Complexidade de Algoritmos (parte 3)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Recorrência
- Resolução de Recorrências
  - Método da substituição
  - Método da iteração
  - Método da árvore de recursão
  - Método mestre

Introdução

- Na aula anterior foi abordada a análise de complexidade de algoritmos
  - No entanto, analisamos apenas algoritmos iterativos

- Como é feita a análise de complexidade de algoritmos recursivos?

```
sub_rotina fatorial(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  se n = 1
    então aux ← 1;
    senão aux ← n * fatorial(n - 1);
  fatorial ← aux;
Fim
```

Introdução

- O exemplo apresentado anteriormente é obviamente $O(n)$, tanto para o tempo de execução quanto para espaço

- Se a recursão é um "disfarce" da repetição (geralmente uma má aplicação da recursão), basta analisá-la como tal

```
sub_rotina fatorial(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  declare i numérico;
  aux ← 1;
  para i ← 0 até n faça
    aux ← aux + i * aux;
  fatorial ← aux;
Fim
```

- Em muitos casos (até para recursividade mal empregada), é difícil transformar a sub-rotina em iteração
  - Pode ser necessário a análise de recorrência para analisar o desempenho do algoritmo

Recorrência

Recorrência

- Função matemática que descreve sequências/conjuntos em termos de seu valor em entradas anteriores
  - Comumente aplicada para a análise de algoritmos de divisão-e-conquista
- Análise de recorrência
  - Caso base (1): tempo de execução constante (têm casos em que não é necessário)
  - Caso indutivo (2): quando o teste para o caso base falha, ou seja, o algoritmo não é executado em tempo constante
- Uma recorrência pode ter mais de um caso base e/ou caso indutivo

- Exemplo de uso de recorrência:
  - Números de Fibonacci
    - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
    - fib(0) = 0, fib(1) = 1, fib(n) = fib(n - 1) + fib(n - 2)

```
sub_rotina fib(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  se n = 0
    então aux ← 0
    senão se n = 1
      então aux ← 1
      senão aux ← fib(n - 1) + fib(n - 2);
  fib ← aux
Fim
```

- Seja T(n) o tempo de execução da função
  - Caso 1 (base): o tempo de execução é constante
    - se $n = 0$ o custo é para comparar o valor n + atribuir o valor 1 para *aux* + atribuir o valor de aux ao nome da função (retorno), ou seja, $T(0) = 3$
    - $n = 1$, o custo é para falhar na comparação do valor n com zero + comparar n com 1 + atribuir o valor 1 para *aux* + atribuir o valor de aux ao nome da função (retorno), ou seja, $T(1) = 4$
  - Caso 2 (indução): se $n > 1$, quando falha a segunda comparação (custo 2 até o momento), é feita uma atribuição + uma soma + duas chamadas recursivas + duas subtrações + uma atribuição o valor de aux ao nome da função, o que resulta na recorrência $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 7$

- O problema recursivo apresentado pode ser representado na seguinte forma:

$$T(n) = \begin{cases} 3, & se\ n\ =\ 0 \\ 4, & se\ n\ =\ 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + 7, & se\ n\ >\ 1 \end{cases}$$

- Exemplo de uso de recorrência para a análise de espaço:

```
sub_rotina fib(n:  numérico)
Início
  declare aux numérico;
  se n = 0
    então aux ← 0
    senão se n = 1
      então aux ← 1
      senão aux ← fib(n - 1) + fib(n - 2);
  fib ← aux
Fim
```

Recorrência

- Seja T(n) o espaço necessário função
  - Caso (base):
    - se $n = 0$ ou $n = 1$, precisamos de três unidades de espaço (1 para *n*, 1 para *aux* e outro para o retorno), ou seja, $T(0) = T(1) = 3$
  - Caso 2 (indução): se $n > 1$, são realizadas duas chamadas recursivas, ou seja, há mais alocação de espaço, resultando na recorrência $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3$, sendo que o valor 3 ocorre da mesma forma que o caso base (1 para *n*, 1 para *aux* e outro para o retorno)

- O espaço do problema recursivo apresentado pode ser representado na seguinte forma:

$$T(n) = \begin{cases} 3, & se\ n\ =\ 0 \text{ ou } n\ =\ 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + 3, & se\ n\ >\ 1 \end{cases}$$

Resolução de Recorrências

Resolução de Recorrências

- Diversas técnicas podem ser aplicadas para a resolução de recorrências
  - Método da substituição
  - Método da iteração
  - Método mestre
  - Método da árvore de recursão

- Propõe chutar uma fórmula para recorrência
- Após, chute deve ser verificado se funciona para o caso base (substituir o valor de n para o valor que acarreta no caso base)
- Em seguida, é demonstrado que a fórmula está correta através da indução matemática
- Formas de fazer bons chutes
  - Ter "boa base" matemática (experiência)
  - Usar árvores de recursão (veremos mais adiante)
  - Utilizar o resultado de outras formas de análise de recorrência (*e.g.* método da iteração)

- Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se \ n \ = \ 1 \\ T(n-1) + 3n + 2, & se \ n \ > \ 1 \end{cases}$$

- Chute: $T(n) = \frac{3n^2+7n}{2} - 4$

- Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\ n\ =\ 1 \\ T(n-1) + 3n + 2, & se\ n\ >\ 1 \end{cases}$$

  - Chute: $T(n) = \frac{3n^2+7n}{2} - 4$
  - Resolução:

Caso base ($n = 1$): $T(1) = \frac{3*1^2+7*1}{2} - 4 = 5 - 4 = 1$

Indução: suponha que o chute vale para $n - 1$
$T(n-1) = \frac{3(n-1)^2+7(n-1)}{2} - 4$

Temos:
$T(n) = T(n-1) + 3n + 2 = \frac{3(n-1)^2+7(n-1)}{2} - 4 + 3n + 2$
$= \frac{3n^2-6n+3+7n-7}{2} + 3n - 2 = \frac{3n^2+n-4}{2} + 3n - 2$
$= \frac{3n^2+7n}{2} - 4$, ou seja, a complexidade é $O(n^2)$

- É uma forma do método da substituição onde a recorrência é expandida (iterada) e expressada como um somatório em termos de n

- Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\ n\ =\ 0 \\ T(n-1) + n, & se\ n\ >\ 0 \end{cases}$$

- É uma forma do método da substituição onde a recorrência é expandida (iterada) e expressada como um somatório em termos de n

- Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 0 \\ T(n-1) + n, & se\ n > 0 \end{cases}$$

Resolução:
Expandindo a recorrência, temos $T(n) = T(n-1) + n$
$= T(n-1-1) + n + (n-1)$
$= T(n-2-1) + n + (n-1) + (n-2)$
$= T(n-3-1) + n + (n-1) + (n-2) + (n-3)$
$= T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} (n-i)$
Substituindo k por n, temos:
$T(n) = T(0) + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)$
$T(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$, ou seja, a complexidade é $O(n^2)$

- Exemplo 2:

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

-> Observe que a recorrência acima não possui um valor inicial

-> Neste caso, podemos definir o valor inicial de acordo com a nossa preferência

-> Para este tipo de recorrência, geralmente, o interesse é a obtenção do limite assintótico

- Exemplo 2:

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

Resolução

$T(n) = T(n/2) + 1$
$= T(n/4) + 1 + 1$
$= T(n/8) + 1 + 1 + 1$
$= T(n/16) + 1 + 1 + 1 + 1$
...
$= T(n/2^k) + k$

-> Considerando que n seja potência de 2 e que a iteração segue até $T(1)$, temos $n = 2^k$, ou seja, $k = \log n$

-> Assumindo que $T(1) = 0$, temos:
$T(n) = T(n/2^{\log n}) + \log n = T(n/n) + \log n = T(1) + \log n = 0 + \log n$
$T(n) = \log n$, ou seja, a complexidade é $O(\log n)$

- Exemplo 2:

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

Resolução (2)

$T(n) = T(n/2) + 1$
$= T(n/4) + 1 + 1$
$= T(n/8) + 1 + 1 + 1$
$= T(n/16) + 1 + 1 + 1 + 1$
...
$= T(n/k) + \log k$

-> Considerando que $k = n$ e que a iteração segue até $T(1) = 0$ temos:
$T(n) = T(n/n) + \log n = T(1) + \log n = 0 + \log n$
$T(n) = \log n$, ou seja, a complexidade é $O(\log n)$

- Possibilita a definição de complexidades assintóticas para recorrências que apresentam as seguintes condições:
  - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
  - $a \geq 1$ e $b > 1$

- Caso a recorrência atenda essas condições, as seguintes situações devem ser analisadas:
  1. Se $f(n) \in O(n^{log_b a - \epsilon})$ para a constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
  2. Se $f(n) \in \Theta(n^{log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$
  3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para a constante $\epsilon > 0$, e se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, para a constante $c < 1$ e n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

- Exemplo 1:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

- Exemplo 1:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Resolução:
$a = 9$
$b = 3$
$f(n) = n$
$\log_b a = \log_3 9 = 2$
$f(n) \in O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$, para $\epsilon = 1$ (**situação 1**)
$n \in O(n)$

Então, $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, ou seja $\Theta(n^{log_3 9}) = \Theta(n^2)$

Se o objetivo é obter a complexidade no pior caso, o termo acima pode ser representado em termos de *big-oh*: $O(n^2)$

- Exemplo 2:

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

- Exemplo 2:

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

Resolução:
$a = 1$
$b = 3/2$
$f(n) = 1$
$\log_b a = \log_{3/2} 1 = 0$
$f(n) \in \Theta(n^0)$ **(situação 2)**
$1 \in \Theta(1)$

Então, $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$, ou seja
$\Theta(n^{\log_{3/2} 1} \log_2 n) = \Theta(\log_2 n)$

- Exemplo 3:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

- Exemplo 3:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

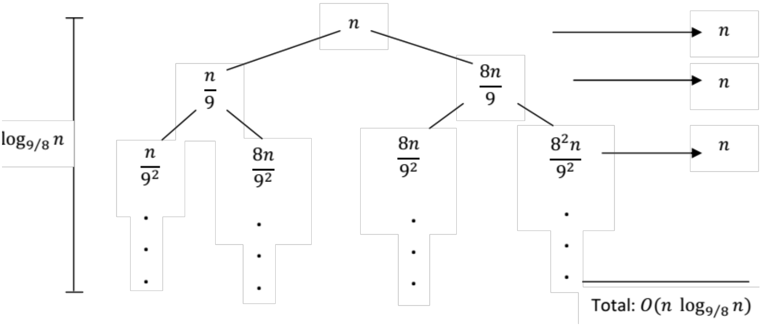
Resolução:
$a = 2$
$b = 2$
$f(n) = n^2$
$\log_b(a) = \log_2 2 = 1$
$f(n) \in \Omega(n^{\log_2 2+\epsilon})$, para $\epsilon = 1$ (**situação 3**)
$n^2 \in \Omega(n^2)$
$af\left(\frac{n}{b}\right) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$
$\frac{n^2}{2} \leq cf(n)$, para $c = \frac{1}{2}$

Então, $T(n) \in \Theta(f(n))$, ou seja $\Theta(n^2)$

- Similar ao método da iteração
- Permite visualizar melhor os termos da recorrência à medida que eles são expandidos (mais amigável)
- Nesse método, uma árvore é desenvolvida nível a nível, representando as recursões
- Em cada nível/nó da árvore são acumulados os tempos necessários para o processamento
- No final, a estimativa do tempo do problema é obtida

- Exemplo:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{9}\right) + T\left(\frac{8n}{9}\right) + n$$



Considerações Finais

- Existem recorrências que não se conhecem métodos de resolução
- Apesar das recorrências serem um tema da disciplina "Matemática Discreta para Engenharia de Computação" (MD24CP), esse assunto é de grande importância para a análise de alguns algoritmos que serão vistos nas próximas aulas

Referências I

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.

Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.