Grafos: busca em largura

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

Introdução

- Grafos são estruturas mais complexas em comparação com listas, vetores e árvores binárias

- Grande parte dos problemas representados por grafos necessitam de métodos eficientes para a exploração dessa estrutura de dados

- A complexidade de algoritmos para grafos (G) é dada em termos de V e/ou E
  - V: conjunto de vértices
  - E: conjunto de arestas

Introdução

- Informações relevantes sobre a estrutura do grafo podem ser extraídas
  - Podem ser úteis para projetar algoritmos eficientes para determinados problemas

- Busca em grafos: processo de seguir sistematicamente pelas arestas a fim de visitar os vértices do grafo
  - Busca em profundidade
  - Busca em largura

Sumário

Busca em Largura

Busca em Largura

- Examina, sistematicamente, todos os vértices alcançáveis pelo vértice de origem s (também denominado fonte)
  - Um vértice v é alcançável a partir de um vértice s em um grafo G se existe um caminho de s a v em G

- A busca em largura também é denominada como busca por nível
  - Os vértices são explorados em ordem de distância em relação à fonte s

  - Por exemplo, a busca é iniciada nos vértices adjacentes a s, ou com distância $d = 1$ e, em seguida, processamento é continuado para $d = 2$

Busca em Largura

- O algoritmo de busca em largura tem a sua execução é finalizada quando todos os vértices alcançáveis a partir de s forem explorados

- Se v **não é alcançável** a partir de s, então dizemos que a distância entre ambos vértices é ∞ (infinita)
  - No início da aplicação do algoritmo, o vértice s começa com o valor de distância igual a zero e os demais com ∞
  - No final da execução do algoritmo, para cada vértice há um valor de distância em relação ao s

Busca em Largura

- Um algoritmo de busca em largura recebe um grafo $G = (V, E)$ e um vértice especificado s chamado fonte (*source*)

- Percorre todos os vértices alcançáveis a partir de s em ordem de distância

- O algoritmo constrói uma **árvore de busca em largura** (subgrafo acíclico gerador) com raiz s
    - Cada caminho entre s e v nessa árvore corresponde a um caminho mais curto entre ambos vértices

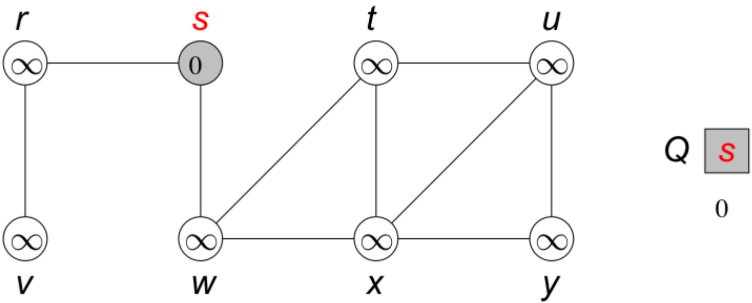
    - O algoritmo descobre todos os vértices a uma distância k do vértice origem antes de descobrir qualquer vértice a uma distância $k + 1$

Busca em Largura

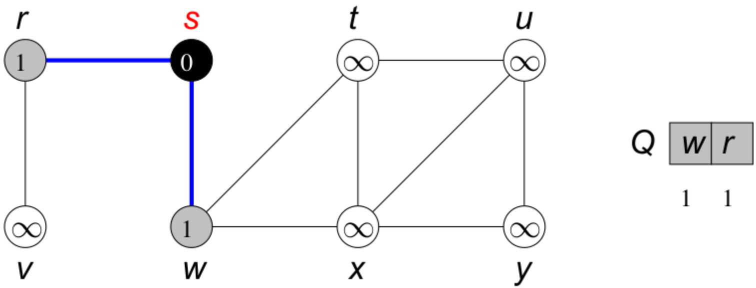
- Inicialmente a árvore de busca em largura contém apenas o vértice fonte s
- Para cada vizinho v de s, o vértice v e a aresta (s, v) são acrescentadas à árvore
- O processo é repetido para os vizinhos dos vizinhos de s
  - Isso é feito até que todos os vértices alcançáveis por s sejam adicionados na árvore
  - O algoritmo de busca em largura também pode formar uma floresta
- O processo de busca é implementado através de uma fila Q

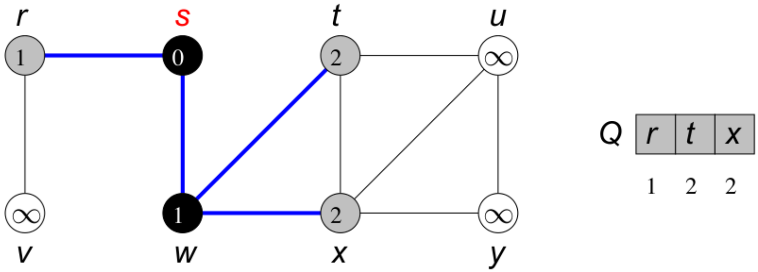
Busca em Largura

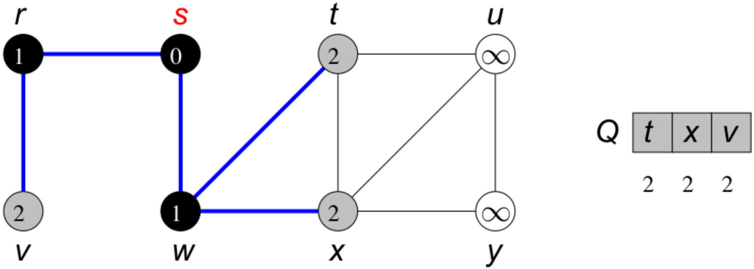
- Durante a aplicação do algoritmo de busca em largura, cada vértice pode ser colorido por meio das seguintes cores
  - Branca: não visitado (inicialmente, todos os vértices são brancos)
  - Cinza: visitado pela primeira vez
  - Preta: todos os seus vizinhos foram visitados
- Vértices de cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos, e eles representam a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos


r
s
t
u
0
∞
v
w
x
y
Q
s
0

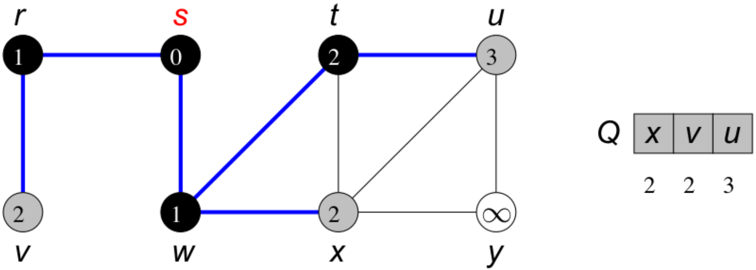
Busca em Largura
Exemplo



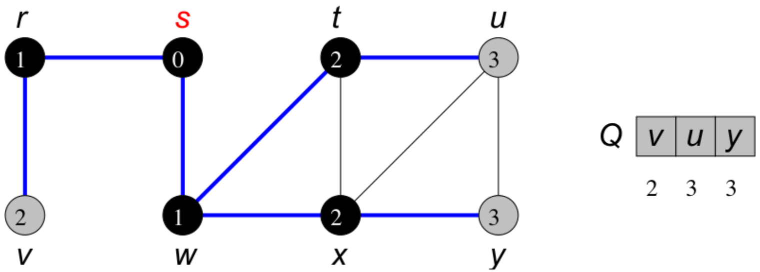

r
s
t
u
1
0
2
∞
∞
1
2
∞
v
w
x
y
Q
r
t
x
1
2
2



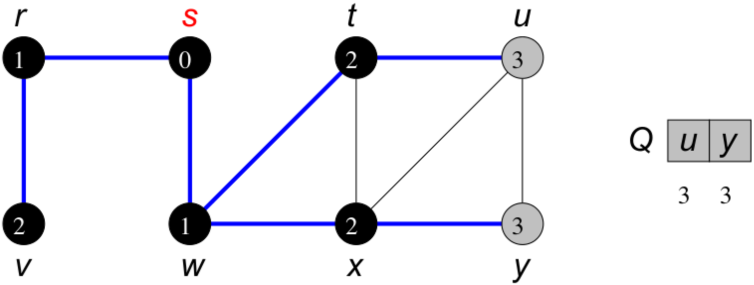
r
s
t
u
1
0
2
∞
2
1
2
∞
v
w
x
y
Q
t
x
v
2
2
2

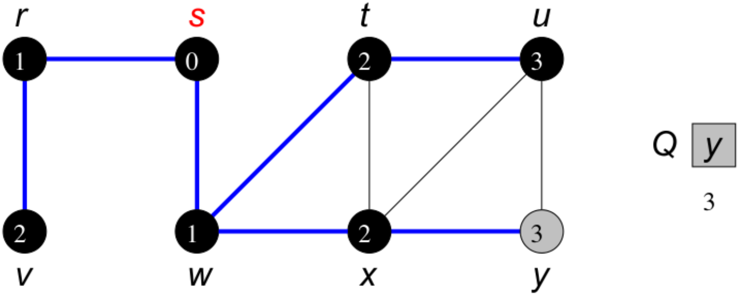


r
s
t
u
1
0
2
3
2
1
2
∞
v
w
x
y
Q
x
v
u
2
2
3

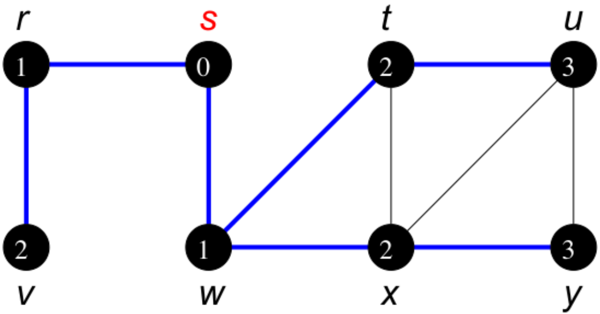


r
s
t
u
1
0
2
3
2
1
2
3
v
w
x
y
Q
v
u
y
2
3
3


r
s
t
u
1
0
2
3
2
1
2
3
v
w
x
y
Q
u
y
3
3



r
s
t
u
1
0
2
3
2
1
2
3
v
w
x
y
Q
y
3



$Q \ \emptyset$

Sumário

Implementação da Busca em Largura

Implementação da Busca em Largura

- A variável $d[v]$ é usada para armazenar a **distância** de s a v
  - Determinada durante o processo de busca
  - Na inicialização de d, $d[s] = 0$ e os demais são inciados com "infinito" ($d[v] = \infty$)
- Cores
  - Para cada vértice v, a cor atual é guardada no vetor $cor[v]$, que pode ser branco, cinza ou preto
  - Todos os elementos de *cor* são inicializados com branco
  - Para o efeito de implementação, o uso da cor não é realmente necessário, mas facilita a compreensão do algoritmo
- A raiz da árvore de busca em largura é s

Implementação da Busca em Largura

- Cada vértice v (exceto a raiz) possui um pai $\pi[v]$
  - Todos os elementos de π são inicializados com "nulo" ou um outro valor para representar que cada vértice ainda não tem pai
  - No final da aplicação, apenas s e vértices inalcançáveis por s não possuem pai
  - O caminho de s até v é dado por
    $$v, \pi[v], \pi[\pi[v]], \pi[\pi[\pi[v]]], ..., s$$
- O algoritmo de busca em largura recebe um grafo G (na forma de listas de adjacências), e um vértice $s \in V[G]$ e devolve
  1. Para cada vértice v, a distância de s a v em G
  2. Árvore ou floresta de busca em largura

Implementação da Busca em Largura

BUSCA-EM-LARGURA(G, s)

$\triangleright$ Inicialização
para cada $u \in V[G] - \{s\}$ **faça**
    $\mathrm{cor}[u] \leftarrow \mathrm{branco}$
    $d[u] \leftarrow \infty$
    $\pi[u] \leftarrow \mathrm{NIL}$
$\mathrm{cor}[s] \leftarrow \mathrm{cinza}$
$d[s] \leftarrow 0$
$\pi[s] \leftarrow \mathrm{NIL}$
$Q \leftarrow \emptyset$
ENQUEUE(Q, s)

Implementação da Busca em Largura

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

- π é a árvore de busca em largura

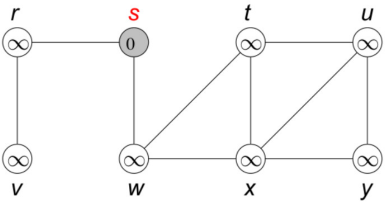
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

BUSCA-EM-LARGURA(G, s)

```
▷ Inicialização
para cada u ∈ V[G] − {s} faça
    cor[u] ← branco
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NIL
cor[s] ← cinza
d[s] ← 0
π[s] ← NIL
Q ← ∅
ENQUEUE(Q, s)
```

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	b	0	b	b	b	b	b	b
pi	a	a	a	a	a	a	a	a



Q: s

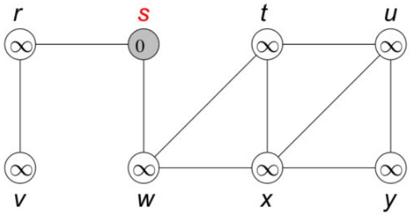
0

Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	b	0	b	b	b	b	b	b
pi	a	a	a	a	a	a	a	a



Q: s

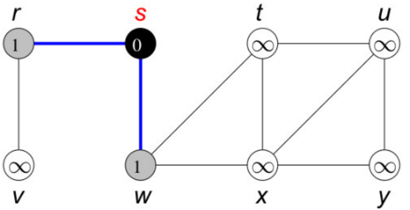
0

Implementação da Busca em Largura
Exemplo

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

u = s

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	b	b	b	b	b	1
pi	s	a	a	a	a	a	a	s

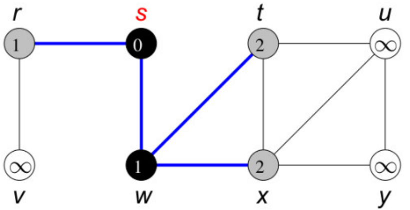


Q | w | r |
1 1

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

u = w

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	b	b	2	b	1
pi	s	a	w	a	a	w	a	s



Q	r	t	x
	1	2	2

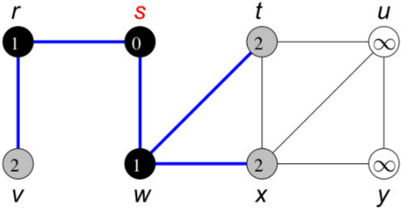
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
  $u \leftarrow$ DEQUEUE(Q)
  para cada $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **faça**
    se $cor[v] = \mathrm{branco}$ **então**
      $\mathrm{cor}[v] \leftarrow \mathrm{cinza}$
      $d[v] \leftarrow d[u] + 1$
      $\pi[v] \leftarrow u$
      ENQUEUE(Q, v)
  $\mathrm{cor}[u] \leftarrow \mathrm{preto}$

u = r

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	b	2	2	b	1
pi	s	a	w	a	r	w	a	s



Q	t	x	v
	2	2	2

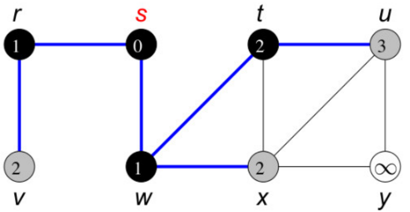
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

u = t

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	b	1
pi	s	a	w	t	r	w	a	s



Q	x	v	u
	2	2	3

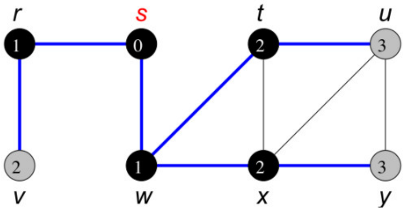
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

u = x

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
pi	s	a	w	t	r	w	x	s

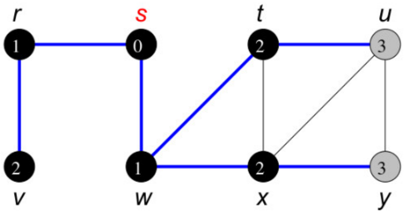


Q	v	u	y
	2	3	3

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

u = v

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
pi	s	a	w	t	r	w	x	s

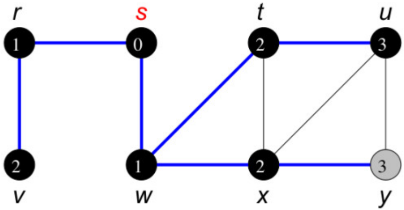


Q	u	y
	3	3

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

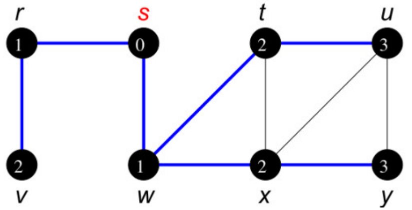
u = u

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
pi	s	a	w	t	r	w	x	s



Q | y |
3

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← DEQUEUE(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            ENQUEUE(Q, v)
    cor[u] ← preto
```



u = y

	r	*s*	*t*	*u*	*v*	*x*	*y*	*w*
d	1	0	2	3	2	2	3	1
pi	s	a	w	t	r	w	x	s

Q $\emptyset$

Análise de Complexidade da Busca em Largura

Análise de Complexidade da Busca em Largura

- A inicialização consome tempo $O(|V|)$

- Depois que um vértice deixa de ser branco, ele não volta a ser branco novamente
  - Cada vértice é adicionado na fila apenas uma vez
  - Cada operação sobre a fila consome tempo $O(1)$, resultando em um total de $O(|V|)$

- Em uma lista de adjacência, cada vértice é percorrido apenas uma vez
  - A soma dos comprimentos das listas de adjacência é $O(|E|)$
  - Logo, o tempo gasto para percorrer as listas é $O(|E|)$

- **Conclusão**

A complexidade de tempo do algoritmo
BUSCA-EM-LARGURA é $O(|V| + |E|)$

Sumário

Caminho Mais Curto

Caminho Mais Curto

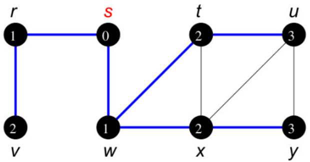
Print-Path(G, s, v)

se $v = s$ **então**
    imprime s
senão
    se $\pi[v] =$ NIL **então**
        imprime não existe caminho de s a v.
    senão
        Print-Path$(G, s, \pi[v])$
        imprime v.

Caminho Mais Curto

- Imprime um caminho mais curto de s a u

```
Print-Path(G, s, v)
    se v = s então
        imprime s
    senão
        se π[v] = NIL então
            imprime não existe caminho de s a v.
        senão
            Print-Path(G, s, π[v])
            imprime v.
```



Print-Path(G, s, u)

Print-Path(G, s, t)

Print-Path(G, s, w)

Print-Path(G, s, s)

imprime s

imprime w

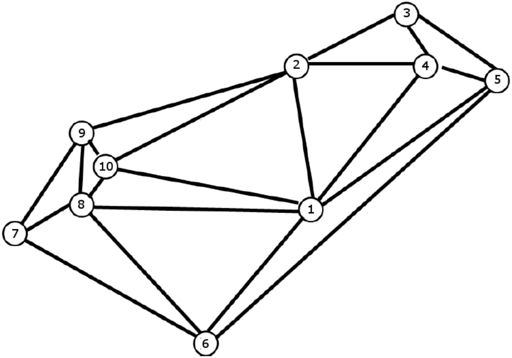
imprime t

imprime u

	r	s	t	u	v	x	y	w
pi	s	a	w	t	r	w	x	s

Exercício

- Considere o grafo abaixo e faça:



- Execute a busca em largura considerando o vértice 1 como origem. Para este caso, considere que todas as listas de adjacência estejam ordenadas crescentemente.

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Marin, L. O.
Grafos – Algoritmos de Busca: Busca em Largura. AE23CP – Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.