

Complexidade de Algoritmos (parte 1)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

- Algoritmo
 - Definições de algoritmo
 - Análise de algoritmos
 - Eficiência de algoritmos
- Análise Assintótica
 - Conceitos matemáticos
 - Notações
- Taxas de Crescimento

- Por que estudar a complexidade de algoritmos?
 - Qual a diferença entre programa e algoritmo?

- Programa vs. Algoritmo

Programa	Algoritmo
Linguagem concreta (C, Java, Python)	Linguagem abstrata (pseudo-código)
Dependente de sistema operacional	Independente de sistema operacional
Dependente de hardware	Independente de hardware
Avaliação em tempo real (empírica)	Avaliação por estimativa (assintótica)

Algoritmo

Algoritmo

Definições de algoritmo

- Algoritmo é um conjunto de instruções que devem ser seguidas para solucionar um determinado problema
 - A palavra "algoritmo" vem do nome de um matemático persa (825 d.C.), Abu Ja'far Muhammad bin Musa al-Khwarizmi
- Computacionalmente, algoritmo é um procedimento computacional que:
 - Recebe valores de entrada (um conjunto de entradas é denominado como instância do problema)
 - Realiza uma sequência de tarefas em um modelo computacional
 - Produz valores como saída

Algoritmo

Definições de algoritmo

- Exemplo de problema: ordenação

Definição: um vetor $A[1...n]$ está ordenado de forma crescente se $A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[n]$

Problema: rearranjar o vetor $A[1...n]$ de forma que o mesmo contenha os seus elementos ordenados

Entrada:

1										n
33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77

Saída:

1										n
11	22	22	33	33	33	44	55	55	77	99

Algoritmo

Definições de algoritmo

- Um algoritmo é utilizado para resolver um problema computacional
- É desejável que um algoritmo termine e seja correto
- Algoritmo incorreto pode não parar para algumas entradas ou gerar respostas incorretas
- Além da necessidade do algoritmo ser correto, o mesmo deve ser eficiente para resolver um determinado problema

Algoritmo

Definições de algoritmo

- Exemplos de aplicações práticas de algoritmos eficientes:
 - Games
 - Filmes
 - Comércio eletrônico
 - Logística de distribuição

- Afinal, como mensurar a eficiência de um algoritmo?

- Após a implementação, é importante determinar os recursos necessários para a sua execução:
 - Tempo
 - Espaço
- Um algoritmo que soluciona um determinado problema, mas requer o processamento de um ano, não deve ser usado

- O que dizer de uma afirmação como a abaixo?
"Desenvolvi um novo algoritmo chamado TripleX que leva 14,2 segundos para processar 1.000 números, enquanto o método SimpleX leva 42,1 segundos."
- Você trocaria o SimpleX que roda em sua empresa pelo TripleX?

- A afirmação tem que ser examinada, pois há diversos fatores envolvidos:
 - Características da máquina
 - Linguagem de programação
 - Implementação pouco cuidadosa do algoritmo SimpleX vs. "super" implementação do algoritmo TripleX
 - Quantidade de dados processados: Se o TripleX é mais rápido para processar 1.000 números, ele também é mais rápido para processar quantidades maiores de números?

- A comunidade de computação começou a pesquisar formas de comparar algoritmos de forma independente de
 - Hardware
 - Sistema operacional
 - Linguagem de programação
 - Habilidade do programador
- É desejável a comparação de algoritmos e não programas
- Área: análise/complexidade de algoritmos
 - Comparação de algoritmos
 - Determinar se um algoritmo é ótimo

- Sabe-se que:
 - Processar 100.000 números leva mais tempo do que 10.000 números
 - Cadastrar 20 itens em um sistema de vendas leva mais tempo do que cadastrar 10
 - Etc
- Pode ser uma boa ideia estimar a eficiência de um algoritmo em função do tamanho do problema (número de elementos processados):
 - Geralmente, é assumido que n é o tamanho do problema
 - É calculado o número de operações realizadas sobre os n elementos

Algoritmo

Eficiência de Algoritmos

- O melhor algoritmo é aquele que requer menos operações sobre a entrada
- Que operações?
- Toda operação leva o mesmo tempo?

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX
 - TripleX: para uma entrada de tamanho n , o algoritmo realiza $n^2 + n$ operações:
 - $f(n) = n^2 + n$
 - SimpleX: para uma entrada de tamanho n , o algoritmo realiza $1.000n$ operações:
 - $g(n) = 1.000n$

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

Tamanho da Entrada	1	10	100	1.000	10.000
$f(n) = n^2 + n$					
$g(n) = 1.000n$					

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

Tamanho da Entrada	1	10	100	1.000	10.000
$f(n) = n^2 + n$	2	110	10.100	1.001.000	100.010.000
$g(n) = 1.000n$	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000

- partir de $n = 1.000$, $f(n)$ mantém-se maior e cada vez mais distante de $g(n)$
 - Diz-se que $f(n)$ cresce mais rápido do que $g(n)$

Análise Assintótica

- Devemos nos preocupar com a eficiência de algoritmos quando o tamanho de n for grande
- Definição: a eficiência assintótica de um algoritmo descreve a sua eficiência relativa quando n torna-se grande
- Comparação de algoritmos: o algoritmo com menor taxa de crescimento rodará mais rápido quando o tamanho do problema for grande
- Também se pode aplicar os conceitos de análise assintótica para a quantidade de memória usada por um algoritmo

- Expoentes:

- $x^a x^b = x^{a+b}$

- $x^a / x^b = x^{a-b}$

- $(x^a)^b = x^{ab}$

- $x^n + x^n = 2x^n$

- $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

- Logaritmos (usaremos a base 2, a menos que seja dito o contrário)
 - $x^a = b \Rightarrow \log_x b = a$
 - $\log_a b = \log_c b / \log_c a$, se $c > 0$
 - $\log ab = \log a + \log b$
 - $\log a/b = \log a - \log b$
 - $\log a^b = b \log a$

- Séries

- $\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

- $\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

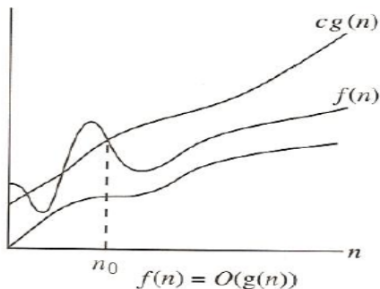
- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Notações de Knuth:
 - *Big-oh*: $O(n)$
 - Ômega: $\Omega(n)$
 - Teta: $\Theta(n)$

Análise Assintótica

Notações: big-oh

- Limite assintótico superior
- Dada duas funções, $f(n)$ e $g(n)$
 - Uma função $f(n)$ é da ordem de (*big-oh*) $g(n)$ ou função $f(n)$ é $O(g(n))$ se existirem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$



Análise Assintótica

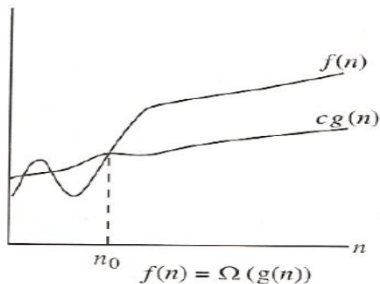
Notações: big-oh

- Exemplos:
 - Seja $f(n) = (n + 1)^2$. Logo, $f(n)$ é $O(n^2)$, quando $n_0 = 1$ e $c = 4$, pois $(n + 1)^2 \leq 4n^2$ para $n \geq n_0$
 - Seja $f(n) = 2n^3 + n^2 + 3n + 1$. Logo, para provar que $f(n)$ é $O(n^3)$, basta provar que $2n^3 + n^2 + 3n + 1 \leq 6n^3$ para $n \geq n_0$
- Notação O é a mais utilizada para a análise de complexidade de algoritmos
- Ao dizer que $f(n) = O(g(n))$, tem-se que $g(n)$ é o limite superior de $f(n)$
- Exemplo: algoritmo de ordenação *quicksort*
 - O pior cenário é quando o pivô é escolhido de forma que divisão do sub-arranjo fique desbalanceada e quando o arranjo já está ordenado: $O(n^2)$

Análise Assintótica

Notações: ômega

- Limite assintótico inferior
- Dada duas funções, $f(n)$ e $g(n)$
 - Uma função $f(n)$ é da ordem de ômega $g(n)$ ou função $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ se existirem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$



Análise Assintótica

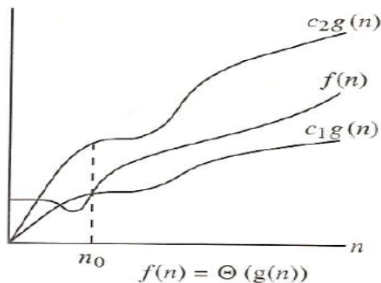
Notações: ômega

- Exemplo: para mostrar que $f(n) = 3n^3 + 2n^2$ é $\Omega(n^3)$, basta fazer $c = 1$ e $n_0 = 0$, e então $3n^3 + 2n^2 \geq n^3$ para todo $n \geq n_0$
- Ao dizer que $f(n) = \Omega(g(n))$, tem-se que $g(n)$ é o limite inferior de $f(n)$
- Exemplo: a quantidade mínima ("o melhor que pode fazer") de operações que o *quicksort* realiza é na ordem de $n \log n$
- Essa notação é pouca utilizada

Análise Assintótica

Notações: teta

- Limite assintótico firme
- Dada duas funções, $f(n)$ e $g(n)$
 - Uma função $f(n)$ é da ordem de teta $g(n)$ ou função $f(n)$ é $\theta(g(n))$ se existirem constantes positivas c_1 , c_2 e n_0 tais que $c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$ para todo $n \geq n_0$



Análise Assintótica

Notações: teta

- Exemplo: para mostrar que $f(n) = \frac{n^3}{3}$ é $\Theta(n^3)$, podemos fazer $c_1 = \frac{1}{6}$ e $c_2 = \frac{2}{3}$ para $n \geq 0$
- Quando $f(n) = \Theta(g(n))$, isso significa que $f(n)$ é $O(g(n))$ e $\Omega(g(n))$
- Exemplo: algoritmo de ordenação *heapsort*, onde o custo mínimo e máximo é $n \log n$, ou seja, $\Theta(n \log n)$

- O uso das notações permite comparar a taxa de crescimento das funções correspondentes aos algoritmos
- Exemplo: Para 2 algoritmos quaisquer, considere as funções de eficiência correspondentes $f(n) = 1.000n$ e $g(n) = n^2$
 - A primeira cresce mais rapidamente para valores pequenos de n
 - A segunda cresce mais rapidamente e finalmente será uma função maior, sendo que o ponto de mudança é $n = 1.000$
 - Em uma comparação entre ambas funções, podemos dizer que $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = \Omega(f(n))$

- Na análise de algoritmos, muitas vezes, apenas uma função referente à quantidade de instruções é obtida
 - Exemplo: para uma função que executa $2n^3 + 4n^2 + 3n + 5$ instruções em seu "pior cenário", dizemos que a sua complexidade é de $O(n^3)$

Não faz sentido comparar pontos isolados das funções, pois é n^3 que representa a gradeza da função

- O cálculo de instruções será abordado na próxima aula

Taxas de Crescimento

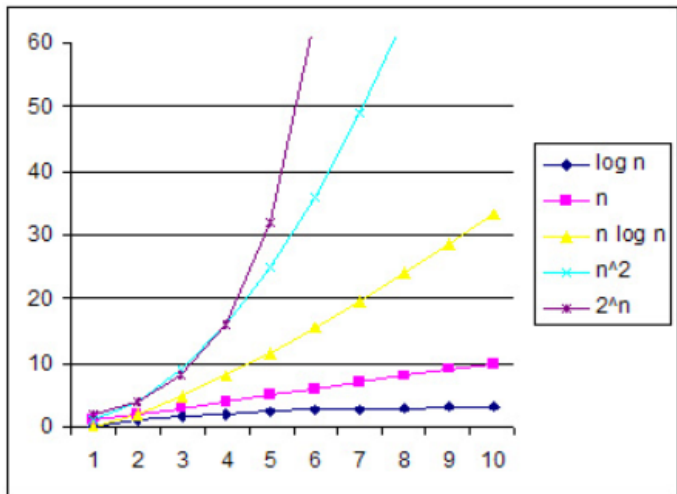
Taxas de Crescimento

- Funções e taxas de crescimento mais comuns:

c	constante
$\log n$	logarítmica
n	linear
$n \log n$	linear
n^2	quadrática
n^3	cúbica
2^n	exponencial
a^n	exponencial





Taxas de Crescimento

- Crescimentos de algumas funções



- Se a função $T(x)$ é um polinômio de grau n , então $T(x) = \Theta(x^n)$
- Comparação de funções para $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$
 - $T_1(n) + T_2(n) = \max(O(f(n)), O(g(n)))$
 - $T_1(n) * T_2(n) = O(f(n) * g(n))$
 - $f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Theta(f(n))$
 - $f(n) = O(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Omega(f(n))$

- Apesar de às vezes ser importante, não é comum incluir constantes ou termos de menor ordem em taxas de crescimento:
 - Queremos medir a taxa de crescimento da função, o que torna os "termos menores" irrelevantes
 - As constantes também dependem do tempo exato de cada operação
 - como ignoramos os custos reais das operações, ignoramos também as constantes
- Não se diz que $T(n) = O(10n^3)$ ou que $T(n) = O(10n^3 + 5n^2 + n)$
 - Diz-se apenas $T(n) = O(n^3)$

-  Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.
-  Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.
-  Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.
-  Ziviani, M.
Projetos de Algoritmos: com implementações em Pascal e C.
Thomson, 2004.