Algoritmos de Ordenação (Parte 2)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE42CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Quicksort
- Heapsort
- Shell sort

Quicksort

Quicksort

- Ordenação por troca

- O *quicksort* adota a estratégia de divisão e conquista

  - Divisão: particionar o arranjo $X[p...q]$ em dois sub-arranjos $X[p...r-1]$ e $X[r+1...q]$, tais que $X[p...r-1] \leq X[r] \leq X[r+1...q]$

  - Conquista: ordenar os dois sub-arranjos $X[p...r-1]$ e $X[r+1...q]$ por chamadas recursivas do *quicksort*

Quicksort

- Procedimento $quicksort(X, p, q)$
  1. definir o pivô r e as posições $i = p$ e $j = q$
  2. enquanto $i \leq j$, trocar de posição os elementos maiores (lado esquerdo do arranjo) com os itens menores (lado direito) que o pivô
  3. $quicksort(X, p, j)$
  4. $quicksort(X, i, q)$

- Implementação (quando o pivô fica entre as posições *esq* e *dir*)

```
void quicksort(int x[], int esq, int dir){
   int i = esq, j = dir, pivo = x[(i + j) / 2], aux;

   do{
      while (x[i] < pivo)
         i++;

      while (x[j] > pivo)
         j--;

      if (i <= j){
         aux = x[i];
         x[i] = x[j];
         x[j] = aux;
         i++;
         j--;
      }
   }while (i <= j);

   if (j > esq)
      quicksort(x, esq, j);

   if (i < dir)
      quicksort(x, i, dir);
}
```

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 0$, $dir = 7$ e $pivo = X[(0+7)/2] = X[3] = 37$, temos

i	j	pivo	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	
0	7	37	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	7	37	25	57	48	37	12	92	86	33	Troca
1	7	37	25	33	48	37	12	92	86	57	Após troca
2	6	37	25	33	48	37	12	92	86	57	
2	5	37	25	33	48	37	12	92	86	57	
2	4	37	25	33	48	37	12	92	86	57	Troca
2	4	37	25	33	12	37	48	92	86	57	Após troca
3	3	37	25	33	12	37	48	92	86	57	
4	2	37	25	33	12	37	48	92	86	57	Novas partições

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j) => quicksort(x, 0, 2)
  - quicksort(v, i, dir) => quicksort(x, 4, 7)

- Exemplo (continuação: quicksort(x, 0, 2))
  - Para $esq = 0$, $dir = 2$ e $pivo = X[(0+2)/2] = X[1] = 33$, temos

i	j	pivo	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	
0	2	33	25	33	12	37	48	92	86	57	
1	2	33	25	33	12	37	48	92	86	57	Troca
1	2	33	25	12	33	37	48	92	86	57	Após Troca
2	1	33	25	12	33	37	48	92	86	57	Nova partição

- Após a execução, fazemos mais uma chamada recursiva (uma chamada não é realizada porque i é igual a dir)
  - quicksort(v, esq, j) => quicksort(x, 0, 1)

- Exemplo (continuação: quicksort(x, 4, 7)), supondo que quicksort(x, 0, 1) foi executada
  - Para $esq = 4$, $dir = 7$ e $pivo = X[(4+7)/2] = X[5] = 92$, temos

i	j	pivo	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	
4	7	92	12	25	33	37	48	92	86	**57**	
5	7	92	12	25	33	37	48	**92**	86	**57**	Troca
5	7	92	12	25	33	37	48	57	86	92	Após Troca
6	6	92	12	25	33	37	48	57	86	92	
7	5	92	12	25	33	37	48	57	86	92	Nova partição

- Após a execução, fazemos mais uma chamada recursiva (uma chamada não é realizada porque i é igual a dir)
  - quicksort(v, esq, j) => quicksort(x, 4, 5)

- Implementação (quando o pivô fica na posição *esq*)

```
void troca(int *a, int *b){
    int aux = *a;
    *a = *b;
    *b = aux;
}

int particionar(int v[], int esq, int dir){
    int pivo = v[esq], i = esq + 1, j = dir;
    while (i <= j){
        while ((v[i] <= pivo) && (i <= dir))
            i++;
        while ((v[j] > pivo) && (j >= esq))
            j--;
        if (i < j)
            troca(&v[i], &v[j]);
    }
    troca(&v[esq], &v[j]);
    return j;
}

void quicksort2(int v[], int esq, int dir){
    if (esq < dir){
        int j = particionar(v, esq, dir);
        quicksort2(v, esq, j - 1);
        quicksort2(v, j + 1, dir);
    }
}
```

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 0$, $dir = 7$ e $pivo = X[esq] = X[0] = 25$, temos

i	j	pivo	X[0]	X[1]	X[2]	X[3]	X[4]	X[5]	X[6]	X[7]	
-	-	-	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	7	25	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	6	25	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	5	25	25	57	48	37	12	92	86	33	
1	4	25	25	57	48	37	12	92	86	33	troca
1	4	25	25	12	48	37	57	92	86	33	após troca
2	3	25	25	12	48	37	57	92	86	33	
2	2	25	25	12	48	37	57	92	86	33	
2	1	25	25	12	48	37	57	92	86	33	parada do loop
2	1	25	25	12	48	37	57	92	86	33	última troca
2	1	25	12	25	48	37	57	92	86	33	

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j - 1) => quicksort(x, 0, 0)
  - quicksort(v, j + 1, dir) => quicksort(x, 2, 7)

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 2$, $dir = 7$ e $pivo = X[esq] = X[2] = 8$, temos

i	j	pivo	X[0]	X[1]	X[2]	X[3]	X[4]	X[5]	X[6]	X[7]	
-	-	-	12	25	48	37	57	92	86	33	
3	7	48	12	25	48	37	57	92	86	33	
4	7	48	12	25	48	37	57	92	86	33	troca
4	7	48	12	25	48	37	33	92	86	57	após troca
5	7	48	12	25	48	37	33	92	86	57	
7	6	48	12	25	48	37	33	92	86	57	
7	5	48	12	25	48	37	33	92	86	57	
7	4	48	12	25	48	37	33	92	86	57	parada do loop
7	4	48	12	25	48	37	33	92	86	57	última troca
7	4	48	12	25	33	37	48	92	86	57	

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j - 1) => quicksort(x, 2, 3) // já ordenado
  - quicksort(v, j + 1, dir) => quicksort(x, 5, 7)

- Exemplo

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
25	57	48	37	12	92	86	33

- Para $esq = 5$, $dir = 7$ e $pivo = X[esq] = X[5] = 92$, temos

i	j	pivo	X[0]	X[1]	X[2]	X[3]	X[4]	X[5]	X[6]	X[7]	
-	-	-	12	25	33	37	48	92	86	57	
6	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	
7	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	
8	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	parada do loop
8	7	92	12	25	33	37	48	92	86	57	única troca
8	7	92	12	25	33	37	48	57	86	92	

- Após a execução, fazemos mais duas chamadas recursivas
  - quicksort(v, esq, j - 1) => quicksort(x, 5, 3) // (i > j)
  - quicksort(v, j + 1, dir) => quicksort(x, 5, 5)

- No melhor caso e caso médio, o algoritmo tem custo de tempo de $O(n \log_2 n)$
- Dependendo da forma em que o pivô é escolhido e da forma que o arranjo está organizado, o custo pode ser de $O(n^2)$ (pior caso)
- O método não é estável

Quicksort

- Links interessantes:
  - Dança húngara:
    `https://www.youtube.com/watch?v=ywWBy6J5gz8`
  - Simulador gráfico do *quicksort*:
    `https://visualgo.net/bn/sorting`

Heapsort

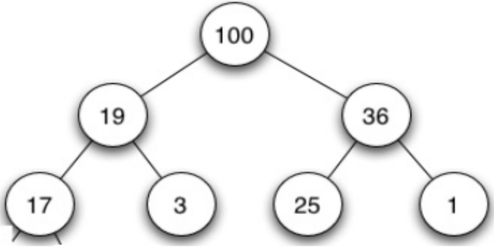
Heapsort

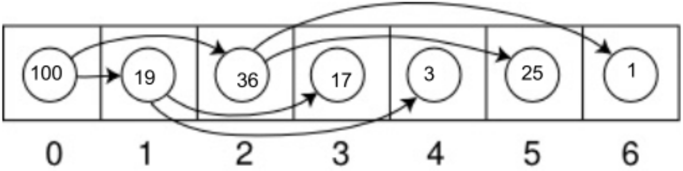
- Ordenação por seleção

- Baseado no princípio de ordenação por seleção em árvore binária

- O método consiste em duas fases distintas:
  1. Montagem da árvore binária (HEAP)
  2. Seleção dos elementos na ordem desejada

Heapsort





- Em uma *heap*
  - O sucessor à esquerda do elemento de índice i é o elemento de índice $2 * (i + 1) - 1$, se $2 * (i + 1) - 1 < n$, caso contrário não existe
  - O sucessor à direita do elemento de índice i é o elemento de índice $2 * (i + 1)$, se $2 * (i + 1) < n$, caso contrário não existe

- Código para rearranjar um vetor para que o mesmo atenda a condição para ser uma *heap*

```
void gerarHeap(int v[], int n){
   int esq = n / 2;

   while (esq >= 0){
     refazer(v, esq, n - 1);
     esq--;
   }
}
```

- Código para rearranjar um vetor para que o mesmo atenda a condição para ser uma *heap* (continuação)

```
void refazer(int v[], int esq, int dir){
   int j = (esq + 1) * 2 - 1;
   int x = v[esq];

   while (j <= dir){
     if ((j < dir) && (v[j] < v[j + 1]))
        j++;

     if (x >= v[j])
        break;

     v[esq] = v[j];
     esq = j;
     j = (esq + 1) * 2 - 1;
   }

   v[esq] = x;
}
```

- Função principal

```
void heapsort(int v[], int n){
   int x;
   int dir = n - 1;

   gerarHeap(v, n);

   while (dir > 1){
     x = v[0];
     v[0] = v[dir];
     v[dir] = x;
     dir--;
     refazer(v, 0, dir);
   }
}
```

- Exemplo

iteração	x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
fazheap: i=3	25	57	48	37	12	92	86	33
fazheap: i=2	25	57	92	37	12	48	86	33
fazheap: i=1	25	57	92	37	12	48	86	33
fazheap: i=0	92	57	86	37	12	48	25	33
heapsort: i=7	86	57	48	37	12	33	25	92
heapsort: i=6	57	37	48	25	12	33	86	92
heapsort: i=5	48	37	33	25	12	57	86	92
heapsort: i=4	37	25	33	12	48	57	86	92
heapsort: i=3	33	25	12	37	48	57	86	92
heapsort: i=2	25	12	33	37	48	57	86	92
heapsort: i=1	12	25	33	37	48	57	86	92

- À primeira vista, parece que o *heap sort* não apresenta bons resultados
- Não é um algoritmo de ordenação estável
- O algoritmo não é recomendado para pequenos conjuntos de elementos
- Custo de tempo (melhor, médio e pior caso): $O(n \log_2(n))$

- Exercício: aplicar o *heap sort* em um arranjo de 10 elementos:
  - Organizado em ordem crescente
  - Organizado em ordem decrescente

- Links interessantes:
  - Dança húngara: https://www.youtube.com/watch?v=Xw2D9aJRBY4&list=RDCMUCIqiLefbVHsOAXDAxQJH7Xw&index=10
  - Simulador gráfico do *heap sort*: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/HeapSort.html

Shell sort

- Extensão da ordenação por inserção (*insertion sort*)
  - Caso o menor item estiver na última posição, serão necessárias $n-1$ movimentações para colocá-lo em sua devida posição

  - No seguinte exemplo, devem ser realizadas, no total, 10 movimentações, sendo que, apenas os itens 7, 1 e 4 estão fora de suas posições: $\{7, 2, 3, 1, 5, 6, 4\}$

- *Shell sort* contorna o principal problema do *insertion sort* possibilitando troca de registros que estão distantes um do outro
  - Por exemplo, em vez de comparar uma chave com todos os outros elementos em uma única passagem (*e.g.*, o maior elemento está na primeira posição do vetor), inicialmente é considerado um passo maior: ao invés do passo ser de "um em um" $(j+1)$, é considerado um incremento maior $(j+h)$

  - o valor de h é chamado de incremento

Shell sort

- *Shell sort* consiste em classificar sub-arranjos do original
  - Por exemplo, se h é 5, o sub-arranjo consiste dos elementos $x[0]$, $x[5]$, $x[10]$, etc
    - Sub-arranjo 1: $x[0]$, $x[5]$, $x[10]$
    - Sub-arranjo 2: $x[1]$, $x[6]$, $x[11]$
    - Sub-arranjo 3: $x[2]$, $x[7]$, $x[12]$
    - Sub-arranjo 4: $x[3]$, $x[8]$, $x[13]$
- Esses sub-arranjos contêm todo h-ésimo elemento do arranjo original e são ordenados da mesma forma que na ordenação por inserção

- Após a ordenação dos sub-arranjos:
  - Define-se um novo incremento menor que o anterior
  - Gera-se novos sub-arquivos
  - Aplica-se novamente o método da inserção
- O processo é realizado repetidamente até que h seja igual a 1
- O valor de h pode ser definido de várias formas
  - $h(s) = 3h(s-1) + 1$, para $s > 1$
  - $h(s) = 1$, para $s = 1$
- Nessa recorrência, s é o tamanho do conjunto

- Implementação

```
void shellsort(int v[], int n){
    int h = 1;
    int x, i, j;

    while (h < n)
      h = 3 * h + 1;

    h /= 3;

    while (h >= 1){
      for (i = h; i < n; i++){
         x = v[i];
         j = i;

         while ((j >= h) && (x < v[j - h])){
             v[j] = v[j - h];

             j -= h;
         }

         v[j] = x;
      }

      h /= 3;
    }
}
```

- Exemplo

x	h	i	v[0]	v[1]	v[2]	v[3]	v[4]	v[5]	v[6]	v[7]
-	-	-	25	57	48	37	12	92	86	33
12	4	4	**25**	57	48	37	**12**	92	86	33
92	4	5	12	**57**	48	37	25	**92**	86	33
86	4	6	12	57	**48**	37	25	92	**86**	33
33	4	7	12	57	48	**37**	25	92	86	**33**
33	4	8	12	57	48	33	25	92	86	37
57	1	1	**12**	**57**	48	33	25	92	86	37
48	1	2	**12**	**57**	**48**	33	25	92	86	37
33	1	3	**12**	**48**	**57**	**33**	25	92	86	37
25	1	4	**12**	**33**	**48**	**57**	**25**	92	86	37
92	1	5	**12**	**25**	**33**	**48**	**57**	**92**	86	37
86	1	6	**12**	**25**	**33**	**48**	**57**	**92**	**86**	37
37	1	7	12	25	33	48	57	86	92	37
37	1	8	12	25	33	37	48	57	86	92

- Quando $h = 1$, o comportamento é o mesmo em comparação com o *insertion sort*

Shell sort

- Estima-se que a complexidade do *Shell sort* esteja entre $O(n^{1,25})$ e $O(n^2)$
- Tempo de execução sensível à ordem dos dados
- Uma dificuldade do *shell sort* é a escolha dos incrementos que fornece os melhores resultados
- A razão pela qual esse algoritmo é eficiente ainda é desconhecida
- Ótima opção para arquivos de tamanho moderado
- Não estável

Shell sort

- Links interessante:
  `https://www.youtube.com/watch?v=CmPA7zE8mx0`

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.

Rosa, J. L. G.
Métodos de Ordenação. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2018.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.