Recursão

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE42CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Recursão
- Exemplos de Problemas Recursivos
  - Torre de Hanói
  - Sequência de Fibonacci
- Simulando a Recursividade
- Exercícios

Introdução

- Na matemática, vários objetos são definidos através de um processo que os produz

- Exemplo: função fatorial
  - Dado um número positivo n, o seu respectivo fatorial é
    - $n! = 1$, se $n = 0$ ou $n = 1$
    - $n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 1$, se $n > 1$

Introdução

- Exemplo de um algoritmo para o cálculo do fatorial de n

```
int fatorial(int n){
   int i, f = 1;

   for (i = n; i > 1; i--)
     f *= i;

   return f;
}
```

- Esse algoritmo é iterativo

Introdução

- O algoritmo anterior pode ser traduzido para uma função que retorne $n!$ quando recebe n como parâmetro
  - $n! = 1$, se $n = 0$
  - $n! = n * (n-1)!$, se $n > 0$
- A função fatorial está definida em termos de si mesma
- Essa é uma definição recursiva do fatorial

Recursão

Recursão

- Recursão significa repetição
- Uma função recursiva é uma função chama a si própria
- Divisão conquista
- Exemplos de aplicação de recursão: árvores, grafos, ordenação, busca, etc

- Implementação recursiva da função fatorial

```
int fatorial(int n){
   if (n <= 1)
     return 1;
   else
     return n * fatorial(n - 1);
}
```

Recursão

- O critério de parada é uma preocupação (assim como em um comando repetitivo)

- A recursão pode ser infinita

Recursão

- Três regras para a recursão
  1. Saber quando parar (critério de parada)
     - Caso base
  2. Decidir como modificar o seu estado (ou entrada(s)) em direção ao caso base
  3. Analisar o problema de forma que possa ser dividido em subproblemas
     - Caso indutivo

Recursão

- Exemplo: função fatorial

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n <= 1 \text{ (caso base)} \\ n * (n-1)!, & \text{se } n > 1 \text{ (caso indutivo)} \end{cases}$$

```
int fatorial(int n){
   if (n <= 1)
     return 1;
   else
     return n * fatorial(n - 1);
}
```

  - Na função acima, é possível ver que o caso base é tomado quando $n \leq 1$
  - Caso $n > 1$, então não estaremos no caso base e o resultado será $n * (n - 1)$

Recursão

- exemplo

  fatorial(5)
  5 * fatorial(4)
  5 * 4 * fatorial(3)
  5 * 4 * 3 * fatorial(2)
  5 * 4 * 3 * 2 * fatorial(1)
  5 * 4 * 3 * 2 * 1
  5 * 4 * 3 * 2
  5 * 4 * 6
  5 * 24
  120

- Exemplo: somatório em vetor

```
int somatorio(int v[], int n){
   if (n < 1)
     return 0;
   else
     return v[n - 1] + somatorio(v, n - 1);
}
```

  - Caso base: $n < 1$
  - Caso indutivo: $n \geq 1$

- Exemplo: somatório em vetor (exemplo 2)

```
int somatorio_rec(int v[], int i, int m){
   if (i < m)
     return v[i] + somatorio_rec(v, i + 1, m);
   else
     return 0;
}

int somatorio(int v[], int m){
   return somatorio_rec(v, 0, m);
}
```

  - A *somatorio_ rec* é uma imitação explícita de um laço *for*
  - Caso base: quando o índice *i* atinge o tamanho do vetor
  - Caso indutivo: o índice i está dentro dos limites do vetor

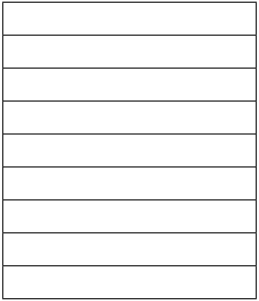
Recursão

- É importante enfatizar que uma função recursiva pode ter mais de um caso base e/ou indutivo
- Para cada chamada de uma função, recursiva ou não, os parâmetros e as variáveis locais são empilhados na pilha de execução
- Execução
  - Em qualquer chamada recursiva é criado um registro de ativação na pilha de execução
  - Na pilha são armazenados o endereço de retorno, os parâmetros, as variáveis locais da função
  - No final da execução, o registro é desempilhado e a execução volta ao subprograma que chamou
    - O processo é repetido até que a pilha esteja vazia ou até que a função recursiva seja completamente finalizada

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

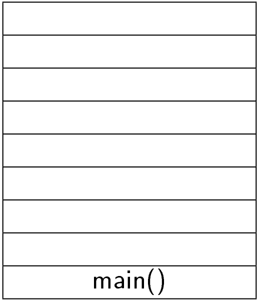
Pilha de Execução



Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

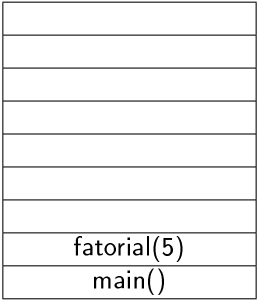
Pilha de Execução



Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução



Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(1)
fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

1
fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(2)
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

2
fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(3)
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

6
fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(4)
fatorial(5)
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

24
fatorial(5)
main()

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

fatorial(5)
main()

Recursão

```c
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
      return 1;
    else
      return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

Pilha de Execução

120
main()

Recursão

```
int fatorial(int n){
    if (n <= 1)
       return 1;
    else
       return n * fatorial(n - 1);
}

int main(){
    printf("Fatorial de %d:  %d\n", 5, fatorial(5));

    return 0;
}
```

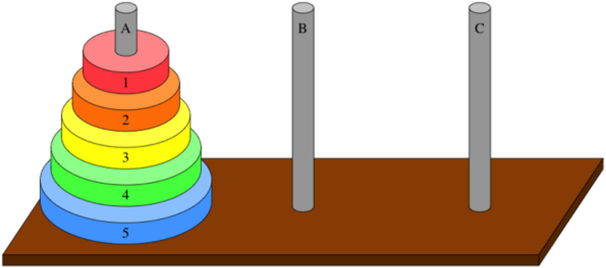
Pilha de Execução

main()

Recursão

- O desenvolvimento de uma solução recursiva nem sempre é fácil
- Normalmente, não há porque propor uma solução recursiva
- Entretanto, para alguns problemas a solução recursiva é mais elegante
- Há problemas que são recursivos já na sua definição
  - Para estes, a solução recursiva é mais natural

Exemplos de Problemas Recursivos



- Dado três torres (A, B e C) e n discos de diâmetros diferentes
- O disco de menor diâmetro sempre deve estar em cima do disco de maior diâmetro

- Inicialmente, todos discos deve estar na torre A
- Problema: como colocar todos os discos na torre C, utilizando a torre intermediária B, sem inverter a ordem dos diâmetros em nenhum torre?
- Se há solução para $n-1$ discos, então há solução para n discos
- No caso trivial de $n=1$, a solução é simples
- A solução para n discos é realizada em termos de $n-1$

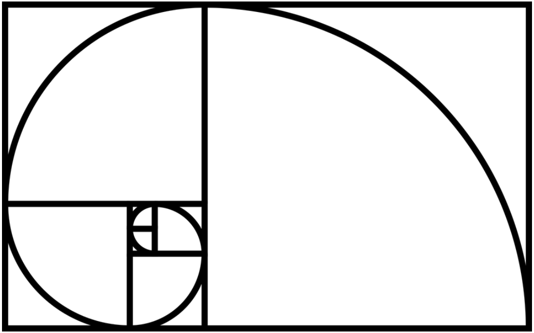
- Procedimento
  - Se $n = 1$, mover o disco da torre A para C
  - Mova os $n - 1$ discos de A para C, usando B como auxiliar
  - Mova o último disco de A para C
  - Mova os $n - 1$ discos de B para C, usando A como auxiliar

```
void hanoi(char de, char para, char via, int n){
   if (n >= 1)
     hanoi(de, via, para, n - 1);
     printf("disco %d de %c para %c\n", n, de, para);
     hanoi(via, para, de, n - 1);
   }
}
```

- Exemplo para $de = A$, $para = C$, $meio = B$ e $n = 5$

1. disco 1 de A para C
2. disco 2 de A para B
3. disco 1 de C para B
4. disco 3 de A para C
5. disco 1 de B para A
6. disco 2 de B para C
7. disco 1 de A para C
8. disco 4 de A para B
9. disco 1 de C para B
10. disco 2 de C para A
11. disco 1 de B para A
12. disco 3 de C para B
13. disco 1 de A para C
14. disco 2 de A para B
15. disco 1 de C para B
16. disco 5 de A para C
17. disco 1 de B para A
18. disco 2 de B para C
19. disco 1 de A para C
20. disco 3 de B para A
21. disco 1 de C para B
22. disco 2 de C para A
23. disco 1 de B para A
24. disco 4 de B para C
25. disco 1 de A para C
26. disco 2 de A para B
27. disco 1 de C para B
28. disco 3 de A para C
29. disco 1 de B para A
30. disco 2 de B para C
31. disco 1 de A para C

- Em uma sequência de Fibonacci, a partir de 0 e 1, cada número subsequente é correspondente à soma dos dois anteriores
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



- Presentes em configurações biológicas: caracol, desenrolar da samambaia
- Aplicação interessante: conversão de milhas para quilômetros
  - Exemplo: para converter 5 milhas, pode ser utilizado o número seguinte da sequência de Fibonacci (8 km)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

```
int fib(int n){
   if (n <= 0)
     return 0;
   else if (n == 1)
     return 1;
   else
     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
   }
}
```

- Exemplo para $n = 6$
  - fib(6) = fib(5) + fib(4)
  - = fib(4) + fib(3) + fib(4)
  - = fib(3) + fib(2) + fib(3) + fib(4)
  - = fib(2) + fib(1) + fib(2) + fib(3) + fib(4)
  - = fib(1) + fib(0) + fib(1) + fib(2) + fib(3) + fib(4)
  - = 1 + fib(0) + fib(1) + fib(2) + fib(3) + fib(4)
  - = 1 + 0 + fib(1) + fib(2) + fib(3) + fib(4)
  - = 1 + 1 + fib(2) + fib(3) + fib(4)
  - = 2 + fib(1) + fib(0) + fib(3) + fib(4)
  - = 2 + 1 + fib(0) + fib(3) + fib(4)
  - = 3 + 0 + fib(3) + fib(4)
  - = 3 + fib(2) + fib(1) + fib(4)
  - = 3 + fib(1) + fib(0) + fib(1) + fib(4)
  - = 3 + 1 + fib(0) + fib(1) + fib(4)
  - = 4 + 0 + fib(1) + fib(4)
  - = 4 + 1 + fib(4)

- Exemplo para $n = 6$
  - $= 4 + 1 + \text{fib}(4)$
  - $= 5 + \text{fib}(3) + \text{fib}(2)$
  - $= 5 + \text{fib}(2) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 5 + \text{fib}(1) + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 5 + 1 + \text{fib}(0) + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 6 + 0 + \text{fib}(1) + \text{fib}(2)$
  - $= 6 + 1 + \text{fib}(2)$
  - $7 + \text{fib}(1) + \text{fib}(0)$
  - $7 + 1 + \text{fib}(0)$
  - $8 + 0$
  - 8

Simulando a Recursividade

Simulando a Recursividade

- Todo problema com solução recursiva pode ser resolvido iterativamente
  - Para isso, deve ser examinado, detalhadamente, os mecanismos usados para implementar a recursividade para que seja possível simulá-los usando técnicas não-recursivas
- A solução recursiva é geralmente mais cara computacionalmente do que a não-recursiva
- A possibilidade de gerar uma solução não-recursiva a partir de um algoritmo recursivo é mais interessante em várias situações

Simulando a Recursividade

- Geralmente, uma versão não-recursiva (iterativa) de um programa executará com mais eficiência
- Na versão iterativa, o trabalho extra dispendido para entrar e sair de um bloco é evitado
- Em programa não-recursivo, muita atividade de empilhamento e desempilhamento pode ser evitada

Simulando a Recursividade

- Exemplo de quando não usar recursividade
  - Sequência de Fibonacci

```
int fib(int n){
   if (n <= 0)
     return 0;
   else if (n == 1)
     return 1;
   else
     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
   }
}
```

  - A versão recursiva é extremamente ineficiente, pois refaz os mesmos cálculos diversas vezes

- Deve-se evitar uso de recursividade quando existe solução óbvia por iteração

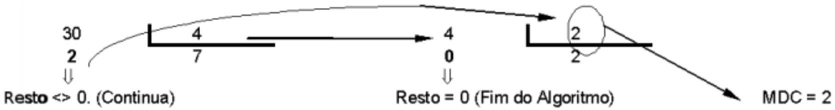
```
int fibonacci(int n){
   int i, fib1, fib2, fibN;

   if (n <= 0)
     return 0;
   else if (n == 1)
     return 1;
   else{
     fib1 = 0;
     fib2 = 1;
     fibN = 0;

     for (i = 2; i <= n; i++) {
      fibN = fib1 + fib2;
      fib1 = fib2;
      fib2 = fibN;
     }
     return fibN;
   }
}
```

- Comparação versões recursiva e iterativa

n	**10**	**20**	**30**	**50**	**100**
Recursiva	8 ms	1 s	2 min	21 dias	10^2
Iterativa	1/6 ms	1/3 ms	1/2 ms	3/4 ms	1,5 ms

Simulando a Recursividade

- Exercício: escreva uma função recursiva que calcule o MDC (máximo divisor comum) de 2 números a e b recebidos como parâmetros. Para o cálculo do MDC, deve-se usar o Algoritmo de Euclides. Ex: a = 30 e b = 4:



Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Rosa, J. L. G.
Recursão em C. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2008.

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.

Tenenbaum, A.; Langsam, Y.
Estruturas de Dados usando C.
Pearson, 1995.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.