Complexidade de Algoritmos (parte 2)

Prof. Jefferson T. Oliva

Algoritmos e Estrutura de Dados 2 (AE43CP)
Engenharia de Computação
Departamento Acadêmico de Informática (Dainf)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Campus Pato Branco

Sumário

- Análise de Algoritmos
- Cálculo do Tempo de Execução
- Cálculo de Espaço

Introdução

- Aula anterior: análise assintótica
  - O
  - Ω
  - Θ
- Taxas de crescimento

Sumário

Análise de Algoritmos

- Para proceder a uma análise de algoritmos e determinar as taxas de crescimento, necessitamos de um modelo de computador e das operações que executa

- Assume-se o uso de um computador tradicional, em que as instruções de um algoritmo são executadas sequencialmente
  - Com memória infinita, por simplicidade

- Repertório de instruções simples: soma, multiplicação, comparação, atribuição, etc
  - Por simplicidade e viabilidade da análise, assume-se que cada instrução demora exatamente uma unidade de tempo para ser executada, ou seja, $O(1)$
  - Operações complexas, como inversão de matrizes e ordenação de valores, não são realizadas em uma única unidade de tempo
  - Operações complexas devem ser analisadas em partes

Análise de Algoritmos

- Considera-se somente o algoritmo e suas entradas (de tamanho n)

- Para uma entrada de tamanho n, pode-se calcular o tempo de execução para os seguintes casos
  - Melhor caso ($T_{melhor}(n)$)
  - Caso médio ($T_{media}(n)$)
  - Pior caso ($T_{pior}(n)$)
  - $T_{melhor}(n) \leq T_{media}(n) \leq T_{pior}(n)$

- Atenção: para mais de uma entrada, essas funções teriam mais de um argumento

Análise de Algoritmos

- Geralmente, utiliza-se somente a análise do pior caso ($T_{pior}(n)$)
  - Análise do melhor caso é de pouco interesse prático
  - O tempo médio pode ser útil, principalmente em sistemas executados rotineiramente
  - Dá mais trabalho calcular o tempo médio
  - Na análise do pior caso é verificado o máximo de esforço computacional que deve ser utilizado para o processamento da entrada

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
      if (x == v[i])
        return i;
    return -1;
}
```

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.    int i;
2.    for (i = 0; i < n; i++)
3.      if (x == v[i])
4.        return i;
5.    return -1;
}
```

  - Como a linha 1 é apenas uma declaração de variável, a mesma não entra na contagem
  - Na linha 2, desconsiderando as linhas 3 e 4, podem ser realizadas até $2n + 2$ operações (pior caso)
  - Na linha 3 são realizadas um total de n comparações (o comando está dentro do laço for)

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
1.   int i;
2.   for (i = 0; i < n; i++)
3.     if (x == v[i])
4.       return i;
5.   return -1;
}
```

  - Por fim, a linha 4 (item localizado) ou 5 (caso o item não seja localizado) será executada
    - Melhor caso e caso médio: a instrução da linha 4 será executada, que é o retorno da posição do item encontrado, ou seja, uma unidade de tempo
    - Pior caso: a instrução da linha 5 será executada

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
      if (x == v[i])
        return i;
    return -1;
}
```

- Análise de complexidade para os três casos (melhor, médio e pior):
  - $T_{melhor}(n) = 4$ (iniciar a variável i, comparar i com n, comparar x com $v[i]$ e retornar i)
  - $T_{media}(n) = \frac{3n}{2} + 2$ (estimativa "aproximada", ou seja, supondo que geralmente, a chave procurada esteja ao redor do meio do arranjo)
  - $T_{pior}(n) = 3n + 3$ (quando a chave não é encontrada)

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
      if (x == v[i])
        return i;
    return -1;
}
```

- Análise de complexidade para os três casos (melhor, médio e pior):
  - Melhor caso: $\Omega(1)$ ou $O_{\text{melhor}}(1)$
  - Caso médio: $O_{\text{médio}}(n)$
  - Pior caso: $O_{\text{pior}}(n)$ ou $O(n)$
  - Dizemos que a complexidade do algoritmo acima é de $O(n)$ (geralmente, o que nos interessa é o pior caso)

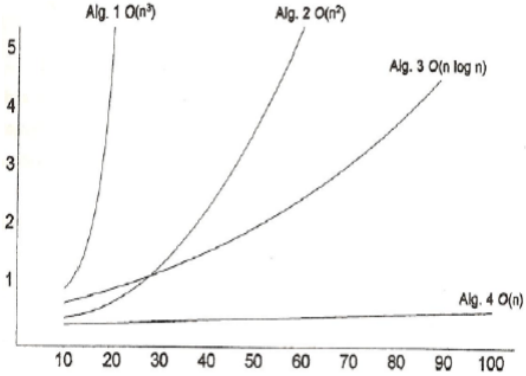
- Idealmente, para um algoritmo qualquer de ordenação de vetores com n elementos:
  - Qual a configuração do vetor que você imagina que provavelmente resultaria no melhor tempo de execução?
  - E qual resultaria no pior tempo?
- Outro exemplo de problema: soma da subsequência máxima
  - Dada uma sequência de inteiros (possivelmente negativos) $a_1, a_2, ..., a_n$ encontre o valor da máxima soma de quaisquer números de elementos consecutivos
  - Se todos os inteiros forem negativos, o algoritmo deve retornar 0 como resultado da maior soma
  - Por exemplo, para a entrada -2, 11, -4, 13, -5 e -2, a resposta é 20 ($a_2 + a_3 + a_4$)

- Assim como o problema de ordenação, há diversos algoritmos propostos para encontrar a subsequência máxima:
  - Alguns são mostrados abaixo juntamente com seus tempos de execução (n é o tamanho da entrada):

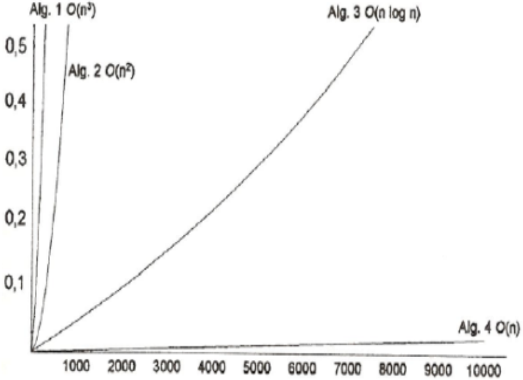
Algoritmo	1	2	3	4
tempo	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
n = 10	0,00103	0,00045	0,00066	0,00034
n = 100	0,47015	0,01112	0,00486	0,00063
n = 1.000	448,77	1,1233	0,05843	0,00333
n = 10.000	-	111,13	0,68631	0,03042
n = 100.000	-	-	8,0113	0,29832

- Deve-se notar que:
  - Para entradas pequenas, todas as implementações rodam num piscar de olhos
  - Para entradas grandes, o melhor algoritmo é o 4
  - Os tempos não incluem o tempo requerido para leitura dos dados de entrada

- Gráfico (n vs. milisegundos) das taxas de crescimentos dos quatro algoritmos com entradas entre 10 e 100



- Gráfico (n vs. segundos) das taxas de crescimentos dos quatro algoritmos para entradas maiores crescimento



- A complexidade de espaço determina a quantidade de memória necessária para a execução de um algoritmo e é dada em função de:
  - Quantidade de variáveis escalares (parâmetros e locais)
  - Tamanho de arranjos declarados internamente
  - Tamanho da entrada
- A partir daqui, nas aulas/materiais, caso seja mencionada apenas a palavra "complexidade" em algoritmos, estaremos nos referindo à complexidade de tempo
  - Em outras palavras, na análise de espaço, será mencionada "complexidade de espaço"

Análise de Algoritmos

- Qual a complexidade de espaço do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
      if (x == v[i])
        return i;
    return -1;
}
```

- Qual a complexidade de espaço do algoritmo abaixo?

```
int busca(int x, int v[], int n){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
      if (x == v[i])
        return i;
    return -1;
}
```

- Resposta: $\Theta(n)$
  - Independentemente da quantidade de instruções processadas, o que dá a grandeza de espaço, neste caso, é o tamanho da entrada, o que não varia entre os casos (melhor, pior e médio)
  - $T(n) =$ n (tamanho de v) + 1 (declaração de n) + 1 (declaração de i) + 1 (endereço de retorno) $= n + 3$

Cálculo do Tempo de Execução

Cálculo do Tempo de Execução

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores:
  - Empiricamente
  - Teoricamente
- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los: função da análise de algoritmos

Cálculo do Tempo de Execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar e a linguagem de programação utilizada é a C, considere o programa abaixo para calcular o resultado de

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

1. Início
2. declare soma_parcial numérico;
3. soma_parcial $\leftarrow$ 0;
4. para $i \leftarrow 0$ até n faça
5.   soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial+i*i*i;
6. escreva(soma_parcial);
7. Fim

Cálculo do Tempo de Execução

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

3 1 unidade de tempo

4 1 unidade para iniciação de i, $n+1$ unidades para testar se $i = n$ e n unidades para incrementar $i = 2n + 2$

5 4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") $= 4n$ unidades

6 1 unidade para escrita

- **Custo total**: $6n + 4$, ou seja, a função é $O(n)$!
  - Também podemos dizer que a complexidade do algoritmo acima é $\Theta(n)$, já que não há distinção entre o pior e o melhor caso

Cálculo do Tempo de Execução

- Ter que realizar todos esses passos para cada algoritmo (principalmente algoritmos grandes) pode se tornar uma tarefa cansativa

- Em geral, como se dá a resposta em termos do *big-oh*, costuma-se desconsiderar as constantes e elementos menores dos cálculos

- No exemplo anterior:
  - A linha 3 $soma\_parcial \leftarrow 0$ é insignificante em termos de tempo
  - É desnecessário ficar contando 2, 3 ou 4 unidades de tempo na linha 5 $soma\_parcial \leftarrow soma\_parcial + i * i * i$
  - O que realmente dá a grandeza de tempo desejada é a repetição na linha 4 "para $i \leftarrow 1$ até n faça"

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada

```
para i ← 0 até n faça
  x += 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada
    - No exemplo abaixo são realizadas $3n + 2$ operações (uma unidade para iniciar i + n * (incremento na variável i + uma comparação + atribuição na variável x) + uma última comparação, que é o momento em que a variável i atinge o valor de n), ou seja, o seu custo é $O(n)$
    - Por mais que o operador $+=$ seja equivalente a duas operações (uma atribuição e uma soma), o mesmo é contado como uma unidade

```
para i ← 0 até n faça
  x += 1;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições: tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada
    - No exemplo abaixo também são realizadas $3n + 2$ operações

$i \leftarrow 0$
```
enquanto i < n faça
   x += 1;
   i += 1;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas
    - A análise é feita de dentro para fora
    - Tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições
    - Exemplo de fragmento de código com custo de $O(n^2)$

```
para i ← 0 até n faça
  para j ← 0 até n faça
    k ← k + 1;
```

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Repetições aninhadas

```
para i ← 0 até n faça
  para j ← 0 até n faça
    k ← k + 1;
```

- Nas duas últimas linhas do código acima (laço interno), são realizadas $4n + 2$ operações: uma atribuição para a variável j + n * (uma atualização de j + mais uma comparação entre i e n + uma atribuição na variável k + uma soma na variável k)

- A operação acima é realizada n vezes, ou seja, o total de operações no fragmento de código acima é $n * (4n + 2 + 2) + 2 = 4n^2 + 4n + 2$

Cálculo do Tempo de Execução

- Regras para o cálculo de execução
  - Comandos consecutivos
    - É a soma dos tempos de cada um, o que pode significar o máximo entre eles
    - O exemplo abaixo é $O(n^2)$ apesar da primeira repetição ser $O(n)$

```
para i ← 0 até n faça
   k ← 0;
para i ← 0 até n faça
   para j ← 0 até n faça
      k ← k + 1;
```

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste (então) mais o tempo do senão
    - Em outras palavras, a complexidade é comando que leva o maior tempo
    - O exemplo abaixo é $O(n)$ no pior caso e $\Omega(1)$ no melhor caso:

      se $i < j$
        então $i \leftarrow i + 1$
        senão para $k \leftarrow 0$ até n faça
          $i \leftarrow i * k$;

  - Chamadas de sub-rotinas: uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

Cálculo do Tempo de Execução

- **Exercício 1**: Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo:

```
void função1(int v[], int n){
  int i, j, auxA, auxB;
  i = 1;
  while (i <= n){
      v[i - 1] += 0;
      i = i + 1;
  }
  for (i = 0; i < n; i++)
      for (j = 0; j < n; j++)
          v[i] += v[i] + i + j;
}
```

Cálculo do Tempo de Execução

- **Resolução do exercício 1**:
  1. Linha 3: inicialização de i: 1 operação
  2. Linhas 4–7: $5n + 1$
     - n * (1 comparação + 1 subtração (v[i - 1]) + 1 atribuição com soma (+=) em v + 1 atribuição e 1 soma em i): $5n$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  3. Linhas 9–10 (*loop interno*): $5n + 2$
     - Inicialização de j: 1 operação
     - n * (1 comparação + 3 operações em A (1 atribuição e duas somas) + 1 incremento em j): $5n$ operações
     - Última comparação (quando $j > n$): 1 operação
  4. Linhas 8–10: $5n^2 + 4n + 2$
     - Inicialização de i: 1 operação
     - n * (1 comparação + $5n + 2$ (for interno) + 1 atribuição em i): $5n^2 + 4n$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  5. Soma dos itens 1, 2 e 3: $1 + 5n + 2 + 5n^2 + 4n + 2 = 5n^2 + 9n + 5$
     - Complexidade: $O(n^2)$

Cálculo do Tempo de Execução

- **Exercício 2**: Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo:

```
void função2(int n){
  int i, j, auxA, auxB;
  i = 0;
  auxA = 0;
  auxB = 0;
  while (i <= n){
      auxA += 1;
      i = i + 1;
  }
  for (i = 0; i <= n; i++)
      for (j = 0; j <= n; j++)
          auxB += (auxA - i + j);
}
```

Cálculo do Tempo de Execução

- **Resolução do exercício 2:**
  1. Linhas 3–9: $4n + 8$
     - Inicialização de i, auxA, AuxB: 3 operações
     - $(n + 1)$ * (1 comparação + 1 atribuição em auxA + 1 atribuição e 1 soma em i): $4n + 4$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  2. Linhas 11–12 (*loop* interno): $5n + 7$
     - Inicialização de j: 1 operação
     - $(n + 1)$ * (1 comparação + 3 operações em auxB (1 atribuição e duas somas) + 1 incremento em j): $5n + 5$ operações
     - Última comparação (quando $j > n$): 1 operação
  3. Linhas 10–12: $5n^2 + 14n + 11$
     - Inicialização de i: 1 operação
     - $(n + 1)$ * (1 comparação + $5n + 7$ (for interno) + 1 atribuição em i): $5n^2 + 14n + 9$ operações
     - Última comparação (quando $i > n$): 1 operação
  4. Soma dos itens 1 e 3: $5n^2 + 18n + 19$
     - Complexidade: $O(n^2)$

Cálculo de Espaço

Cálculo de Espaço

- Supondo que todos os tipos de dados possuam o mesmo tamanho e a linguagem de programação utilizada é a C, considere o programa abaixo:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

1. Início
2. declare soma_parcial numérico;
3. soma_parcial $\leftarrow$ 0;
4. para $i \leftarrow 0$ até n faça
5.   soma_parcial $\leftarrow$ soma_parcial+i*i*i;
6. escreva(soma_parcial);
7. Fim

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

1 1 unidade para a declaração do parâmetro n

2 1 unidade para a declaração da variável *soma_parcial*

4 1 unidade para a declaração da variável i

- **Custo total**: 3, ou seja, o algoritmo ocupa $O(1)$ de espaço!
  - Também podemos dizer que a complexidade do algoritmo acima é $\Theta(1)$, já que não há distinção entre o pior e o melhor caso
- **Obs.: na análise de complexidade de espaço geralmente é considerado apenas o espaço extra, ou seja, não é levado em consideração a entrada, exceto em funções recursivas, onde a quantidade de parâmetros é considerada**

Cálculo de Espaço

- Regras para o cálculo de espaço
  - Repetições: no exemplo abaixo, é contada apenas uma unidade para x, pois no final de cada passagem do laço, essa variável é descartada

```
para i ← 0 até n faça
    INTEIRO x = 1;
```

  - Contando com i e n, São necessárias 3 unidades de espaço para o fragmento de código acima
  - A complexidade de espaço aqui é $O(1)$ ou pode ser definida como $\Theta(1)$, já que não há distinções entre melhor e o pior caso para o uso de espaço

Cálculo de Espaço

- Regras para o cálculo de execução
  - Se... então... senão:
    - Para uma cláusula condicional, o espaço nunca é maior do que o espaço do teste (então) mais o espaço do senão
    - Em outras palavras, a complexidade é comando que leva o maior tempo
    - O exemplo abaixo é $O(n)$ no pior caso e $\Omega(1)$ no melhor caso:

```
se i < j
  então INTEIRO v;
  senão
    INTEIRO v[n];
```

Referências I

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Clifford, S.
Algoritmos: teoria e prática.
Elsevier, 2012.

Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.

Rosa, J. L. G.
Análise de Algoritmos - parte 1. SCC-201 – Introdução à Ciência da Computação II.
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2016.

Ziviani, N.
Projeto de Algoritmos - com implementações em Java e C++.
Thomson, 2007.