Raiz quadrada

Uma das operações matemáticas que conhecemos é a *raiz quadrada*. A raiz quadrada, definida para um número positivo x, é tal que se $\sqrt{x} = y$ então $y^2 = x$.

Sempre que precisamos calcular a raiz quadrada de x fazemos uso de uma calculadora ou saímos chutando números cujo quadrado mais se aproxima de x. Um dos algoritmos mais conhecidos para cálculo da raiz quadrada baseia-se justamente nesta segunda abordagem. Esse algoritmo é um caso particular do *método da bisecção*, que é um algoritmo iterativo originalmente proposto para encontrar zeros de funções. De fato, encontrar a raiz quadrada de um número equivale a encontrar zero de uma função, mas aí já é outra conversa.

O método da bisecção para o cálculo da raiz quadrada baseia-se no seguinte teorema:

> Se $x = a \times b$, então $\sqrt{x}$ está entre a e b.

Neste sentido, para calcular a raiz quadrada de um número positivo x, a ideia do algoritmo da bisecção é a seguinte:

1. Encontre dois números consecutivos a_0 e b_0 tais que $a_0^2 < x$ e $b_0^2 > x$.
2. Tome $a_1 = a_0$. O objetivo é encontrar b_1 tal que $x = a_1 \times b_1$. Logo,
$$b_1 = \frac{x}{a_1}.$$
3. A ideia seguinte é fazer com que a_i diminua e aproxime-se cada vez mais de b_i, para $i = 2, 3, \ldots$. Por isso, calcule
$$a_i = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$$
e
$$b_i = \frac{x}{a_i}.$$
O passo acima é repetido até que $|a_i - b_i| \leq \epsilon$, sendo ϵ um número positivo bem pequeno.

Deste modo, como vale que $x = a_i \times b_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots$, quando a_i estiver *suficientemente próximo* de b_i (suficientemente próximo quer dizer que o valor absoluto da diferença entre eles é menor ou igual a ϵ), então os dois vão ser suficientemente iguais e representarão a raiz quadrada de x.

Por exemplo, apliquemos o algoritmo para calcular $\sqrt{130}$ com precisão 10^{-12}.

- Os dois inteiros $a_0 = 11$ e $b_0 = 12$ são tais que o seus quadrados são, respectivamente, menor e maior que 130: $11 \times 11 = 121 < 130 < 144 = 12 \times 12$. Logo, é possível afirmar que a raiz de 130 é um número real maior que 11 e menor que 12. Passemos ao refinamento das casas decimais.
- Tomemos $a_1 = a_0 = 11$. Queremos b_1 tal que $a_1 \times b_1 = 130$. Logo,
$$b_1 = \frac{130}{a_1} = 11.818181\ldots$$
- Daí, seguimos um processo iterativo.

2. $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 11.4090909090909$ e $b_2 = \dfrac{130}{a_2} = 11.394422310757$, $|a_2 - b_2| \approx 0.01467$.
3. $a_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 11.4017566099239$ e $b_3 = \dfrac{130}{a_3} = 11.4017518920593$, $|a_3 - b_3| \approx 4.71786 \times 10^{-6}$.
4. $a_4 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = 11.4017542509916$ e $b_4 = \dfrac{130}{a_4} = 11.4017542509911$, $|a_4 - b_4| \approx 4.84945 \times 10^{-13}$.

Como a diferença entre a_4 e b_4 é inferior a 10^{-12}, paramos e assumimos que a raiz quadrada de 130 é a_4 (ou b_4).

Tarefa

Sua tarefa é implementar o método da bisecção para calcular a raiz quadrada de um número inteiro $x > 1$. Seu método da bisecção deve iterar até que o valor absoluto da diferença entre a_i e b_i seja menor ou igual a $\epsilon = 10^{-E}$ ou até que exceda-se um máximo de 100 iterações.

Entrada

A entrada é composta por dois números inteiros positivos $x > 1$ e $1 \leq E \leq 16$.

Saída

Caso x ou E não atendam aos limites estipulados, deve-se exibir a mensagem:

```
Entradas invalidas.
```

Caso o método da bisecção exceder o limite de 100 iterações, deve-se exibir a mensagem:

```
Nao foi possivel calcular sqrt(x).
```

substituindo x pelo número lido.

Caso o método da bisecção convirja e consiga calcular a_i e b_i que atendam o critério proposto, deve-se exibir a mensagem

```
A raiz quadrada de x eh y, calculada em i iteracoes.
```

substituindo x pelo primeiro número lido, y pelo a_i (ou b_i) calculado pelo método da bisecção e i pela quantidade de iterações.

Exemplo de Entrada

```
78
6
```

Exemplo de Saída

```
A raiz quadrada de 78 eh 8.8317608669559462, calculada em 4 iteracoes.
```

Observação: Note que nesse exemplo, a precisão pedida é 10^{-6}. Portanto, o módulo da diferença entre o seu resultado e o resultado deste exemplo deve ser, no máximo, 10^{-6}.

Exemplo de Entrada

```
1
5
```

Exemplo de Saída

```
Entradas invalidas.
```

Exemplo de Entrada

```
16
5
```

Exemplo de Saída

```
A raiz quadrada de 16 eh 4.0000013877324454, calculada em 4 iteracoes.
```

Veja a observação do primeiro exemplo!

Exemplo de Entrada

```
100
-2
```

Exemplo de Saída

```
Entradas invalidas.
```

Author: Tiago Alves, mojificação por John Gardenghi