

Notas de Aula 15 - Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP) – Tabela Hash (parte 2)  
Prof. Jefferson T. Oliva

Hoje veremos tipos de hashing e formas de tratamento de colisões.

## Tipos de Hashing

Estático

- Espaço de endereçamento não muda
- **Fechado:** Permite armazenar um conjunto de informações de tamanho limitado  
→ Tratamento de colisões: overflow progressivo ou segunda função hash
- **Aberto:** Permite armazenar um conjunto de informações de tamanho potencialmente ilimitado  
→ Tratamento de colisões: encadeamento de elementos

Hashing dinâmico

- Espaço de endereçamento pode aumentar
- Hashing extensível
- Pode aumentar se houver colisões

## Tratamento de Colisões

Uma função hashing pode gerar a mesma posição para chaves diferentes. Essa situação é chamada de colisão.

Suponha que utilizamos o resto de divisão para definirmos posições em uma tabela de tamanho 50

- Se inserirmos as chaves 12 e 62, ocorrerá colisão,  
→  $12 \% 50 = 12$   
→  $62 \% 50 = 12$

Qualquer função hashing pode acarretar em colisões.

Em uma tabela hash deve haver uma forma para tratar colisões.

Desse modo, a estrutura da tabela hash é formada em duas partes:

- Função hashing
- Tratamento de colisões

As estratégias para tratamento de colisões são aplicadas de acordo com o tipo de hashing: estático ou dinâmico

## Hashing estático

Hashing fechado: aplicação de técnicas de rehash para lidar com colisões

- Overflow progressivo
- Sondagem quadrática
- Segunda função hash

Técnica rehash

- Se posição  $h(k)$  está ocupada, aplicar função de rehash sobre  $h(k)$ , que deve retornar o próximo bucket livre:  $rh(h(k))$ .
- Uma boa função rehash cobre o máximo de índices entre 0 e o tamanho da tabela - 1 e evita agrupamento de dados.
- Além do índice resultante de  $h(k)$ , na rehash também pode ser utilizada a própria chave  $k$  e outras funções hash.

Overflow progressivo

- Também conhecido como sondagem linear.
- Caso a função hash ( $h(k)$ ) resulte em uma posição ocupada, tentar a próxima posição:  $rh(h(k)) = (h(k) + i) \% B$ , sendo  $i$  variando de 1 a  $B - 1$  e  $B$  (buckets) é o tamanho da tabela.
- Na primeira tentativa:  $i = 1$
- A variável  $i$  é incrementada até que seja encontrada uma posição vazia ou todas as opções sejam esgotadas

Exemplo com string:

- Seja  $B$  um arranjo de 13 elementos:
  - $LOWEL = 76\ 79\ 87\ 69\ 76$ ,
  - $L + O + W + E + L = 387$ ,
  - $h(LOWEL) = 387 \% 13 = 10$ .

**ver slides de 11 a 13 (P = 80; O = 79; T = 84; E = 69; R = 82; L = 76; N = 78; I = 73)**

$POTTER \% 13 = (80 + 79 + 84 + 84 + 69 + 82) \% 12 = 478 \% 13 = 10$

$LeNIN \% 13 = (76 + 101 + 78 + 73 + 78) \% 12 = 406 \% 13 = 10$

Overflow progressivo

- Vantagem: simplicidade
- Desvantagens: agrupamento de dados (causado por colisões); com a tabela cheia, a busca fica lenta, dificulta as inserções e remoções.

Sondagem quadrática

- Também conhecida como espalhamento quadrático, tentativa quadrática ou *rehash* quadrático
- Utiliza uma equação de segundo grau para calcular *rehash*:  $rh(h(k)) = (h(k) + c1 * i + c2 * i * i) \% B$ , onde  $c1$  e  $c2$  são constantes diferentes de 0, e  $i$  varia de 1 a  $B - 1$
- Pode ter um desempenho melhor do que a sondagem linear, mas  $c1$ ,  $c2$  e  $B$  são limitados
- Evita o agrupamento primário (causado pela sondagem linear), mas pode acarretar em agrupamento secundário (quadrático). Exemplo: se duas ou mais chaves possuem o mesmo endereço na aplicação da função `\textit{hash}`, então as sequências de sondagem serão iguais

### Sondagem quadrática:

Exemplo para  $B = 41$ ,  $c_1 = 0,5$ ,  $c_2 = 0,5$  e  $h(k) = 5$ , então temos:

- Para  $i = 1$ :  $rh(k, i) = (5 + 0,5 * 1 + 0,5 * 1^2) \% 41 = 6$
- Para  $i = 2$ :  $rh(k, i) = (5 + 0,5 * 2 + 0,5 * 2^2) \% 41 = 8$
- Para  $i = 3$ :  $rh(k, i) = (5 + 0,5 * 3 + 0,5 * 3^2) \% 41 = 11$
- Para  $i = 4$ :  $rh(k, i) = (5 + 0,5 * 4 + 0,5 * 4^2) \% 41 = 15$
- Para  $i = 5$ :  $rh(k, i) = (5 + 0,5 * 5 + 0,5 * 5^2) \% 41 = 20$
- Para  $i = 6$ : ?

- Principal vantagem: evita o agrupamento primário causado pela sondagem linear
- Principal desvantagem: ainda pode gerar agrupamento (mesmo que seja de forma secundária)

### Segunda função hash

- Também conhecida como hash duplo
- Utiliza duas funções como auxiliares
  - $h1(k)$ : função hash primária
  - $h2(k)$ : função hash secundária
- Algumas boas funções auxiliares
  - $h1(k) = k \% B$
  - $h2(k) = 1 + k \% (B - 1)$
- Função rehash:  $rh(k, i) = (h1(k) + i * h2(k)) \% B$

Exemplo para  $B = 41$ ,  $h1(k) = 5$  e  $h2(k) = 6$ , então temos:

- Para  $i = 1$ :  $rh(k, i) = (5 + 6 * 1) \% 41 = 11$
- Para  $i = 2$ :  $rh(k, i) = (5 + 6 * 2) \% 41 = 17$
- Para  $i = 3$ :  $rh(k, i) = (5 + 6 * 3) \% 41 = 23$
- Para  $i = 4$ :  $rh(k, i) = (5 + 6 * 4) \% 41 = 29$
- Para  $i = 5$ :  $rh(k, i) = (5 + 6 * 5) \% 41 = 35$
- Para  $i = 6$ : ?

- Vantagem: geralmente evita agrupamento de dados
- Desvantagens: difícil achar funções hash que, ao mesmo tempo, satisfaçam os critérios de cobrir o máximo de índices da tabela e evitem agrupamento de dados; operações de buscas, inserções e remoções são mais difíceis.

### Hashing aberto

- A tabela de buckets, indo de 0 a  $B - 1$ , contém apenas ponteiros para uma lista de elementos
- Quando há colisão, o item é inserido no bucket como um novo nó da lista
- Se as listas estiverem ordenadas, reduz-se o tempo de busca
- **ver slides 21 e 22.**
- Principal vantagem
  - A tabela pode receber mais itens mesmo quando um bucket já foi ocupado
- Desvantagens:
  - Quantidade de endereços não pode ser aumentado
  - Espaço extra para as listas
  - Listas longas pode implicar em muito tempo gasto na busca

### Eficiência

- Hashing fechado
  - Depende da técnica de rehash
  - A tabela pode ficar cheia
  - Pode haver mais espaço para a tabela, pois não são necessários ponteiros e campos extras como no hashing aberto
- Hashing aberto: depende do tamanho das listas e da função hash

### Hashing dinâmico

O tamanho do espaço de endereçamento (número de buckets) pode aumentar

#### Exemplo de hashing dinâmico:

- Hashing extensível (**slide 25**): conforme os elementos são inserido na tabela, o tamanho aumenta se necessário

#### Hashing extensível

- Em geral, trabalha-se com bits
- Após  $h(k)$  ser computada, uma segunda função  $f$  transforma o índice  $h(k)$  em uma sequência de bits
- Alternativamente,  $h$  e  $f$  podem ser unificadas como uma única função hash final
- Função hash computa sequência de  $m$  bits para uma chave  $k$ , mas apenas os  $i$  primeiros bits ( $i \leq m$ ) do início da sequência são usados como endereço
  - Se  $i$  é o número de bits usados, a tabela de buckets terá  $2^i$  entradas
  - Portanto, tamanho da tabela de buckets cresce sempre com potência de 2 (aumenta a quantidade de bits em uma unidade)
- $N$  é o número de nós permitidos por bucket
- Tratamento de colisões: geralmente por listas encadeadas
- Exemplo (**ver slide 27**): tabela inicialmente vazia,  $m = 4$  (bits) e ( $N = 2$ )

**Ver slides 27-31.**

### Hashing dinâmico

- Vantagens: custo de acesso constante, determinado pelo tamanho de N; a tabela pode crescer;
- Desvantagens: complexidade extra para gerenciar o aumento do arranjo e a divisão das listas; podem existir sequências de inserções que façam a tabela crescer rapidamente, tendo, contudo, um número pequeno de registros

Principal desvantagem de hashing: Os elementos da tabela não são armazenados sequencialmente e nem sequer existe um método prático para percorrê-los em sequência.

### Implementações:

```
static int overflowProgressivo(int hashCode, int B, tentativa){  
    return (hashCode + tentativa) % B;  
}
```

// Antes

```
int buscar(int key, HashT *t){  
    int x = hashingF(key, t->tam);  
    if (t->buckets[x] == key)  
        return x;  
    return -1;  
}
```

// Depois

```
int buscar(int key, HashT *t){  
    int x = hashingF(key, t->tam);  
    int i, rh;  
    if (t->buckets[x] == key)  
        return x;  
    else if (t->buckets[x] >= 0){  
        i = 1;  
        rh = x;  
        while ((i < t->tam) && (t->buckets[rh] != key) && (t->buckets[rh] > -1)){  
            rh = overflowProgressivo(x, i, t->tam); //(x + i) % t->tam;  
            i++;  
        }  
        if ((i < t->tam) && (t->buckets[rh] == key))  
            return rh;  
    }  
    return -1;  
}
```

// Antes

```
int inserir(int key, HashT *t){  
    int x;  
    if (t != NULL){  
        x = hashingF(key, t->tam);  
        if (t->buckets[x] < 0){  
            t->buckets[x] = key;  
            return 1;  
        }  
    }  
    return 0;  
}
```

```
// Depois
int inserir(int key, HashT *t){
    int x;
    int i, rh;
    if ((t != NULL) && (key > 0)){
        x = hashingF(key, t->tam);
        if (t->buckets[x] < 0){
            t->buckets[x] = key;
            return 1;
        }else{
            i = 1;
            rh = x;
            while ((i < t->tam) && (t->buckets[rh] >= 0)){
                rh = overflowProgressivo(x, i, t->tam); //(x + i) % t->tam;
                i++;
            }
            if ((i < t->tam) && (t->buckets[rh] <= 0)){
                t->buckets[x] = key;
                return 1;
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

```
//Antes
int remover(int key, HashT *t){
    int x;
    if (t != NULL){
        x = hashingF(key, t->tam);
        if (t->buckets[x] == key){
            t->buckets[x] = -1;
            return 1;
        }
    }
    return 0;
}
```

```
//Depois
int remover(int key, HashT *t){
    int x;
    if (t != NULL){
        x = buscar(key, t->tam);
        if (t->buckets[x] == key){
            t->buckets[x] = 0;
            return 1;
        }
    }
    return 0;
}
```

## Referências

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. Third edition, The MIT Press, 2009.

Madalosso, E. Hashing Universal. AE22CP - Algoritmos e Estrutura de Dados I. Notas de Aula. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2019.

Oliva, E. Tratamento de Colisões. AE22CP - Algoritmos e Estrutura de Dados I. Notas de Aula. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2020.

Rosa, J. L. G. Métodos de Busca. SCE-181 - Introdução à Ciência da Computação II. Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2018.

Ziviani, N. Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++. Thomson, 2007.