

# Complexidade de Algoritmos (parte 2)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP)  
Engenharia de Computação  
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)  
Campus Pato Branco

- Análise de Algoritmos
- Cálculo do Tempo de Execução
- Cálculo de Espaço

- Aula anterior: análise assintótica
  - $O$
  - $\Omega$
  - $\Theta$
- Taxas de crescimento

## Análise de Algoritmos

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa
- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um algoritmo são executadas sequencialmente
  - Com memória infinita, por simplicidade

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc
  - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada, ou seja,  $O(1)$
  - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo
  - Operações complexas devem ser analisadas em partes

- Considera-se somente o algoritmo e suas entradas (de tamanho  $n$ )
- Para uma entrada de tamanho  $n$ , pode-se calcular o tempo de execução para os seguintes casos
  - Melhor caso ( $T_{melhor}(n)$ )
  - Caso médio ( $T_{media}(n)$ )
  - Pior caso ( $T_{pior}(n)$ )
  - $T_{melhor}(n) \leq T_{media}(n) \leq T_{pior}(n)$
- Atenção: para mais de uma entrada, essas funções teriam mais de um argumento

- Geralmente, utiliza-se somente a análise do pior caso ( $T_{pior}(n)$ )
  - Análise do melhor caso é de pouco interesse prático
  - O tempo médio pode ser útil, principalmente em sistemas executados rotineiramente
  - Dá mais trabalho calcular o tempo médio
  - Na análise do pior caso é verificado o máximo de esforço computacional que deve ser utilizado para o processamento da entrada



- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Como a linha 1 é apenas uma declaração de variável, a mesma não entra na contagem
- Na linha 2, desconsiderando as linhas 3 e 4, podem ser realizadas até  $2n + 2$  operações (pior caso)
- Na linha 3 são realizadas um total de  $n$  comparações (o comando está dentro do laço for)

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Por fim, a linha 4 (item localizado) ou 5 (caso o item não seja localizado) será executada
  - Melhor caso e caso médio: a instrução da linha 4 será executada, que é o retorno da posição do item encontrado, ou seja, uma unidade de tempo
  - Pior caso: a instrução da linha 5 será executada

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Análise de complexidade para os três casos (melhor, médio e pior):
  - $T_{melhor}(n) = 4$  (iniciar a variável  $i$ , comparar  $i$  com  $n$ , comparar  $x$  com  $v[i]$  e retornar  $i$ )
  - $T_{media}(n) = \frac{3n}{2} + 1$  (estimativa "aproximada", ou seja, supondo que geralmente, a chave procurada esteja ao redor do meio do arranjo)
  - $T_{pior}(n) = 3n + 3$  (quando a chave não é encontrada)

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Análise de complexidade para os três casos (melhor, médio e pior):
  - Melhor caso:  $\Omega(1)$  ou  $O_{\text{melhor}}(1)$
  - Caso médio:  $O_{\text{médio}}(n)$
  - Pior caso:  $O_{\text{pior}}(n)$  ou  $O(n)$
  - Dizemos que a complexidade do algoritmo acima é de  $O(n)$  (geralmente, o que nos interessa é o pior caso)

- Idealmente, para um algoritmo qualquer de ordenação de vetores com  $n$  elementos:
  - Qual a configuração do vetor que você imagina que provavelmente resultaria no melhor tempo de execução?
  - E qual resultaria no pior tempo?
- Outro exemplo de problema: soma da subsequência máxima
  - Dada uma sequência de inteiros (possivelmente negativos)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  encontre o valor da máxima soma de quaisquer números de elementos consecutivos
  - Se todos os inteiros forem negativos, o algoritmo deve retornar 0 como resultado da maior soma
  - Por exemplo, para a entrada -2, 11, -4, 13, -5 e -2, a resposta é 20 ( $a_2 + a_3 + a_4$ )

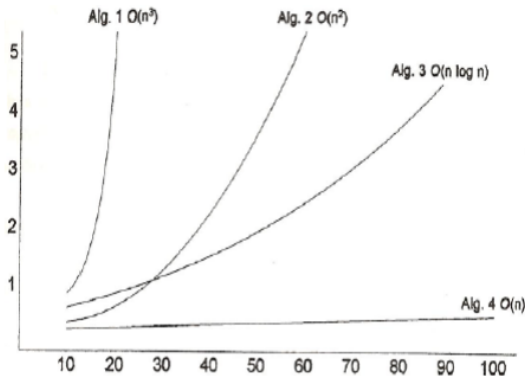
- Assim como o problema de ordenação, há diversos algoritmos propostos para encontrar a subsequência máxima:
  - Alguns são mostrados abaixo juntamente com seus tempos de execução ( $n$  é o tamanho da entrada):

Algoritmo	1	2	3	4
tempo	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
$n = 10$	0,00103	0,00045	0,00066	0,00034
$n = 100$	0,47015	0,01112	0,00486	0,00063
$n = 1.000$	448,77	1,1233	0,05843	0,00333
$n = 10.000$	-	111,13	0,68631	0,03042
$n = 100.000$	-	-	8,0113	0,29832

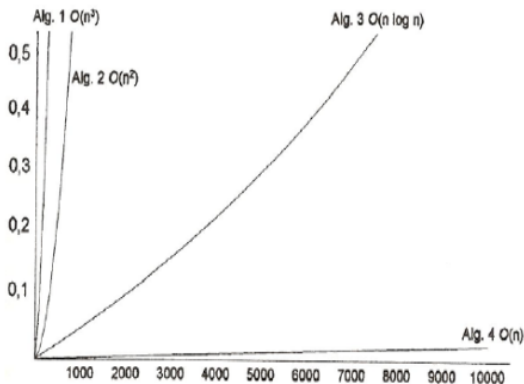
- Deve-se notar que:
  - Para entradas pequenas, todas as implementações rodam num piscar de olhos
  - Para entradas grandes, o melhor algoritmo é o 4
  - Os tempos não incluem o tempo requerido para leitura dos dados de entrada



- Gráfico ( $n$  vs. milissegundos) das taxas de crescimentos dos quatro algoritmos com entradas entre 10 e 100



- Gráfico ( $n$  vs. segundos) das taxas de crescimentos dos quatro algoritmos para entradas maiores crescimento



- A complexidade de espaço determina a quantidade de memória extra necessária para a execução de um algoritmo e é dada em função de:
  - Quantidade de variáveis escalares (parâmetros e locais)
  - Tamanho de arranjos declarados internamente
- A partir daqui, nas aulas/materiais, caso seja mencionada apenas a palavra "complexidade" em algoritmos, estaremos nos referindo à complexidade de tempo
  - Em outras palavras, na análise de espaço, será mencionada "complexidade de espaço"

- Qual a complexidade de espaço do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Qual a complexidade de espaço do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){  
1.   int i;  
2.   for (i = 0; i < n; i++)  
3.       if (x == v[i])  
4.           return i;  
5.   return -1;  
}
```

- Resposta:  $\Theta(1)$ 
  - Geralmente, o tamanho do conjunto de entradas não é considerado nesse tipo de análise, ou seja, o interesse é calcular o espaço "extra" necessário para a execução do algoritmo
  - $T(n) = 2$  (passagem de variáveis  $x$  e  $n$ ) + 1 (passagem de um ponteiro) + 1 (declaração de  $i$ ) + 1 (endereço de retorno) = 5

## Cálculo do Tempo de Execução

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores:
  - Empiricamente
  - Teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los: função da análise de algoritmos

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar e a linguagem de programação utilizada é a C, considere o programa abaixo para calcular o resultado de

$$\sum_{i=1}^n i^3$$

- 1 Início
- 2 declare soma\_parcial numérico;
- 3 soma\_parcial  $\leftarrow$  0;
- 4 para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça
- 5     soma\_parcial  $\leftarrow$  soma\_parcial +  $i*i*i$ ;
- 6     escreva(soma\_parcial);
- 7 Fim



$$\sum_{i=1}^n i^3$$

- 3 1 unidade de tempo
  - 4 1 unidade para iniciação de  $i$ ,  $n + 1$  unidades para testar se  $i = n$  e  $n$  unidades para incrementar  $i = 2n + 2$
  - 5 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada  $n$  vezes (pelo comando "para") =  $4n$  unidades
  - 6 1 unidade para escrita
- **Custo total:**  $6n + 4$ , ou seja, a função é  $O(n)$ !
    - Também podemos dizer que a complexidade do algoritmo acima é  $\Theta(n)$ , já que não há distinção entre o pior e o melhor caso

# Cálculo do Tempo de Execução

- Ter que realizar todos esses passos para cada algoritmo (principalmente algoritmos grandes) pode se tornar uma tarefa cansativa
- Em geral, como se dá a resposta em termos do *big-oh*, costuma-se desconsiderar as constantes e elementos menores dos cálculos
- No exemplo anterior:
  - A linha 3  $soma\_parcial \leftarrow 0$  é insignificante em termos de tempo
  - É desnecessário ficar contando 2, 3 ou 4 unidades de tempo na linha 5  $soma\_parcial \leftarrow soma\_parcial + i * i * i$
  - O que realmente dá a grandeza de tempo desejada é a repetição na linha 4 "para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça"

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
   $x \leftarrow x + 1$ ;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada
    - No exemplo abaixo são realizadas  $3n + 2$  operações (uma unidade para iniciar  $i + n * (\text{incremento na variável } i + \text{uma comparação} + \text{atribuição na variável } x) + \text{uma última comparação, que é o momento em que a variável } i \text{ atinge o valor de } n)$ , ou seja, o seu custo é  $O(n)$
    - Por mais que o operador  $+=$  seja equivalente a duas operações (uma atribuição e uma soma), o mesmo é contado como uma unidade

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $x += 1$ ;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada
  - No exemplo abaixo também são realizadas  $3n + 2$  operações

```
 $i \leftarrow 0$   
enquanto  $i < n$  faça  
     $x \mathrel{+}= 1$ ;  
     $i \mathrel{+}= 1$ ;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas
    - A análise é feita de dentro para fora
    - Tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições
    - Exemplo de fragmento de código com custo de  $O(n^2)$

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
  para  $j \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $k \leftarrow k + 1$ ;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
  para  $j \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $k \leftarrow k + 1$ ;
```

- Nas duas últimas linhas do código acima (laço interno), são realizadas  $4n + 2$  operações: uma atribuição para a variável  $j + n * ($  uma atualização de  $j +$  mais uma comparação entre  $i$  e  $n +$  uma atribuição na variável  $k +$  uma soma na variável  $k)$
- A operação acima é realizada  $n$  vezes, ou seja, o total de operações no fragmento de código acima é  $n * (4n + 2 + 2) + 2 = 4n^2 + 4n + 2$

- Regras para o cálculo de execução
  - Comandos consecutivos
    - É a soma dos tempos de cada um, o que pode significar o máximo entre eles
    - O exemplo abaixo é  $O(n^2)$  apesar da primeira repetição ser  $O(n)$

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
   $k \leftarrow 0$ ;  
  para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
    para  $j \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
       $k \leftarrow k + 1$ ;
```



- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste (então) mais o tempo do senão
    - Em outras palavras, a complexidade é comando que leva o maior tempo
    - O exemplo abaixo é  $O(n)$  no pior caso e  $\Omega(1)$  no melhor caso:  
se  $i < j$   
então  $i \leftarrow i + 1$   
senão para  $k \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $i \leftarrow i * k;$
  - Chamadas de sub-rotinas: uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

- **Exercício 1:** Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo:

```
❶ void função1(int v[], int n){  
❷     int i, j, auxA, auxB;  
❸     i = 1;  
❹     while (i <= n){  
❺         v[i - 1] += 0;  
❻         i = i + 1;  
❼     }  
❽     for (i = 0; i < n; i++)  
❾         for (j = 0; j < n; j++)  
❿             v[i] += v[j] + i + j;  
⓫ }
```

## • Resolução do exercício 1:

- ① Linha 3: inicialização de  $i$ : 1 operação
- ② Linhas 4–7:  $5n + 1$ 
  - $n * (1 \text{ comparação} + 1 \text{ subtração } (v[i - 1]) + 1 \text{ atribuição com soma } (+=) \text{ em } v + 1 \text{ atribuição e 1 soma em } i)$ :  $5n$  operações
  - Última comparação (quando  $i > n$ ): 1 operação
- ③ Linhas 9–10 (*loop interno*):  $5n + 2$ 
  - Inicialização de  $j$ : 1 operação
  - $n * (1 \text{ comparação} + 3 \text{ operações em } A \text{ (1 atribuição e duas somas)} + 1 \text{ incremento em } j)$ :  $5n$  operações
  - Última comparação (quando  $j > n$ ): 1 operação
- ④ Linhas 8–10:  $5n^2 + 4n + 2$ 
  - Inicialização de  $i$ : 1 operação
  - $n * (1 \text{ comparação} + 5n + 2 \text{ (for interno)} + 1 \text{ atribuição em } i)$ :  $5n^2 + 4n$  operações
  - Última comparação (quando  $i > n$ ): 1 operação
- ⑤ Soma dos itens 1, 2 e 3:  $1 + 5n + 1 + 5n^2 + 4n + 2 = 5n^2 + 9n + 4$ 
  - Complexidade:  $O(n^2)$

- **Exercício 2:** Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo:

```
❶ void função2(int n){  
❷     int i, j, auxA, auxB;  
❸     i = 0;  
❹     auxA = 0;  
❺     auxB = 0;  
❻     while (i <= n){  
❼         auxA += 1;  
❽         i = i + 1;  
❾     }  
❿     for (i = 0; i <= n; i++)  
⓫         for (j = 0; j <= n; j++)  
⓬             auxB += (auxA - i + j);  
⓭ }
```

## • Resolução do exercício 2:

① Linhas 3–9:  $4n + 8$

- Inicialização de  $i$ ,  $\text{auxA}$ ,  $\text{AuxB}$ : 3 operações
- $(n + 1) * (1 \text{ comparação} + 1 \text{ atribuição em } \text{auxA} + 1 \text{ atribuição e } 1 \text{ soma em } i)$ :  $4n + 4$  operações
- Última comparação (quando  $i > n$ ): 1 operação

② Linhas 11–12 (*loop* interno):  $5n + 7$

- Inicialização de  $j$ : 1 operação
- $(n + 1) * (1 \text{ comparação} + 3 \text{ operações em } \text{auxB} (1 \text{ atribuição e } 2 \text{ somas}) + 1 \text{ incremento em } j)$ :  $5n + 5$  operações
- Última comparação (quando  $j > n$ ): 1 operação

③ Linhas 10–12:  $5n^2 + 14n + 11$

- Inicialização de  $i$ : 1 operação
- $(n + 1) * (1 \text{ comparação} + 5n + 7 \text{ (for interno)} + 1 \text{ atribuição em } i)$ :  $5n^2 + 14n + 9$  operações
- Última comparação (quando  $i > n$ ): 1 operação

④ Soma dos itens 1 e 3:  $5n^2 + 18n + 19$

- Complexidade:  $O(n^2)$

## Cálculo de Espaço

- Supondo que todos os tipos de dados possuam o mesmo tamanho e a linguagem de programação utilizada é a C, considere o programa abaixo:

$$\sum_{i=1}^n i^3$$

- 1 Início
- 2 declare soma\_parcial numérico;
- 3 soma\_parcial  $\leftarrow$  0;
- 4 para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça
- 5     soma\_parcial  $\leftarrow$  soma\_parcial +  $i*i*i$ ;
- 6     escreva(soma\_parcial);
- 7 Fim

$$\sum_{i=1}^n i^3$$

- 1 1 unidade para a declaração do parâmetro  $n$
- 2 1 unidade para a declaração da variável *soma\_parcial*
- 4 1 unidade para a declaração da variável  $i$

- **Custo total:** 3, ou seja, o algoritmo ocupa  $O(1)$  de espaço!
  - Também podemos dizer que a complexidade do algoritmo acima é  $\Theta(1)$ , já que não há distinção entre o pior e o melhor caso
- **Obs.:** na análise de complexidade de espaço geralmente é considerado apenas o espaço extra, ou seja, não é levado em consideração a entrada, exceto em funções recursivas



- Regras para o cálculo de espaço
  - Repetições: no exemplo abaixo, é contada apenas uma unidade para  $x$ , pois no final de cada passagem do laço, essa variável é descartada

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
    INTEIRO  $x = 1$ ;
```

- Contando com  $i$  e  $n$ , São necessárias 3 unidades de espaço para o fragmento de código acima
- A complexidade de espaço aqui é  $O(1)$  ou pode ser definida como  $\Theta(1)$ , já que não há distinções entre melhor e o pior caso para o uso de espaço

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o espaço nunca é maior do que o espaço do teste (então) mais o espaço do senão
    - Em outras palavras, a complexidade é comando que leva o maior tempo
  - O exemplo abaixo é  $O(n)$  no pior caso e  $\Omega(1)$  no melhor caso:  
se  $i < j$   
então *INTEIRO*  $v$ ;  
senão  
    *INTEIRO*  $v[n]$ ;



Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.  
*Algoritmos: teoria e prática.*  
Elsevier, 2012.



Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.  
*Computer Algorithms.*  
Computer Science Press, 1998.



Rosa, J. L. G.  
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à  
Ciência da Computação II.  
*Slides.* Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.



Ziviani, N.  
*Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.*  
Thomson, 2007.