Introdução à Complexidade de Algoritmos

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE22CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Análise de algoritmos
- Cálculo do Tempo de Execução
- Notação O (*Big Oh*)
- Taxas de Crescimento

Introdução

- Por que estudar a complexidade de algoritmos?
- Você sabe diferenciar programa de algoritmo?

- Programa vs. Algoritmo

Programa	**Algoritmo**
Linguagem concreta (C, Java, Python)	Linguagem abstrata (pseudo-código)
Dependente de sistema operacional	Independente de sistema operacional
Dependente de hardware	Independente de hardware
Avaliação em tempo real (empírica)	Avaliação por estimativa (assintótica)

Análise de algoritmos

Análise de algoritmos

- Após a implementação, é importante determinar os recursos necessários para a sua execução:
  - Tempo
  - Espaço
- Um algoritmo que soluciona um determinado problema, mas requer o processamento de um ano, não deve ser usado

Análise de algoritmos

- O que dizer de uma afirmação como a abaixo?

  > "Desenvolvi um novo algoritmo chamado TripleX que leva 14,2 segundos para processar 1.000 números, enquanto o método SimpleX leva 42,1 segundos."

- Você trocaria o SimpleX que roda em sua empresa pelo TripleX?

Análise de algoritmos

- A afirmação tem que ser examinada, pois há diversos fatores envolvidos:
  - Características da máquina
  - Linguagem de programação
  - Implementação pouco cuidadosa do algoritmo SimpleX vs. "super" implementação do algoritmo TripleX
  - Quantidade de dados processados: Se o TripleX é mais rápido para processar 1.000 números, ele também é mais rápido para processar quantidades maiores de números?

Análise de algoritmos

- A comunidade de computação começou a pesquisar formas de comparar algoritmos de forma independente de
  - Hardware
  - Sistema operacional
  - Linguagem de programação
  - Habilidade do programador
- É desejável a comparação de algoritmos e não programas
- Área: análise/complexidade de algoritmos
  - Comparação de algoritmos
  - Determinar se um algoritmo é ótimo

Análise de algoritmos

- Sabe-se que:
  - Processar 100.000 números leva mais tempo do que 10.000 números
  - Cadastrar 20 itens em um sistema de vendas leva mais tempo do que cadastrar 10
  - Etc
- Pode ser uma boa ideia estimar a eficiência de um algoritmo em função do tamanho do problema (número de elementos processados):
  - Geralmente, é assumido que n é o tamanho do problema
  - É calculado o número de operações realizadas sobre os n elementos

Análise de algoritmos

- O melhor algoritmo é aquele que requer menos operações sobre a entrada
- Que operações?
- Toda operação leva o mesmo tempo?

Análise de algoritmos

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX
  - TripleX: para uma entrada de tamanho n, o algoritmo realiza $n^2 + n$ operações:
    - $f(n) = n^2 + n$
  - SimpleX: para uma entrada de tamanho n, o algoritmo realiza $1.000n$ operações:
    - $g(n) = 1.000n$

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

Tamanho da Entrada	**1**	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
$f(n) = n^2 + n$					
$g(n) = 1.000n$					

Análise de algoritmos

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

Tamanho da Entrada	**1**	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
$f(n) = n^2 + n$	2	110	10.100	**1.001.000**	**100.010.000**
$g(n) = 1.000n$	**1.000**	**10.000**	**100.000**	1.000.000	10.000.000

- partir de $n = 1.000$, $f(n)$ mantém-se maior e cada vez mais distante de $g(n)$
  - Diz-se que $f(n)$ cresce mais rápido do que $g(n)$

Cálculo do Tempo de Execução

Cálculo do Tempo de Execução

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores:
  - Empiricamente
  - Teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los: função da análise de algoritmos

Cálculo do Tempo de Execução

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa

- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um algoritmo são executadas sequencialmente

Cálculo do Tempo de Execução

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc
  - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada
  - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo
  - Operações complexas devem ser analisadas em partes

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições:

```
para i ← 0 até n faça
   x += 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições:
    - No exemplo abaixo são realizadas $3n + 2$ operações (uma unidade para iniciar i + n * (incremento na variável i + uma comparação + atribuição na variável x) + uma última comparação, que é o momento em que a variável i atinge o valor de n)
    - Por mais que o operador $+=$ seja equivalente a duas operações (uma atribuição e uma soma), o mesmo é contado como uma unidade

```
para i ← 0 até n faça
   x += 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:

    se $i < j$
      então $i \leftarrow i + 1$
      senão para $k \leftarrow 0$ até n faça
        $i \leftarrow i * k$;

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste (então) mais o tempo do senão
    - No cálculo do tempo de execução, é considerado o comando que leva mais tempo
    - O exemplo abaixo pode executar até $4n + 3$ instruções

```
se i < j
  então i ← i + 1
  senão para k ← 0 até n faça
    i ← i * k;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas

```
para i ← 0 até n faça
  para j ← 0 até n faça
    k ← k + 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas
    - A análise é feita de dentro para fora
    - Tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições

      para $i \leftarrow 0$ até n faça
        para $j \leftarrow 0$ até n faça
          $k \leftarrow k + 1$;

    - Nas duas últimas linhas do código acima (laço interno), são realizadas $4n + 2$ operações: uma atribuição para a variável j + n * (uma atualização de j + mais uma comparação entre i e n + uma atribuição na variável k + uma soma na variável k)
    - A operação acima é realizada n vezes, ou seja, o total de operações no fragmento de código acima é $n * (4n + 2 + 2) + 2 = 4n^2 + 4n + 2$

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
    - Chamadas de sub-rotinas: uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

Cálculo do Tempo de Execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

1. Início
2. declare soma_parcial numérico;
3. soma_parcial $\leftarrow$ 0;
4. para $i \leftarrow 0$ até n faça
5. soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial+i*i*i;
6. escreva(soma_parcial);
7. Fim

Cálculo do Tempo de Execução

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

3 1 unidade de tempo

4 1 unidade para iniciação de i, $n+1$ unidades para testar se $i = n$ e n unidades para incrementar $i = 2n+2$

5 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") $= 4n$ unidades

6 1 unidade para escrita

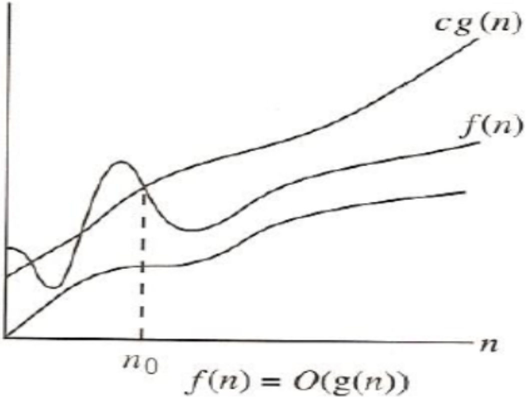
- **Custo total**: $6n+4$

Notação O (*Big Oh*)

Notação O (*Big Oh*)

- Na análise de algoritmos, devemos nos preocupar com a eficiência quando o tamanho da entrada (n) for grande
- A comparação de algoritmos é feita por meio de análise assintótica
- Notação Big-Oh (O)

- Dada duas funções, $f(n)$ e $g(n)$
  - Uma função $f(n)$ é da ordem de (*big-oh*) $g(n)$ ou função $f(n)$ é $O(g(n))$ se existirem existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$



Notação O (*Big Oh*)

- Exemplos:
  - Seja $f(n) = (n+1)^2$. Logo, $f(n)$ é $O(n^2)$
  - Seja $f(n) = 2n^3 + n^2 + 3n$. Logo, $f(n)$ é $O(n^3)$

Notação O (*Big Oh*)

- Exemplos:
  - Seja $f(n) = (n+1)^2$. Logo, $f(n)$ é $O(n^2)$, quando $n_0 = 1$ e $c = 4$, pois $(n+1)^2 \leq 4n^2$ para $n \geq 1$
  - Seja $f(n) = 2n^3 + n^2 + 3n$. Logo, para provar que $f(n)$ é $O(n^3)$, basta provar que $2n^3 + n^2 + 3n \leq 6n^3$ para $n \geq 0$
- Notação O é a mais utilizada para a análise de complexidade de algoritmos
- Ao dizer que $f(n) = O(g(n))$, tem-se que $g(n)$ é o limite superior em comparação com $f(n)$

Notação O (*Big Oh*)

- Quando dizemos que um algoritmo possui um custo de $O(n^2)$, isso significa que, no pior caso, o algoritmo nunca terá um custo maior que n^2

- Se $T(x)$ é um polinômio de grau n, então $T(x) = O(x^n)$
  - Em uma expressão polinomial (*e.g.* $2n^3 + n^2 + n + 1$), o custo na notação *Big-Oh* sempre será denotada em função do maior expoente, sem considerar contantes

  - Uma função que realiza $2n^3 + n^2 + n + 1$ operações no pior caso tem a complexidade na ordem de $O(n^3)$

Notação O (*Big Oh*)

- Se $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$, então:
  - $T_1(n) + T_2(n) = max(O(f(n)), O(g(n)))$
  - $T_1(n) * T_2(n) = O(f(n) * g(n))$
- Se $T(n)$ for igual a um valor constante, então a sua complexidade é $O(1)$

Taxas de Crescimento

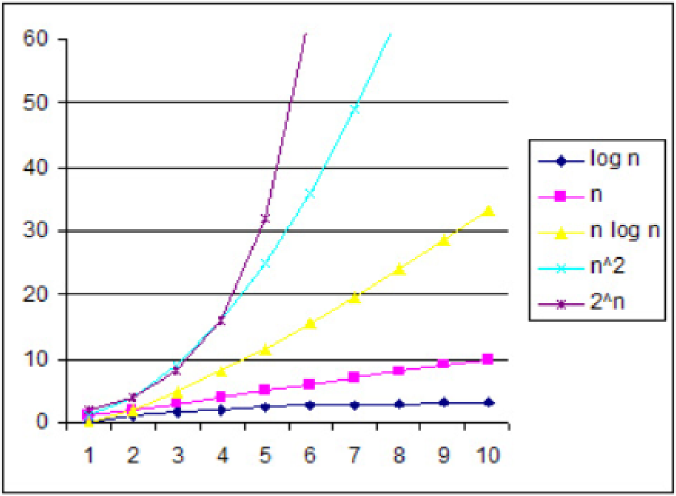
Taxas de Crescimento

- Funções e taxas de crescimento mais comuns:

c	constante
$\log n$	logarítmica
n	linear
$n \log n$	linear
n^2	quadrática
n^3	cúbica
2^n	exponencial
a^n	exponencial

Taxas de Crescimento

- Crescimentos de algumas funções



- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
  Introduction to Algorithms.
  Third edition, The MIT Press, 2009.
- Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
  Computer Algorithms.
  Computer Science Press, 1998.
- Marin, L. O.
  Complexidade de Algoritmos – parte 2. AE23CP-3CP Algoritmos e Estrutura de Dados II.
  Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.

Referências II

Marin, L. O.
Complexidade de Algoritmos – parte 1. AE23CP-3CP Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2018.

Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2008.

Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.