Árvores: árvores rubro-negras

Prof. Jefferson T. Oliva

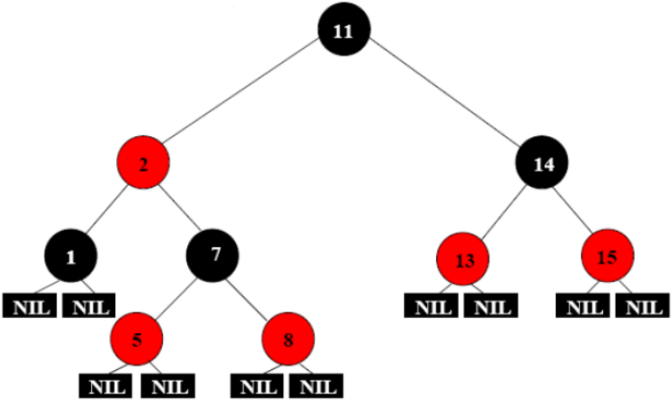
Algoritmos e Estrutura de Dados II (AE23CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

Introdução

- As árvores rubro-negras são árvores binárias de busca
- Também conhecidas como vermelha-pretas ou *red-black trees*
- Foram inventadas por Bayer sob o nome "Árvores Binárias Simétricas" em 1972, 10 anos depois das árvores AVL
- As árvores rubro-negras possuem um **bit extra** para armazenar a cor de cada nó, que pode ser VERMELHO ou PRETO

- Exemplo de árvore rubro-negra:



Introdução

- Cada nó possui os seguintes campos:
  - Bit referente à cor
  - Valor (informação do nó)
  - Filhos esquerdo e direito
  - Pai
- Se um filho ou o pai de um nó não existir, o ponteiro correspondente é NULL
- Essa árvore é complexa, mas possui bom custo de tempo para a execução de suas operações e é eficiente na prática
  - As operações de busca (pesquisa), inserção e remoção possuem a complexidade de tempo $O(\log n)$

Introdução

- Uma árvore vermelha-preta com n nós tem altura máxima de $2\log(n+1)$
- O balanceamento garante que essas árvores possuam complexidade na ordem de $\log n$ em suas operações

Sumário

Propriedades

Propriedades

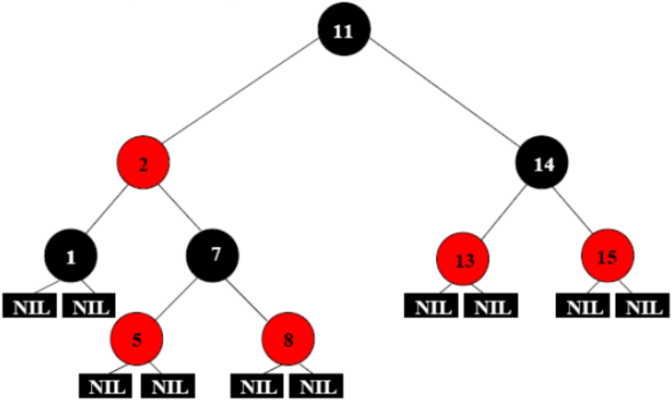
1. Todo nó é vermelho ou preto
2. A raiz é preta
3. Toda folha é preta (nesse tipo de árvore, o ponteiro NULL é considerado folha)
4. Se um nó é vermelho, então os seus filhos são pretos
5. Para cada nó, todos os caminhos simples do nó até folhas descendentes contêm o mesmo número de nós pretos

Propriedades

- Um nó que satisfaz as propriedades anteriores é denominado equilibrado, caso contrário é dito desequilibrado
- Em uma árvore vermelha-preta, todos os nós estão equilibrados
- A raiz pode sempre ser alterada de vermelho para preto, mas não o contrário (propriedade 2)
- No caminho da raiz até uma sub-árvore vazia não pode existir dois nós vermelhos consecutivos

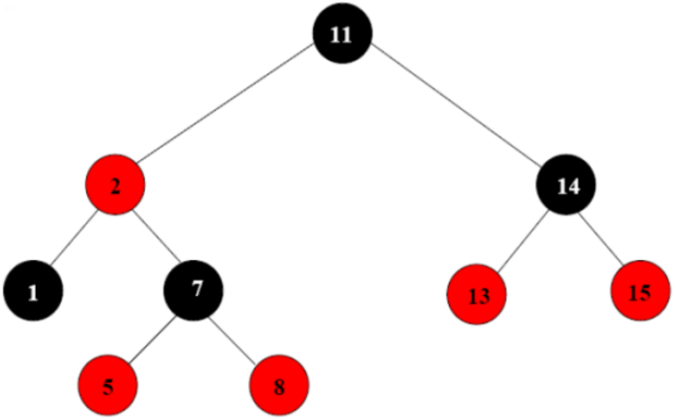
Propriedades

- Formas de representação:



Propriedades

- Formas de representação:

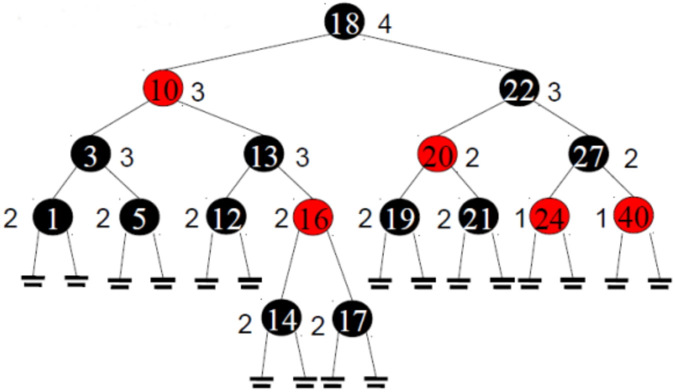


Propriedades

- Cada vez que uma operação de alteração (*e.g.* inserção e remoção) for realizada na árvore, o conjunto de propriedades é testado
- Caso alguma propriedade seja violada, são realizadas rotações e/ou ajustes de cores, de forma que a árvore permaneça "balanceada"
- Restringindo o modo como os nós são coloridos desde a raiz até uma folha, assegura-se que nenhum caminho será maior que duas vezes o comprimento de qualquer outro

Propriedades

- Altura preta: número de nós pretos encontrados até qualquer nó folha



Sumário

Inserção

Inserção

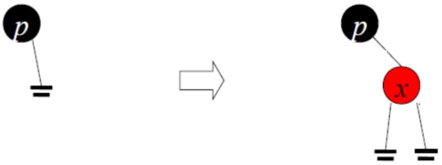
- A operação de inserção em uma árvore vermelha-preta começa por uma busca da posição onde o novo nó deve ser inserido

- As operações inserção e de remoção podem ser implementadas de forma bastante parecida com as respectivas operações nas árvores binárias de busca

- Essas operações são mais complicadas nas árvores vermelha-pretas em comparação com as árvores binárias de busca
    - Essas operações podem violar alguma propriedade de árvore vermelha-preta

Inserção

- Um nó é inserido sempre na cor vermelha
- Caso a inserção seja feita em uma árvore vazia, basta alterar a cor do nó para preto
- Se o nó fosse inserido na cor preta, invalidaria a propriedade 5 (para cada nó, todos os caminhos do nó para as folhas descendentes contém o mesmo número de nós PRETOS)



Inserção

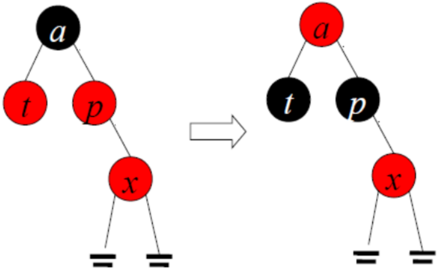
- Após a inserção, um conjunto de propriedades é testado
- Se a árvore não satisfizer essas propriedades, são realizadas rotações e/ou ajustes de cores para o balanceamento da árvore
- Para a correção do desbalanceamento da árvore rubro-negra, são considerados três casos

Inserção

- Caso 1: se esta inserção é feita em uma árvore vazia, basta alterar a cor do nó para preto
  - Satisfaz a propriedade 2 (a raiz é preta)

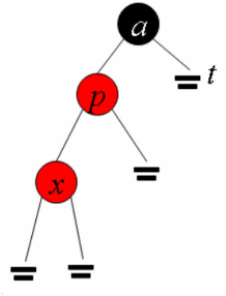
Inserção

- Caso 2: Ao inserir x e respectivo tio é vermelho, é necessário fazer a re-coloração de a (avô), t (tio) e p (pai)
  - Se o pai de a é vermelho, o rebalanceamento deve ser feito novamente
  - Se a é raiz, então ela deve ser mantida preta

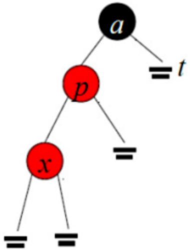


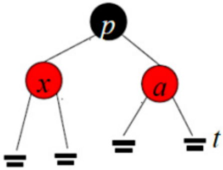
Inserção

- Caso 3: Suponha que o tio do nó inserido é preto.
  - Para manter a propriedade 4 (se um nó é vermelho, então seus filhos são pretos) é preciso fazer rotações envolvendo a, t, p e x
  - Há 4 sub-casos que correspondem às 4 rotações possíveis



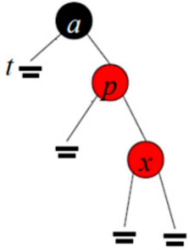
- Caso 3a: Rotação à Direita

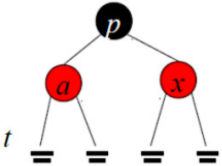




Recoloração de p e a

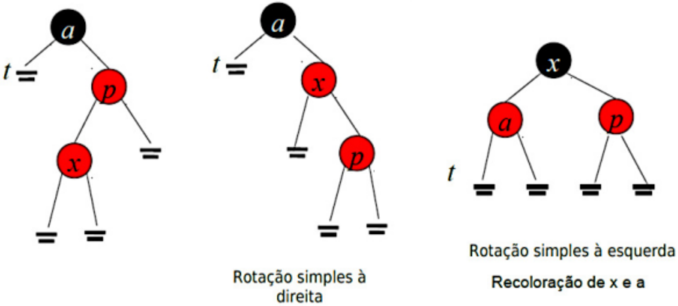
- Caso 3b: Rotação à Esquerda





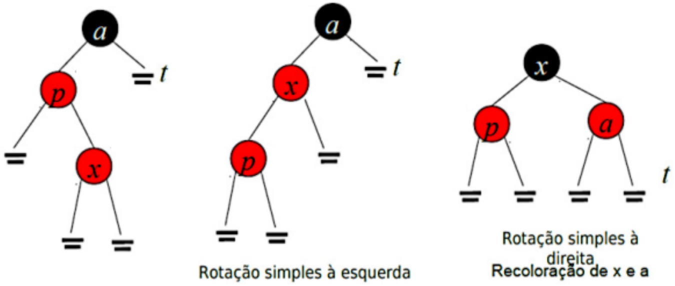
Inserção

- Caso 3c: rotação dupla à esquerda
  - Pode ser visto como um caso 3a seguido do caso 3b



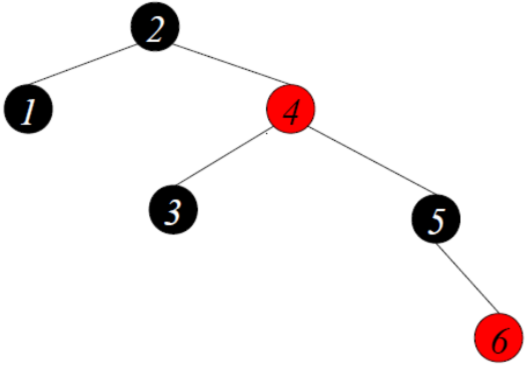
Inserção

- Caso 3d: rotação dupla direita
  - Pode ser visto como um caso 3b seguido do caso 3a



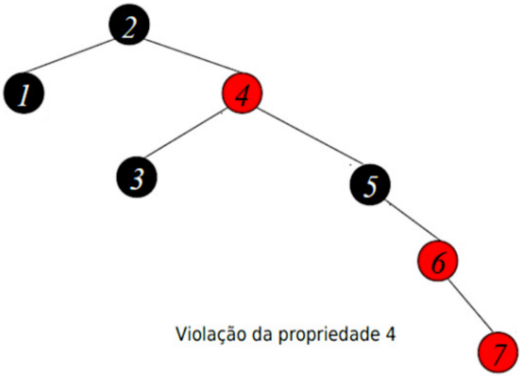
Inserção

- Exemplo
  - Estado inicial da árvore



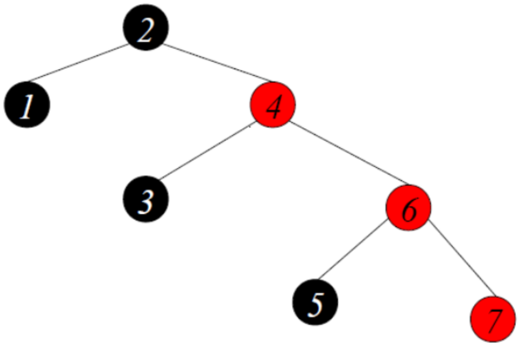
Inserção

- Exemplo
  - Inserção do nodo 7



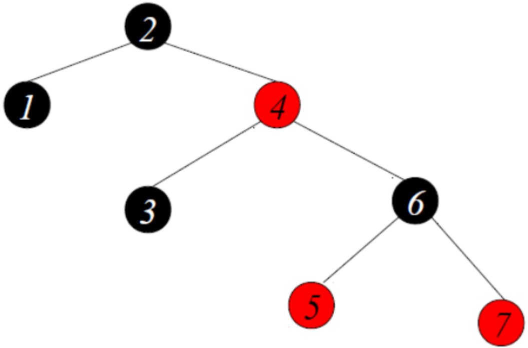
(Propriedade 4: se um nó é vermelho, então seus filhos são pretos)

- Exemplo
  - Rotação à esquerda dos nodos 5, 6 e 7



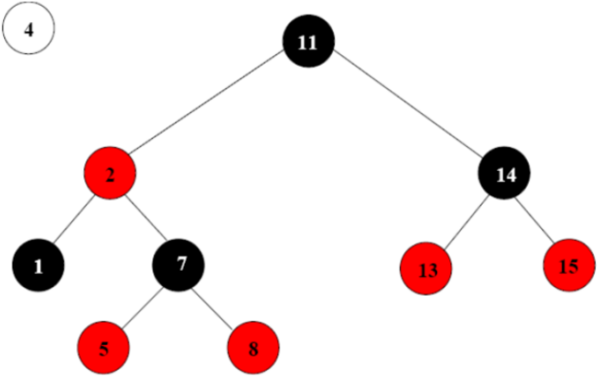
Inserção

- Exemplo
  - Alteração de cor dos nodos 5 e 6

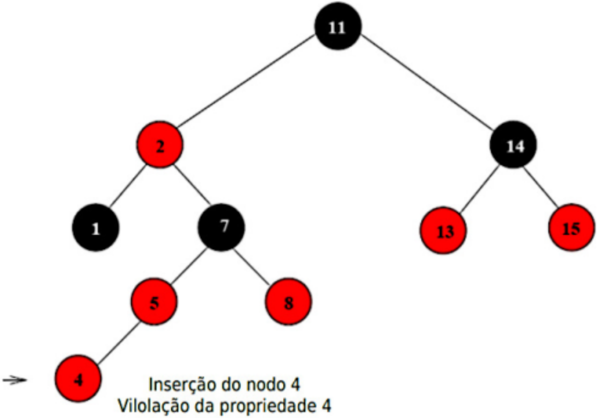


Inserção

- Exemplo
    - Estado inicial da árvore

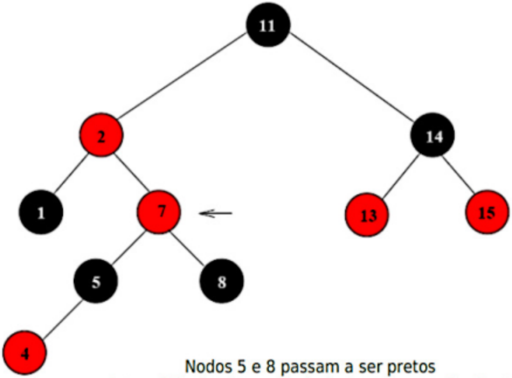


- Exemplo
  - Caso 2: O tio do elemento inserido é vermelho



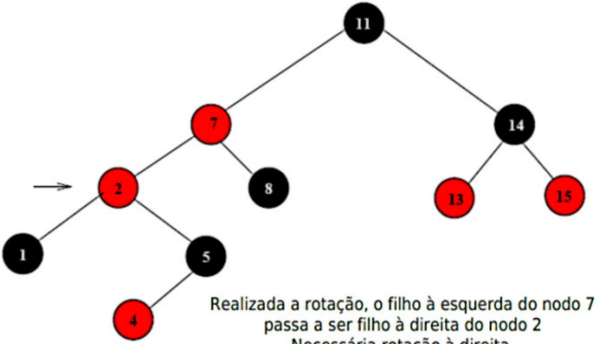
(Propriedade 4: se um nó é vermelho, então seus filhos são pretos)

- Exemplo
  - Caso 3d: resolver o caso 3b, onde o tio do elemento é preto e o elemento é filho à direita



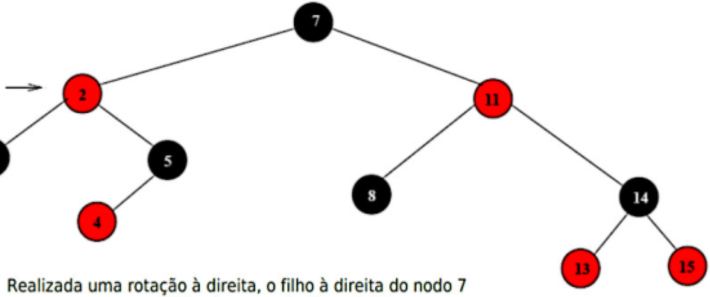
Nodos 5 e 8 passam a ser pretos
Outra violação da propriedade 4 entre os nodos 2 e 7
Necessária uma rotação à esquerda

- Exemplo
  - Caso 3d: resolver o caso 3a, onde o tio do elemento é preto e o elemento é filho à esquerda



Realizada a rotação, o filho à esquerda do nodo 7 passa a ser filho à direita do nodo 2
Necessária rotação à direita.

- Exemplo
  - Árvore vermelha-preta resultante



Realizada uma rotação à direita, o filho à direita do nodo 7 passa a ser filho à esquerda do nodo 11
O nodo 7 é colorido de preto, é restaurada a propriedade 4 e nenhuma outra é violada

Remoção

Remoção

- A remoção nas árvores vermelho-pretas se inicia com uma etapa de busca e remoção como nas árvores binárias de busca convencionais

- Caso o nó removido seja vermelho, as propriedades da árvore rubro-negra são mantidas
  - Se os descendentes forem nulos, basta liberar o espaço do nó
  - Se o nó substituto for vermelho, a troca é feita sem a necessidade de mudanças adicionais
  - Se o nó substituto for preto, dois nós descendentes deverão ter a cor mudada de preta para vermelha

Remoção

- Na remoção, se um nó retirado for preto, a propriedade 5 (slide 6) é violada!
    - Em outras palavras, a árvore deve ser rebalanceada
- Na inserção, as operações de rotação são baseadas na coloração do nó tio
- Na remoção, essas operações são baseadas na coloração do nó irmão

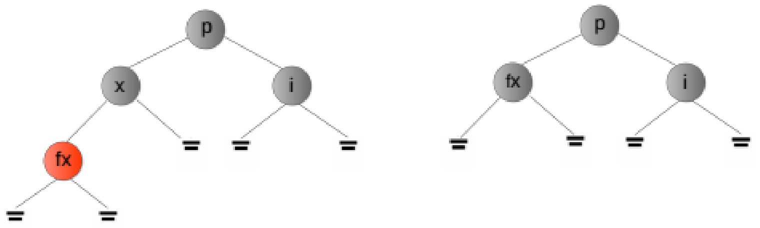
Remoção

- Na inserção, o desbalanceamento ocorre quando um determinado nó e um de seus filhos são vermelhos

- Na remoção, o desbalanceamento ocorre quando o nó retirado for preto
    - Nesse cenário, há quatro casos a serem tratados

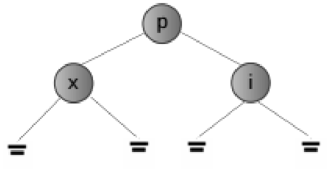
Remoção

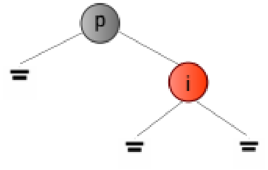
- Caso 1: se nó possui um filho vermelho (*fx*), o mesmo é recolorido para preto



Remoção

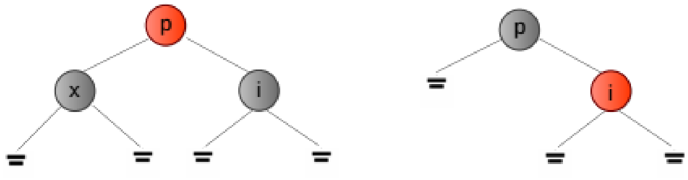
- Caso 2: se o irmão e os sobrinhos forem pretos, o nó irmão é recolorido para vermelho
  - Se o nó pai for vermelho, o mesmo deve ter a cor mudada para preta





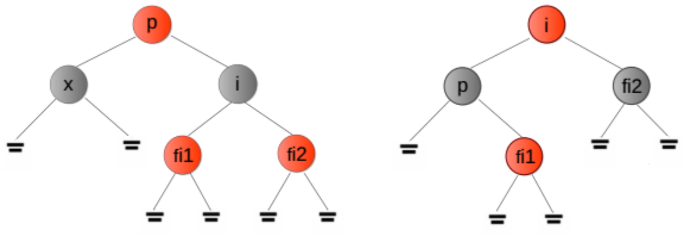
Remoção

- Caso 2: se o irmão e o sobrinho forem pretos, o nó irmão é recolorido para vermelho
    - Se o nó pai for vermelho, o mesmo também deve ter a cor mudada para preta (assim, não haveria dois nós vermelhos consecutivos)



Remoção

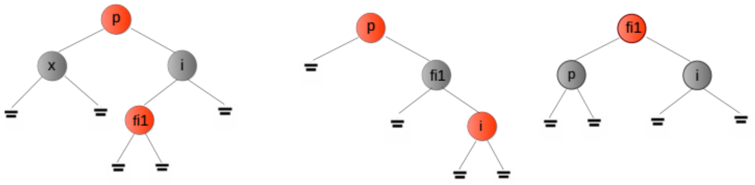
- Caso 3: se o irmão for preto e pelo menos um dos sobrinhos (*fi*) vermelhos
  - É necessário fazer algum tipo de rotação
    - Depende de qual *fi* é vermelho (por exemplo se ambos forem vermelhos, pode ser aplicado algum tipo de rotação simples)
  - O nó que irá ocupar o lugar de *p* terá a mesma cor que o respectivo nó tinha



Remoção

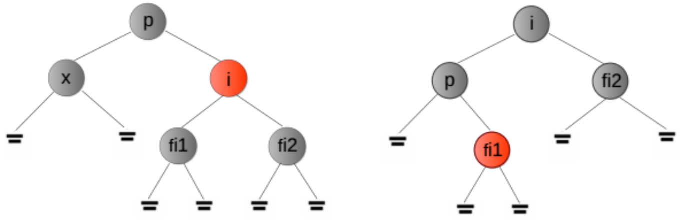
- Caso 3: se o irmão for preto e pelo menos um dos sobrinhos (*fi*) vermelhos
  - É necessário fazer algum tipo de rotação
    - Depende de qual *fi* é vermelho (por exemplo se ambos forem vermelhos, pode ser aplicado algum tipo de rotação simples)

  - O nó que irá ocupar o lugar de *p* terá a mesma cor que o respectivo nó tinha

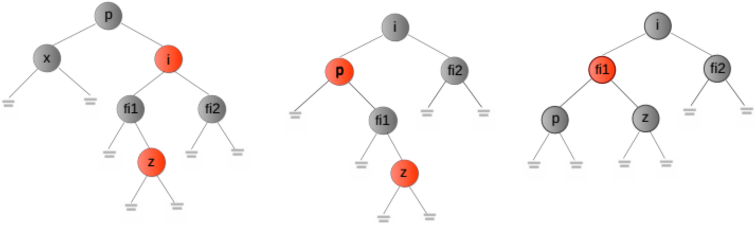


Remoção

- Caso 4: o irmão do nó removido é vermelho



- Caso 4: o irmão do nó removido é vermelho



- Exercício: implemente um algoritmo para a remoção de um nó em uma árvore rubro-negra de forma que a mantenha balanceada.

Complexidade

Complexidade

- Complexidade das principais operações em árvores vermelha-pretas
  - Espaço: $O(n)$
  - Busca: $O(1)$ (melhor caso) e $O(\log n)$ (médio e pior caso)
  - inserção: $O(1)$ (melhor caso) e $O(\log n)$ (médio e pior caso)
  - remoção: $O(1)$ (melhor caso) e $O(\log n)$ (médio e pior caso)

Exercício

- Criar uma árvore vermelha-preta inserindo as seguintes chaves, na ordem em que são apresentadas:
  - 41 - 38 - 31 - 12 - 19 - 8 - 25 - 54 - 65

- A partir da árvore vermelha-preta do exercício anterior, remova os seguintes itens e refaça o balanceamento, este último caso necessário
  - 8
  - 31

Referências I

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.

Marin, L. O.
Árvores Vermelho-Preta (Rubro-Negra) (RB-Tree). AE23CP – Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2017.

Song, S. W.
Árvore Rubro-Negra. MAC 508 – Estrutura de Dados.
Slides. Ciência da Computação. IME/USP/São Paulo, 2008.