Algoritmos de Ordenação (Parte 2)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE42CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

- Quicksort
- Heapsort
- Shell sort

Sumário

Quicksort

- Ordenação por troca

- O *quicksort* adota a estratégia de divisão e conquista

  - Divisão: particionar o arranjo $X[p...q]$ em dois sub-arranjos $X[p...r-1]$ e $X[r+1...q]$, tais que $X[p...r-1] \leq X[r] \leq X[r+1...q]$

  - Conquista: ordenar os dois sub-arranjos $X[p...r-1]$ e $X[r+1...q]$ por chamadas recursivas do *quicksort*

Quicksort

- Procedimento $quicksort(X, p, q)$
  1. definir o pivô r e as posições $i = p$ e $j = q$
  2. enquanto $i \leq j$, trocar de posição os elementos maiores (lado esquerdo do arranjo) com os itens menores (lado direito) que o pivô
  3. $quicksort(X, p, j)$
  4. $quicksort(X, i, q)$

Quicksort

- Implementação (quando o pivô fica entre as posições *esq* e *dir*)

```
void quicksort(int x[], int esq, int dir){
   int i = esq, j = dir, pivo = x[(i + j) / 2], aux;

   do{
      while (x[i] < pivo)
         i++;

      while (x[j] > pivo)
         j--;

      if (i <= j){
         aux = x[i];
         x[i] = x[j];
         x[j] = aux;
         i++;
         j--;
      }
   }while (i <= j);

   if (j > esq)
      quicksort(x, esq, j);

   if (i < dir)
      quicksort(x, i, dir);
}
```

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 0$, $dir = 7$ e $pivo = X[(0+7)/2] = X[3] = 37$, temos

i	j	pivo	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	
0	7	37	25	57	48	37	12	92	86	**33**	
1	7	37	25	**57**	48	37	12	92	86	**33**	Troca
1	7	37	25	33	48	37	12	92	86	57	Após troca
2	6	37	25	33	**48**	37	12	92	86	57	
2	5	37	25	33	**48**	37	12	92	86	57	
2	4	37	25	33	**48**	37	**12**	92	86	57	Troca
2	4	37	25	33	12	37	48	92	86	57	Após troca
3	3	37	25	33	12	37	48	92	86	57	
4	2	37	25	33	12	37	48	92	86	57	Novas partições

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j) => quicksort(x, 0, 2)
  - quicksort(v, i, dir) => quicksort(x, 4, 7)

- Exemplo (continuação: quicksort(x, 0, 2))
  - Para $esq = 0$, $dir = 2$ e $pivo = X[(0+2)/2] = X[1] = 33$, temos

i	j	pivo	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	
0	2	33	25	33	12	37	48	92	86	57	
1	2	33	25	33	12	37	48	92	86	57	Troca
1	2	33	25	12	33	37	48	92	86	57	Após Troca
2	1	33	25	12	33	37	48	92	86	57	Nova partição

- Após a execução, fazemos mais uma chamada recursiva (uma chamada não é realizada porque i é igual a dir)
  - quicksort(v, esq, j) => quicksort(x, 0, 1)

- Exemplo (continuação: quicksort(x, 4, 7)), supondo que quicksort(x, 0, 1) foi executada
  - Para $esq = 4$, $dir = 7$ e $pivo = X[(4+7)/2] = X[5] = 92$, temos

i	j	pivo	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	
4	7	92	12	25	33	37	48	92	86	**57**	
5	7	92	12	25	33	37	48	**92**	86	**57**	Troca
5	7	92	12	25	33	37	48	57	86	92	Após Troca
6	6	92	12	25	33	37	48	57	86	92	
7	5	92	12	25	33	37	48	57	86	92	Nova partição

- Após a execução, fazemos mais uma chamada recursiva (uma chamada não é realizada porque i é igual a dir)
  - quicksort(v, esq, j) => quicksort(x, 4, 5)

- Implementação (quando o pivô fica na posição *esq*)

```
void troca(int *a, int *b){
    int aux = *a;
    *a = *b;
    *b = aux;
}

int particionar(int v[], int esq, int dir){
    int pivo = v[esq], i = esq + 1, j = dir;
    while (i <= j){
      while ((v[i] <= pivo) && (i <= dir))
        i++;
      while ((v[j] > pivo) && (j >= esq))
        j--;
      if (i < j)
        troca(&v[i], &v[j]);
    }
    troca(&v[esq], &v[j]);
    return j;
}

void quicksort2(int v[], int esq, int dir){
    if (esq < dir){
      int j = particionar(v, esq, dir);
      quicksort2(v, esq, j - 1);
      quicksort2(v, j + 1, dir);
    }
}
```

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 0$, $dir = 7$ e $pivo = X[esq] = X[0] = 25$, temos

i	j	pivo	X[0]	X[1]	X[2]	X[3]	X[4]	X[5]	X[6]	X[7]	
-	-	-	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	7	25	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	6	25	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	5	25	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	4	25	25	57	48	37	12	92	86	33	troca
1	4	25	25	12	48	37	57	92	86	33	após troca
2	3	25	25	12	48	37	57	92	86	33	
2	2	25	25	12	48	37	57	92	86	33	
2	1	25	25	12	48	37	57	92	86	33	Parada do loop
2	1	25	25	12	48	37	57	92	86	33	troca
2	1	25	12	25	48	37	57	92	86	33	

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j - 1) => quicksort(x, 0, 0)
  - quicksort(v, j + 1, dir) => quicksort(x, 2, 7)

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 2$, $dir = 7$ e $pivo = X[esq] = X[2] = 8$, temos

i	j	pivo	X[0]	X[1]	X[2]	X[3]	X[4]	X[5]	X[6]	X[7]	
-	-	-	12	25	48	37	57	92	86	33	
3	7	48	12	25	48	37	57	92	86	33	
4	7	48	12	25	48	37	57	92	86	33	troca
4	7	48	12	25	48	37	33	92	86	57	após troca
5	7	48	12	25	48	37	33	92	86	57	
7	6	48	12	25	48	37	33	92	86	57	
7	5	48	12	25	48	37	33	92	86	57	
7	4	48	12	25	48	37	33	92	86	57	s/ troca (i>=j)
7	4	48	12	25	48	37	33	92	86	57	parada do loop
7	4	48	12	25	33	37	48	92	86	57	

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j - 1) => quicksort(x, 2, 3) // já ordenado
  - quicksort(v, j + 1, dir) => quicksort(x, 5, 7)

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 5$, $dir = 7$ e $pivo = X[esq] = X[5] = 92$, temos

i	j	pivo	X[0]	X[1]	X[2]	X[3]	X[4]	X[5]	X[6]	X[7]	
-	-	-	12	25	33	37	48	92	86	57	
6	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	
7	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	
8	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	s/ troca (i>=j)
8	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	parada do loop
8	7	92	12	25	33	37	48	57	86	92	

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j - 1) => quicksort(x, 5, 3) // (i > j)
  - quicksort(v, j + 1, dir) => quicksort(x, 5, 5)

Quicksort

- No melhor caso e caso médio, o algoritmo tem custo de tempo de $O(n \log_2 n)$
- Dependendo da forma em que o pivô é escolhido e da forma que o arranjo está organizado, o custo pode ser de $O(n^2)$ (pior caso)
- O método não é estável

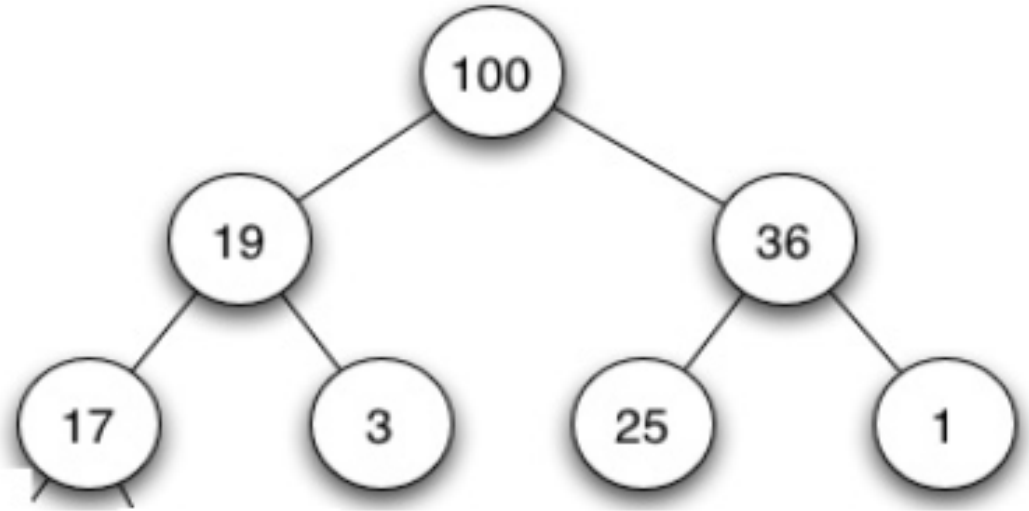
Quicksort

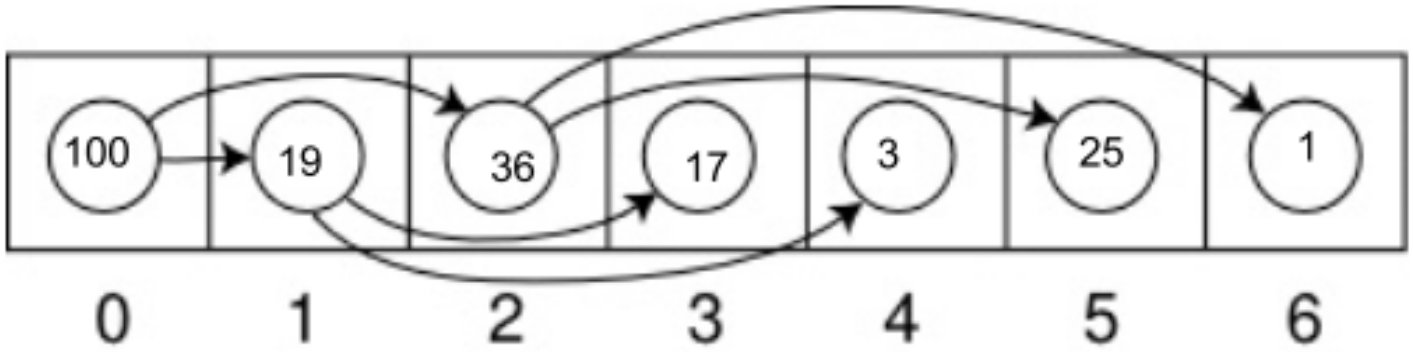
- Links interessantes:
  - Dança húngara:
    `https://www.youtube.com/watch?v=ywWBy6J5gz8`
  - Simulador gráfico do *quicksort*:
    `https://visualgo.net/bn/sorting`

Heapsort

- Ordenação por seleção
- Baseado no princípio de ordenação por seleção em árvore binária
- O método consiste em duas fases distintas:
  1. Montagem da árvore binária (HEAP)
  2. Seleção dos elementos na ordem desejada

Heapsort





- Em uma *heap*
  - O sucessor à esquerda do elemento de índice i é o elemento de índice $2 * (i + 1) - 1$, se $2 * (i + 1) - 1 < n$, caso contrário não existe
  - O sucessor à direita do elemento de índice i é o elemento de índice $2 * (i + 1)$, se $2 * (i + 1) < n$, caso contrário não existe

Heapsort

- Código para rearranjar um vetor para que o mesmo atenda a condição para ser uma *heap*

```
void gerarHeap(int v[], int n){
   int esq = n / 2;

   while (esq >= 0){
     refazer(v, esq, n - 1);
     esq--;
   }
}
```

- Código para rearranjar um vetor para que o mesmo atenda a condição para ser uma *heap* (continuação)

```
void refazer(int v[], int esq, int dir){
   int j = (esq + 1) * 2 - 1;
   int x = v[esq];

   while (j <= dir){
     if ((j < dir) && (v[j] < v[j + 1]))
        j++;

     if (x >= v[j])
        break;

     v[esq] = v[j];
     esq = j;
     j = (esq + 1) * 2 - 1;
   }

   v[esq] = x;
}
```

- Função principal

```
void heapsort(int v[], int n){
   int x;
   int dir = n - 1;

   gerarHeap(v, n);

   while (dir > 1){
     x = v[0];
     v[0] = v[dir];
     v[dir] = x;
     dir--;
     refazer(v, 0, dir);
   }
}
```

- Exemplo

iteração	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
fazheap: i=3	25	57	48	37	12	92	86	33
fazheap: i=2	25	57	92	37	12	48	86	33
fazheap: i=1	25	57	92	37	12	48	86	33
fazheap: i=0	92	57	86	37	12	48	25	33
heapsort: i=7	86	57	48	37	12	33	25	92
heapsort: i=6	57	37	48	25	12	33	86	92
heapsort: i=5	48	37	33	25	12	57	86	92
heapsort: i=4	37	25	33	12	48	57	86	92
heapsort: i=3	33	25	12	37	48	57	86	92
heapsort: i=2	25	12	33	37	48	57	86	92
heapsort: i=1	12	25	33	37	48	57	86	92

Heapsort

- À primeira vista, parece que o *heap sort* não apresenta bons resultados
- Não é um algoritmo de ordenação estável
- O algoritmo não é recomendado para pequenos conjuntos de elementos
- Custo de tempo (melhor, médio e pior caso): $O(n \log_2(n))$

Heapsort

- Exercício: aplicar o *heap sort* em um arranjo de 10 elementos:
  - Organizado em ordem crescente
  - Organizado em ordem decrescente

- Links interessantes:
  - Dança húngara: `https://www.youtube.com/watch?v=Xw2D9aJRBY4&list=RDCMUCIqiLefbVHsOAXDAxQJH7Xw&index=10`
  - Simulador gráfico do *heap sort*: `https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/HeapSort.html`

Shell sort

Shell sort

- Extensão da ordenação por inserção (*insertion sort*)
  - Caso o menor item estiver na última posição, serão necessárias $n - 1$ movimentações para colocá-lo em sua devida posição
  - No seguinte exemplo, devem ser realizadas, no total, 10 movimentações, sendo que, apenas os itens 7, 1 e 4 estão fora de suas posições: $\{7, 2, 3, 1, 5, 6, 4\}$
- *Shell sort* contorna o principal problema do *insertion sort* possibilitando troca de registros que estão distantes um do outro
  - Por exemplo, em vez de comparar uma chave com todos os outros elementos em uma única passagem (*e.g.*, o maior elemento está na primeira posição do vetor), inicialmente é considerado um passo maior: ao invés do passo ser de "um em um" $(j + 1)$, é considerado um incremento maior $(j + h)$
  - o valor de h é chamado de incremento

Shell sort

- *Shell sort* consiste em classificar sub-arranjos do original
  - Por exemplo, se h é 5, o sub-arranjo consiste dos elementos $x[0]$, $x[5]$, $x[10]$, etc
    - Sub-arranjo 1: $x[0]$, $x[5]$, $x[10]$
    - Sub-arranjo 2: $x[1]$, $x[6]$, $x[11]$
    - Sub-arranjo 3: $x[2]$, $x[7]$, $x[12]$
    - Sub-arranjo 4: $x[3]$, $x[8]$, $x[13]$
- Esses sub-arranjos contêm todo h-ésimo elemento do arranjo original e são ordenados da mesma forma que na ordenação por inserção

Shell sort

- Após a ordenação dos sub-arranjos:
  - Define-se um novo incremento menor que o anterior
  - Gera-se novos sub-arquivos
  - Aplica-se novamente o método da inserção
- O processo é realizado repetidamente até que h seja igual a 1
- O valor de h pode ser definido de várias formas
  - $h(s) = 3h(s-1) + 1$, para $s > 1$
  - $h(s) = 1$, para $s = 1$
- Nessa recorrência, s é o tamanho do conjunto

Shell sort

- Implementação

```
void shellsort(int v[], int n){
    int h = 1;
    int x, i, j;

    while (h < n)
       h = 3 * h + 1;

    h /= 3;

    while (h >= 1){
       for (i = h; i < n; i++){
          x = v[i];
          j = i;

          while ((j >= h) && (x < v[j - h])){
              v[j] = v[j - h];

              j -= h;
          }

          v[j] = x;
       }

       h /= 3;
    }
}
```

- Exemplo

x	h	i	v[0]	v[1]	v[2]	v[3]	v[4]	v[5]	v[6]	v[7]
-	-	-	25	57	48	37	12	92	86	33
12	4	4	**25**	57	48	37	**12**	92	86	33
92	4	5	12	**57**	48	37	25	**92**	86	33
86	4	6	12	57	**48**	37	25	92	**86**	33
33	4	7	12	57	48	**37**	25	92	86	**33**
33	4	8	12	57	48	33	25	92	86	37
57	1	1	**12**	**57**	48	33	25	92	86	37
48	1	2	**12**	**57**	**48**	33	25	92	86	37
33	1	3	**12**	**48**	**57**	**33**	25	92	86	37
25	1	4	**12**	**33**	**48**	**57**	**25**	92	86	37
92	1	5	**12**	**25**	**33**	**48**	**57**	**92**	86	37
86	1	6	**12**	**25**	**33**	**48**	**57**	**92**	**86**	37
37	1	7	12	25	33	48	57	86	92	**37**
37	1	8	12	25	33	37	48	57	86	92

- Quando $h = 1$, o comportamento é o mesmo em comparação com o *insertion sort*

Shell sort

- Estima-se que a complexidade do *Shell sort* é entre $O(n^{1,25})$ e $O(n^2)$
- Tempo de execução sensível à ordem dos dados
- Uma dificuldade do *shell sort* é a escolha dos incrementos que fornece os melhores resultados
- A razão pela qual esse algoritmo é eficiente ainda é desconhecida
- Ótima opção para arquivos de tamanho moderado
- Não estável

Shell sort

- Links interessante:
  `https://www.youtube.com/watch?v=CmPA7zE8mx0`

Referências I


Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.


Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.


Rosa, J. L. G.
Métodos de Ordenação. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2018.


Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.