

Pilha Estática

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE22CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

- Pilha
 - Exemplo
- Pilhas Estáticas
- TAD Pilhas Estáticas
- Expressões Matemáticas

- Lista

...	x_1	x_2	...	x_n	...
-----	-------	-------	-----	-------	-----

- Listas estáticas: alocação contígua na memória

Endereço na memória
Conteúdo na memória

	3000	3001	3003	3004	
...					...

- Tipos especiais de listas:
 - Fila
 - Pilha

Pilha

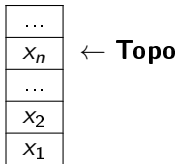
- É uma lista linear em que os elementos são inseridos e removidos em uma de suas extremidades
- *Last-in, first-out* (LIFO)
- A inserção de novos itens e a remoção é sempre no topo da estrutura



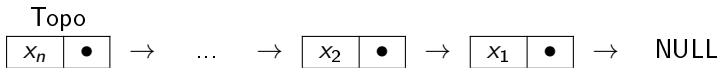
- Todas as operações em uma pilha podem ser imaginadas como as que ocorre, por exemplo, em uma pilha de pratos
- Aplicações
 - Avaliação de expressões numéricas
 - Processamento de linguagens
 - Mecanismo de fazer/desfazer em editores de texto
 - Mecanismo de avançar/retornar em páginas web
 - Execução de programas
 - Etc

- Principais operações em pilhas
 - Criar
 - Verificar se a pilha está cheia
 - Empilhar
 - Desempilhar
 - Verificar o item que está no topo
 - Liberar

- Representação
 - Alocação contígua (estática)



- Alocação encadeada



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

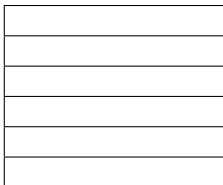
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: inicialmente vazia



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

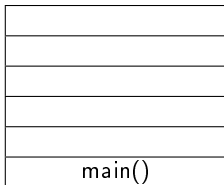
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *main* é chamada



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

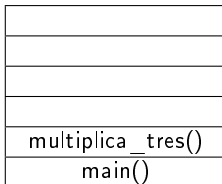
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *main* chama *multiplica_tres*



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *multiplica_tres* chama *multiplica_dois*

multiplica_dois()
multiplica_tres()
main()

Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *multiplica_dois* retorna o valor 20

20
multiplica_tres()
main()

Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

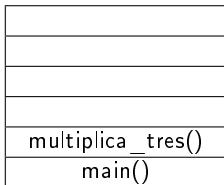
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *multiplica_dois* termina o seu trabalho e é desempilhada



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

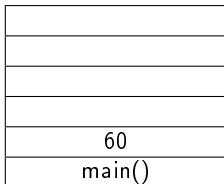
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *multiplica_tres* retorna 60



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

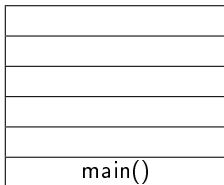
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: a função *multiplica_tres* termina o seu trabalho e é desempilhada



Pilha

Exemplo

```
# include <stdio.h>

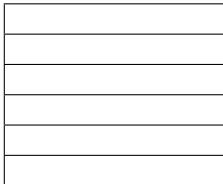
int multiplica_tres(int x, int y, int z){
    return multiplica_dois(x, y) * z;
}

int multiplica_dois(int a, int b){
    return a * b;
}

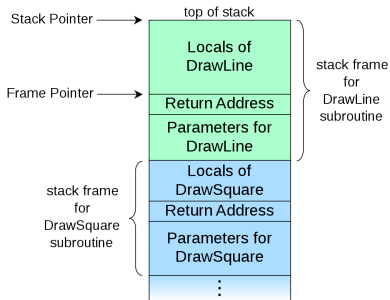
int main(){
    printf("%d * %d * %d = %d", 4, 5, 3, multiplica_tres(5, 4, 3));

    return 0;
}
```

- Pilha de execução: após a finalização do programa, a pilha encontra-se novamente vazia



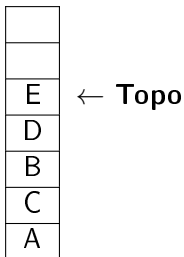
- No exemplo anterior, o processo de empilhar e de desempilhar foi apresentado de forma simplificada
- Na realidade, em cada chamada de função, um quadro com parâmetros da função, variáveis locais e endereço de retorno é empilhado



Pilhas Estáticas

Pilhas Estáticas

- Implementação semelhante ao da lista estática
 - Uso de vetores
- Há um cursor para controlar a posição do topo
 - Uma variável na *struct* da pilha pode ser usada para armazenar a posição do topo



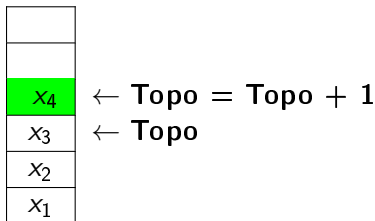
Pilhas Estáticas

- Criar a pilha
 - Gera e inicializa a pilha com um tamanho determinado
 - A variável topo é inicializada com -1 (pilha vazia)

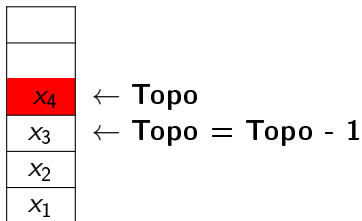


Topo = -1

- Empilhar (*push*)
 - Primeiramente, deve ser verificado se a pilha está cheia (*stack overflow*)
 - Ao empilhar o novo item, a variável *topo* é incrementada em 1



- Desempilhar (*pop*)
 - Primeiramente, deve ser verificado se a pilha já está vazia (*stack underflow*)
 - Ao desempilhar um item, a variável *topo* é decrementada em 1



- Exemplo de pilha estática vazia

	Topo = -1									
Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha										

- Empilhar 11

	Topo = 0									
Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha	11									

Pilhas Estáticas

- Empilhar 8

	Topo = 1									
Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha	11	8								

Pilhas Estáticas

- Empilhar 15

	Topo = 2									
Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha	11	8	15							

- Empilhar 16

	Topo = 3									
Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha	11	8	15	16						

- Desempilhar

Topo = 2

Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha	11	8	15	16						

- Empilhar 22

	Topo = 3									
Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pilha	11	8	15	22						

TAD Pilhas Estáticas

- Operações básicas para uma pilha
 - Criar uma pilha
 - Verificar se a pilha está vazia
 - Verificar se a pilha está cheia
 - Empilhar
 - Desempilhar
 - Imprimir pilha
 - Liberar a pilha

- Primeiro passo: definir arquivo .h

```
// Pilha.h
#define TAM_MAX 100 // tamanho máximo da pilha

typedef struct{
    int item[TAM_MAX];
    int topo;
}Pilha;

Pilha* criar_pilha();

int pilha_cheia(Pilha *p);

int pilha_vazia(Pilha *p);

int empilhar(Pilha *p, int key);

int desempilhar(Pilha *p);

void imprimir_pilha(Pilha *p);

void liberar(Pilha *p);
```

- Segundo passo: definir arquivo .c

```
#include "Pilha.h"

Pilha* criar_pilha(){
    Pilha *p = (Pilha *) malloc(sizeof(Pilha));

    p->topo = -1;

    return p;
}

int pilha_cheia(Pilha *p){
    if (p == NULL)
        return -1;
    else if (p->topo >= (TAM_MAX - 1))
        return 1;
    else
        return 0;
}
```

TAD Pilhas Estáticas

```
int pilha_vazia(Pilha *p){
    if (p == NULL)
        return -1;
    else if (p->topo < 0)
        return 1;
    else
        return 0;
}

int empilhar(Pilha *p, int key){
    if (!pilha_cheia(p)){
        p->topo++;
        p->item[p->topo] = key;

        return 1;
    }

    return 0;
}
```

TAD Pilhas Estáticas

```
int desempilhar(Pilha *p){
    int item = INT_MIN;
    if (!pilha_vazia(*p)){
        item = p->item[p->topo];
        p->topo--;
    }
    return item;
}

void imprimir_pilha(Pilha *p){
    Pilha aux = *p; // cópia da pilha

    while (!pilha_vazia(&aux)){
        item = desempilhar(&aux);
        printf("%d\n", item);
    }
}

void liberar(Pilha *p){
    if (!pilha_vazia(p));
    free(p);
}
```

- Exercício 1: aproveitando a TAD anterior, faça:
 - Altere a TAD de forma que os itens possam operar com caracteres
- Exercício 2: Utilizando uma pilha, escreva um método que receba um número inteiro positivo no formato decimal e converte este número para o formato binário.

Expressões Matemáticas

- Pilhas são muito usadas no processamento de linguagens
 - Compiladores
- Uma das aplicações é a conversão e avaliação de expressões algébricas/numéricas
 - Consistência de parênteses: verificar a existência de fechamento de parênteses para cada abertura
 - Notação infixa: o operador está entre operandos ($A + B$)
 - Notação pré-fixa (polonesa): o operador precede os operandos ($+AB$)
 - Notação pós-fixa (polonesa inversa): o operador procede os operandos ($AB+$)

- Consistência de parênteses
 - Recebe uma expressão algébrica com letras e símbolos
 - Durante o processamento da *string*, caso o caractere "(" seja lido, o mesmo é colocado na pilha
 - Caso o caractere ")" seja lido, é removido o item no topo da pilha
 - Os demais caracteres são ignorados
 - A função retorna 1 se a operação for bem-sucedida (pilha vazia) ou 0, caso contrário (pilha com item ou *underflow*)

- Consistência de parênteses
 - Exemplo para a string " $((a+b)-c)*(a)$ "

Posição na String	Caractere	Pilha	Operação
0	((Empilhar
1	(((Empilhar
2	a	((–
3	+	((–
4	b	((–
5)	(Desempilhar
6	-	(–
7	c	(–
8)		Desempilhar
9	((Empilhar
10	a	(–
11)		Desempilhar
Expressão consistente!			

- Notação infixa
 - Convencional
 - Pode ser necessário o uso de parênteses
 - $A + B * C$
 - $(A + B) * C$
 - $A + (B * C)$

- Notação pré-fixa (polonesa)
 - Operadores antes dos operandos
 - Determina os operadores e a respectiva ordem para o cálculo de uma expressão
 - Não há necessidade de uso de parênteses
 - Exemplos infixo \times pré-fixo
 - $A + B - C : - + ABC$
 - $(A + B) * C : * + ABC$
 - $A + B * C : + A * BC$
 - $A * B - C / D : - * AB / CD$

- Notação pós-fixa (polonesa reversa)
 - Operadores após os operandos
 - Utilizado em vários equipamentos eletrônicos: calculadoras e computadores
 - A ordem dos operandos na notação infixa e na notação polonesa (reversa ou não) é idêntica
 - Os operadores aparecem na ordem em que devem ser calculados
 - Exemplos infixo \times pós-fixo
 - $A + B - C : AB + C -$
 - $(A + B) * C : AB + C *$
 - $A + B * C : ABC * +$
 - $A * B - C / D : AB * CD / -$

- Processamento de expressões na notação pós-fixa
 - ① Cada operando é empilhado
 - ② Processamento de cada operador
 - ① Dois operandos são desempilhados
 - ② A operação é executada
 - ③ O resultado da operação é empilhado
 - ③ Retorne o resultado da operação

- Exemplo de processamento para a expressão $7 - (6 + 2)/4 + 3$
 - Notação pós-fixa: $762 + 4/ - 3 +$

Valor lido	Operação	Pilha
7	empilhar	7
6	empilhar	7, 6
2	empilhar	7, 6, 2
+	somar	7, 8
4	empilhar	7, 8, 4
/	dividir	7, 2
-	subtrair	5
3	empilhar	5, 3
+	somar	8
	resultado	8

- Conversão de infixa para pós-fixa
 - A expressão infixa deve ser percorrida da esquerda para a direita
 - Uma pilha é utilizada para armazenar operadores e os caracteres '(', '{' e '['
 - Operadores que possuem precedências iguais:
 - + e -
 - * e /
 - Os operadores * e / possuem maior precedência em relação aos + e -
 - O operador ^ (e.g. 2^3 , que significa "2 elevado a 3") possui maior precedência em relação aos operadores *, /, + e -

- Conversão de infixa para pós-fixa
 - 1 A expressão infixa deve ser percorrida da esquerda para a direita
 - 2 Se um operando é encontrado, o mesmo é colocado na saída (string que representa a expressão na notação pós-fixa)
 - 3 Se um operador é encontrado:
 - 1 Se a pilha de estiver vazia ou o operador possui maior precedência em relação ao topo da pilha (ou no topo estiver o caractere '(', '{' ou '['), empilhe-o
 - 2 Caso contrário, desempilhar todos os operadores com precedência maior ou igual do operador encontrado e colocá-los na saída. Após, o operador lido é empilhado
 - 4 Se '(', '{' ou '[' for encontrado, empilhe-o
 - 5 Se ')', '}' ou ']' for encontrado, desempilhe os elementos até chegar nos caracteres '(', '{' ou '[' e descarte-os
 - 6 Repita os passos anteriores (de 2 a 5) até toda a expressão ser percorrida
 - 7 Esvaziar a pilha, colocando os operadores na saída

Expressões Matemáticas

- Conversão de infixa para pós-fixa
 - Exemplo: $A - B * C + D$

Entrada	Pilha	Saída	Descrição
A		A	Impressão do operando A. A pilha permanece vazia.
-	-	A	O operador '-' é empilhado.
B	-	AB	O operando B é impresso. Não há alteração na pilha.
*	- *	AB	O operador "*" é empilhado, já que possui maior precedência em relação ao que estava no topo.
C	- *	ABC	O operando C é impresso.
+	+	ABC*-	O operador possui precedência menor ou igual ao que está no topo da pilha. Então, desempilhar "*" e "-", colocando-os na saída. Empilhar o caractere "+".
D	+	ABC*-D	O operando D é impresso.
		ABC*-D+	Como a expressão terminou de ser percorrida, a pilha deve ser esvaziada

- Conversão de infixa para pré-fixa
 - 1 Inverter a expressão infixa: '(' passa a ser ')' e ')' passa a ser '('
 - Exemplo 1: $a + b - c$ passa a ser $c - b + a$
 - Exemplo 2: $a + (b * c)$ passa a ser $(c * b) + a$
 - 2 Converter a expressão para notação pós-fixa
 - 3 Inverter a expressão pós-fixa

- Conversão de infixa para pré-fixa
 - Exemplo: $A - B * C + D$
 - 1 Inverter a expressão infixa: $D + C * B - A$
 - 2 Converter a expressão para notação pós-fixa "adaptada": $DCB*+A-$
 - 3 Inverter a expressão pós-fixa: $-A+*BCD$





- Adaptação de uma *struct* no TAD de pilha

```
typedef struct {  
    char key;  
}Item;  
  
typedef struct{  
    Item item[TAM_MAX];  
    int topo;  
}Pilha;
```

- ou

```
typedef struct{  
    char item[TAM_MAX];  
    int topo;  
}Pilha;
```

- Algumas funções também devem ser modificadas para suportar a pilha de caracteres

-  Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.
-  Pereira, S. L.
Estrutura de Dados e em C: uma abordagem didática.
Saraiva, 2016.
-  Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.
-  Tenenbaum, A.; Langsam, Y.
Estruturas de Dados usando C.
Pearson, 1995.



Ziviani, M.

Projetos de Algoritmos: com implementações em Pascal e C.
Thomson, 2004.