# Árvores: árvores B e digitais

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

# Sumário

# Introdução

- Busca em memória primária
  - Busca sequencial
  - Busca sequencial indexada
  - Busca binária
  - Busca por interpolação
  - Árvore binária de busca
  - Árvore AVL
  - Árvore rubro-negra

# Introdução

- Pesquisa em memória primária vs. secundária
  - Primária: acesso mais rápido, portanto, mais caro

  - Secundária: mais barato, portanto, acesso mais lento

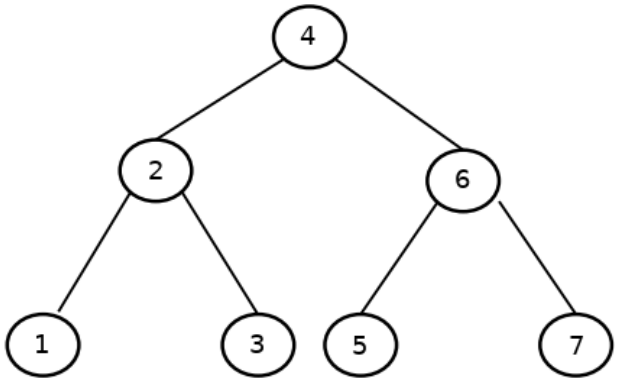
# Sumário

# Árvores B

- Amplamente utilizadas para o armazenamento em memória secundária
- Diversas aplicações/ferramentas utilizam árvores B (*B-tree*)
  - Sistemas de arquivos (*e.g.* NTFS e ext4)
  - Banco de dados (*e.g.* Oracle e PostgreSQL)
- Árvores B são estruturas de dados projetadas para a indexação de dados
  - Estrutura mais avançada em relação ao arquivo sequencial indexado

# Árvores B

- Árvore B é n-ária
  - Exemplo de árvore binária de busca




  - Exemplo de árvore B

# Árvores B

- Árvore binária de busca: cada nó tem um elemento e entre 0 e 2 nós filhos
- Árvore n-ária: cada nó pode ter entre 1 e $n - 1$ elementos e até $n$ filhos

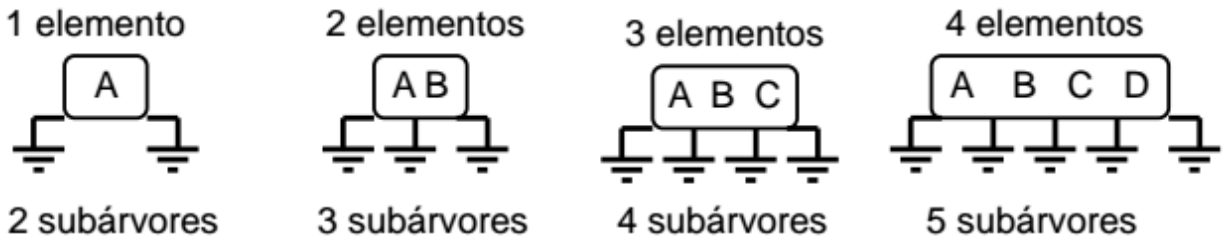
- Árvore de busca balanceada
- O nó de uma árvore B também é chamado de **página**
  - Cada nó pode ter mais de um elemento
- Ordem de árvore B: é o número máximo de páginas descendentes que uma página pode ter (Knuth)
  - Em Cormen et al. (2012) é definida como o número mínimo de páginas descendentes que uma página pode ter
  - Nesse material de aula é considerada a definição de Knuth

- Dada uma árvore B de ordem $N$:
  - Página raiz
    - Elementos: entre 1 (mínimo) e $N-1$ (máximo)
    - Descendentes (subárvores): entre 2 e $N$ (caso não seja página folha)
  - Página interna
    - Elementos: entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ e $N-1$
    - Descendentes (subárvores): entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ e $N$
  - Página folha
    - Elementos: entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ e $N-1$
    - Não possui descendentes
    - Todas as páginas folhas estão no mesmo nível (*i.e.* possuem a mesma profundidade)

- Exemplos para uma árvore B de ordem 5 ($N = 5$):

**Página raiz**

- Elementos: entre 1 (mínimo) e $N - 1$ (máximo)
- Descendentes (subárvores): entre 2 e $N$ (caso não seja página folha)

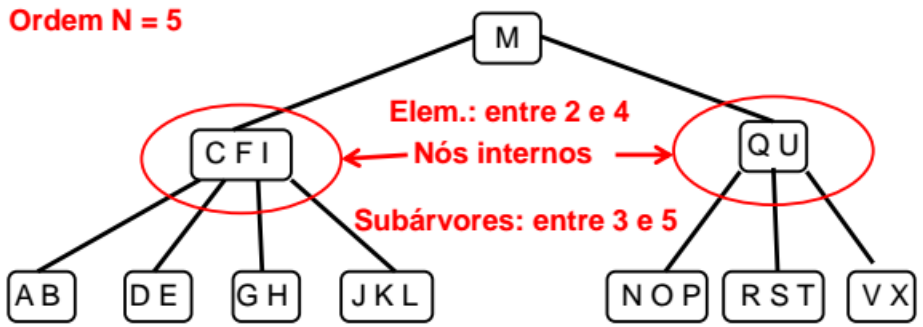



- Quando uma página de árvore B de ordem $N$ tem $N - 1$ elementos, diz-se que a mesma está cheia

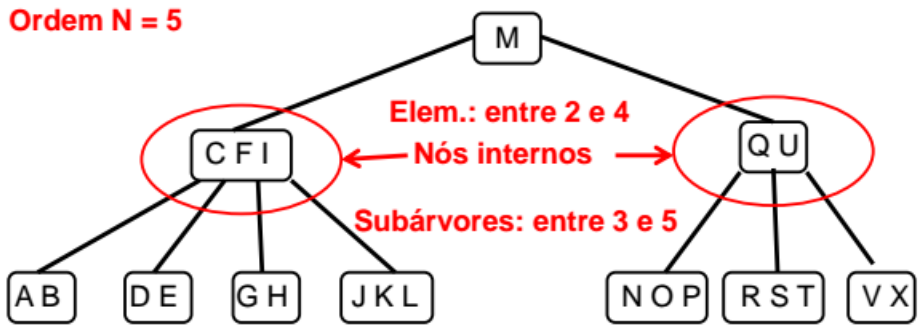
- Exemplos para uma árvore B de ordem 5 ($N = 5$):

## Página (nó) interna

- Elementos: entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil - 1$ e $N - 1$
- Descendentes (subárvores): entre $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ e $N$

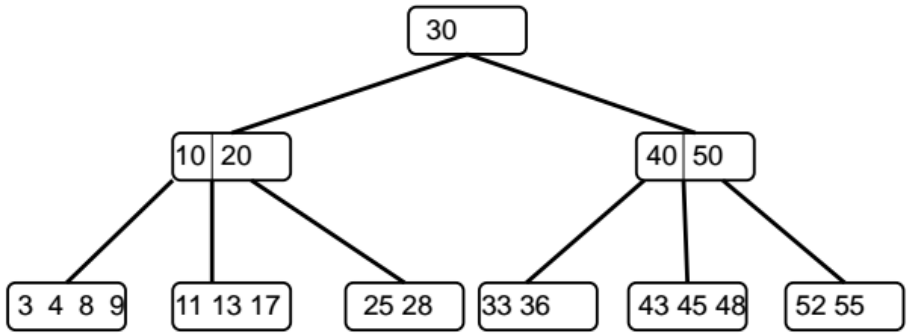


- Exemplos para uma árvore B de ordem 5 ($N = 5$):

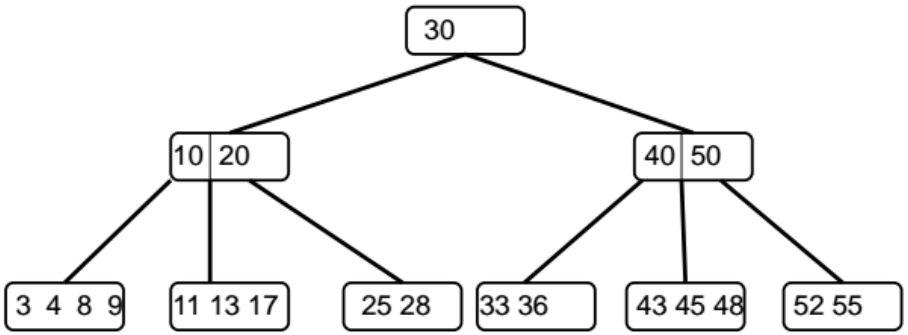



  - Dada uma árvore B de ordem 5
    - Cada página interna ou folha pode ter entre 2 (mínimo) e 4 (máximo) elementos
    - Cada página interna pode ter entre 3 (mínimo) e 5 (máximo) descendentes

- Qual é a ordem da árvore B abaixo:



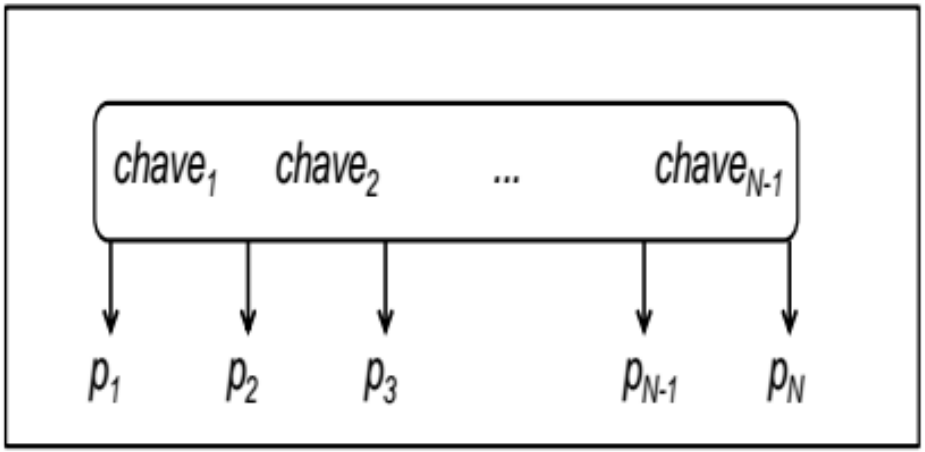
- Qual é a ordem da árvore B abaixo:
  - R.: $N = 5$



```
#define N ?

typedef struct NodeB NodeB;

struct NodeB{
   int nro_chaves;
   int chaves[N - 1];
   NodeB *filhos[N];
   int eh_no_folha;
};
```


chave1
chave2
...
chaveN-1
p1
p2
p3
pN-1
pN

- Função para inicialização de um ponteiro do tipo NodeB (1)

```
NodeB* criar(){
   NodeB *tree = (NodeB *) malloc(sizeof(NodeB));
   int i;

   tree->eh_no_folha = 1;
   tree->nro_chaves = 0;

   for (i = 0; i < N; i++)
     tree->filhos[i] = NULL;

   return tree;
}
```

- Função para inicialização de um ponteiro do tipo NodeB (2)

```
NodeB* criar(){
   NodeB *tree = (NodeB *) calloc(sizeof(NodeB), 1);
   int i;

   tree->eh_no_folha = 1;

   return tree;
}
```

**Operações em Árvores B**

# Operações em Árvores B

- Pesquisa
- Inserção
- Remoção

# Operações em Árvores B

## Pesquisa

- Semelhante à busca em árvores binárias de busca (incluindo as balanceadas, como as do tipo AVL e rubro-negra)
  - Em vez de termos até duas opções (esquerda e direita) para continuar a busca a partir de um nó, em árvores B podemos ter várias opções
    - Por exemplo, em uma árvore B de ordem N podemos ter até N caminhos para continuar a busca partir de uma página
- Outro exemplo que podemos utilizar para comparar com a árvore B é a busca sequencial indexada
  - A busca começa na página raiz (de forma similar à tabela de índices): caso a chave não seja encontrada, devemos continuar a busca em uma das páginas filhas (se existir)
    - Na busca sequencial indexada, a busca continuaria em um "bloco" do respectivo arquivo
    - Em árvores B, esses "blocos" seriam páginas filhas

- Implementação com busca sequencial

```
int pesquisaSequencial(int key, NodeB *tree){
   int i;
   if (tree != NULL){
     for (i = 0; i < tree->nro_chaves && key < tree->chaves[i];
          i++)
       if (key == tree->chaves[i])
         return 1;
     return pesquisaSequencial(key, tree->filhos[i]);
   }
   return 0;
}
```

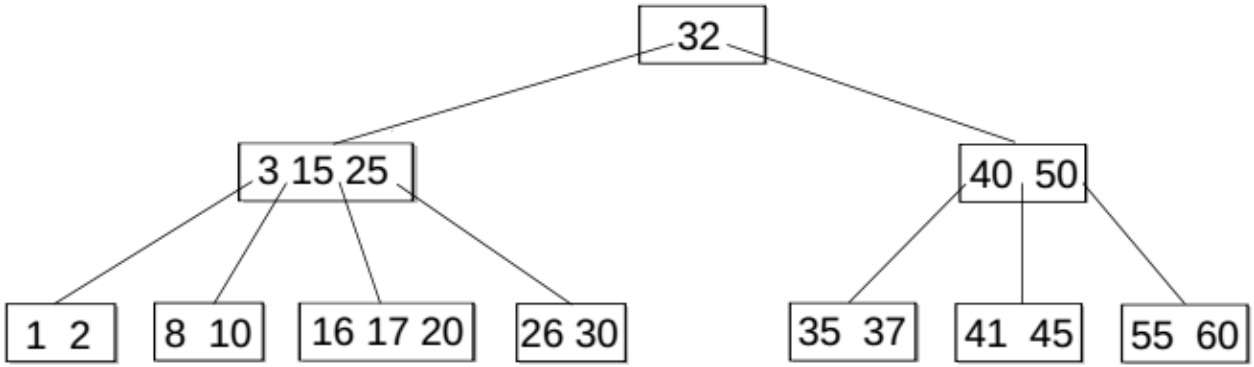
- Implementação com busca binária

```
int busca_binaria(int key, NodeB *tree){
   int ini, fim, meio;
   if (tree != NULL){
     ini = 0;
     fim = tree->nro_chaves - 1;
     while (ini <= fim){
       meio = (ini + fim) / 2;
       if (tree->chaves[meio] == key)
         return meio;
       else if (tree->chaves[meio] < key)
         ini = meio + 1;
       else
         fim = meio - 1;
     }
     return ini;
   }
   return -1;
}
```

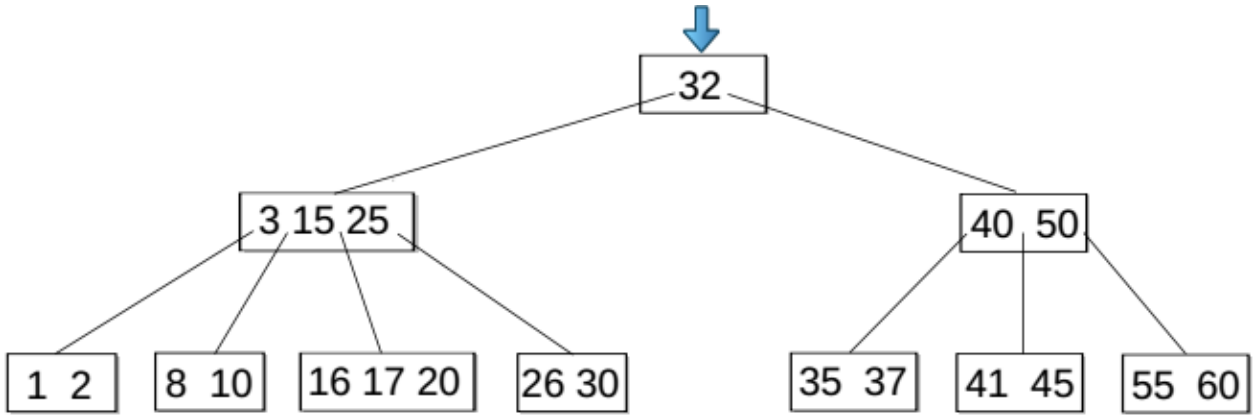
- Implementação com busca binária

```
int pesquisar(int key, NodeB *tree){
   int pos = busca_binaria(key, tree);
   if (pos >= 0){
     if (tree->chaves[key] == key)
       return 1;
     else
       return pesquisar(key, tree->filhos[pos]);
   }
   return 0;
}
```

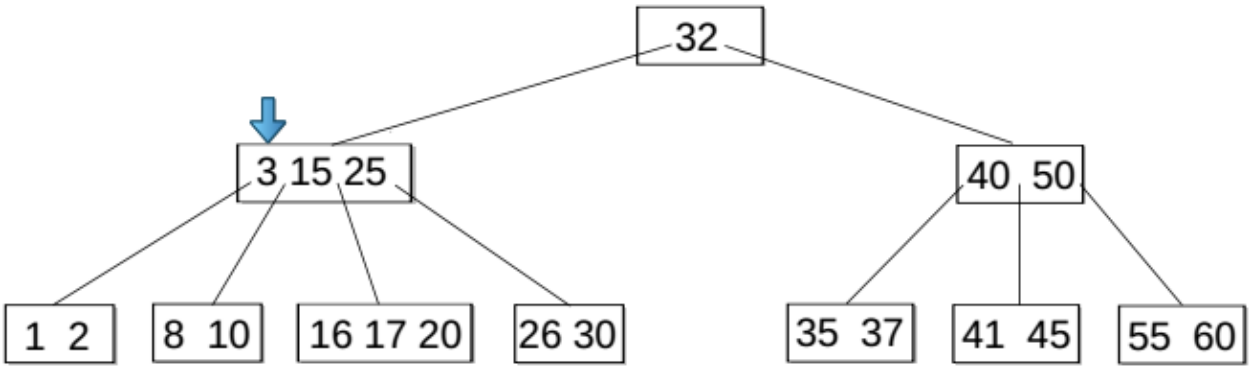
- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



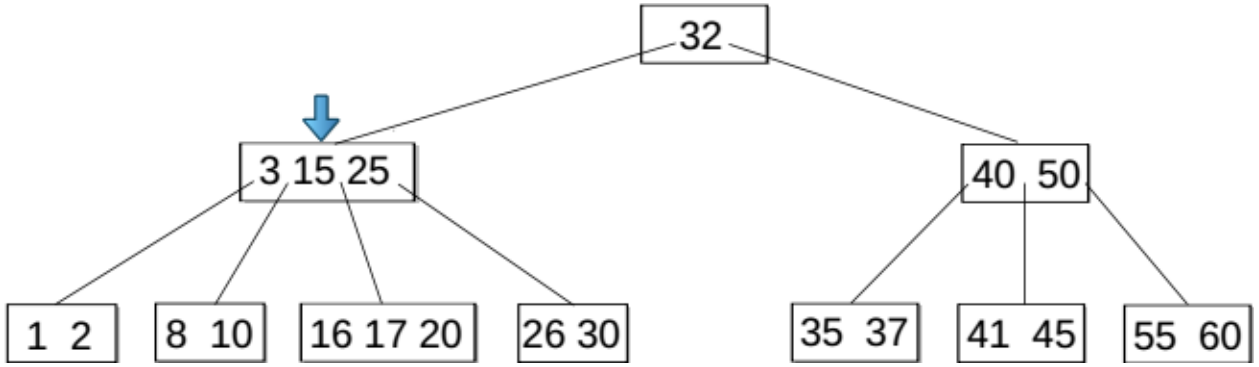
- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



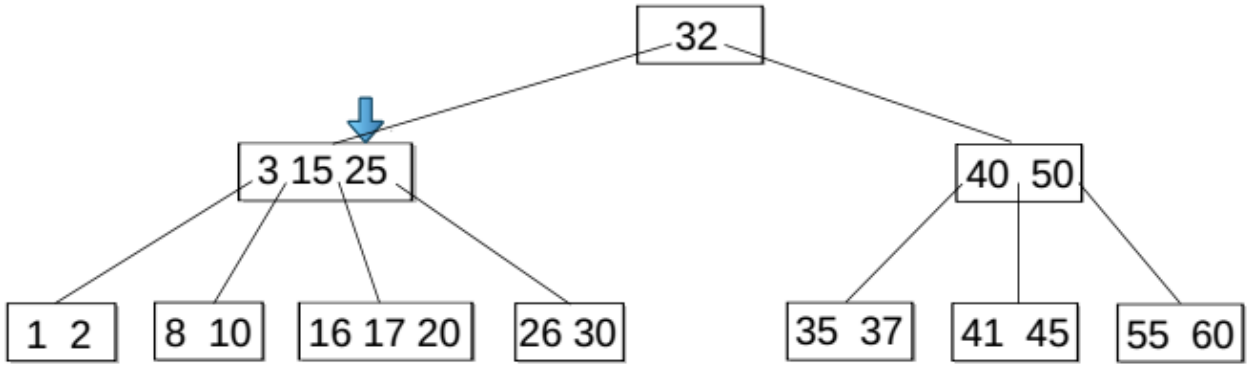
- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



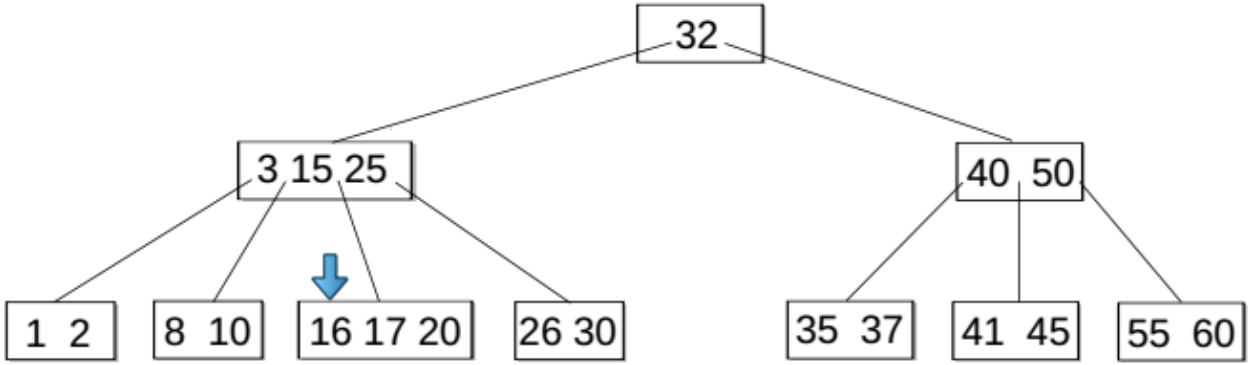
# Operações em Árvores B

## Pesquisa

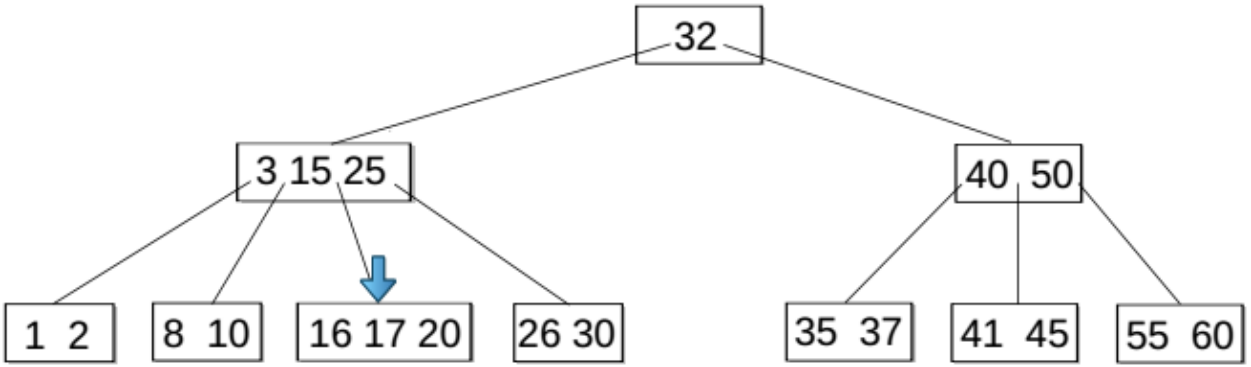
- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



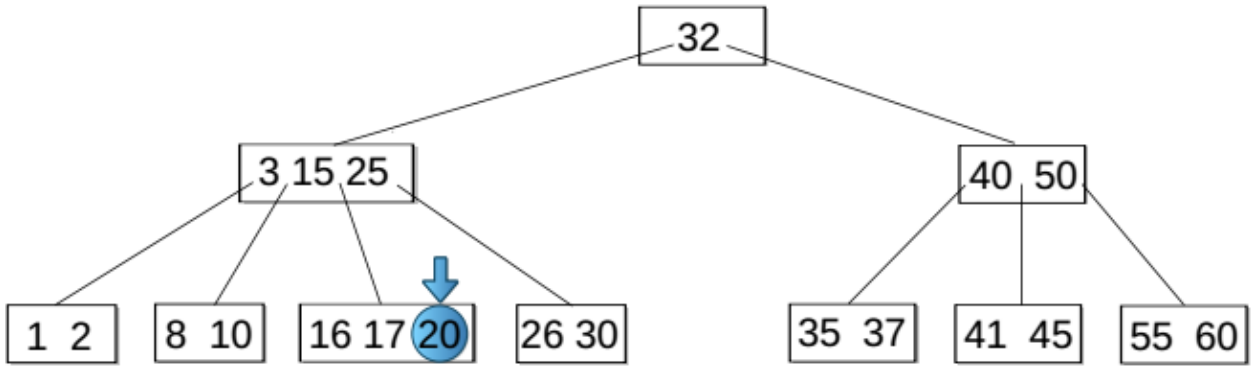
- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



- Exemplo: busca sequencial pela chave 20



- Complexidade, onde N é a ordem da árvore e M é a quantidade total de chaves
  - Pesquisa sequencial
    - Tempo (pior caso): $O(N \log_N M)$
    - Espaço extra: $O(\log_N M)$
  - Pesquisa binária
    - Tempo (pior caso): $O(\log_2 M)$, pois $\log_2 N * \log_N M = \log_2 M$
    - Espaço extra: $O(\log_2 M)$

- Primeiramente é procurada uma página folha para a inserção de um elemento
  - Diferentemente de árvores binárias de busca, conforme visto em aulas anteriores, nem sempre é necessária a criação de uma nova página folha
  - Se a página não estiver cheia (ou seja, tem menos de $N - 1$ elementos), o novo elemento é alocado nessa pagina
  - Se a página estiver cheia, deverá ser criada uma nova página

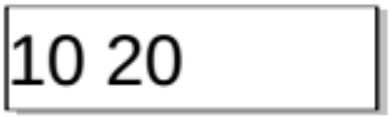
- Criação de nova página:
  1. Na página cheia, onde deveria ser inserido o novo elemento, é escolhido um valor intermediário, incluindo a nova chave (elmento)
  2. Em seguida, deve ser criado uma nova página, onde todos os elementos maiores que o valor intermediário deverão ser alocados
  3. A página que está cheia deverá contar com apenas os elementos menores que o valor intermediário, ou seja, a página passará ter a metade dos elementos em relação quando a mesma estava cheia
  4. O valor intermediário deve ser inserido na página pai, que passará a ter uma página filha a mais
     - Caso a página pai esteja cheia, as etapas de 1 a 3 são repetidas

- Criação de nova página:
  - Caso a página pai for raiz e esteja cheia após sucessivas inserções, é criada uma nova página que passará ser raiz
    - Nesse caso, a árvore cresce em altura
  - Após a inserção, a árvore é mantida balanceada

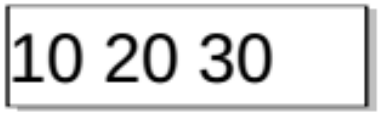
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: 10, 20, 30, 40, 50

- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **10**, 20, 30, 40, 50

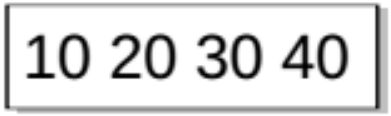
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **20**, 30, 40, 50



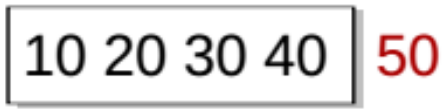
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **30**, 40, 50



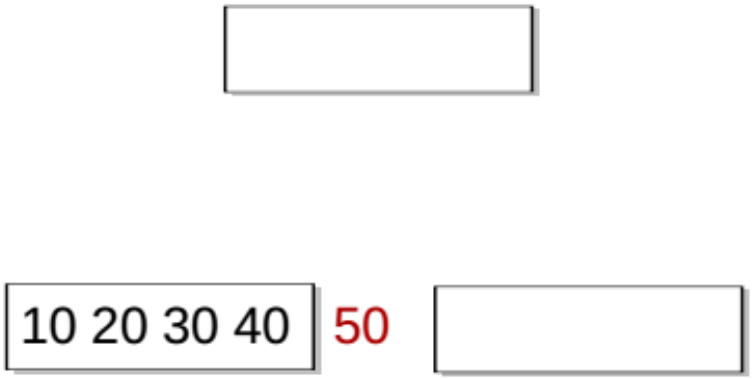
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **40**, 50



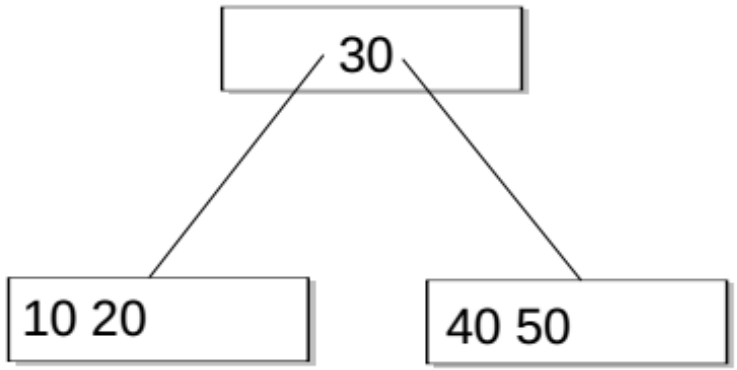
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **50**



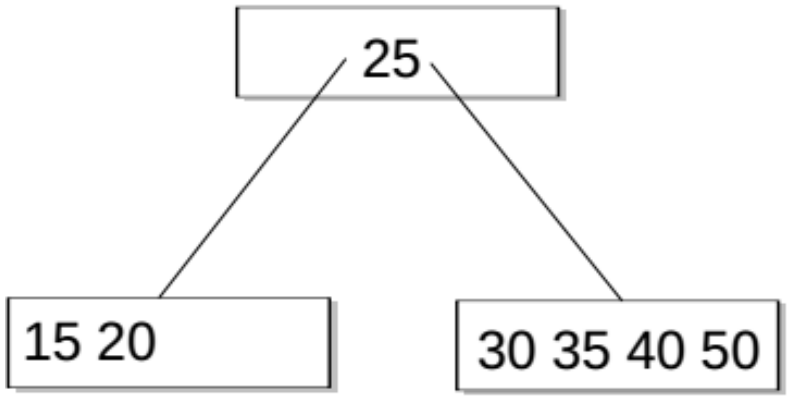
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **50**



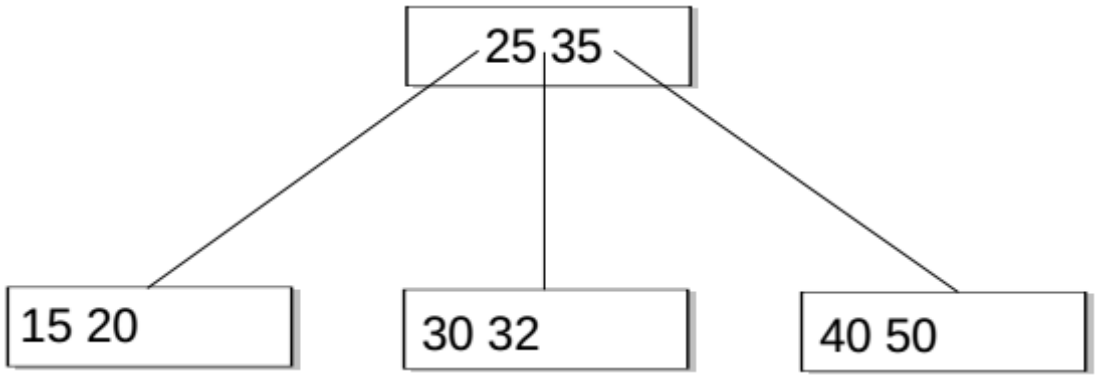
- Exemplo: inserção dos seguintes valores em uma árvore B de ordem 5: **50**



- Outro exemplo: inserção da chave 31 na seguinte árvore B de ordem 5:



- Outro exemplo: inserção da chave 31 na seguinte árvore B de ordem 5:



- Complexidade de tempo: $O(log_2 M)$
  - Caso a inserção for implementada com a busca binária
- Espaço extra: $O(log_N M)$

- A remoção ocorre após a busca por uma determinada chave
- Após a remoção, as propriedades de árvore B devem ser mantidas
- Para essa operação, devem ser considerados os seguintes casos
  - Remoção em página folha: caso a página tiver quantidade de elementos a partir de $N/2$, basta reorganizar a página
  - Remoção em página não folha: a chave é trocada com uma sucessora na página folha e, em seguida, eliminar a chave na folha conforme o caso anterior
  - Caso a remoção causar desequilíbrio na página, deve ser procurada uma página irmã que contenha quantidade de chaves maior que o mínimo para redistribuição das chaves

- Para essa operação, devem ser considerados os seguintes casos
  - Caso a remoção causar desequilíbrio na pagina e não houver página irmã que viabilize a redistribuição de chaves, a solução é concatenar duas páginas e atualizar a(s) página(s) pai(s)
    - Caso a página pai ficar desbalanceada, repetir o processo de redistribuição ou concatenação de páginas

- Complexidade de tempo da operação de remoção (caso seja aplicada a operação de busca binária): $O(log_2 n)$

# Árvores B

- Variações da árvore B:
  - B+
  - B*

**Árvores Digitais**

# Árvores Digitais

- Problema da busca: dada uma chave $x$ que deve ser procurada em um conjunto $S$
  - Até o momento foi assumido:
    - Que as chaves são indivisíveis
    - Todas as chaves possuem o mesmo tamanho
  - E se as chaves serem compostas por palavras ou frases?
    - Busca digital: árvores digitais

# Árvores Digitais

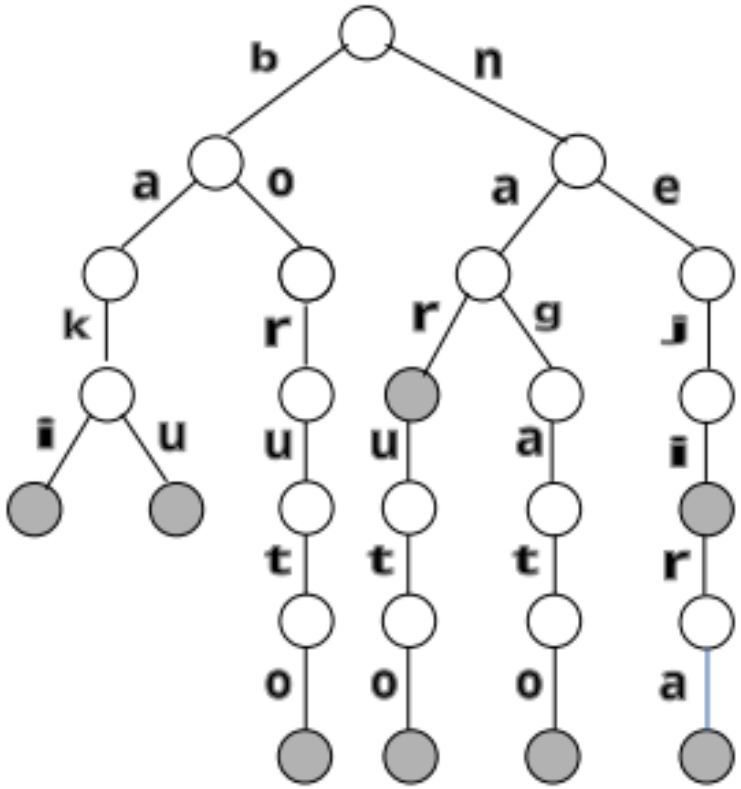
- A pesquisa digital é feita da mesma forma em que ocorre em dicionários que possuem os chamados "índices de dedos"
  - A partir da primeira letra, são determinadas todas as páginas quem contêm palavras iniciadas por tal caractere
- Busca digital é vantajosa quando as chaves são consideradas grandes e possuem quantidades diferentes de caracteres
- Exemplo de árvore digital
  - Trie

# Árvores Digitais

- Árvore trie
  - "*information re**TRI**Eval*"
  - Aplicada em recuperação de informação
  - Árvore *m*-ária cujos nós são vetores de *m* elementos (não confundir com árvores B!)
    - Cada elemento é um digito ou caractere
  - Cada nó no nível (profundidade) *i* representa as chaves que começam com a mesma sequência de dígitos e/ou caracteres
  - A comparação é feita individualmente por dígito/caractere

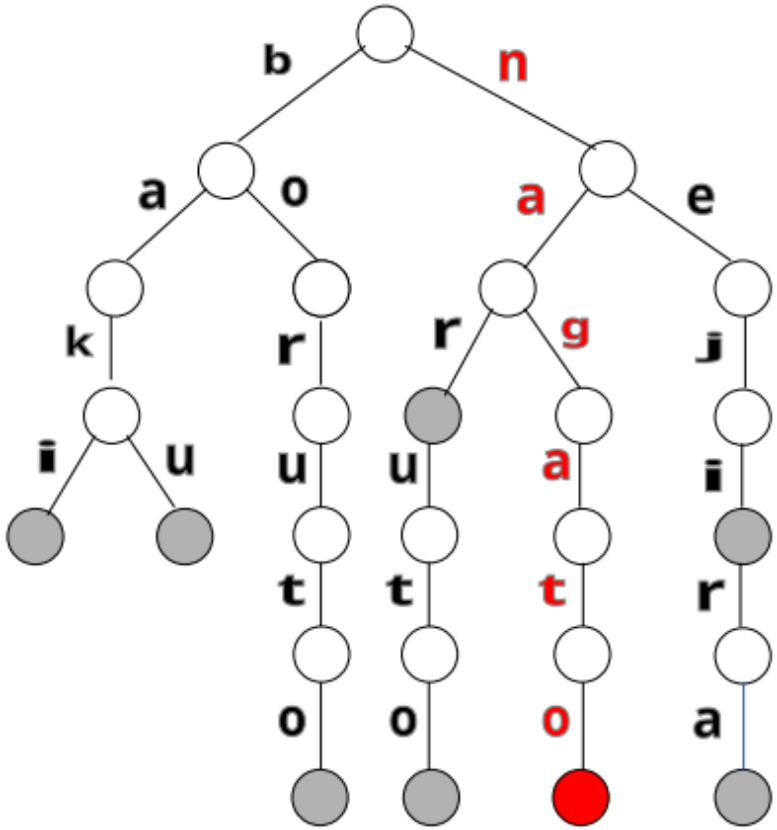
# Árvores Digitais

- Árvore trie
  - Exemplo de árvore trie para as seguintes chaves: baki, baku, boruto, nar, naruto, nagato, neji, nejira
  - Nós brancos apontam para NULL e nós cinzas apontam para chaves



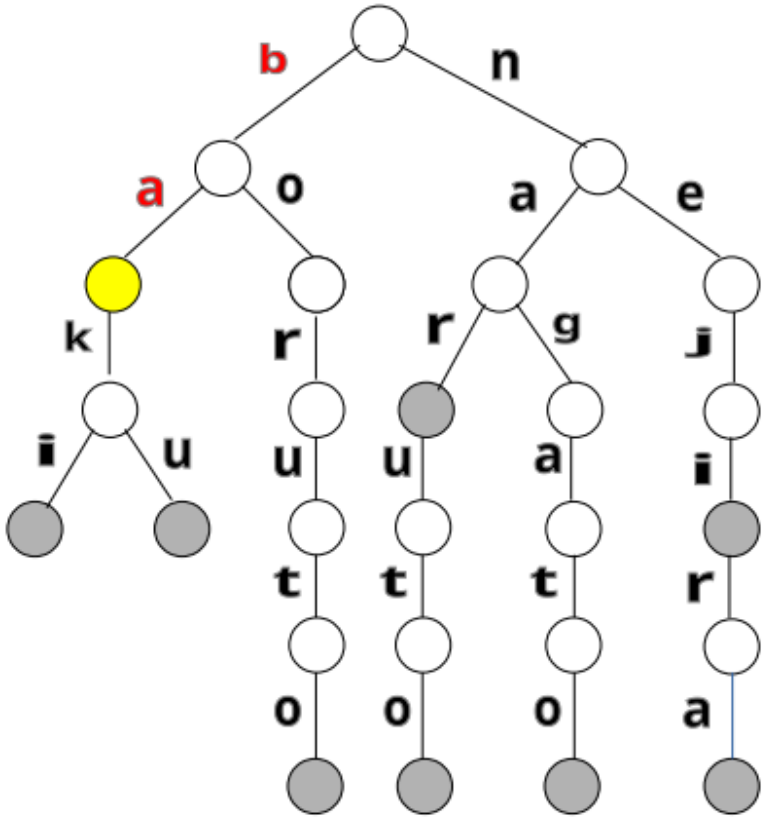
# Árvores Digitais

- Árvore trie
  - Exemplo de busca pela chave “nagato”



# Árvores Digitais

- Árvore trie
  - Exemplo de busca pela chave “baji”



# Árvores Digitais

- Árvore trie
  - Árvore *m*-ária cujos nós são vetores de *m* elementos
    - *m* se refere ao alfabeto, ou seja, a quantidade de caracteres diferentes que árvore tem
    - No exemplo anterior, a árvore possui o seguinte alfabeto: {a, b, e, g, i, j, k, o, r, t, u}
- Quanto maior a quantidade de chaves com prefixos comuns, mais eficiente é a árvore trie
- No entanto, se uma árvore trie possui muitos zigue-zagues no decorrer da sua estrutura, então é considerada ineficiente
- Árvores digitais podem consumir muito espaço de memória!

# Referências I



Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
*Introduction to Algorithms*.
Third edition, The MIT Press, 2009.


Marin, L. O.
Árvores B. AE23CP - Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.


Ziviani, N.
*Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++*.
Thomson, 2007.