Grafos: noções básicas

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

DAINF DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA CÂMPUS PATO BRANCO

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

- Terminologia
- Algoritmos em Grafos
- Representação de Grafos
    - Matriz de adjacência
    - Lista de adjacência

Introdução

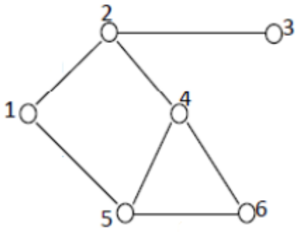
- Muitas aplicações necessitam considerar conexões entre pares objetos
  - Redes sociais
  - Páginas web
  - Empresas ou organizações
  - Mapas
- Representação dessas conexões: grafos

Sumário

Terminologia

Terminologia

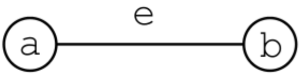
- Um **grafo** é um par $G = (V, E)$, onde
  - V é o conjunto de vértices
  - E é o conjunto de arestas
- Exemplo na figura abaixo:
  - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$



Terminologia

- Dada uma aresta $e = (a, b)$, dizemos que os vértices a e b são os **extremos** da aresta e se a e b são **adjacentes**

- Seguindo a notação anterior, aresta e é **incidente** aos vértices a e b

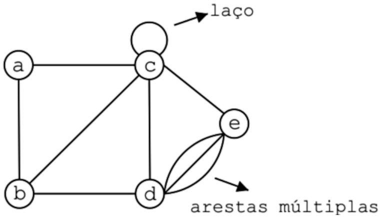


Terminologia

- Dizemos que um grafo é **simples** quando não possui laços ou arestas múltiplas

- Um **laço** é uma aresta com extremos idêntico

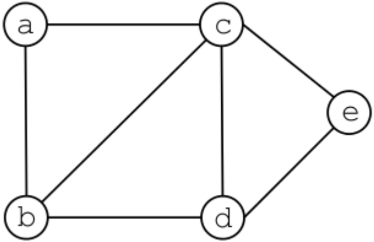
- **Arestas múltiplas** são duas ou mais arestas com o mesmo par de vértices como extremos



Terminologia

- Denotamos por $|V|$ e $|E|$ a cardinalidade dos conjuntos de vértices e arestas de um grafo G, respectivamente

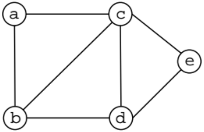
- No exemplo abaixo temos $|\text{V}| = 5$ e $|\text{E}| = 7$



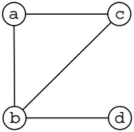
- O **tamanho** do grafo G é dado por $|V| + |E|$

- Um **subgrafo** $H = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$

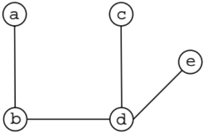
- Um *subgrafo gerador* de G é um subgrafo H com $V' = V$



Grafo G

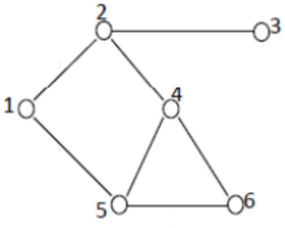


Subgrafo não gerador

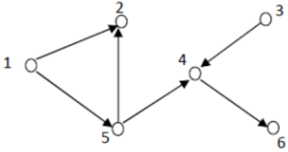


Subgrafo gerador

- Existem 2 tipos de grafos:
  - **Não direcionado** (não orientado)



  - **Direcionado** (orientado)

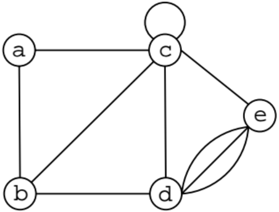


Terminologia

- Grafo direcionado
  - Arestas são representadas por setas
  - Pode conter arestas de um vértice para si mesmo (*self-loop*)
- Grafo não-direcionado
  - Arestas (x, y) e (y, x) são consideradas como uma única aresta
- Adjacência
  - Grafo direcionado: se (a, b) é uma aresta, então b é adjacente a a
  - Grafo não-direcionado: adjacência entre vértices é simétrica

Terminologia

- **Grau** de um vértice ($d(v)$): determinado pela quantidade de arestas que incidem o vértice v
  - Grafo direcionado: quantidade de arestas "saem" (*out-degree*) + quantidade de arestas "entram" (*in-degree*)



d(a)=2

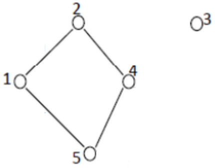
d(b)=3

d(c)=6

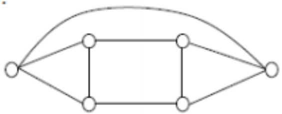
d(d)=5

d(e)=4

- **Vértice isolado**: não há conexões por arestas

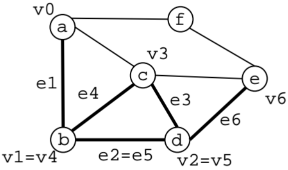


  - **Grafo k-regular**: todos os vértices tem grau k



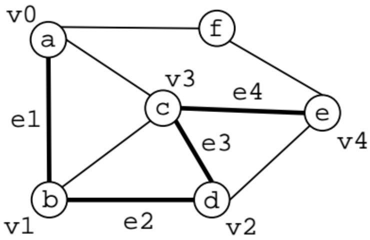
Terminologia

- Um **passeio** P de v_0 a v_n no grafo G é uma sequência finita e não vazia $(v_1, e_1, v_2, ..., e_n, v_n)$, tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, v_{i-1} e v_i são extremos de e_i
- O **comprimento** do passeio P é dado pelo seu número de arestas (n)



Terminologia

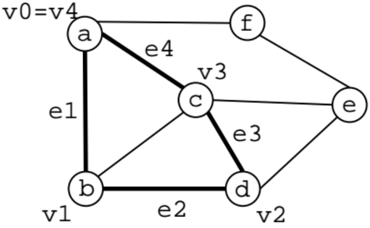
- **Caminho**: passeio em que todos os vértices são distintos
- **Trilha**: passeio em que todos as arestas são distintas
- **Passeio simples** (também denominado **caminho simples**): não há repetição de vértices e nem de arestas na sequência



Caminho Simples

Terminologia

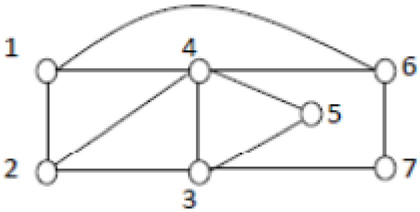
- Um **ciclo** ou **caminho fechado** é um caminho onde $v_0 = v_n$
- Um ciclo é dito ser **simples** se $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são distintos
- Um grafo que não possui ciclos é dito ser acíclico



Ciclo

Terminologia

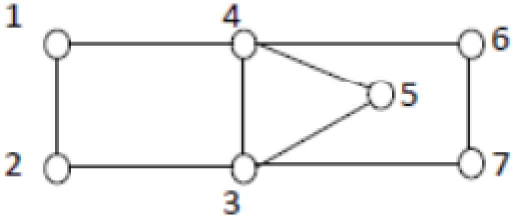
- Caminho Hamiltoniano: caminho passa por todos os vértices
- Ciclo Hamiltoniano: ciclo que passa por todos os vértices
- Grafo Hamiltoniano



G_2

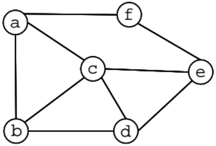
Terminologia

- Caminho Euleriano: trilha que passa por todas as arestas
- Ciclo Euleriano: ciclo que passa por todas as arestas
- Grafo Euleriano
    - Teorema: um grafo G é euleriano e somente se todos os vértices de G têm grau par

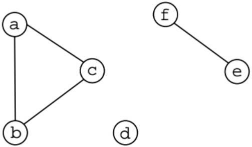


Terminologia

- **Grafo conexo**: cada par de vértices está conectado por uma aresta
- **Grafo fortemente conexo**: cada par de vértices são alcançáveis a partir de um outro
- **Grafo não conexo**: contém vértices não acessíveis por arestas



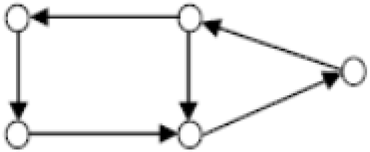
Conexo



Não-conexo com
3 componentes conexos

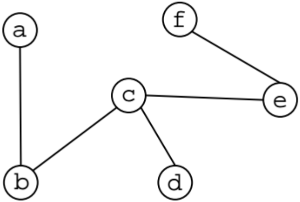
Terminologia

- **Grafo orientado fortemente conexo**: caso exista caminho orientado entre quaisquer par de vértices



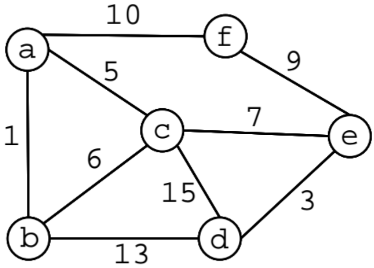
Terminologia

- Um grafo G é uma **árvore** se é conexo e acíclico:
  - G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas
  - A remoção de qualquer aresta desconecta o grafo (*minimal* conexo)
  - Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G



Terminologia

- **Grafo ponderado**: cada aresta está associado a um valor $c(e)$, o qual denominamos custo (ou peso) da aresta



Algoritmos em Grafos

- **Caminho mínimo**: dado um conjunto de cidades, as distâncias entre elas e duas cidades A e B, determinar um caminho (trajeto) mais curto de A até B

- **Árvore geradora de peso mínimo**: dado um conjunto de computadores, onde cada par de computadores pode ser ligado usando uma quantidade de fibra ótica, encontrar uma rede interconectando-os que use a menor quantidade de fibra ótica possível

- **Problema do caixeiro viajante**: dado um conjunto de cidades, encontrar um passeio que sai de uma cidade, passa por todas as cidades e volta para a cidade inicial tal que a distância total a ser percorrida seja menor possível

- **Problema chinês do correio**: dado o conjunto das ruas de um bairro, encontrar um passeio que passa por todas as ruas voltando ao ponto inicial tal que a distância total a ser percorrida seja menor possível

Representação de Grafos

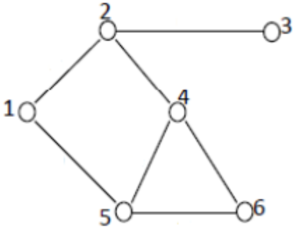
Representação de Grafos

- A complexidade dos algoritmos para solução de problemas modelados por grafos depende da sua representação interna
- Principais abordagens de representação de grafos
    - Matriz de adjacência
    - Lista de adjacência
- O uso de uma ou outra para um determinado algoritmo depende da natureza das operações que ditam a complexidade do algoritmo

Representação de Grafos

Matriz de adjacência

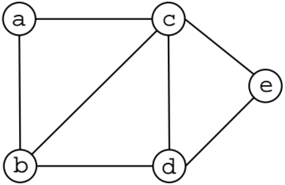
- Seja A, uma matriz $n \times n$ de adjacência, onde:
  - $|V| = n$
  - $a_{i,j} = 1$, se $(i,j) \in E$
  - $a_{i,j} = 0$, se $(i,j) \notin E$
- A matriz de adjacência é simétrica para grafos não orientados



G_1

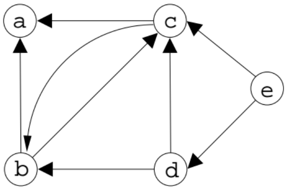
$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Outro exemplo de matriz de adjacência



	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	1	0
c	1	1	0	1	1
d	0	1	1	0	1
e	0	0	1	1	0

- Exemplo de um grafo orientado e a sua respectiva matriz de adjacência

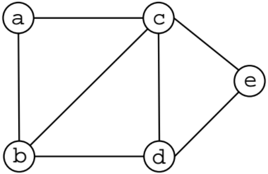


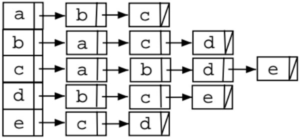
	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	0	0
d	0	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0

- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (orientado ou não)

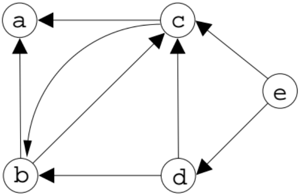
- A representação de G por uma lista de adjacência consiste em:
  - Para cada vértice v há uma lista encadeada ($Adj[v]$) dos vértices adjacentes a v
  - O vértice u aparece em $Adj[v]$ se há aresta (v, u) no grafo G
  - Os vértices podem estar em qualquer ordem em uma lista de adjacência

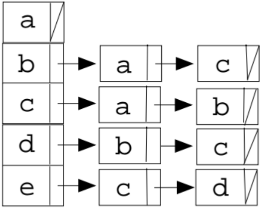
- Exemplo de um grafo não orientado representado por listas de adjacência





- Exemplo de um grafo não orientado representado por listas de adjacência





Representação de Grafos

- Matriz $\times$ Lista de adjacência
  - Matriz de adjacência:
    - Fácil verificar se (i, j) é uma aresta de G
    - Complexidade de espaço: $\Theta(|V|^2)$
    - Adequada para grafos densos ($|E| = \Theta(|V|^2)$)
  - Lista de adjacência:
    - Fácil descobrir os vértices adjacentes a um dado vértice v (ou seja, listar $Adj[v]$)
    - Complexidade de espaço: $\Theta(|V| + |E|)$
    - Adequada para grafos esparsos ($|E| = \Theta(|V|)$)

Referências I

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Marin, L. O.
Grafos: Noções Básicas e Representação. AE23CP – Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.

Tenenbaum, A.; Langsam, Y.
Estruturas de Dados usando C.
Pearson, 1995.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.