Técnicas e Análise de Algoritmos: *backtracking* e *branch-and-bound*

Prof. Jefferson T. Oliva

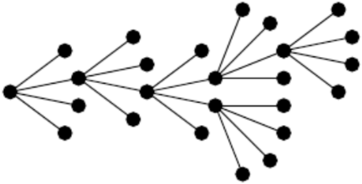
Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- *Backtracking*
  - Labirinto
  - Mochila
- *Branch-and-Bound*
  - Labirinto
  - Mochila

Introdução

- Algoritmos força bruta testam exaustivamente todas as soluções possíveis de um problema para obter uma solução ótima
  - Não utiliza critérios para eliminar outras soluções que não poderão ser melhores que a obtida no estágio considerado
  - As soluções podem ser enumeradas de modo semelhante ao percurso em uma árvore que possua todas as soluções
  - Muitas vezes, o conjunto de soluções cresce exponencialmente!



Introdução

- Algoritmos força bruta não seguem regra fixa de computação
  - Passos em direção à solução final são tentados e registrados
- Um algoritmo força bruta gera todos os possíveis candidatos da solução e verifica qual deles satisfaz o problema
  - Geralmente possui uma implementação simples
  - Encontra soluções, caso exista
  - Comumente utilizado em problemas com tamanho limitado ou quando um algoritmo mais eficiente é desconhecido
  - Muito útil quando a simplicidade da solução é mais importante do que a velocidade de execução

Introdução

- *Backtracking*
- *Branch-and-bound*

Backtracking

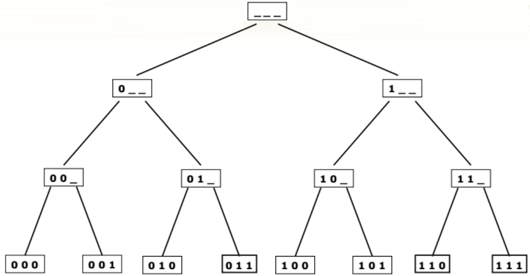
Backtracking

- Método que gera apenas soluções válidas
- Aplicado em problemas cuja solução pode ser definida a partir de uma sequência de passos
- Quando um conflito é detectado, o algoritmo dará um passo para trás (*backtrack*) e tentará um "outro caminho" para encontrar a solução
- Comumente mais rápido que algoritmos força bruta, caso aplicável
  - Soluções inválidas são eliminadas sem serem completamente analisadas

Backtracking

- Muitos problemas podem ser modelados por uma árvore que representa todas as sequências de decisões possíveis
  - Exemplo: encontrar todos os números binários de 3 bits em que a soma de 1's seja maior ou igual a 2

  - Espaço de busca para o exemplo:



  - Como reduzir o espaço de busca?

Backtracking

- Alguns problemas famosos em que o *backtracking* é utilizado:
  - Passeio do cavalo
  - Oito rainhas
  - Labirinto
  - Mochila

- Dada uma matriz $n \times m$ que representa um labirinto
- Dadas as posições inicial $p_i = (x_i, y_i)$ e final $p_f = (x_f, y_f)$
- O objetivo é verificar se existe um caminho entre p_i e p_f
- A matriz que representa o labirinto pode conter um dos seguintes valores:
  - -2: se a posição (x, y) representa uma parede
  - -1: se a posição (x, y) não faz parte do caminho
  - i: se a posição (x, y), tal que $i \geq 0$, faz parte do caminho

- Exemplo de labirinto 8×8, onde I é a posição final e F é a posição final

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	I	-1	-1	-1	-1	-1	-2
-2	-2	-1	-2	-1	-1	-1	-2
-2	-1	-1	-2	-2	-2	-1	-2
-2	-1	-2	-2	-1	-1	-1	-2
-2	-1	-2	-1	-1	-1	-2	-2
-2	-1	-1	-1	-2	-1	-1	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2	F	-2

- Em uma posição no labirinto, apenas os seguintes movimentos podem ser executados
  - Direita
  - Esquerda
  - Cima
  - Baixo

- Exemplo de caminho encontrado na matriz

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	0	1	-1	-1	-1	-1	-2
-2	-2	2	-2	-1	-1	-1	-2
-2	4	3	-2	-2	-2	-1	-2
-2	5	-2	-2	-1	-1	-1	-2
-2	6	-2	10	11	12	-2	-2
-2	7	8	9	-2	13	14	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2	15	-2

- Outro exemplo de caminho encontrado na matriz

-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-2	0	1	2	3	4	5	-2
-2	-2	-1	-2	-1	-1	6	-2
-2	-1	-1	-2	-2	-2	7	-2
-2	-1	-2	-2	-1	9	8	-2
-2	-1	-2	-1	-1	10	-2	-2
-2	-1	-1	-1	-2	11	12	-2
-2	-2	-2	-2	-2	-2	13	-2

- Para este labirinto, existem várias soluções

```
#define MAX 10

int main(){
   int lab[MAX][MAX], n, m, li, ci, lf, cf, resp;

   /*Movimentos válidos no labirinto*/
   int movX[] = {0, 1, 0, -1};
   int movY[] = {1, 0, -1, 0};

   /*inicializar as variáveis relacionadas ao labirinto*/
   iniciar_labirinto(lab, m, n, li, ci, lf, cf);

   lab[ci][cf] = 0; // posição inicial no labirinto

   resp = resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, li, ci, lf, cf);

   if (resp > 0)
     imprimir_labirinto(lab, m, n);
   else
     printf("Solucao nao encontrada!\n");
   return 0;
}
```

```
int resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, movX[], movY[], int li,
        int ci, int lf, int cf){
   int l, c, i, passos;

   if ((li == lf) && (ci == cf)) return lab[li][ci];

   /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
   for (i = 0; i < 4; i++){
      l = li + movX[i];
      c = ci + movY[i];

      /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
      if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && (lab[l][c] == -1)){
         lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

         passos = resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf);

         if (passos > 0) return passos;
      }
   }

   return 0;
}
```

- Muitas vezes não é desejável encontrar apenas uma solução qualquer
  - Pode ser desejável encontrar uma solução ótima, de acordo com algum critério de otimalidade

- No problema do labirinto, por exemplo, podemos estar interessado em encontrar um caminho que contém o menor número de passos

- Possível adaptação no algoritmo

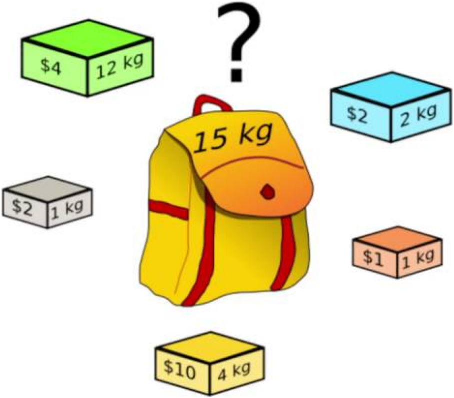
```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, movX[], movY[],
         int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
   int l, c, i;

   if ((li == lf) && (ci == cf)){
      if (lab[lf][cf] < *min)
         *min = lab[lf][cf];
  }else{
      /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
      for (i = 0; i < 4; i++){
         l = li + movX[i];
         c = ci + movY[i];

         /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
         if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) ||
                 (lab[l][c] > lab[li][ci] + 1))){
            lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

            resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
         }
      }
   }
}
```

  - Apesar do algoritmo encontrar a solução ótima, ainda todas as outras soluções são testadas



?
15 kg
$4
12 kg
$2
2 kg
$2
1 kg
$1
1 kg
$10
4 kg

- Lembra do algoritmo para a solução do problema da mochila por força bruta?

```
static int mochila_fb(int c[], int p[], int n, int b, int
i, int max){
  int c1, c2;
  if (i >= n)
    return b < 0 ?  0 :  max;
  else{
    c1 = mochila_fb(c, p, n, b, i + 1, max);
    c2 = mochila_fb(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
    return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
  }
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
  return mochila_fb(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

- Na implementação apresentada no slide anterior, podemos ver que, além do custo computacional alto, também são geradas soluções inválidas
- Algumas adaptações no código evitaria a geração de soluções inválidas
  - Em vez da primeira verificação ser se i é maior ou igual a n, verificar se $b < 0$
  - Caso a nova verificação resultar em "verdadeiro", retorne 0
  - A próxima verificação é se $i < n$: caso a resposta seja positiva, são feitas chamadas recursivas como realizadas na solução por força-bruta
  - Se as verificações acima falharem, basta retornar *max* (valor máximo acumulado)

- Solução do problema da mochila por *backtracking*

```
static int mochila_bkt(int c[], int p[], int n, int b, int
i, int max){
  int c1, c2;
  if (b < 0)
    return 0;
  else if (i < n){
    c1 = mochila_bkt(c, p, n, b, i + 1, max);
    c2 = mochila_bkt(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
    return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
  }else
    return max;
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
  return mochila_bkt(c, p, n, b, 0, 0);
}
```

Branch-and-Bound

Branch-and-Bound

- Relacionada com *backtracking*
- *Branch-and-bound* é um método de exploração mais sofisticada
  - *Branch*: explora opções
  - *Bound*: limite quantitativo (tem o propósito de evitar buscas em espaços menos promissores)

Branch-and-Bound

- *Branch-and-bound* realiza enumeração sistemática dos candidatos à solução

- Candidatas (a solução) parciais são eliminadas quando ocorre uma das seguintes situações:
  - Incapacidade de gerar uma solução válida (similar ao *backtracking*)

  - Incapacidade de gerar uma solução ótima, considerando
    - O valor da melhor solução encontrada até então (limitante superior)

    - O custo ainda necessário para gerar uma solução a partir da candidata atual (limitante inferior)

- O desempenho de uma solução *branch-and-bound* está fortemente relacionado à qualidade dos seus limitantes inferiores e superiores

- Solução *backtracking* otimizada do problema

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, movX[], movY[],
         int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
   int l, c, i;

   if ((li == lf) && (ci == cf)){
     if (lab[lf][cf] < *min)
       *min = lab[lf][cf];
  }else{
     /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
     for (i = 0; i < 4; i++){
       l = li + movX[i];
       c = ci + movY[i];

       /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
       if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) ||
               (lab[l][c] > lab[li][ci] + 1))){
         lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

         resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
       }
     }
   }
}
```

- O código apresentado anteriormente pode ser alterado para que o caminho ótimo seja encontrado utilizando *branch-and-bound*

- Se um caminho parcial utilizou tantos passos quanto o melhor caminho já encontrado, o mesmo pode ser descartado

  - Caso o número de passos do caminho parcial mais a diferença entre a posição atual e a saída for maior ou igual ao número de passos do melhor caminho já encontrado, então esse caminho parcial também pode ser descartado

```
void resolver_labirinto(int lab[MAX][MAX], int m, int n, movX[], movY[],
          int li, int ci, int lf, int cf, int *min){
   int l, c, i;

   if ((li == lf) && (ci == cf)){
      if (lab[lf][cf] < *min)
         *min = lab[lf][cf];
  }else{
      /*Todos os movimentos a partir da posição inicial são testados*/
      for (i = 0; i < 4; i++){
         l = li + movX[i];
         c = ci + movY[i];

         /*O movimento é verificado e caso seja válido, uma solução é gerada*/
         if ((l >= 0) && (l < m) && (c >= 0) && (c < n) && ((lab[l][c] == -1) ||
                   (lab[l][c] > lab[li][ci] + 1))){
            lab[l][c] = lab[li][ci] + 1;

            if (lab[l][c] + abs(l - lf) + abs(c - cf) < *min)
               resolver_labirinto(lab, m, n, movX, movY, l, c, lf, cf, min);
         }
      }
   }
}
```

- Solução *backtracking*

```
static int mochila_bkt(int c[], int p[], int n, int b, int i, int max){
   int c1, c2;
   if (b < 0)
     return 0;
   else if (i < n){
     c1 = mochila_bkt(c, p, n, b, i + 1, max);
     c2 = mochila_bkt(c, p, n, b - p[i], i + 1, max + c[i]);
     return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
   }else
     return max;
}
```

- Solução *branch-and-bound*

```
static int mochila_bnb(int c[], int p[], int n, int b, int i){
   int c1, c2;
   else if ((i < n)){
      c1 = mochila_bnb(c, p, n, b, i + 1, max);
      if (b - p[i] >= 0)
         c2 = c[i] + mochila_bnb(c, p, n, b - p[i], i + 1);
      else
         c2 = 0;
      return c1 > c2 ?  c1 :  c2;
   }
   return 0;
}

int mochila(int c[], int p[], int n, int b){
   return mochila_bnb(c, p, n, b, 0);
}
```

Conclusão

- Método guloso
  - Considera a alternativa mais promissora e não explora as outras
  - As decisões não são reconsideradas
  - Rápida execução
  - Pode não gerar solução ótima
  - Simples implementação
  - Não necessita memória auxiliar

Conclusão

- Divisão e conquista
  - Fácil implementação
  - Paralelizável
  - Simplificação de problemas complexos
  - Necessita memória auxiliar (recursão)
  - Pode não gerar solução ótima

Conclusão

- Programação dinâmica
  - Difícil implementação
  - Explora todas as alternativas de forma eficiente
  - Em cada passo, as decisões podem ser revogadas
  - Solução pode ser lenta
  - Solução ótima
  - Necessita memória auxiliar (tabela para armazenamento de resultados parciais)

Conclusão

- *Backtracking*
  - Fácil implementação
  - Explora apenas as alternativas que geram soluções válidas
  - Busca exaustiva
  - Em cada passo, as decisões podem ser revogadas
  - Solução pode ser lenta
  - Solução ótima
  - Necessita memória auxiliar (recursão)

Conclusão

- *Branch-and-bound*
  - Explora apenas as alternativas que geram soluções válidas, mas considerando limitantes
  - Em cada passo, as decisões podem ser revogadas
  - Solução pode ser lenta
  - Busca "semi-exaustiva"
  - A solução ótima pode não ser encontrada dependendo dos limitantes
  - Necessita memória auxiliar (recursão)
  - Definir limitantes pode ser difícil

Referências I

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Dias, Z.
Força Bruta, Backtracking e Branch and Bound. MC102 – Algoritmos e Programação de Computadores.
Slides. Ciência de Computação. IC/Unicamp, 2013.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.

Rosa, J. L. G.
Paradigmas e Técnicas de Projetos de Algoritmos. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Referências II

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L.
Estruturas de Dados e Seus Algoritmos.
LTC, 2010.

Toffolo, T.
Backtracking. Algoritmos e Programação Avançada. BCC402 – Algoritmos e Programação Avançada.
Slides. Ciência de Computação. Decom/UFOP, 2011.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.