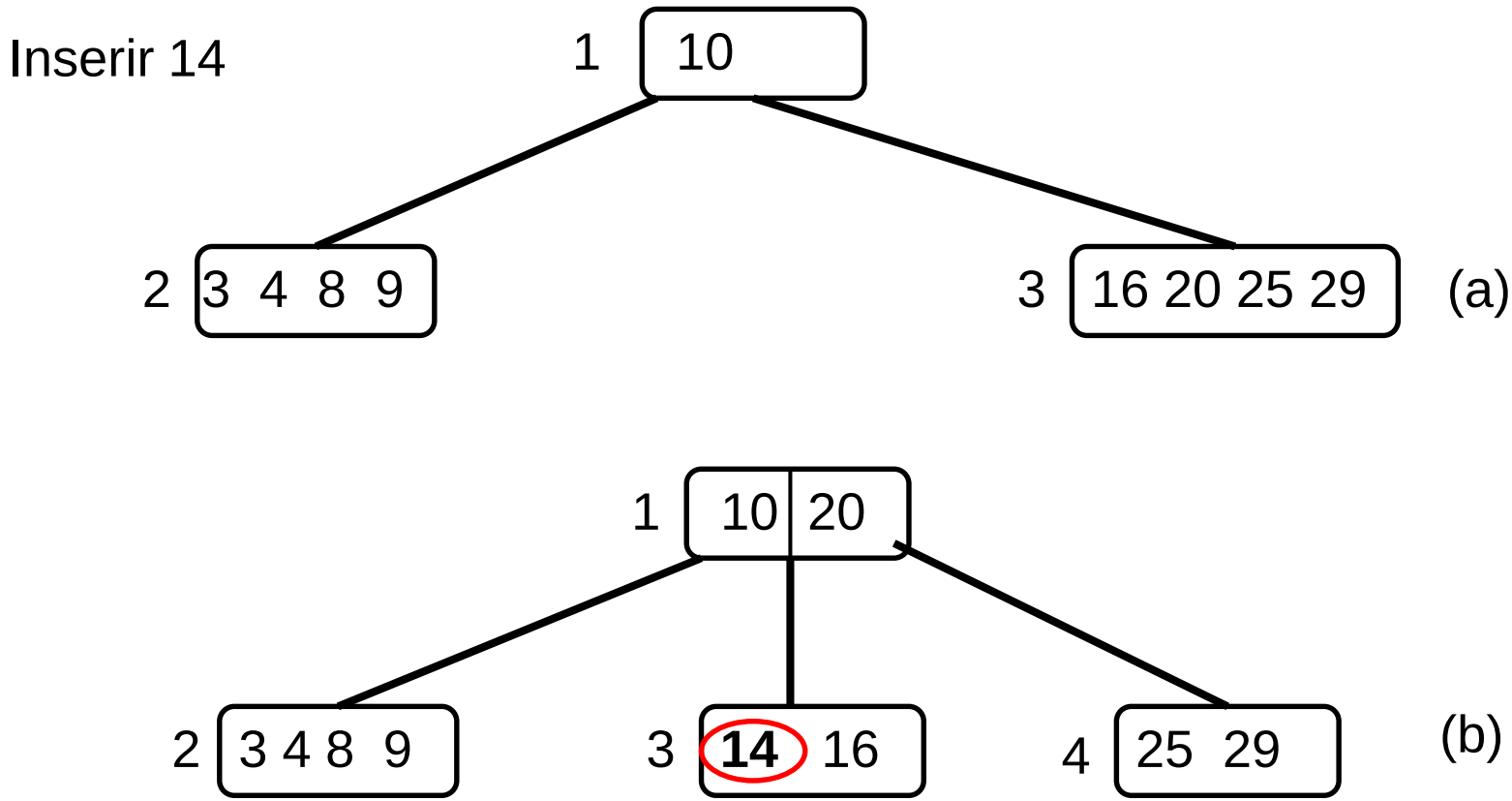
Inserção

- Exemplo: Inserir os valores 10,20,30,40 e 50 em uma árvore B de ordem 5



Inserção em uma árvore B

- Ordem 5



Inserção em uma árvore B de ordem 5

- 1. O registro contendo a chave 14 não é encontrado na árvore, e a página 3 (onde o registro contendo a chave 14 deve ser inserido) está cheia;

- 2. A página 3 é dividida em duas páginas, o que significa que uma nova página 4 é criada.

- 3. Os N registros (no caso são cinco registros) são distribuídos igualmente entre as páginas 3 e 4, e o registro do meio (no caso o registro contendo a chave 20) é movido para a página pai no nível acima.

Inserção

- Neste esquema de inserção, a página pai tem de acomodar um novo elemento. Se a página pai também estiver cheia, então o mesmo processo de divisão tem de ser aplicado de novo.

- No pior caso, o processo de divisão pode propagar-se até a raiz da árvore, e, neste caso, ela aumenta sua altura e um nível.

- É interessante observar que uma árvore B somente aumenta sua altura com a divisão da raiz.

Referências

- Projeto de Algoritmos – Nívio Ziviani
- Estruturas de Dados usando C – Tenenbaum
- Algoritmos – Teoria e Prática – Cormen
- B-Trees - animação
  - https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BTree.html

Exercício

1. Construa as seguintes árvores:
   a) Ordem 3, valores: 5, 7, 14, 30, 21
   b) Na a árvore obtida em a) insira: 35, 37