Introdução à Complexidade de Algoritmos

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE42CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Análise de algoritmos
- Cálculo do Tempo de Execução
- Notação O (*Big Oh*)
- Taxas de Crescimento

- Por que estudar a complexidade de algoritmos?
- Quais são as principais diferenças entre programa e algoritmo?

- Programa vs. Algoritmo

Programa	**Algoritmo**
Linguagem concreta (C, Java, Python)	Linguagem abstrata (pseudo-código)
Dependente de sistema operacional	Independente de sistema operacional
Dependente de hardware	Independente de hardware
Avaliação em tempo real (empírica)	Avaliação por estimativa (assintótica)

Sumário

Análise de algoritmos

- Após a implementação, é importante determinar os recursos necessários para a sua execução:
  - Tempo
  - Espaço
- Um algoritmo que soluciona um determinado problema, mas requer o processamento de um ano, não deve ser usado

- O que dizer de uma afirmação como a abaixo?

  "Foi desenvolvido um novo algoritmo chamado TripleX que leva 14,2 segundos para processar 1.000 números, enquanto o método SimpleX leva 42,1 segundos."

- Você trocaria o SimpleX que roda em sua empresa pelo TripleX?

- A afirmação tem que ser examinada, pois há diversos fatores envolvidos:
  - Características da máquina
  - Linguagem de programação
  - Implementação pouco cuidadosa do algoritmo SimpleX vs. "super" implementação do algoritmo TripleX
  - Quantidade de dados processados: Se o TripleX é mais rápido para processar 1.000 números, ele também é mais rápido para processar quantidades maiores de números?

Análise de algoritmos

- A comunidade de computação começou a pesquisar formas de comparar algoritmos de forma independente de
  - Hardware
  - Sistema operacional
  - Linguagem de programação
  - Habilidade do programador
- É desejável a comparação de algoritmos e não programas
- Área: análise/complexidade de algoritmos
  - Comparação de algoritmos
  - Determinar se um algoritmo é ótimo

Análise de algoritmos

- Sabe-se que:
  - Processar 100.000 números leva mais tempo do que 10.000 números
  - Cadastrar 20 itens em um sistema de vendas leva mais tempo do que cadastrar 10
  - Etc
- Pode ser uma boa ideia estimar a eficiência de um algoritmo em função do tamanho do problema (número de elementos processados):
  - Geralmente, é assumido que n é o tamanho do problema
  - É calculado o número de operações realizadas sobre os n elementos

Análise de algoritmos

- O melhor algoritmo é aquele que requer menos operações sobre a entrada
- Que operações?
- Toda operação leva o mesmo tempo?

Análise de algoritmos

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX
  - TripleX: para uma entrada de tamanho n, o algoritmo realiza $n^2 + n$ operações:
    - $f(n) = n^2 + n$
  - SimpleX: para uma entrada de tamanho n, o algoritmo realiza $1.000n$ operações:
    - $g(n) = 1.000n$

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

Tamanho da Entrada	**1**	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
$f(n) = n^2 + n$					
$g(n) = 1.000n$					

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

Tamanho da Entrada	**1**	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
$f(n) = n^2 + n$	2	110	10.100	**1.001.000**	**100.010.000**
$g(n) = 1.000n$	**1.000**	**10.000**	**100.000**	1.000.000	10.000.000

- partir de $n = 1.000$, $f(n)$ mantém-se maior e cada vez mais distante de $g(n)$
  - Diz-se que $f(n)$ cresce mais rápido do que $g(n)$

Cálculo do Tempo de Execução

Cálculo do Tempo de Execução

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores:
  - Empiricamente
  - Teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los: função da análise de algoritmos

Cálculo do Tempo de Execução

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa
- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um algoritmo são executadas sequencialmente

Cálculo do Tempo de Execução

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc
  - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada
  - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo
  - Operações complexas devem ser analisadas em partes

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições:

```
para i ← 0 até n faça
   x += 1;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições:
    - No exemplo abaixo são realizadas $3n + 2$ operações (uma unidade para iniciar i + n * (incremento na variável i + uma comparação + atribuição na variável x) + uma última comparação, que é o momento em que a variável i atinge o valor de n)
    - Por mais que o operador $+=$ seja equivalente a duas operações (uma atribuição e uma soma), o mesmo é contado como uma unidade

```
para i ← 0 até n faça
   x += 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:

```
se $i < j$
  então $i \leftarrow i + 1$
  senão para $k \leftarrow 0$ até $n$ faça
    $i \leftarrow i * k$;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste (então) mais o tempo do senão
    - No cálculo do tempo de execução, é considerado o comando que leva mais tempo
    - O exemplo abaixo pode executar até $4n + 3$ instruções

se $i < j$
  então $i \leftarrow i + 1$
  senão para $k \leftarrow 0$ até n faça
    $i \leftarrow i * k$;

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas

```
para i ← 0 até n faça
  para j ← 0 até n faça
    k ← k + 1;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas
    - A análise é feita de dentro para fora
    - Tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições

      para $i \leftarrow 0$ até n faça
        para $j \leftarrow 0$ até n faça
          $k \leftarrow k + 1$;

    - Nas duas últimas linhas do código acima (laço interno), são realizadas $4n + 2$ operações: uma atribuição para a variável j + n * (uma atualização de j + mais uma comparação entre i e n + uma atribuição na variável k + uma soma na variável k)
    - A operação acima é realizada n vezes, ou seja, o total de operações no fragmento de código acima é $n * (4n + 2 + 2) + 2 = 4n^2 + 4n + 2$

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Chamadas de sub-rotinas: uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

Cálculo do Tempo de Execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo, em C, para calcular o resultado de

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

1. int soma_parcial;
2. soma_parcial = 0;
3. for (i = 0; i < n; i++)
4.   soma_parcial = soma_parcial+i*i*i;
5. printf("\%d", soma_parcial);

Cálculo do Tempo de Execução

2 1 unidade de tempo

3 1 unidade para iniciação de i, $n+1$ unidades para testar se $i = n$ e n unidades para incrementar $i = 2n + 2$

5 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") $= 4n$ unidades

6 1 unidade para escrita

Outra forma para analisar as linhas 3–4: 1 unidade para inicialização de i + n vezes que a comparação no *loop* será verdadeiro * (1 comparação (i < n) + 1 atribuição + 1 soma + 2 multiplicações na linha 4 + 1 incremento em i (i++)) + 1 última comparação, onde o teste no laço *for* falha: 6n + 2

- **Custo total**: 1 (linha 2) + $6n + 2$ (linhas 3–4) + 1 (linha 5) $= 6n + 4$

Cálculo do Tempo de Execução

- Quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo?

```
int função1(int v[], int n){
  int i, j, aux = 0;
  i = 1;
  while (i <= n){
      aux += v[i - 1];
      i = i + 1;
  }
  for (i = 0; i < n; i++)
      for (j = 0; j < n; j++)
          v[i] += v[i] + i + j;
  return aux;
}
```

- **Resolução**:
  1. Linha 2: inicialização de *aux*: 1 operação
  2. Linha 3: inicialização de *i*: 1 operação
  3. Linhas 4–7: $5n + 1$
     - n * (1 comparação + 1 atribuição com soma (+=) em aux + 1 subtração (v[i - 1]) + 1 atribuição e 1 soma em i): $5n$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  4. Linhas 9–10 (*loop interno*): $5n + 2$
     - Inicialização de j: 1 operação
     - n * (1 comparação + 3 operações em A (1 atribuição e duas somas) + 1 incremento em j): $5n$ operações
     - Última comparação (quando $j > n$): 1 operação
  5. Linhas 8–10: $5n^2 + 4n + 2$
     - Inicialização de i: 1 operação
     - n * (1 comparação + $5n + 2$ (for interno) + 1 atribuição em i): $5n^2 + 4n$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  6. 1 operação para o retorno de aux
  7. Soma dos itens 1, 2, 3, 5 e 6:
     $1 + 1 + 5n + 2 + 5n^2 + 4n + 2 + 1 = 5n^2 + 9n + 7$

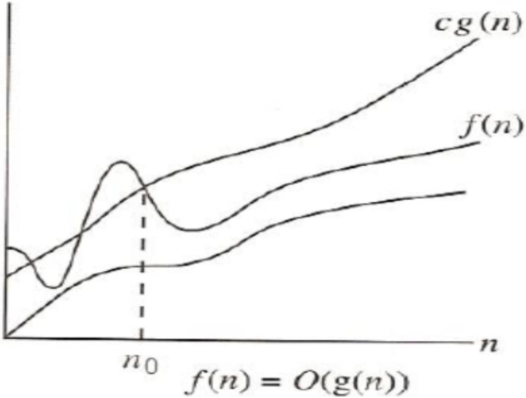
Notação O (*Big Oh*)

Notação O (*Big Oh*)

- Na análise de algoritmos, devemos nos preocupar com a eficiência quando o tamanho da entrada (n) for grande
- A comparação de algoritmos é feita por meio de análise assintótica
- Notação Big-Oh (O)

Notação O (*Big Oh*)

- Dada duas funções, $f(n)$ e $g(n)$
  - Uma função $f(n)$ é da ordem de (*big-oh*) $g(n)$ ou função $f(n)$ é $O(g(n))$ se existirem existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$



Notação O (*Big Oh*)

- Exemplos:
  - Seja $f(n) = (n+1)^2$. Logo, $f(n)$ é $O(n^2)$
  - Seja $f(n) = 2n^3 + n^2 + 3n$. Logo, $f(n)$ é $O(n^3)$

- Exemplos:
  - Seja $f(n) = (n+1)^2$. Logo, $f(n)$ é $O(n^2)$, quando $n_0 = 1$ e $c = 4$, pois $(n+1)^2 \leq 4n^2$ para $n \geq 1$
  - Seja $f(n) = 2n^3 + n^2 + 3n$. Logo, para provar que $f(n)$ é $O(n^3)$, basta provar que $2n^3 + n^2 + 3n \leq 6n^3$ para $n \geq 0$
- Notação O é a mais utilizada para a análise de complexidade de algoritmos
- Ao dizer que $f(n) = O(g(n))$, tem-se que $g(n)$ é o limite superior em comparação com $f(n)$

Notação O (*Big Oh*)

- Quando dizemos que um algoritmo possui um custo de $O(n^2)$, isso significa que, no pior caso, o algoritmo nunca terá um custo maior que n^2

- Se $T(x)$ é um polinômio de grau n, então $T(x) = O(x^n)$
  - Em uma expressão polinomial (*e.g.* $2n^3 + n^2 + n + 1$), o custo na notação *Big-Oh* sempre será denotada em função do maior expoente, sem considerar contantes

  - Uma função que realiza $2n^3 + n^2 + n + 1$ operações no pior caso tem a complexidade na ordem de $O(n^3)$

Notação O (*Big Oh*)

- Se $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$, então:
    - $T_1(n) + T_2(n) = max(O(f(n)), O(g(n)))$
    - $T_1(n) * T_2(n) = O(f(n) * g(n))$
- Se $T(n)$ for igual a um valor constante, então a sua complexidade é $O(1)$

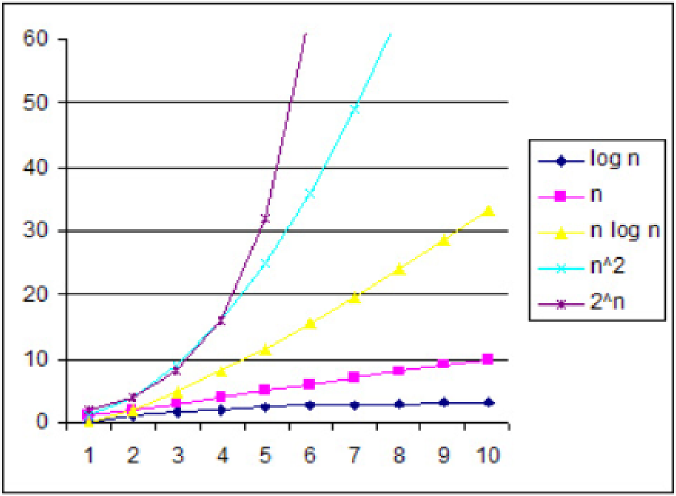
Taxas de Crescimento

Taxas de Crescimento

- Funções e taxas de crescimento mais comuns:

c	constante
$\log n$	logarítmica
n	linear
$n \log n$	linear
n^2	quadrática
n^3	cúbica
2^n	exponencial
a^n	exponencial

- Crescimentos de algumas funções



Referências I

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.

Marin, L. O.
Complexidade de Algoritmos – parte 2. AE23CP-3CP Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.

Marin, L. O.
Complexidade de Algoritmos – parte 1. AE23CP-3CP Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2018.

Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2008.

Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Referências III

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.

Apêndice: conceitos matemáticos úteis para a análise de complexidade de algoritmos

Conceitos matemáticos úteis para a análise de complexidade de algoritmos

- Expoentes:
  - $x^a x^b = x^{a+b}$
  - $x^a / x^b = x^{a-b}$
  - $(x^a)^b = x^{ab}$
  - $x^n + x^n = 2x^n$
  - $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

Conceitos matemáticos úteis para a análise de complexidade de algoritmos

- Logaritmos (usaremos a base 2, a menos que seja dito o contrário)
  - $x^a = b \Rightarrow \log_x b = a$
  - $\log_a b = \log_c b / \log_c a$, se $c > 0$
  - $\log ab = \log a + \log b$
  - $\log a/b = \log a - \log b$
  - $\log a^b = b \log a$

Conceitos matemáticos úteis para a análise de complexidade de algoritmos

- Séries
  - $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
  - $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$