

Introdução à Complexidade de Algoritmos

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados I (AE22CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

- Análise de algoritmos
- Cálculo do Tempo de Execução
- Notação O (*Big Oh*)
- Taxas de Crescimento

- Por que estudar a complexidade de algoritmos?
- Programa vs. Algoritmo

| Programa | Algoritmo |
|---|---|
| Linguagem concreta (C, Java, Python) | Linguagem abstrata (pseudo-código) |
| Dependente de sistema operacional | Independente de sistema operacional |
| Dependente de hardware | Independente de hardware |
| Avaliação em tempo real (empírica) | Avaliação por estimativa (assintótica) |

Análise de algoritmos

Análise de algoritmos

- Após a implementação, é importante determinar os recursos necessários para a sua execução:
 - Tempo
 - Espaço
- Um algoritmo que soluciona um determinado problema, mas requer o processamento de um ano, não deve ser usado

- O que dizer de uma afirmação como a abaixo?
"Desenvolvi um novo algoritmo chamado TripleX que leva 14,2 segundos para processar 1.000 números, enquanto o método SimpleX leva 42,1 segundos."
- Você trocaria o SimpleX que roda em sua empresa pelo TripleX?

- A afirmação tem que ser examinada, pois há diversos fatores envolvidos:
 - Características da máquina
 - Linguagem de programação
 - Implementação pouco cuidadosa do algoritmo SimpleX vs. "super" implementação do algoritmo TripleX
 - Quantidade de dados processados: Se o TripleX é mais rápido para processar 1.000 números, ele também é mais rápido para processar quantidades maiores de números?

- A comunidade de computação começou a pesquisar formas de comparar algoritmos de forma independente de
 - Hardware
 - Sistema operacional
 - Linguagem de programação
 - Habilidade do programador
- É desejável a comparação de algoritmos e não programas
- Área: análise/complexidade de algoritmos
 - Comparação de algoritmos
 - Determinar se um algoritmo é ótimo

- Sabe-se que:
 - Processar 100.000 números leva mais tempo do que 10.000 números
 - Cadastrar 20 itens em um sistema de vendas leva mais tempo do que cadastrar 10
 - Etc
- Pode ser uma boa ideia estimar a eficiência de um algoritmo em função do tamanho do problema (número de elementos processados):
 - Geralmente, é assumido que n é o tamanho do problema
 - É calculado o número de operações realizadas sobre os n elementos

Análise de algoritmos

- O melhor algoritmo é aquele que requer menos operações sobre a entrada
- Que operações?
- Toda operação leva o mesmo tempo?

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX
 - TripleX: para uma entrada de tamanho n , o algoritmo realiza $n^2 + n$ operações:
 - $f(n) = n^2 + n$
 - SimpleX: para uma entrada de tamanho n , o algoritmo realiza $1.000n$ operações:
 - $g(n) = 1.000n$

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

| Tamanho da Entrada | 1 | 10 | 100 | 1.000 | 10.000 |
|--------------------|---|----|-----|-------|--------|
| $f(n) = n^2 + n$ | | | | | |
| $g(n) = 1.000n$ | | | | | |

- Exemplo: TripleX vs. SimpleX

| Tamanho da Entrada | 1 | 10 | 100 | 1.000 | 10.000 |
|--------------------|--------------|---------------|----------------|------------------|--------------------|
| $f(n) = n^2 + n$ | 2 | 110 | 10.100 | 1.001.000 | 100.010.000 |
| $g(n) = 1.000n$ | 1.000 | 10.000 | 100.000 | 1.000.000 | 10.000.000 |

- partir de $n = 1.000$, $f(n)$ mantém-se maior e cada vez mais distante de $g(n)$
 - Diz-se que $f(n)$ cresce mais rápido do que $g(n)$

Cálculo do Tempo de Execução

Cálculo do Tempo de Execução

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores:
 - Empiricamente
 - Teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los: função da análise de algoritmos

Cálculo do Tempo de Execução

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa
- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um algoritmo são executadas sequencialmente
 - com memória infinita, por simplicidade

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc
 - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada
 - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo
 - Operações complexas devem ser analisadas em partes

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
 - Repetições:
para $i \leftarrow 0$ até n faça
 $x \text{ += } 1$;

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
 - Repetições:
 - No exemplo abaixo são realizadas $3n + 2$ operações (uma unidade para iniciar $i \leftarrow 0$ * (incremento na variável i + uma comparação + atribuição na variável x) + uma última comparação, que é o momento em que a variável i atinge o valor de n)
 - Por mais que o operador $+=$ seja equivalente a duas operações (uma atribuição e uma soma), o mesmo é contado como uma unidade

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $x += 1$ ;
```

- Regras para o cálculo de execução

- Se... então... senão:

se $i < j$

então $i \leftarrow i + 1$

senão para $k \leftarrow 0$ até n faça

$i \leftarrow i * k;$

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
 - Se... então... senão:
 - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste (então) mais o tempo do senão
 - No cálculo do tempo de execução, é considerado o comando que leva mais tempo
 - O exemplo abaixo pode executar até $4n + 3$ instruções

```
se  $i < j$ 
  então  $i \leftarrow i + 1$ 
  senão para  $k \leftarrow 0$  até  $n$  faça
     $i \leftarrow i * k;$ 
```

- Regras para o cálculo de execução

- Repetições aninhadas

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
  para  $j \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $k \leftarrow k + 1$ ;
```

- Regras para o cálculo de execução
 - Repetições aninhadas
 - A análise é feita de dentro para fora
 - Tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições

```
para  $i \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
  para  $j \leftarrow 0$  até  $n$  faça  
     $k \leftarrow k + 1$ ;
```

- Nas duas últimas linhas do código acima (laço interno), são realizadas $4n + 2$ operações: uma atribuição para a variável $j + n * ($ uma atualização de $j +$ mais uma comparação entre i e $n +$ uma atribuição na variável $k +$ uma soma na variável $k)$
- A operação acima é realizada n vezes, ou seja, o total de operações no fragmento de código acima é $n * (4n + 2 + 2) + 2 = 4n^2 + 4n + 2$

- Regras para o cálculo de execução
 - Chamadas de sub-rotinas: uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de

$$\sum_{i=1}^n i^3$$

- 1 Início
- 2 declare soma_parcial numérico;
- 3 soma_parcial \leftarrow 0;
- 4 para $i \leftarrow 0$ até n faça
- 5 soma_parcial \leftarrow soma_parcial + $i*i*i$;
- 6 escreva(soma_parcial);
- 7 Fim

$$\sum_{i=1}^n i^3$$

- 3 1 unidade de tempo
- 4 1 unidade para iniciação de i , $n + 1$ unidades para testar se $i = n$ e n unidades para incrementar $i = 2n + 2$
- 5 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") = $4n$ unidades
- 6 1 unidade para escrita
- **Custo total:** $6n + 4$

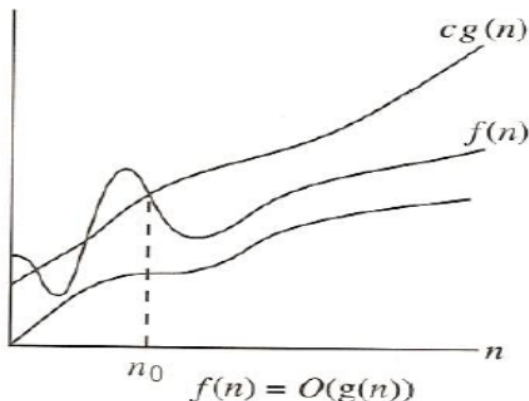
Notação O (*Big Oh*)

Notação O (*Big Oh*)

- Na análise de algoritmos, devemos nos preocupar com a eficiência quando o tamanho da entrada (n) for grande
- A comparação de algoritmos é feita por meio de análise assintótica
- Notação Big-Oh (O)

Notação O (*Big Oh*)

- Dada duas funções, $f(n)$ e $g(n)$
 - Uma função $f(n)$ é da ordem de (*big-oh*) $g(n)$ ou função $f(n)$ é $O(g(n))$ se existirem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$



Notação O (*Big Oh*)

- Exemplos:
 - Seja $g(n) = (n + 1)^2$. Logo, $g(n)$ é $O(n^2)$, quando $n_0 = 1$ e $c = 4$, pois $(n + 1)^2 \leq 4n^2$ para $n \geq 1$
 - Seja $g(n) = 2n^3 + n^2 + 3n$. Logo, para provar que $g(n)$ é $O(n^3)$, basta provar que $2n^3 + n^2 + 3n \leq 6n^3$ para $n \geq 0$
- Notação O é a mais utilizada para a análise de complexidade de algoritmos
- Ao dizer que $f(n) = O(g(n))$, tem-se que $g(n)$ é o limite superior em comparação com $f(n)$

Notação O (*Big Oh*)

- Quando dizemos que um algoritmo possui um custo de $O(n^2)$, isso significa que, no pior caso, o algoritmo nunca terá um custo maior que n^2
- Se $T(x)$ é um polinômio de grau n , então $T(x) = O(x^n)$
 - Em uma expressão polinomial (e.g. $2n^3 + n^2 + n + 1$), o custo na notação *Big-Oh* sempre será denotada em função do maior expoente, sem considerar constantes
 - Uma função que realiza $2n^3 + n^2 + n + 1$ operações no pior caso tem a complexidade na ordem de $O(n^3)$

Notação O (*Big Oh*)

- Se $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$, então:
 - $T_1(n) + T_2(n) = \max(O(f(n)), O(g(n)))$
 - $T_1(n) * T_2(n) = O(f(n) * g(n))$
- Se $T(n)$ for igual a um valor constante, então a sua complexidade é $O(1)$

Taxas de Crescimento

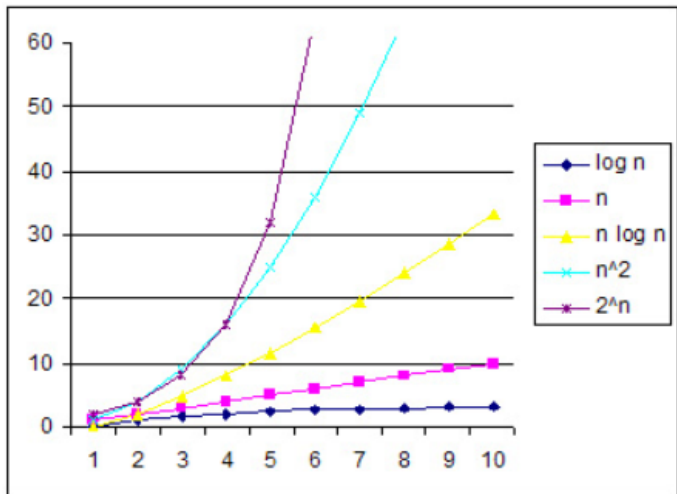
Taxas de Crescimento

- Funções e taxas de crescimento mais comuns:

| | |
|------------|-------------|
| c | constante |
| $\log n$ | logarítmica |
| n | linear |
| $n \log n$ | linear |
| n^2 | quadrática |
| n^3 | cúbica |
| 2^n | exponencial |
| a^n | exponencial |

Taxas de Crescimento

- Crescimentos de algumas funções





Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.
Introduction to Algorithms.
Third edition, The MIT Press, 2009.



Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.



Marin, L. O.
Complexidade de Algoritmos – parte 2. AE23CP-3CP
Algoritmos e Estrutura de Dados II.
Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato
Branco, 2017.



Marin, L. O.

Complexidade de Algoritmos – parte 1. AE23CP-3CP
Algoritmos e Estrutura de Dados II.

Slides. Engenharia de Computação. Dainf/UTFPR/Pato Branco, 2018.



Rosa, J. L. G.

Análise de Algoritmos. SCE-181 – Introdução à Ciência da Computação II.

Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2008.



Rosa, J. L. G.

Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.

Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.



Ziviani, N.

Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.

Thomson, 2007.