

Grafos: busca em largura

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

- Busca em Largura
- Implementação da Busca em Largura
- Análise de Complexidade da Busca em Largura
- Caminho Mais Curto

- Grafos são estruturas mais complexas em comparação com listas, vetores e árvores binárias
- Grande parte dos problemas representados por grafos necessitam de métodos eficientes para a exploração dessa estrutura de dados
- A complexidade de algoritmos para grafos (G) é dada em termos de V e/ou E
 - V : conjunto de vértices
 - E : conjunto de arestas

- Informações relevantes sobre a estrutura do grafo podem ser extraídas
 - Podem ser úteis para projetar algoritmos eficientes para determinados problemas
- Busca em grafos: processo de seguir sistematicamente pelas arestas a fim de visitar os vértices do grafo
 - Busca em profundidade
 - Busca em largura

Busca em Largura

- Examina, sistematicamente, todos os vértices alcançáveis pelo vértice de origem s (também denominado fonte)
 - Um vértice v é alcançável a partir de um vértice s em um grafo G se existe um caminho de s a v
- A busca em largura também é denominada como busca por nível
 - Os vértices são explorados em ordem de distância em relação à fonte s
 - Por exemplo, a busca é iniciada nos vértices adjacentes a s , ou com distância $d = 1$ e, em seguida, processamento é continuado para $d = 2$, onde processo é repetido, até a exploração completa (se possível) do grafo

- O algoritmo de busca em largura tem a sua execução finalizada quando todos os vértices alcançáveis a partir de s forem explorados
- Se v **não é alcançável** a partir de s , então dizemos que a distância entre ambos vértices é ∞ (infinita)
 - No início da aplicação do algoritmo, o vértice s começa com o valor de distância igual a zero e os demais, com ∞
 - No final da execução do algoritmo, para cada vértice há um valor de distância em relação ao s

- Um algoritmo de busca em largura recebe um grafo $G = (V, E)$ e um vértice especificado s chamado fonte (*source*)
- Percorre todos os vértices alcançáveis a partir de s em ordem de distância
- O algoritmo constrói uma **árvore de busca em largura** (subgrafo acíclico gerador) com raiz s
 - Cada caminho entre s e v nessa árvore corresponde a um caminho mais curto entre ambos vértices
 - O algoritmo descobre todos os vértices a uma distância k do vértice origem antes de descobrir qualquer vértice a uma distância $k + 1$

Busca em Largura

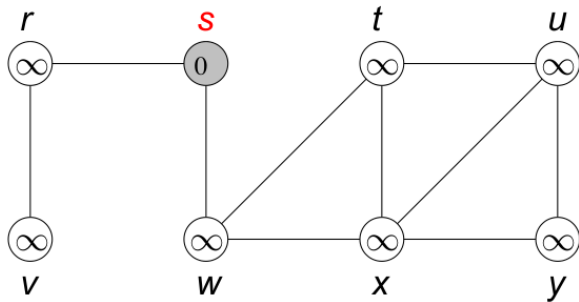
- Inicialmente a árvore de busca em largura contém apenas o vértice fonte s
- Para cada vizinho v de s , o vértice v e a aresta (s, v) são acrescentadas à árvore
- O processo é repetido para os vizinhos dos vizinhos de s
 - Isso é feito até que todos os vértices alcançáveis por s sejam adicionados na árvore
 - O algoritmo de busca em largura também pode formar uma floresta
- O processo de busca é implementado através de uma fila Q

Busca em Largura

- Durante a aplicação do algoritmo de busca em largura, cada vértice pode ser colorido por meio das seguintes cores
 - Branca: não visitado (inicialmente, todos os vértices são brancos)
 - Cinza: visitado pela primeira vez
 - Preta: todos os seus vizinhos foram visitados
- Vértices de cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos, e eles representam a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos

Busca em Largura

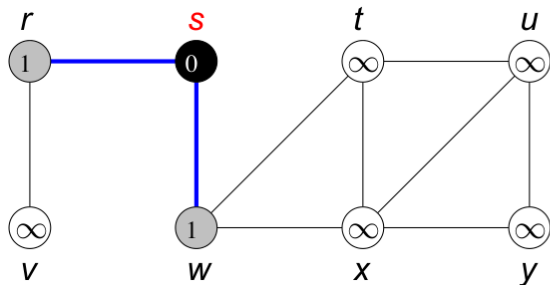
Exemplo



Q s
0

Busca em Largura

Exemplo

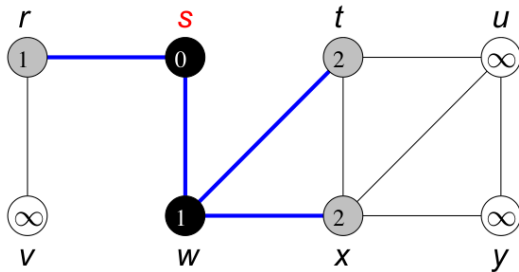


Q

w	r
1	1

Busca em Largura

Exemplo

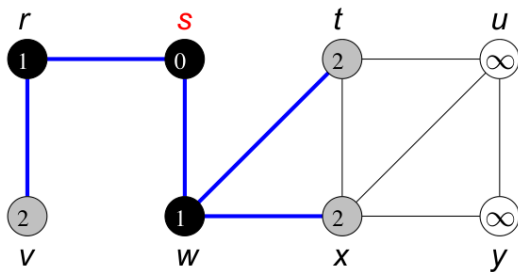


Q

r	t	x
1	2	2

Busca em Largura

Exemplo

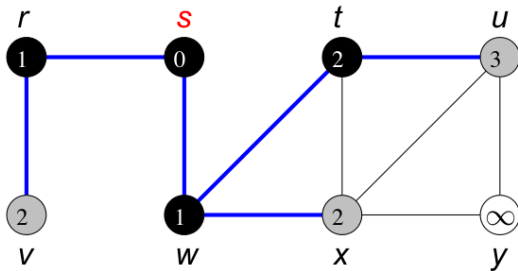


Q

t	x	v
2	2	2

Busca em Largura

Exemplo

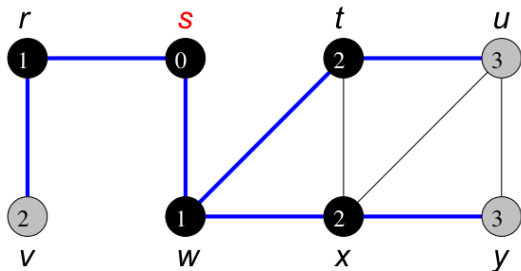


Q

x	v	u
2	2	3

Busca em Largura

Exemplo

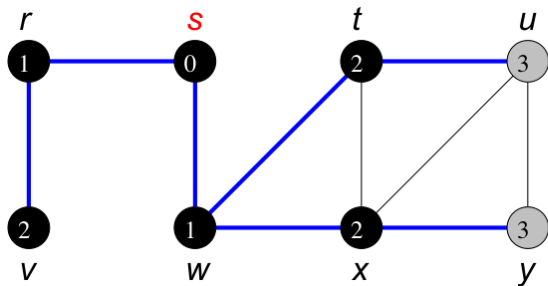


Q

v	u	y
2	3	3

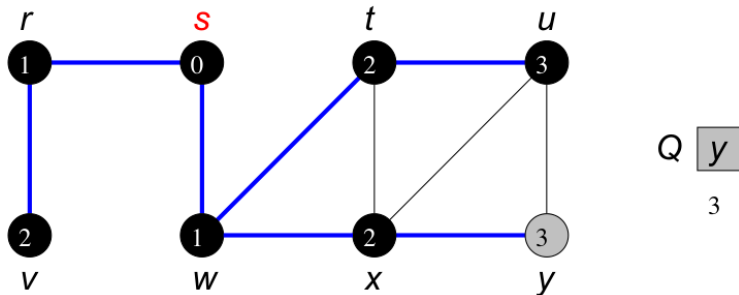
Busca em Largura

Exemplo



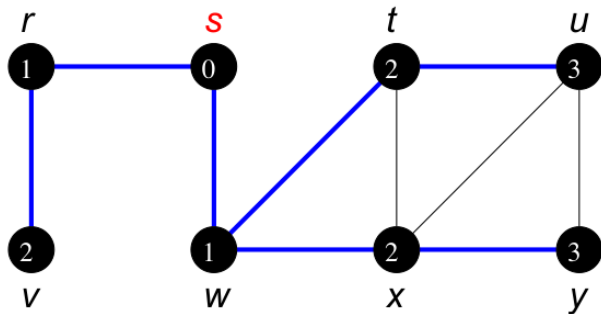
Busca em Largura

Exemplo



Busca em Largura

Exemplo



$Q \emptyset$

Implementação da Busca em Largura

Implementação da Busca em Largura

- A variável $d[v]$ é usada para armazenar a **distância** de s a v
 - Determinada durante o processo de busca
 - Na inicialização de d , $d[s] = 0$ e os demais são iniciados com "infinito" ($d[v] = \infty$)
- Cores
 - Para cada vértice v , a cor atual é guardada no vetor $cor[v]$, que pode ser branco, cinza ou preto
 - Todos os elementos de cor são inicializados com branco
 - Para o efeito de implementação, o uso da cor não é realmente necessário, mas facilita a compreensão do algoritmo
- A raiz da árvore de busca em largura é s

Implementação da Busca em Largura

- Cada vértice v (exceto a raiz) possui um pai $\pi[v]$
 - Todos os elementos de π são inicializados com "nulo" ou um outro valor para representar que cada vértice ainda não tem pai
 - No final da aplicação, apenas s e vértices inalcançáveis por s não possuem pai
 - O caminho de s até v é dado por
$$v, \pi[v], \pi[\pi[v]], \pi[\pi[\pi[v]]], \dots, s$$
- O algoritmo de busca em largura recebe um grafo G (na forma de listas de adjacências), e um vértice $s \in V[G]$ e devolve
 - 1 Para cada vértice v , a distância de s a v em G
 - 2 Árvore ou floresta de busca em largura

Implementação da Busca em Largura

BUSCA-EM-LARGURA(G, s)

0 ▷ Inicialização

1 **para cada** $u \in V[G] - \{s\}$ **faça**

2 $\text{cor}[u] \leftarrow \text{branco}$

3 $d[u] \leftarrow \infty$

4 $\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$

5 $\text{cor}[s] \leftarrow \text{cinza}$

6 $d[s] \leftarrow 0$

7 $\pi[s] \leftarrow \text{NIL}$

8 $Q \leftarrow \emptyset$

9 **ENQUEUE**(Q, s)

Implementação da Busca em Largura

```
10  enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11       $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12      para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13          se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14               $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15               $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16               $\pi[v] \leftarrow u$ 
17               $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18       $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

- π é a árvore de busca em largura

Implementação da Busca em Largura

Exemplo

BUSCA-EM-LARGURA(G, s)

0 \triangleright Inicialização

1 **para cada** $u \in V[G] - \{s\}$ **faça**

2 $cor[u] \leftarrow$ branco

3 $d[u] \leftarrow \infty$

4 $\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$

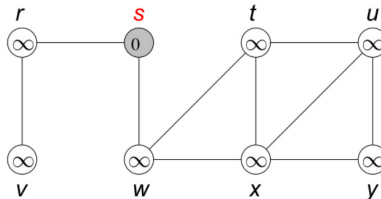
5 $cor[s] \leftarrow$ cinza

6 $d[s] \leftarrow 0$

7 $\pi[s] \leftarrow \text{NIL}$

8 $Q \leftarrow \emptyset$

9 **ENQUEUE**(Q, s)



	r	s	t	u	v	x	y	w
d	b	0	b	b	b	b	b	b
π	a	a	a	a	a	a	a	a

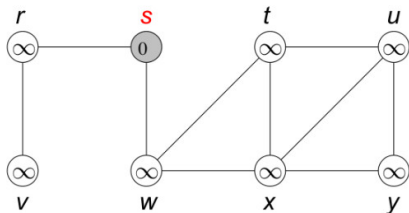


Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>w</i>
<i>d</i>	b	0	b	b	b	b	b	b
<i>pi</i>	a	a	a	a	a	a	a	a



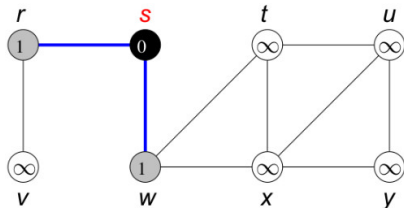
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = s$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	b	b	b	b	b	1
π	s	a	a	a	a	a	a	s



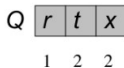
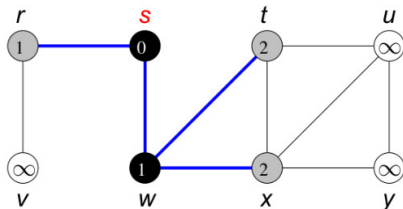
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = w$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	b	b	2	b	1
π	s	a	w	a	a	w	a	s



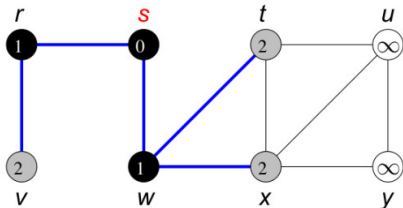
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = r$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	b	2	2	b	1
π	s	a	w	a	r	w	a	s



Q	t	x	v
	2	2	2

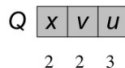
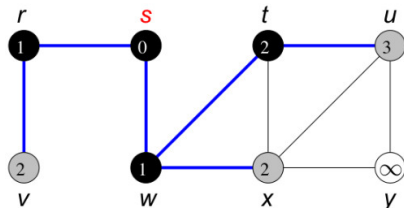
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = t$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	b	1
π	s	a	w	t	r	w	a	s



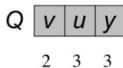
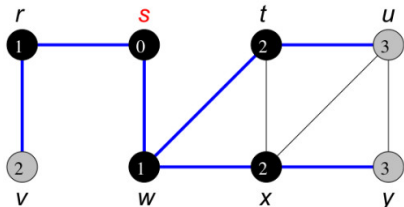
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = x$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
π	s	a	w	t	r	w	x	s



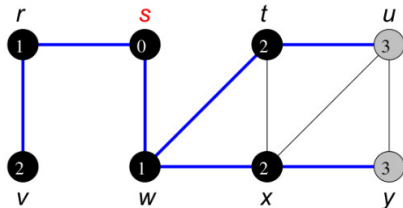
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = v$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
π	s	a	w	t	r	w	x	s



Q

u	y
-----	-----

3 3

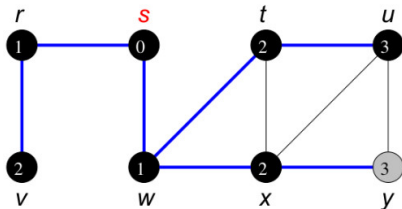
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = u$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
π	s	a	w	t	r	w	x	s



Q y
3

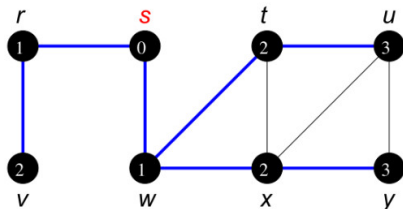
Implementação da Busca em Largura

Exemplo

```
10 enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
11    $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12   para cada  $v \in \text{Adj}[u]$  faça
13     se  $\text{cor}[v] = \text{branco}$  então
14        $\text{cor}[v] \leftarrow \text{cinza}$ 
15        $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
16        $\pi[v] \leftarrow u$ 
17        $\text{ENQUEUE}(Q, v)$ 
18    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$ 
```

$u = y$

	r	s	t	u	v	x	y	w
d	1	0	2	3	2	2	3	1
π	s	a	w	t	r	w	x	s



$Q = \emptyset$

Análise de Complexidade da Busca em Largura

Análise de Complexidade da Busca em Largura

- A inicialização consome tempo $O(|V|)$
- Depois que um vértice deixa de ser branco, ele não volta a ser branco novamente
 - Cada vértice é adicionado na fila apenas uma vez
 - Cada operação sobre a fila consome tempo $O(1)$, resultando em um total de $O(|V|)$
- Em uma lista de adjacência, cada vértice é percorrido apenas uma vez
 - A soma dos comprimentos das listas de adjacência é $O(|E|)$
 - Logo, o tempo gasto para percorrer as listas é $O(|E|)$

- Conclusão

A complexidade de tempo do algoritmo
BUSCA-EM-LARGURA é $O(|V| + |E|)$

Caminho Mais Curto

Print-Path(G, s, v)

1 **se** $v = s$ **então**

2 imprime s

3 **senão**

4 **se** $\pi[v] = \text{NIL}$ **então**

4 imprime não existe caminho de s a v .

5 **senão**

6 Print-Path($G, s, \pi[v]$)

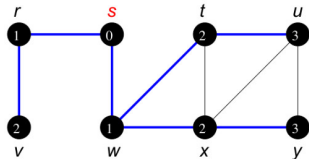
7 imprime v .

Caminho Mais Curto

- Imprime um caminho mais curto de s a u

Print-Path(G, s, v)

```
1  se  $v = s$  então
2    imprime  $s$ 
3  senão
4    se  $\pi[v] = \text{NIL}$  então
4      imprime não existe caminho de  $s$  a  $v$ .
5    senão
6      Print-Path( $G, s, \pi[v]$ )
7      imprime  $v$ .
```



Print-Path(G, s, u)

Print-Path(G, s, t)

Print-Path(G, s, w)

Print-Path(G, s, s)

imprime s

imprime w

imprime t

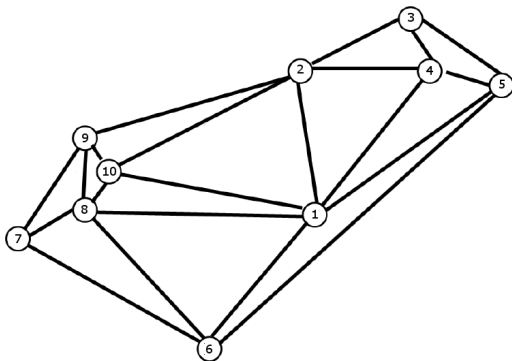
imprime u

pi

r	s	t	u	v	x	y	w
s	a	w	t	r	w	x	s

Exercício

- Considere o grafo abaixo e faça:



- Execute a busca em largura considerando o vértice 1 como origem. Para este caso, considere que todas as listas de adjacência estejam ordenadas crescentemente.



Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.



Marin, L. O.
Grafos – Algoritmos de Busca: Busca em Largura. AE23CP –
Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato
Branco, 2017.



Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.