

Complexidade de Algoritmos (parte 3)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

- Recorrência
- Resolução de Recorrências
 - Método da substituição
 - Método da iteração
 - Método da árvore de recursão
 - Método mestre

- Na aula anterior foi abordada a análise de complexidade de algoritmos
 - No entanto, analisamos apenas algoritmos iterativos
- Como é feita a análise de complexidade de algoritmos recursivos?

```
sub_rotina fatorial(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  se n = 1
    então aux ← 1;
    senão aux ← n * fatorial(n - 1);
  fatorial ← aux;
Fim
```

- O exemplo apresentado anteriormente é obviamente $O(n)$, tanto para o tempo de execução quanto para espaço
- Se a recursão é um "disfarce" da repetição (geralmente uma má aplicação da recursão), basta analisá-la como tal

```
sub_rotina fatorial(n:  numérico)
```

```
Início
```

```
  declare aux numérico;
```

```
  declare i numérico;
```

```
  aux ← 1;
```

```
  para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça
```

```
    aux ← aux + i * aux;
```

```
  fatorial ← aux;
```

```
Fim
```

- Em muitos casos (até para recursividade mal empregada), é difícil transformar a sub-rotina em iteração
 - Pode ser necessário a análise de recorrência para analisar o desempenho do algoritmo

Recorrência

- Função matemática que descreve sequências/conjuntos em termos de seu valor em entradas anteriores
 - Comumente aplicada para a análise de algoritmos de divisão-e-conquista
- Análise de recorrência
 - Caso base (1): tempo de execução constante (têm casos em que não é necessário)
 - Caso indutivo (2): quando o teste para o caso base falha, ou seja, o algoritmo não é executado em tempo constante
- Uma recorrência pode ter mais de um caso base e/ou caso indutivo

- Exemplo de uso de recorrência:
 - Números de Fibonacci
 - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
 - $\text{fib}(0) = 0$, $\text{fib}(1) = 1$, $\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$

```
sub_rotina fib(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  se n = 0
    então aux ← 0
  senão se n = 1
    então aux ← 1
  senão aux ← fib(n - 1) + fib(n - 2);
  fib ← aux
Fim
```


- Seja $T(n)$ o tempo de execução da função
 - Caso 1 (base): o tempo de execução é constante
 - se $n = 0$ o custo é para comparar o valor n + atribuir o valor 1 para aux + atribuir o valor de aux ao nome da função (retorno), ou seja, $T(0) = 3$
 - $n = 1$, o custo é para falhar na comparação do valor n com zero + comparar n com 1 + atribuir o valor 1 para aux + atribuir o valor de aux ao nome da função (retorno), ou seja, $T(1) = 4$
 - Caso 2 (indução): se $n > 1$, quando falha a segunda comparação (custo 2 até o momento), é feita uma atribuição + uma soma + duas chamadas recursivas + duas subtrações + uma atribuição o valor de aux ao nome da função, o que resulta na recorrência $T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + 7$

- O problema recursivo apresentado pode ser representado na seguinte forma:

$$T(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + 7, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Exemplo de uso de recorrência para a análise de espaço:

```
sub_rotina fib(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  se n = 0
    então aux ← 0
  senão se n = 1
    então aux ← 1
  senão aux ← fib(n - 1) + fib(n - 2);
  fib ← aux
Fim
```

- Seja $T(n)$ o espaço necessário função
 - Caso (base):
 - se $n = 0$ ou $n = 1$, precisamos de três unidades de espaço (1 para n , 1 para *aux* e outro para o retorno), ou seja,
 $T(0) = T(1) = 3$
 - Caso 2 (indução): se $n > 1$, são realizadas duas chamadas recursivas, ou seja, há mais alocação de espaço, resultando na recorrência $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3$, sendo que o valor 3 ocorre da mesma forma que o caso base (1 para n , 1 para *aux* e outro para o retorno)

- O espaço do problema recursivo apresentado pode ser representado na seguinte forma:

$$T(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + 3, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Resolução de Recorrências

- Diversas técnicas podem ser aplicadas para a resolução de recorrências
 - Método da substituição
 - Método da iteração
 - Método mestre
 - Método da árvore de recursão

Resolução de Recorrências

Método da substituição

- Propõe chutar uma fórmula para recorrência
- Após, chute deve ser verificado se funciona para o caso base (substituir o valor de n para o valor que acarreta no caso base)
- Em seguida, é demonstrado que a fórmula está correta através da indução matemática
- Formas de fazer bons chutes
 - Ter "boa base" matemática (experiência)
 - Usar árvores de recursão (veremos mais adiante)
 - Utilizar o resultado de outras formas de análise de recorrência (e.g. método da iteração)

Resolução de Recorrências

Método da substituição

- Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 3n + 2, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Chute: $T(n) = \frac{3n^2+7n}{2} - 4$

Resolução de Recorrências

Método da substituição

- Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 3n + 2, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Chute: $T(n) = \frac{3n^2+7n}{2} - 4$

- Resolução:

Caso base ($n = 1$): $T(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1}{2} - 4 = 5 - 4 = 1$

Indução: suponha que o chute vale para $n - 1$

$$T(n-1) = \frac{3(n-1)^2 + 7(n-1)}{2} - 4$$

Temos:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 = \frac{3(n-1)^2 + 7(n-1)}{2} - 4 + 3n + 2 \\ &= \frac{3n^2 - 6n + 3 + 7n - 7}{2} + 3n - 2 = \frac{3n^2 + n - 4}{2} + 3n - 2 \\ &= \frac{3n^2 + 7n}{2} - 4, \text{ ou seja, a complexidade é } O(n^2) \end{aligned}$$

Resolução de Recorrências

Método da iteração

- É uma forma do método da substituição onde a recorrência é expandida (iterada) e expressada como um somatório em termos de n
- Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Resolução de Recorrências

Método da iteração

- É uma forma do método da substituição onde a recorrência é expandida (iterada) e expressada como um somatório em termos de n
- Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Resolução:

Expandindo a recorrência, temos $T(n) = T(n-1) + n$

$$= T(n-1-1) + n + (n-1)$$

$$= T(n-2-1) + n + (n-1) + (n-2)$$

$$= T(n-3-1) + n + (n-1) + (n-2) + (n-3)$$

$$= T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

Substituindo k por n , temos:

$$T(n) = T(0) + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)$$

$$T(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \text{ ou seja, a complexidade é } O(n^2)$$

Resolução de Recorrências

Método da iteração

- Exemplo 2:

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

- > Observe que a recorrência acima não possui um valor inicial
- > Neste caso, podemos definir o valor inicial de acordo com a nossa preferência
- > Para este tipo de recorrência, geralmente, o interesse é a obtenção do limite assintótico

Resolução de Recorrências

Método da iteração

- Exemplo 2:

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

Resolução

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n/2) + 1 \\&= T(n/4) + 1 + 1 \\&= T(n/8) + 1 + 1 + 1 \\&= T(n/16) + 1 + 1 + 1 + 1 \\&\dots \\&= T(n/2^k) + k\end{aligned}$$

- > Considerando que n seja potência de 2 e que a iteração segue até $T(1)$, temos $n = 2^k$, ou seja, $k = \log n$
- > Assumindo que $T(1) = 0$, temos:
 $T(n) = T(n/2^{\log n}) + \log n = T(n/n) + \log n = T(1) + \log n = 0 + \log n$
 $T(n) = \log n$, ou seja, a complexidade é $O(\log n)$

Resolução de Recorrências

Método da iteração

- Exemplo 2:

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

Resolução (2)

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n/2) + 1 \\&= T(n/4) + 1 + 1 \\&= T(n/8) + 1 + 1 + 1 \\&= T(n/16) + 1 + 1 + 1 + 1 \\&\dots \\&= T(n/k) + \log k\end{aligned}$$

-> Considerando que $k = n$ e que a iteração segue até $T(1) = 0$ temos:

$$T(n) = T(n/n) + \log n = T(1) + \log n = 0 + \log n$$

$$T(n) = \log n, \text{ ou seja, a complexidade é } O(\log n)$$

- Possibilita a definição de complexidades assintóticas para recorrências que apresentam as seguintes condições:
 - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
 - $a \geq 1$ e $b > 1$
- Caso a recorrência atenda essas condições, as seguintes situações devem ser analisadas:
 - 1 Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para a constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
 - 2 Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$
 - 3 Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para a constante $\epsilon > 0$, e se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, para a constante $c < 1$ e n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

- Exemplo 1:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

- Exemplo 1:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Resolução:

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

$$\log_b a = \log_3 9 = 2$$

$$f(n) \in O(n^{\log_3 9 - \epsilon}), \text{ para } \epsilon = 1 \text{ (situação 1)}$$

$$n \in O(n)$$

$$\text{Então, } T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}), \text{ ou seja } \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$$

Se o objetivo é obter a complexidade no pior caso, o termo acima pode ser representado em termos de *big-oh*: $O(n^2)$

- Exemplo 2:

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

- Exemplo 2:

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

Resolução:

$$a = 1$$

$$b = 3/2$$

$$f(n) = 1$$

$$\log_b a = \log_{3/2} 1 = 0$$

$$f(n) \in \Theta(n^0) \text{ (situação 2)}$$

$$1 \in \Theta(1)$$

Então, $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$, ou seja

$$\Theta(n^{\log_{3/2} 1} \log_2 n) = \Theta(\log_2 n)$$

- Exemplo 3:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

- Exemplo 3:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

Resolução:

$$a = 2$$

$$b = 2$$

$$f(n) = n^2$$

$$\log_b(a) = \log_2 2 = 1$$

$$f(n) \in \Omega(n^{\log_2 2 + \epsilon}), \text{ para } \epsilon = 1 \text{ (situação 3)}$$

$$n^2 \in \Omega(n^2)$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$$

$$\frac{n^2}{2} \leq cf(n), \text{ para } c = \frac{1}{2}$$

Então, $T(n) \in \Theta(f(n))$, ou seja $\Theta(n^2)$

Resolução de Recorrências

Método árvore de recorrência

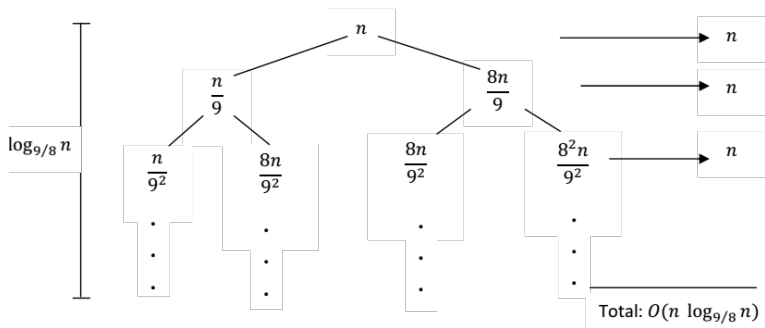
- Similar ao método da iteração
- Permite visualizar melhor os termos da recorrência à medida que eles são expandidos (mais amigável)
- Nesse método, uma árvore é desenvolvida nível a nível, representando as recursões
- Em cada nível/nó da árvore são acumulados os tempos necessários para o processamento
- No final, a estimativa do tempo do problema é obtida

Resolução de Recorrências

Método árvore de recorrência

- Exemplo:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{9}\right) + T\left(\frac{8n}{9}\right) + n$$



- Existem recorrências que não se conhecem métodos de resolução
- Apesar das recorrências serem um tema da disciplina "Matemática Discreta para Engenharia de Computação" (MD24CP), esse assunto é de grande importância para a análise de alguns algoritmos que serão vistos nas próximas aulas



Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.



Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.



Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à
Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.



Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.