Notas de Aula - AED2 – Árvores: árvores binárias
Prof. Jefferson T. Oliva

Em AED1, vocês viram estruturas de dados lineares, como listas, filas e pilhas, as quais não são adequadas para representar dados que devem ser organizados de forma hierárquica.

Hoje e em parte das próximas aulas veremos: árvores, que são estruturas cujas informações são organizadas de forma hierárquica.

Árvores são estruturas bastante eficientes para o armazenamento de informações e possuem diversas aplicações, como: sistema de arquivos, processamento de língua natural, expressões algébricas, páginas web, compactação de dados, inteligência artificial, *clustering*, etc.

Formalmente, podemos dizer que uma árvore é um conjunto finito de nós, sendo que cada nó contém ao menos um registro (identificador), podendo ter ramificações para os nós descendentes e/ou ancestrais.

Assim, para cada árvore contém um nó raiz r, a partir de onde outras informações podem ser acessadas.

Os nós internos são filhos de r. A partir de cada nó interno é composta uma subárvore, a qual também possui um nó raiz, que é descendente de r.

Uma árvore pode ter apenas um único elemento (raiz). A partir do nó raiz, cada nó descendente é uma subárvore. Também, uma árvore pode conter nós folhas, os quais não possuem descendentes (filhos).

Em uma árvore pode ser calculada diversas propriedades, das quais as mais comuns são:
- Altura: distância entre o nó raiz e o nó mais profundo (comprimento do caminho mais longo).
- Profundidade: distância entre um determinado nó e a raiz, que tem profundidade 0.
- Balanceamento: se refere ao tamanho das subárvores. Diz-se que uma árvore balanceada possui todas as subárvores com diferença máxima de altura igual a 1.

Veremos quatro tipos de árvores: árvore binária, AVL, vermelha-preta e árvore B.

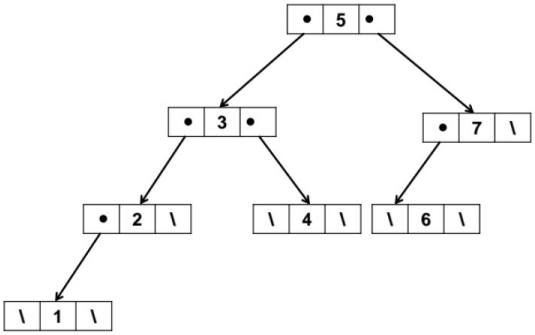
Hoje abordaremos árvores binárias.

Árvores Binárias (AB)

Árvore em que cada nó contém no máximo dois filhos.

As AB têm algumas propriedades interessantes:
- Uma AB com n elementos tem n – 1 ramos
- Uma AB de altura h tem no mínimo h elementos (quando o crescimento é apenas em uma direção, lembrando uma lista) e no máximo 2^{n – 1} – 1, quando uma árvore está completamente "cheia" (exceto os nós folhas). Assim, uma árvore cheia de altura h tem 2^{h + 1}.
- Desse modo, a altura de uma AB é no máximo n – 1 (crescimento apenas em uma direção) e no mínimo log(n) – 1.

Uma AB pode ser representada através de uma struct com as seguintes informações: informação, subárvore esquerda e subárvore direita.



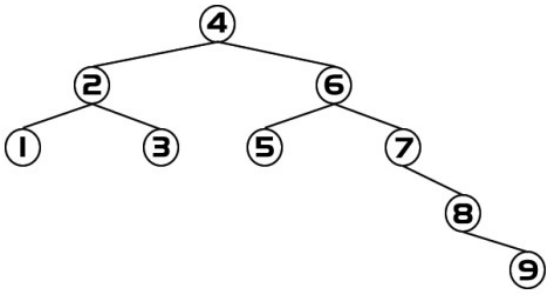
Estrutura para representação de AB

```
typedef struct Node Node;

struct Node{
   int item;
   Node* right;
   Node* left;
};

int create(Node* tree){
   if (tree == NULL){
      ree = (Node*) malloc(sizeof(Node));
      tree->left = NULL;
      tree->right = NULL;
      return 1;
   }
   return 0;
}
```

```
void liberar_arvore(Node* tree){
    if (tree != NULL){
        liberar_arvore(tree->left);
        liberar_arvore(tree->right);
        free(tree);
    }
}
```

Árvores Binárias de Busca (ABB)

Também conhecidas como árvores binárias de pesquisa, ABB são AB que exibem propriedades de ordenação.



Uma ABB deve atender as seguintes propriedades:
- Todo nó tem uma chave.
- As chaves (se houver) na subárvore esquerda são menores do que a chave na raiz.
- As chaves (se houver) na subárvore direita são maiores do que a chave na raiz.
- Sobre essas duas últimas propriedades, podem ser inversas (esquerda maior e direita menor), mas são menos usadas.
- As sub-árvores esquerda e direita são também ABB

Principais operações em uma árvore binária de busca:

- Pesquisa

- Inserção

- Remoção

- Percurso (impressão): infix, prefix e postfix

Pesquisa

O objetivo é encontrar o nó com o mesmo valor procurado.

Parecida com a busca binária, mas não há necessidade de cálculos adicionais.

Em uma ABB, a busca é iniciada pela raiz e atende uma das seguintes condições:
- Se o valor for encontrado, o nó é retornado.
- Se o valor é menor que o registro do nó analisado, uma chamada recursiva da função é realizada para a subárvore esquerda.
- Se o valor é maior que o registro do nó analisado, uma chamada recursiva da função é realizada para a subárvore direita.
- A função pode retornar NULL, caso a busca chega ao limite da árvore (nó-folha) e o item não é encontrado.

Implementação da função de busca:

```
Node* search(Node* tree, int value){
   if (tree != NULL)
      if (tree->item == value)
         return tree;
      else if (tree->item < value)
         return search(tree->left, value);
      else
         return search(tree->right, value);
   else
      return NULL;
}
```

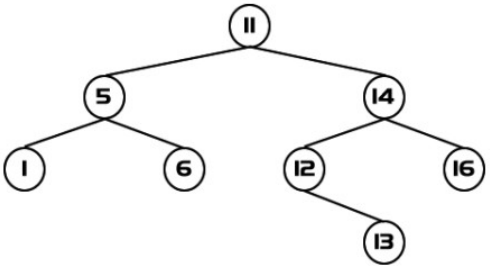
Como encontrar a menor ou a maior chave em uma árvore binária de busca? Explorando as subárvores esquerda e direita, respectivamente.

Complexidade de tempo e e de espaço (para algoritmo recursivo, considerando apenas o espaço extra) para busca, mínimo e máximo:
- Melhor caso: O(1), quando o item procurado está na raiz.
- Caso médio: O(log n), caso a árvore esteja balanceada e o item procurado esteja em um dos nós folhas ou não é encontrado.
- Pior caso: O(n), quando a árvore tem a forma de uma lista (todos os elementos estão apenas em uma direção) e o item está no nó-folha ou não é encontrado.
- Complexidade de espaço para algoritmo iterativo: Theta(1)

Inserção

Percorre a estrutura até chegar a um determinado ponteiro cujo nó filho (direito ou esquerdo) seja NULL

Exemplo: geração de uma árvore binária de busca a partir da sequência 11, 5, 14, 12, 13, 1, 6 e 16



Código para inserção de um nó:

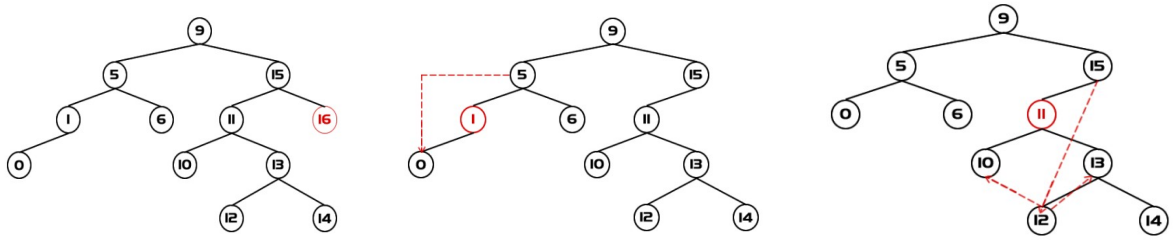
```
Node* insert(Node* tree, int value){
   if (tree == NULL){
      create(tree);
      tree->item = value;
   }else if (value < tree->item)
      tree->left = insert(tree->left, value);
   else
      tree->right = insert(tree->right, value);

   return tree;
}
```

A função acima permite a inserção de itens repetidos. O você faria para que a árvore não contenha itens repetidos? Resposta: no último *else* basta adicionar *if (value > tree->item)*

Complexidade de tempo e de espaço (algoritmo recursivo) para inserção:
- Melhor caso: O(1), quando o item procurado está na raiz.
- Caso médio: O(log n), caso a árvore esteja balanceada e o item procurado esteja em um dos nós folhas ou não é encontrado.
- Pior caso: O(n), quando a árvore tem a forma de uma lista (todos os elementos estão apenas em uma direção) e o item está no nó-folha ou não é encontrado.

Remoção

Três casos básicos devem ser considerados para a remoção de um nó z em uma árvore binária de busca:
- Caso z não tenha filhos, remova-o de modo que o nó pai substitua z por NULO
- Caso o nó tenha apenas um filho, o mesmo deve substituir o nó z
- Caso z possua dois filhos, utilizar o nó y que contenha o menor valor da subárvore direita para substituir z



Código para a remoção de um nó

```
int delete(Node* tree, int value){
        Node *aux, *auxP, auxF;

        if (tree != NULL){
                if (value < tree->item)
                        delete(tree->left, value);
                else if (value > tree->item)
                        delete(tree->right, value);
                else{// Exclusão de item
                        aux = tree;
                        if (aux->left == NULL) // funciona para dos casos: quando o nó não possui descendentes ou apenas um do lado direito
                                tree = tree->right;
                        else if (aux->right == NULL) // nó possui descendente ao lado esquerdo
                                tree = tree->left;
                        else{ // nó possui descendentes em ambos lados
                                auxP = aux->right; // Nó pai de auxF
                                auxF = auxP; // menor nó da subárvore direita (irá substituir o nó removido)
                                while (auxF->left != NULL){
                                        auxP = auxF;
                                        auxF = auxF->left;
                                }
                                auxP->left = auxF->right; // O lado esquerdo de auxP recebe o lado direito de auxF
                                auxF->lelft = aux->left; // o lado esquerdo de auxF aponta para ao lado esquerdo do nó a ser removido
                                auxF->right = aux->right; // o lado direito de auxF aponta para ao lado direito do nó a ser removido
                                tree = auxF; // atualização do nó analisado
                        }
                        free(aux); // exclusão segura do nó
                        return 1;
                }
        }

        return 0;
}
```

Ver slides de 36 a 52.

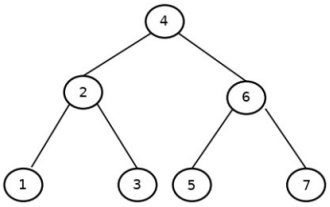
Exercício no slide 53.

Complexidade tempo e de espaço (algoritmo recursivo) para remoção:
- Melhor caso: O(1), quando o item procurado está na raiz.
- Caso médio: O(log n), caso a árvore esteja balanceada e o item procurado esteja em um dos nós folhas ou não é encontrado.
- Pior caso: O(n), quando a árvore tem a forma de uma lista (todos os elementos estão apenas em uma direção) e o item está no nó-folha ou não é encontrado.

Percurso

Pré-ordem
- A raiz é visitada primeiramente
- Após, as sub-árvores da direita à esquerda são processadas em pré-ordem

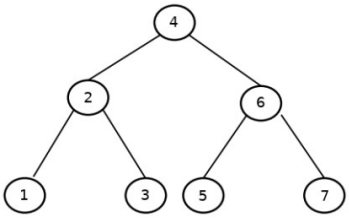
```
void prefix(Node* tree){
   if (tree != NULL){
      printf("%d\n", tree->item);
      prefix(tree->left);
      prefix(tree->right);
   }
}
```



Percurso: 4, 2, 1, 3, 6, 5, 7

Ordem simétrica
- Primeiramente, a sub-árvore esquerda é percorrida em ordem simétrica
- Após, a raiz é visitada
- Por último, a sub-árvore direita é percorrida em ordem simétrica
- Em árvores binárias, a raiz é visitada entre as duas subárvores
- Em árvores n-nárias (n > 2), A subárvore da esquerda é percorrida em ordem simétrica, depois a raiz é visitada e depois as outras subárvores são visitadas da esquerda para a direita, sempre em ordem simétrica

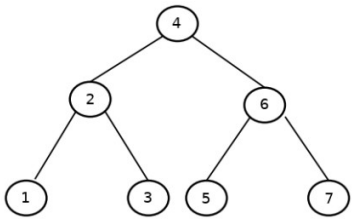
```
void infix(Node* tree){
   if (tree != NULL){
      infix(tree->left);
      printf("%d", tree->item);
      infix(tree->right);
   }
}
```



Percurso: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

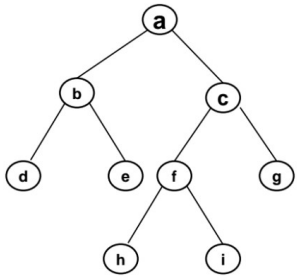
Pós-ordem
- A raiz é a última a ser visitada
- Todas as subárvores da direita até a esquerda são percorridas em pós-ordem

```
void posfix(Node* tree){
   if (tree != NULL){
      posfix(tree->left);
      posfix(tree->right);
      printf("%d", tree->item);
   }
}
```



Percurso: 1, 3, 2, 5, 7, 6, 4

Exercício: para a árvore abaixo, faça os três tipos de percurso



Referências

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S. Algoritmos: teoria e prática. Elsevier, 2012.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S. Computer Algorithms. Computer Science Press, 1998.

Pereira, S. L. Estrutura de Dados e em C: uma abordagem didática. Saraiva, 2016.

Szwarcfiter, J.; Markenzon, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. LTC, 2010.

Ziviani, M. Projetos de Algoritmos: com implementações em Pascal e C. Thomson, 2004.