Grafos: caminhos mínimos

Prof. Jefferson T. Oliva
Material da Profa. Luciene de Oliveira Marin

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Problema do(s) Caminho(s) Mínimo(s)

Problema do(s) Caminho(s) Mínimo(s)

Problema do(s) Caminho(s) Mínimo(s)

Seja G um grafo orientado e suponha que para cada aresta (u, v) associamos um peso (custo, distância) (u, v). Usaremos a notação (G, w).

- **Problema do Caminho Mínimo entre Dois Vértices:** Dados dois vértices s e t em (G, w), encontrar um caminho (de peso) mínimo de s a t.
- Aparentemente, este problema não é mais fácil do que o **Problema dos Caminhos Mínimos com Mesma Origem:** Dados (G, w) e $s \in V[G]$, encontrar para cada vértice v de G, um caminho mínimo de s a v.

Problema do(s) Caminho(s) Mínimo(s)

Teorema. Seja (G, w) um grafo orientado e seja

$$P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

um **caminho mínimo** de v_1 a v_k .
Então para quaisquer i, j com $1 \leq i \leq j \leq k$

$$P_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$$

é um **caminho mínimo** de v_i a v_j .

Representação de caminhos mínimos

- Usamos uma idéia similar à usada em **Busca em Largura** no algoritmo de caminhos mínimos que veremos.
- Para cada vértice $v \in V[G]$ associamos um predecessor $\pi[v]$.
- Ao final do algoritmo obtemos uma Árvore de Caminhos Mínimos com raiz s.
- Um caminho de s a v nesta árvore é um caminho mínimo de s a v em (G, w).

Estimativa de distâncias

- Para cada $v \in V[G]$ queremos determinar $dist(s, v)$, o peso de um caminho mínimo de s a v em (G, w) (distância de s a v.)
- Os algoritmos de caminhos mínimos associam a cada $v \in V[G]$ um valor $d[v]$ que é uma estimativa da distância $dist(s, v)$.

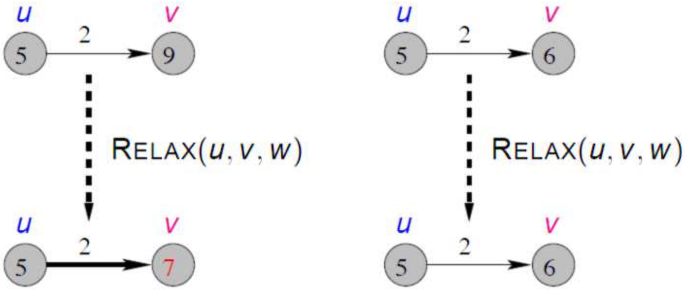
Algoritmo - inicialização

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
para cada vértice v ∈ V[G] faça
    d[v] ← ∞
    π[v] ← NIL
d[s] ← 0
```

- O valor $d[v]$ é uma estimativa superior para o peso de um caminho mínimo de s a v.
- Ele indica que o algoritmo encontrou até aquele momento um caminho de s a v com peso $d[v]$.
- O caminho pode ser recuperado por meio dos predecessores $\pi[]$.

Algoritmo - relaxação

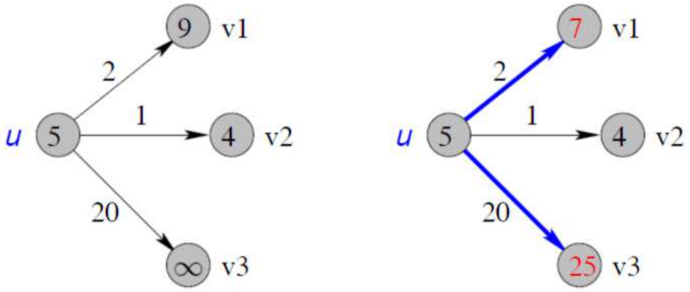
Tenta melhorar a estimativa $d[v]$ examinando (u, v).



RELAX(u, v, w)

```
se d[v] > d[u] + w(u, v)
    então d[v] ← d[u] + w(u, v)
          π[v] ← u
```

Em cada iteração o algoritmo seleciona um vértice u e para cada vizinho v de u aplica RELAX(u, v, w).



RELAX(u, v, w)

1 **se** $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **faça**

2 $\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

3 $\quad \pi[v] \leftarrow u$

Existem três algoritmos baseados em relaxação para tipos de instâncias diferentes de **Problemas de Caminhos Mínimos**.

- G é acíclico: aplicação de ordenação topológica
- (G, w) não tem arestas de peso negativo: **algoritmo de Dijkstra**
- (G, w) tem arestas de peso negativo, mas não contém ciclos negativos: algoritmo de Bellman-Ford.

Algoritmo de Dijkstra

Algoritmo de Dijkstra

Objetivo:

- encontrar o caminho de distância mínima de um vértice origem x a um vértice destino y.
- resolve o problema do caminho mínimo em um grafo direcionado ou não direcionado com arestas de peso não negativo
- É semelhante ao **algoritmo BFS (busca em largura)**, utilizando uma estratégia gulosa.

Entrada

O algoritmo de Dijkstra recebe um grafo orientado (ou não) (G, w) (sem arestas de peso negativo) e um vértice s de G

e devolve

Saída

- para cada $v \in V[G]$, o peso de um caminho mínimo de s a v
- e uma Árvore de Caminhos Mínimos com raiz s.
  Um caminho de s a v nesta árvore é um caminho mínimo de s a v em (G, w).

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
    S ← ∅
    Q ← V[G]
    enquanto Q ≠ ∅ faça
        u ← EXTRACT-MIN(Q)
        S ← S ∪ {u}
        para cada vértice v ∈ Adj[u] faça
            RELAX(u, v, w)
```

O conjunto Q é implementado como uma fila de prioridade.

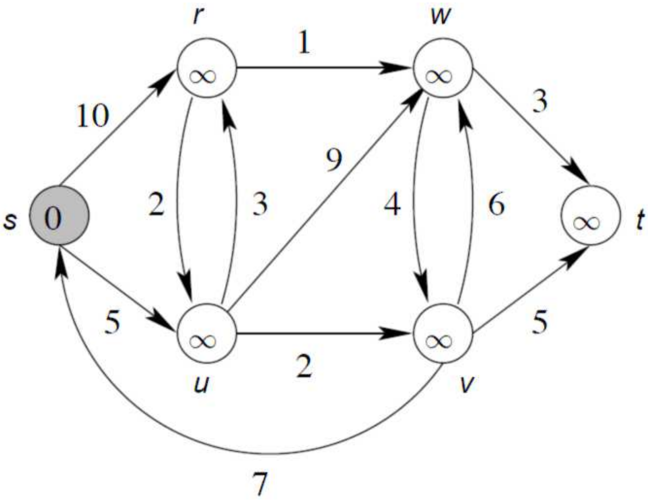
O conjunto S não é realmente necessário, mas simplifica a análise do algoritmo.

Algoritmo de Dijkstra - intuição do algoritmo

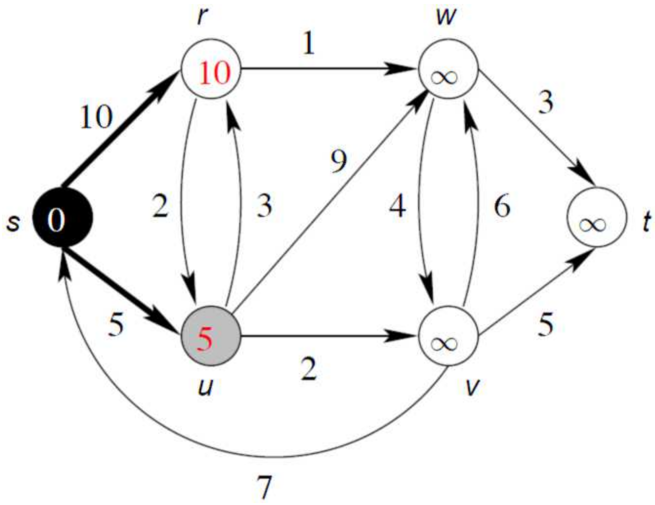
Em cada iteração, o algoritmo de DIJKSTRA

- escolhe um vértice u fora do conjunto S que esteja mais próximo a esse e acrescenta-o a S,
- atualiza as distâncias estimadas dos vizinhos de u e
- atualiza a **Árvore dos Caminhos Mínimos**.

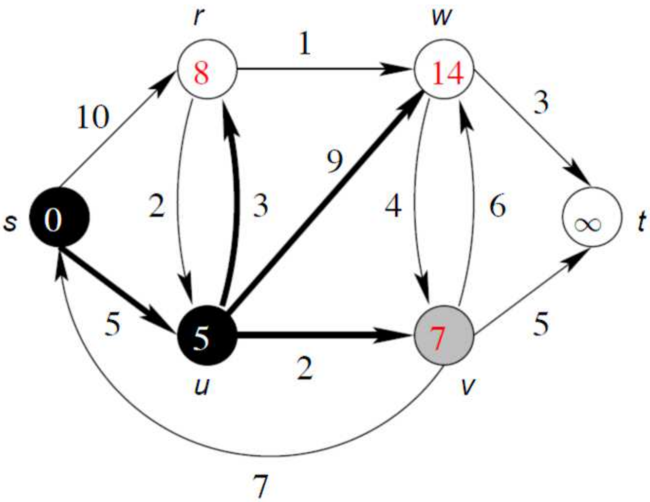
Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

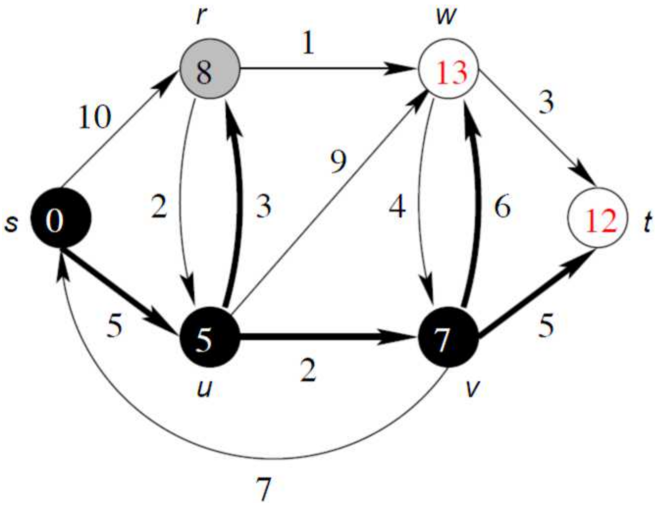


Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

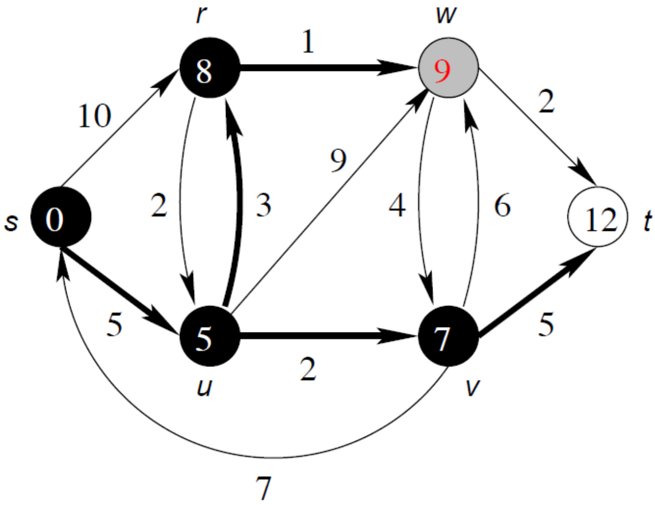


Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

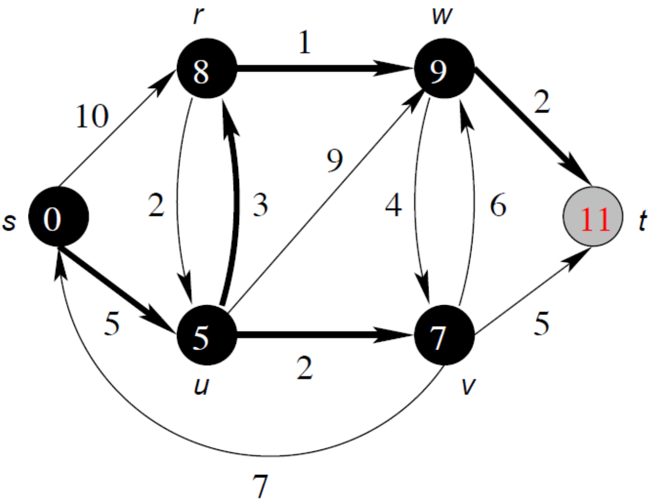



r
w
1
8
13
3
10
9
2
3
4
6
s
0
12
t
5
5
7
5
2
u
v
7

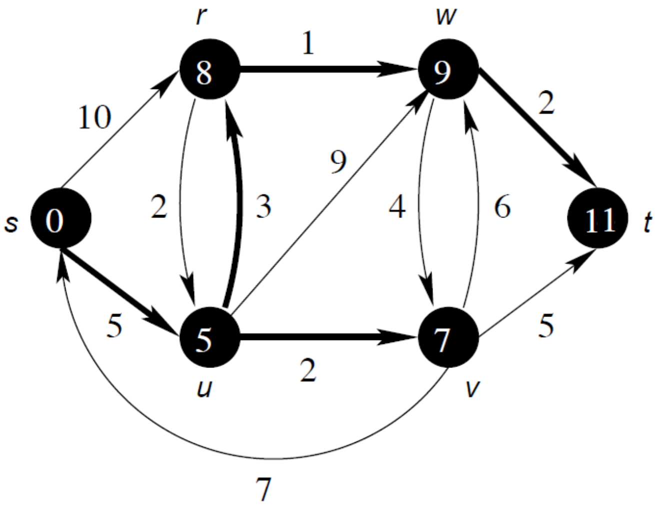
Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

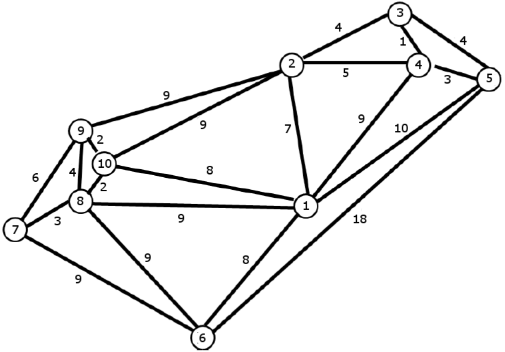


Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



Exercício

Considere o grafo abaixo, em seguida faça:



- Execute o algoritmo de Dijkstra e encontre a árvore de caminhos mínimos do grafo acima, considerando o nó 1 como origem.
- Implemente o algoritmo de Dijkstra em linguagem C.

Referências

- Cormen et. al. *Algoritmos - Teoria e Prática*.
- Nivio Ziviani. *Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C*.