

Notas de Aula - AED2 – Árvores: árvores B
Prof. Jefferson T. Oliva

Até o momento vocês viram métodos e estruturas para busca em memória primária, como: busca sequencial, busca binária, busca por interpolação, hashing, árvores binárias de busca, árvores AVL, árvores rubro-negras.

Hoje veremos uma estrutura de busca aplicada em memória secundária que pode ser utilizada em memória primária: árvores B

Árvores B

São árvores de pesquisa balanceadas projetadas para funcionar bem em discos magnéticos outros dispositivos de armazenamento secundário.

Essa estrutura possui diversas aplicações, como:

- Sistema de arquivos NTFS do Windows.
- Sistema de arquivos HFS do Mac.
- Sistema de arquivos ext4 do Linux.
- Bancos de dados, por exemplo, ORACLE, SQL e PostgreSQL.

Um nó em uma árvore B é também chamado de página: isso significa que um nó pode ter mais um elemento.

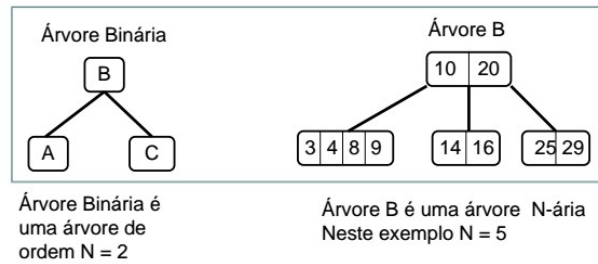
Ordem de uma árvore B:

- No livro de Cormen: número mínimo de filhos que uma árvore pode ter
- No livro de Knuth: número máximo de nós filhos.

Nessa disciplina, consideraremos a definição de Knuth, para mantermos a coerência com as árvores binárias (cada nó pode ter até 2 subárvores) apresentadas até agora.

Uma árvore B de ordem N é uma árvore de busca multidirecional balanceada que satisfaz as seguintes condições

- todo nó possui N ou menos subárvores.
- todo nó, exceto o raiz e as folhas, possui no mínimo $N / 2$ subárvores (maior inteiro) e no máximo, N.
- o nó raiz possui no mínimo duas subárvores não vazias e, no máximo, N subárvores. Assim, a raiz possui no mínimo um elemento e no máximo $N - 1$ elementos.
- **todas as folhas estão no mesmo nível**
- **um nó não folha com k subárvores armazena k - 1 registros**
- **um nó folha armazena no máximo N - 1 e no mínimo $\text{ceil}(N / 2) - 1$ registros. A raiz possui, no mínimo, um elemento.**
- todos os nós pai (de derivação) possuem exclusivamente subárvores não vazias



Raiz:

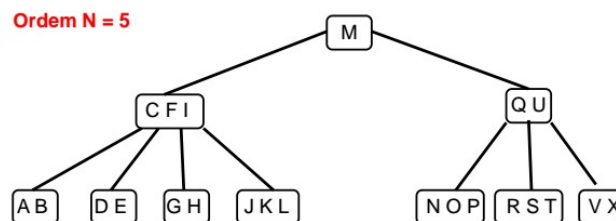
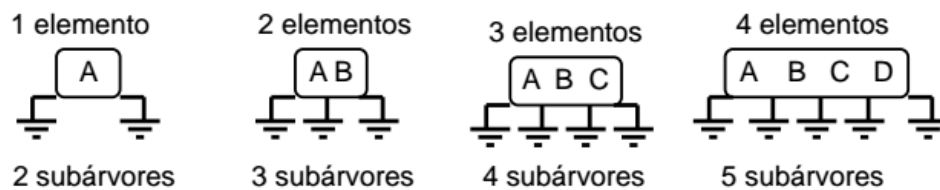
- Elementos: mínimo 1 e máximo $N-1$
- Subárvores: mínimo duas e no máximo N ;

Nó interno: (que não é raiz nem folha):

- Elementos: mínimo $\text{round}(N/2) - 1$ e Máximo $N-1$
- Subárvores: mínimo $\text{round}(N/2)$ e Máximo N

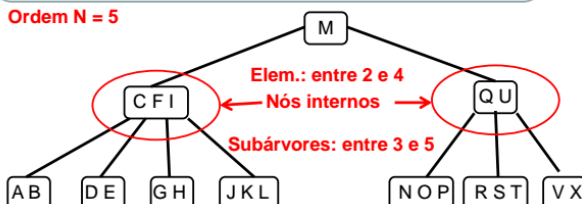
Folhas:

- Todas as folhas estão no mesmo nível.



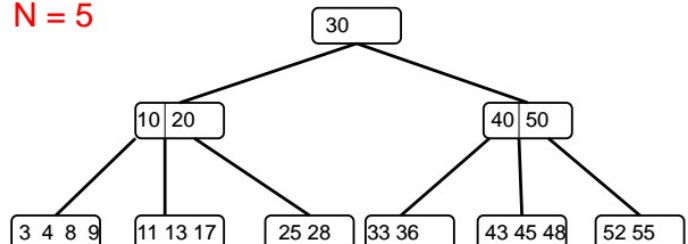
- Nó interno (que não é raiz nem folha):
 - Elementos: mínimo $\lceil N/2 \rceil - 1$ e Máximo $N-1$
 - Subárvores: mínimo $\lceil N/2 \rceil$ e Máximo N

Ordem $N = 5$



Qual a ordem da árvore ?

$N = 5$



Estrutura para uma árvore B:

```
#define N ? /*ordem da árvore B*/
```

```
typedef struct NodeB NodeB;
```

```
struct NodeB{  
    int nro_chaves;  
    int chaves[N - 1];  
    NodeB *filhos[N];  
    int eh_no_folha;  
};
```

```
int criar(NodeB *tree){  
    int i;  
  
    if (tree == NULL){  
        tree = malloc(sizeof(NodeB));  
        tree->eh_no_folha = 1;  
        tree->nro_chaves = 0;  
  
        for (i = 0; i < N; i++)  
            tree->filhos[i] = NULL;  
  
        return 1;  
    }  
  
    return 0;  
}
```

```
int liberar(NodeB *tree){  
    if (tree != NULL){  
        free(tree);  
  
        return 1;  
    }  
  
    return 0;  
}
```

Pesquisa em Árvore B

Semelhante a busca em árvores binárias de busca (incluindo as AVL e as rubro-negras)

Para minimizar o custo da busca em cada página (nó), pode ser feita, inicialmente, uma busca binária na página. Caso o item não seja encontrado, a busca é continuada em um dos nós filhos.

```
// encontrar a posição da chave em um determinado nó
int busca_binaria(int key, NodeB *tree){
    int ini, fim, meio;

    if (tree != NULL){
        ini = 0;
        fim = tree->nro_chaves - 1;

        while (ini <= fim){
            meio = (ini + fim) / 2;

            if (tree->chaves[meio] == key)
                return meio; // Aqui, a chave foi encontrada
            else if (tree->chaves[meio] < key)
                ini = meio + 1;
            else
                fim = meio - 1;
        }

        return ini; // A chave não foi encontrada. Neste caso, o ini é posição do filho (ponteiro para filho)
    }

    return -1;
}

int pesquisar(int key, NodeB *tree){
    int pos = busca_binaria(key, tree);

    if (pos >= 0){
        if (tree->chaves[pos] == key)
            return 1;
        else
            return pesquisar(key, tree->filhos[pos]);
    }

    return 0;
}
```

Complexidade? $O(\log_2 n)$: $\log_2 m$ (**log de m na base 2**) * $\log_m n$ (**log de n na base m**) = $\log_2 n$. Se $\log_c a / \log_c b = \log_b a$, então $\log_c b * \log_b a = \log_c a$

Para busca de um nó, também pode ser utilizada a pesquisa sequencial:

```
int pesquisaSequencial(int key, NodeB *tree){
    int i;

    if (tree != NULL){
        for (i = 0; i < tree->nro_chaves && key < tree->chaves[i]; i++)
            if (key == tree->chaves[i])
                return 1;

        return pesquisaSequencial(key, tree->filhos[i]);
    }

    return 0;
}
```

Essa última solução possui uma complexidade na ordem de $O(m * \log_m(n))$

Inserção em árvore B

Diferentemente de uma árvore binária, em uma árvore B não podemos simplesmente criar um novo nó (página)

Começa com uma busca, a partir da página raiz, que continua até localizar a página onde deve ser inserido o novo elemento.

Se a página onde o elemento deve ser inserido tiver menos de $N - 1$ elementos, este é alocado nesta página. Caso contrário, pode ser necessário a criação de uma nova página. Para isso, a página é dividida em duas páginas.

A criação de uma nova página é feita nos seguintes passos:

- 1 - Primeiramente escolhe-se uma chave intermediária na página, considerando a nova chave que deverá ser inserida.
- 2 - Em seguida, uma nova página é criada, na qual serão posicionados os valores maiores que a chave intermediária e as menores permanecerão na página que foi dividida. Essa operação é denominada split.
- 3 - A chave intermediária é inserida na página pai, a qual pode estar cheia, sendo necessária uma nova divisão, na qual é criada uma outra página. O processo de criação de nova página pode ser propagada até a página raiz. Se não existir uma página pai durante a divisão, uma nova página deverá ser criada para ser a raiz.

```
// dividir página em duas
NodeB* split_pag(NodeB *pai, int posF_cheio){
    int i;
    NodeB *pag_esq = pai->filhos[posF_cheio];
    NodeB *pag_dir;

    criar(pag_dir);

    pag_dir->eh_no_folha = pag_esq->eh_no_folha;

    //Quantidade de elementos (chaves) maiores que a chave "central"
    pag_dir->nro_chaves = round((N - 1) / 2);

    // preencher a nova página
    for (i = 0; i < pag_dir->nro_chaves; i++)
        pag_dir->chaves[i] = pag_esq->chaves[i + pag_dir->nro_chaves];

    // se a página esquerda não for nó-folha, a página direita deve herdar os seus respectivos descendentes
    if (!pag_esq->eh_no_folha)
        for (i = 0; i <= pag_dir->nro_chaves; i++)
            pag_dir->filhos[i] = pag_esq->filhos[i + pag_dir->nro_chaves];

    pag_esq->nro_chaves = (N - 1) / 2;

    // Como a página pai já foi dividida anteriormente, essa operação faz sentido
    // Os descendentes da página pai são deslocados em uma posição para a adição da nova página descendente
    for (i = pai->nro_chaves + 1; i > posF_cheio + 1; i--)
        pai->filhos[i + 1] = pai->filhos[i];

    pai->filhos[posF_cheio + 1] = pag_dir;

    for (i = pai->nro_chaves + 1; i > posF_cheio; i--)
        pai->chaves[i + 1] = pai->chaves[i];

    // promoção da maior chave da página esquerda (anteriormente, era a posição média)
    pai->chaves[posF_cheio] = pag_esq->chaves[(N - 1) / 2];

    pai->nro_chaves++;
}

void inserir_pagina_nao_cheia(NodeB *tree, int key){
    int i, pos = busca_binaria(key, tree); //encontrar a posição para adicionar a página

    if (tree->eh_no_folha){
        for (i = tree->nro_chaves; i > pos; i--)
            tree->chaves[i] = tree->chaves[i - 1];
        tree->chaves[i] = key;
        tree->nro_chaves++;
    }else{
        if (tree->filhos[pos]->nro_chaves == N - 1)
            split_pag(tree, pos);

        if (key > tree->chaves[pos])
            pos++;

        inserir_pagina_nao_cheia(tree->filhos[pos], key);
    }
}
```

```
void inserir(NodeB *tree, int key){
    NodeB *aux = tree;
    NodeB *nova_pag;

    if (aux->nro_chaves == N - 1){
        criar(nova_pag);
        tree = nova_pag;

        nova_pag->eh_no_folha = 0;

        nova_pag->chaves[0] = aux;

        split_pag(nova_pag, 0);
        inserir_pagina_nao_cheia(nova_pag, key);
    }else
        inserir_pagina_nao_cheia(nova_pag, key);
}
```

Referências

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. Third edition, The MIT Press, 2009.

Marin, L. O. Árvores B. AE23CP - Algoritmos e Estrutura de Dados II. Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.

Ziviani, N. Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++. Thomson, 2007.