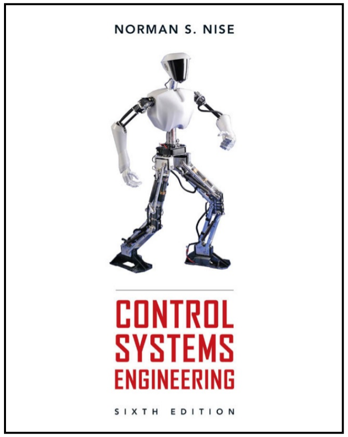
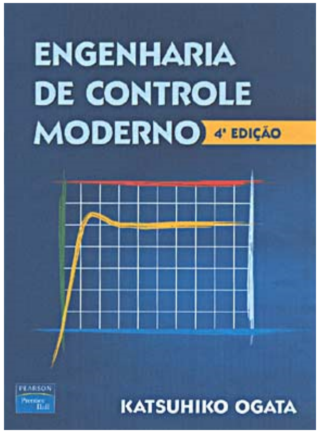
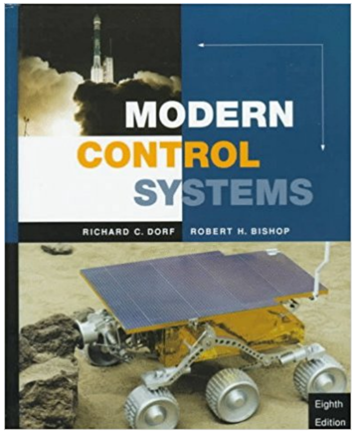
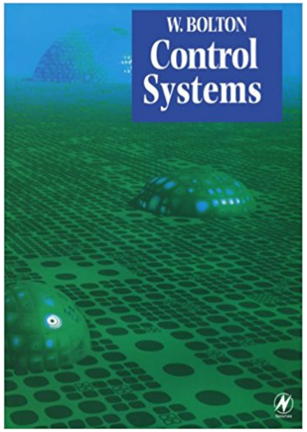
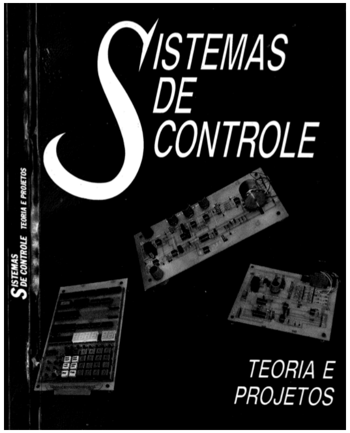
CMP1106 – Controle de Processos











Definição

"Um Sistema de Controle consiste em sub-sistemas e processos construídos com o objetivo de se obter uma saída desejada, com desempenho desejado para uma entrada específica fornecida."

N. S. Nise – Engenharia de Sistemas de Controle

"Um Sistema que estabeleça uma relação de comparação entre uma saída e uma entrada de referência, utilizando a diferença como meio de controle, é denominado Sistema de Controle com Realimentação"

K. Ogata – Engenharia de Controle Moderno

"Um Sistema de Controle é uma interconexão de componentes formando uma configuração de Sistema que produzirá uma resposta desejada do sistema."

R.C. Dorf e R.H. Bishop – Sistemas de Controle Moderno

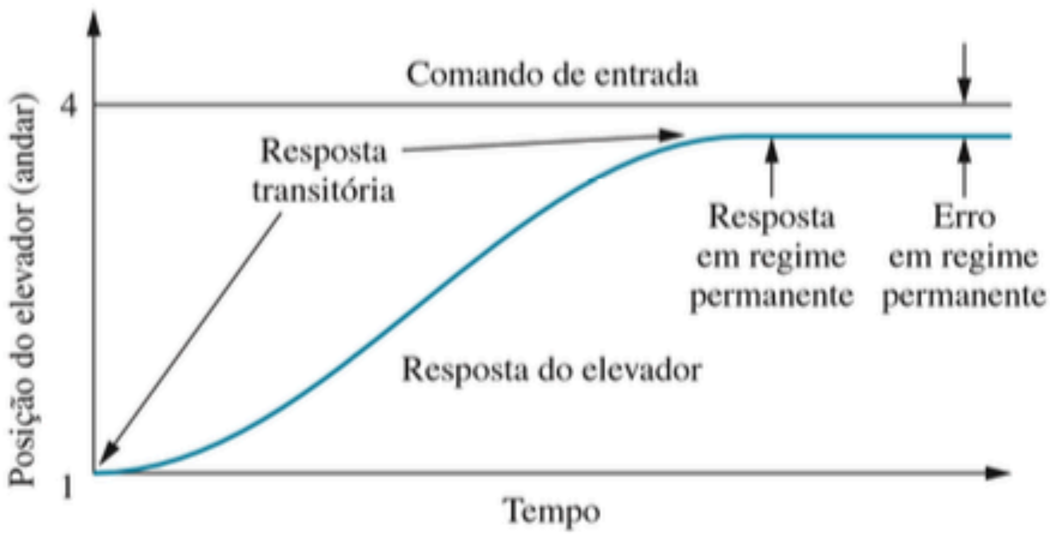
Entrada e Saída

Entrada: valor desejado
Saída: Resposta

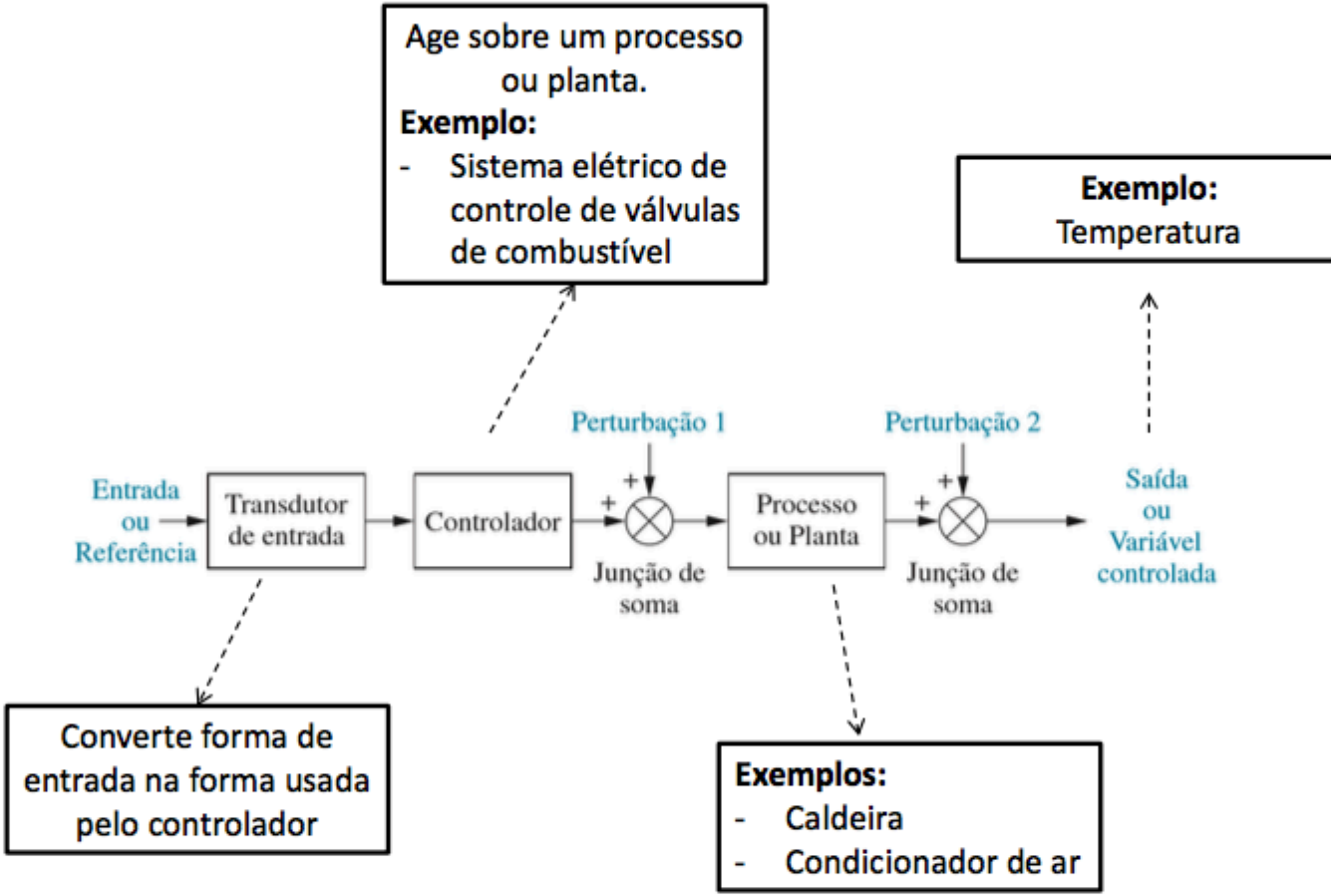
<u>Analisando a Resposta do saída de um elevador</u>

- Não pode mudar de forma instantânea
  - Sistema físico real (**resposta transitória**)
  - Conforto e segurança
  - Potência limitada

- Estado estacionário (**regime permanente**)
  - Erro de estado estacionário:
    1) Inerente ao Sistema de controle
    2) Defeito



Sistemas a Malha Aberta



- Necessidade de calibração periódica
- Maior sensibilidade às condições ambientais
- Menor acurácia
- Não exige uma teoria específica! (vantagem)

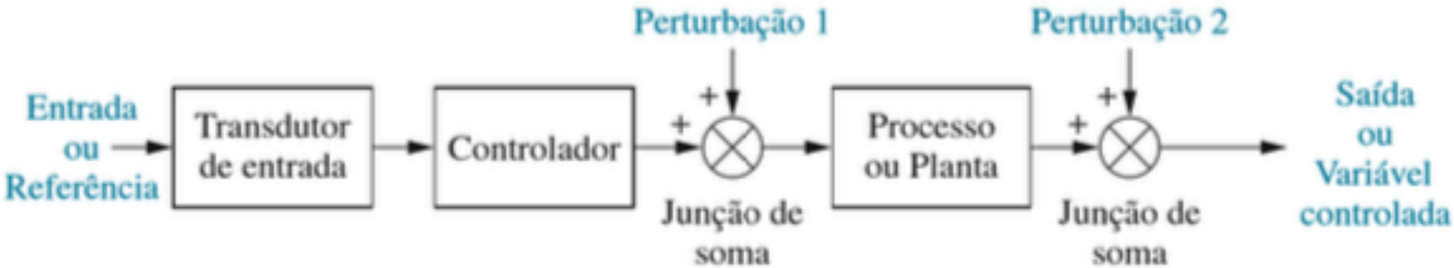
Sistemas a Malha Aberta

- Não corrigem efeitos de perturbações
- Comandados apenas pela entrada

<u>Exemplos de sistemas em malha aberta:</u>

- Torradeira
  - **Saída:** Cor da torrada
  - **Entrada:** Tempo
  - **Perturbações:** tipo de massa, espessura da torrada

- Método para passar em uma disciplina
  - **Saída:** Nota na prova
  - **Entrada:** Tempo de estudo
  - **Perturbação:** capítulo não previsto adicionado na matéria, doença, festas.

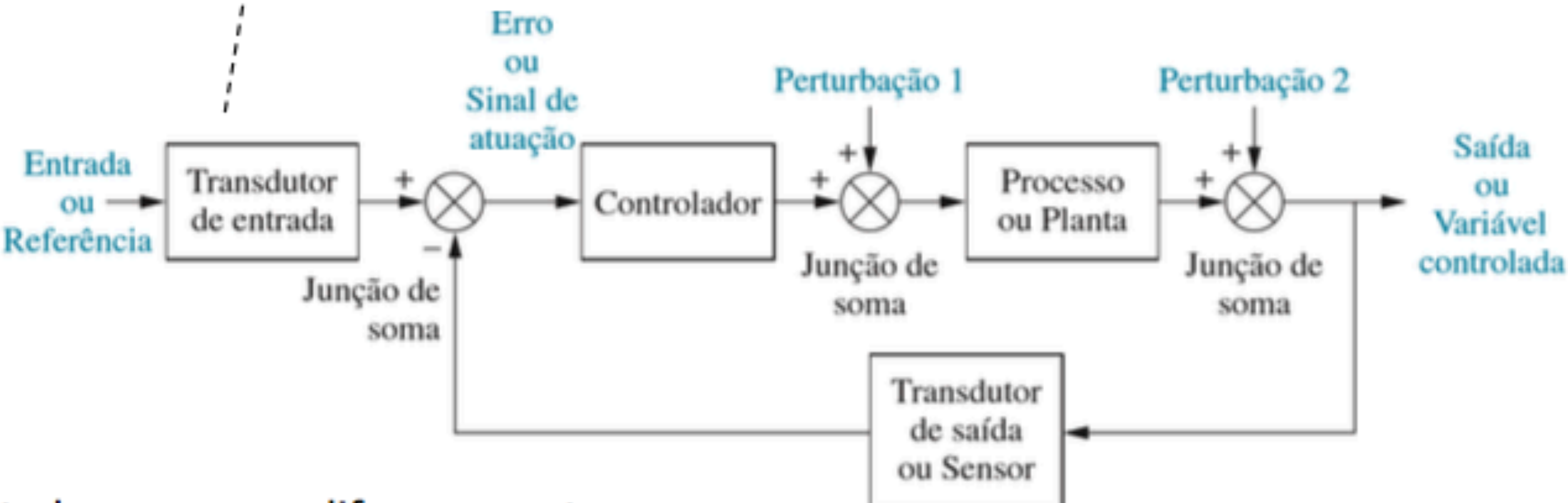


Sistemas a Malha Fechada (Controle com Retroação)

Exemplo: Sistema de controle de temperatura

potenciômetro

Sinal atuante é chamado **erro** quando transdutores de entrada e saída possuem ganho unitário



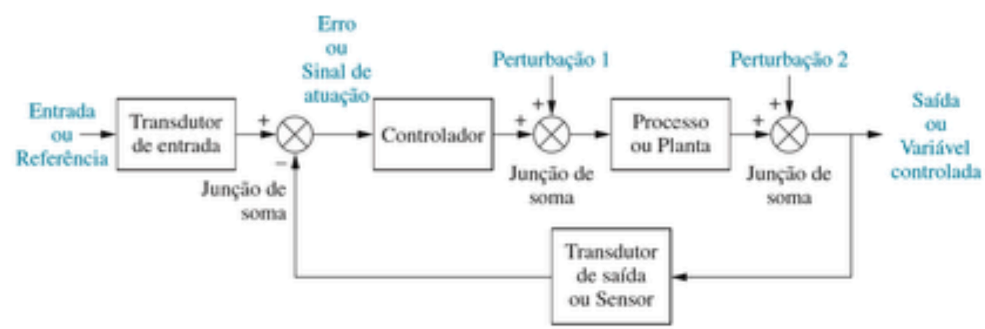
termistor

Enquanto houver uma diferença entre o sinal de saída e a resposta desejada o Sistema irá atuar para regular a saída.

Sistemas a Malha Fechada (Controle com Retroação)

Vantagens
- Maior precisão que os sistemas de malha aberta.
- Menos sensíveis a ruídos, perturbações e mudanças nas condições ambientes.
- Maior flexibilidade no controle da resposta transitória e estacionária.

Desvantagens
- Mais complexos
- Mais caros



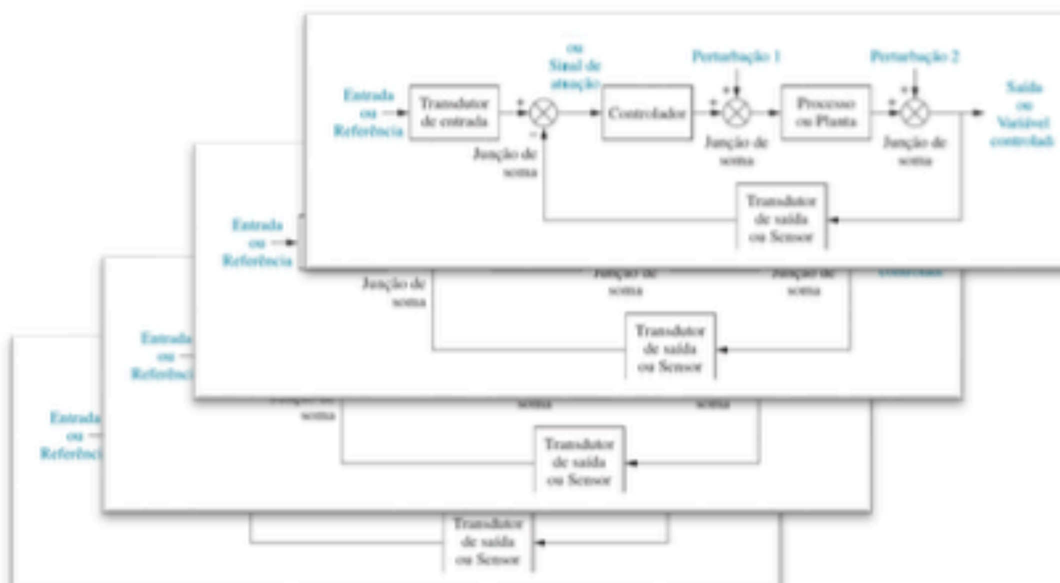
Analisar custo-benefício
Simplicidade e baixo custo vs precisão e maior custo

Sistemas Controlados por Computador

Controlador (ou compensador) → computador digital

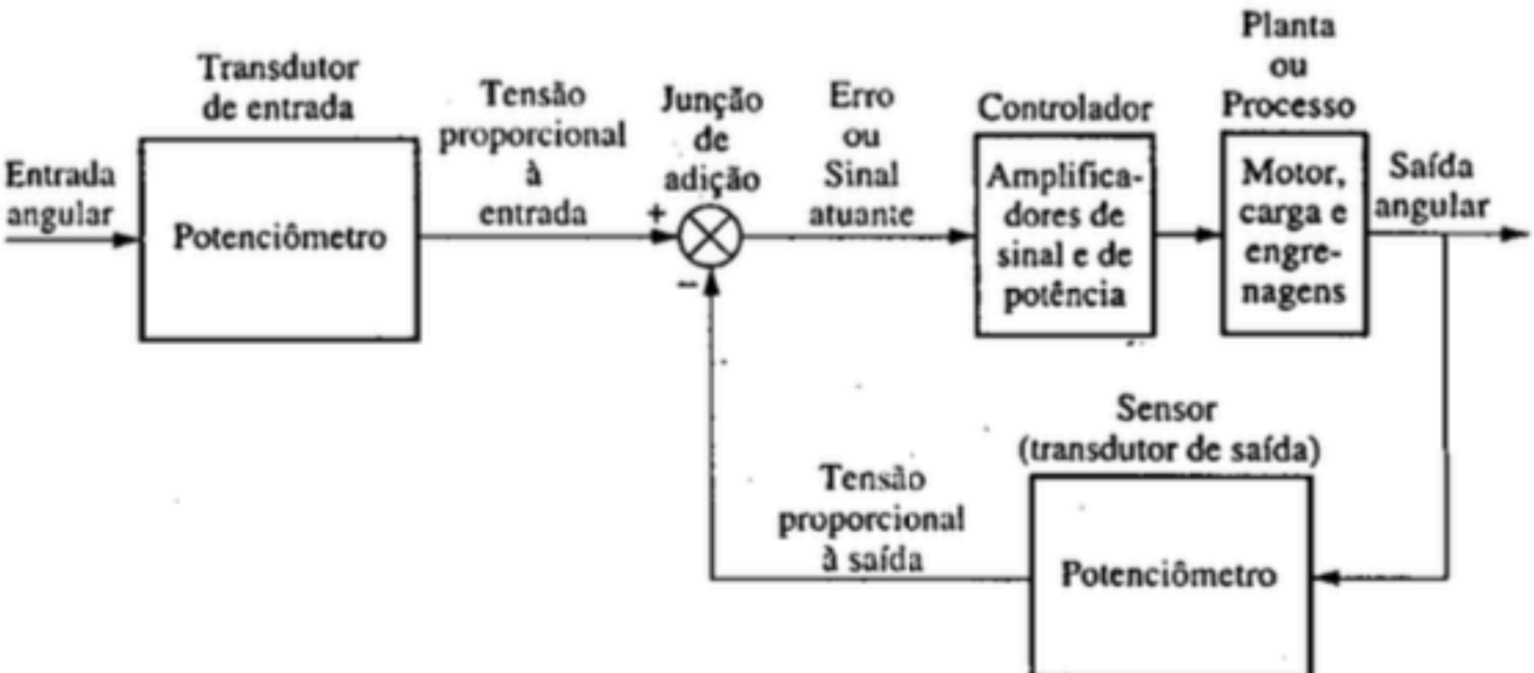
Vantagens

- Controlar ou compensar muitas malhas pelo mesmo computador de forma compartilhada (*time sharing*).
- Ajustes de parâmetros feito via software e não hardware.
- Funções de supervisão e agendamento.

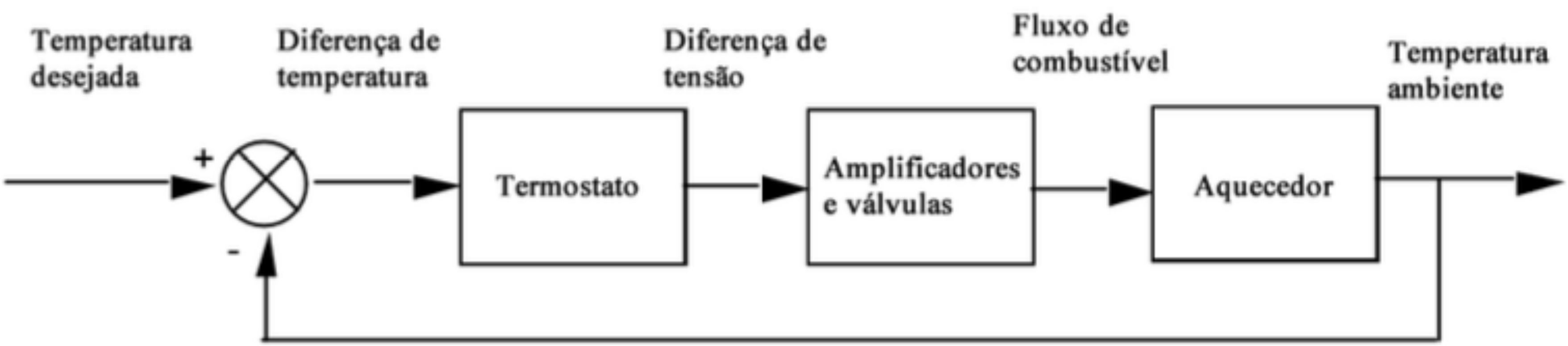


2. Um sistema de controle de temperatura opera sentindo a diferença entre o ajuste do termostato e a temperatura real e em seguida abrindo uma válvula de combustível de uma quantidade proporcional a esta diferença. Desenhe um diagrama de blocos funcional a malha fechada semelhante ao da Fig. 1.9(*d*), identificando os transdutores de entrada e de saída, o controlador e a planta. Além disso, identifique os sinais de entrada e de saída para todos os subsistemas descritos anteriormente.

Exemplo:



Solução:


Temperatura desejada
Diferença de temperatura
Termostato
Diferença de tensão
Amplificadores e válvulas
Fluxo de combustível
Aquecedor
Temperatura ambiente
+
-

Requisitos a serem alcançados em CMP1106

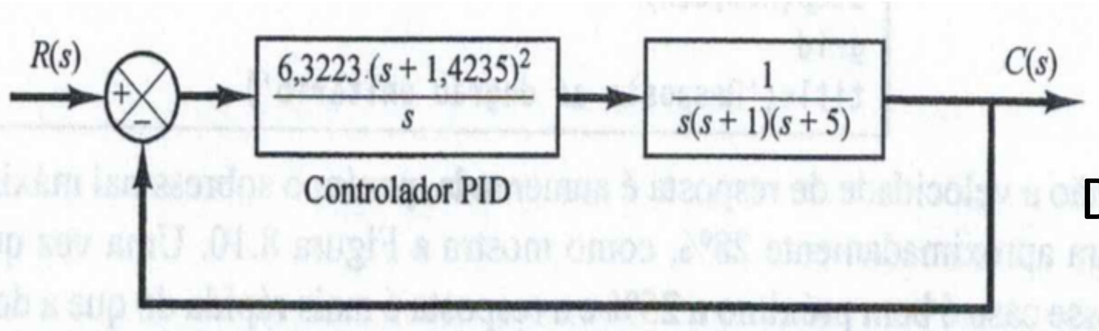
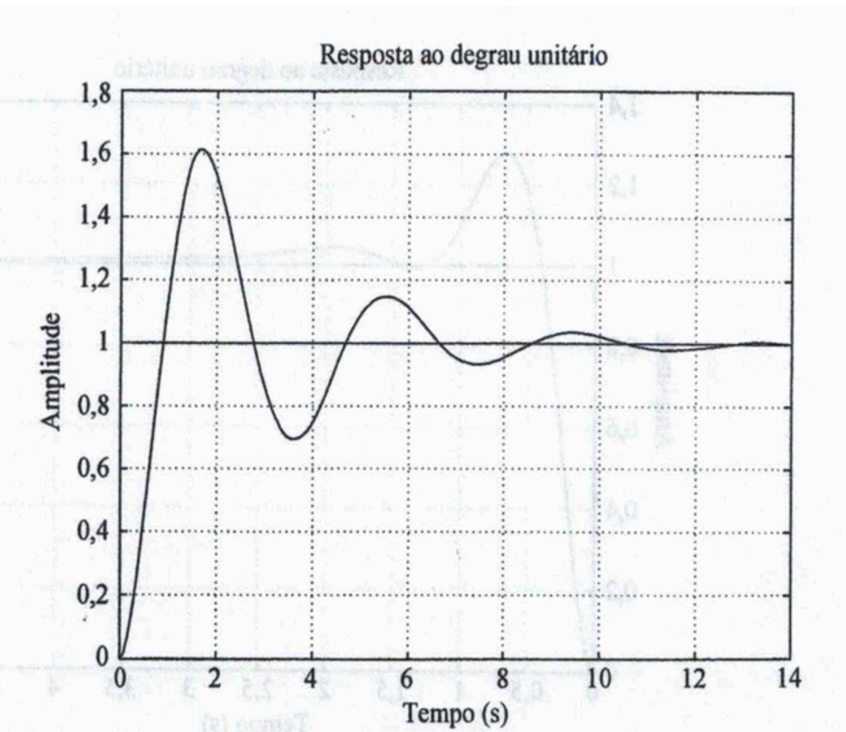


Diagrama de blocos

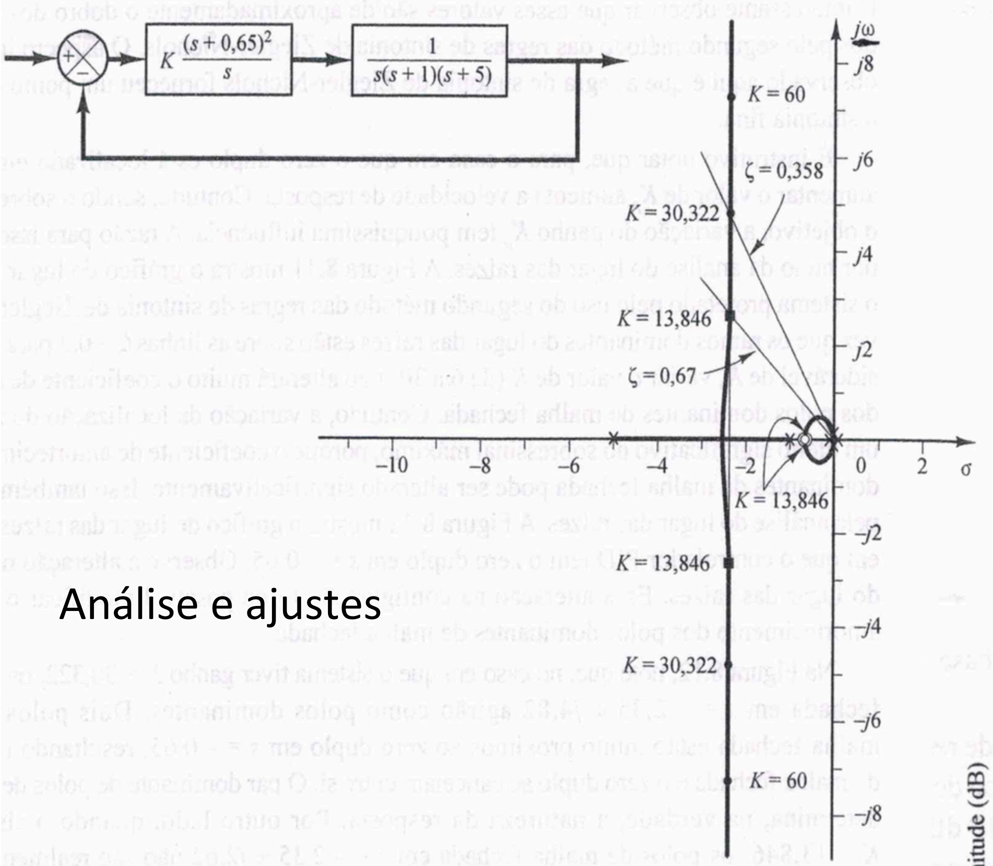
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6,3223s^2 + 18s + 12,811}{s^4 + 6s^3 + 11,3223s^2 + 18s + 12,811}$$

Funçao de Transferência



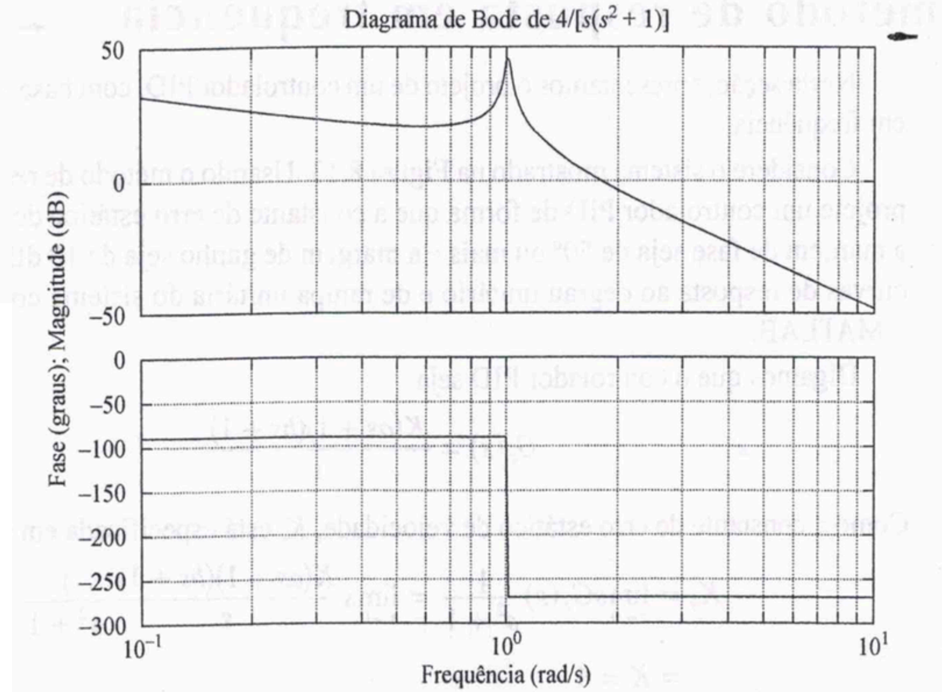
Análise no tempo

```
num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
step(num,den)
grid
title('Resposta ao degrau unitário')
```



Análise e ajustes

```
num = [4];
den = [1 0.0000000001 1 0];
w = logspace(-1,1,200);
bode(num,den,w)
title('Diagrama de Bode de 4/[s(s^2+1)]')
```



Análise no domínio da Frequência

Ferramentas matemáticas para Controle de Sistemas Lineares

Transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Variável complexa: $s = \sigma + j\omega$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds = f(t)u(t)$$

Transformada Inversa de Laplace

TABELA 2.1 Tabela de transformadas de Laplace

Item nº	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^n + 1}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s + a}$
6.	$\text{sen}\, \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

* A multiplicação de f(t) por u(t) conduz a uma função do tempo que é nula para t<0

TABELA 2.2 Teoremas da transformada de Laplace

Item nº	Teorema	
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$	homogeneidade
3.	$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)] = F_1(s)+F_2(s)$	aditividade → Linaridade
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Deslocamento em frequência
5.	$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$	Deslocamento no tempo
6.	$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Escala
7.	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	
8.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Derivação e Integração
9.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Valor Final e
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Valor Inicial

Problema Obter a transformada de Laplace de $f(t) = Ae^{-at}u(t)$.

Definição

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Resolvendo pela definição

$$F(s) = \int_0^{\infty} \boxed{f(t)}e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} \boxed{A}e^{\boxed{-at}}e^{-st}\,dt$$

$$= A\boxed{\int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt}$$

$$= -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{A}{s+a}$$

Do Cálculo II

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)}$$

$$\int e^{cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}e^{cx}$$

Resolvendo usando as tabelas

Exemplo 1

$$f(t) = 5t + 4t^2 - 8$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{5t + 4t^2 - 8\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{5t\} + \mathcal{L}\{4t^2\} - \mathcal{L}\{8.1\}$$

$$F(s) = 5\mathcal{L}\{t\} + 4\mathcal{L}\{t^2\} - 8\mathcal{L}\{1\}$$

$$F(s) = \frac{5}{s^2} + 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - \frac{8}{s}$$

$$F(s) = \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s^3} - \frac{8}{s}$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	*f(t)*	*F(s)*
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

*Simplificando: u(t) = 1 nos exercícios

Exemplo 2

$$f(t) = 6e^{5t} + sen(3t) - 8\cos(9t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{6e^{5t}\} + \mathcal{L}\{sen(3t)\} - \mathcal{L}\{8\cos(9t)\}$$

$$F(s) = 6\mathcal{L}\{e^{5t}\} + \mathcal{L}\{sen(3t)\} - 8\mathcal{L}\{\cos(9t)\}$$

$$F(s) = 6\frac{1}{s-5} + \frac{3}{s^2+3^2} - 8\frac{s}{s^2+9^2}$$

$$F(s) = \frac{6}{s-5} + \frac{3}{s^2+9} - \frac{8s}{s^2+81}$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	f(t)	F(s)
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\text{sen}\, \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Exemplo 3

$$f(x) = 3 + 2x^2$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{3\} + \mathcal{L}\{2x^2\}$$

$$F(s) = 3\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{x^2\}$$

$$F(s) = \frac{3}{s} + 2(\frac{2!}{s^{2+1}})$$

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^3}$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	f(t)	F(s)
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\text{sen}\,\omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Exemplo 4

$$f(x) = 2sen(x) + 3\cos(2x)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{2sen(x) + 3\cos(2x)\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{2sen(x)\} + \mathcal{L}\{3\cos(2x)\}$$

$$F(s) = 2\mathcal{L}\{sen(x)\} + 3\mathcal{L}\{\cos(2x)\}$$

$$F(s) = 2\mathcal{L}\{sen(1.x)\} + 3\mathcal{L}\{\cos(2x)\}$$

$$F(s) = 2(\frac{1}{s^2 + 1^2}) + 3(\frac{s}{s^2 + 2^2})$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{3s}{s^2 + 4}$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\text{sen}\,\omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos\omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Exemplo 5

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$f(t) = t.e^{4t}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t.\boxed{e^{4t}}\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s-4}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t.e^{4t}\} = (-1)^1\left(\frac{1}{s-4}\right)' \Rightarrow F(s) = -\left(\frac{-1}{(s-4)^2}\right) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

Derivando:

$$y = \frac{1}{s-4}$$

$$y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\begin{cases} f = 1 \rightarrow f' = 0 \\ g = s-4 \rightarrow g' = 1 \end{cases} \qquad y' = \frac{0.(s-4) - 1.1}{(s-4)^2} = \frac{-1}{(s-4)^2}$$

- Regra do quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- Regra do produto:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Exemplo 6

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \mathrm{F(s)}}{ds^n}$$

$$f(t) = t.\cos(5t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t.\cos(5t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(5t)\} = \frac{s}{s^2+5^2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t.\cos(5t)\} = (-1)^1\left(\frac{s}{s^2+5^2}\right)' \Rightarrow F(s) = \frac{s^2-25}{(s^2+25)^2}$$

Derivando:

$$y = \frac{s}{s^2+25}$$

$$\begin{cases} f = s \rightarrow f' = 1 \\ g = s^2+25 \rightarrow g' = 2s \end{cases}$$

$$y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$y' = \frac{1.(s^2+25) - s.2s}{(s^2+25)^2}$$

$$y' = \frac{25-s^2}{(s^2+25)^2}$$

Exemplo 7

$$f(t) = e^{-2t}.sen(5t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{sen(5t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(5t)\} = \frac{5}{\boxed{s^2} + 5^2}$$

$(s)^2$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}.sen(5t)\} = \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

$$F(s) = \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

Teoremas das transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Teorema do deslocamento de freqüência

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Teoremas das transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Teorema do deslocamento de freqüência

Exemplo 8

$$f(t) = e^{-t}.t.cos(2t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}t.\boxed{cos(2t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+2^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^1.cos(2t)\} = (-1)^1\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)' = (-1)^1\left(\frac{(1).(s^2+4)-s.2s}{(s^2+2^2)^2}\right)$$

$$= (-1)\quad\left(\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right) = \left(\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\right)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}.t.co\,s(2t)\} = \left(\frac{(s+1)^2-4}{\left((s+1)^2+4\right)^2}\right)$$

Exemplo 9

Teoremas das transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

$$f(t) = e^{-2t}t^3$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}t^3\}$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}t^3\} = \frac{6}{(s+2)^4}$$

Teoremas das transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

$$\delta(t-a) \rightarrow e^{-as}$$

Exemplo 10

$$f(t) = e^{-3t}\delta(t-4)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-4)\} = e^{-4s}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-3t}\delta(t-4)\} = e^{-4(s+3)}$$

Exemplo 11

Teoremas das transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

$$\delta(t-a) \rightarrow e^{-as}$$

$$f(t) = e^{-2t}[3\cos(6t) - 5sen(6t)]$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}[3\cos(6t) - 5sen(6t)]\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{3e^{-2t}\cos(6t)\} - \mathcal{L}\{5e^{-2t}sen(6t)]\}$$

$$F(s) = 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(6t)\} - 5\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(6t)]\}$$

$$\mathcal{L}\{sen(6t)\} = \frac{6}{s^2+6^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(6t)\} = \frac{s}{s^2+6^2}$$

$$F(s) = 3\frac{(s+2)}{(s+2)^2+6^2} - 5\frac{6}{(s+2)^2+6^2}$$

$$F(s) = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+6^2} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$$

No MatLab >> https://www.mathworks.com/help/symbolic/laplace.html
https://www.mathworks.com/help/symbolic/mupad_ref/laplace.html

```
syms x y
f = 1/sqrt(x);
laplace(f, x, y)
```

```
ans =
pi^(1/2)/y^(1/2)
```

```
syms a t y
f = exp(-a*t);
laplace(f, y)
```

```
ans =
1/(a + y)
```

```
syms t s
laplace(dirac(t - 3), t, s)
```

```
ans =
exp(-3*s)
```

```
syms f1(x) f2(x) a b
f1(x) = exp(x);
f2(x) = x;
laplace([f1, f2],x,[a, b])
```

```
ans =
[ 1/(a - 1), 1/b^2]
```

Lista: Refaça os exemplos anteriories usando o Matlab

Problema Obter a transformada de Laplace inversa de $F_1(s) = 1/(s+3)^2$.

Teoremas das transformadas de Laplace

4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)]$	$= F(s+a)$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	f(t)	F(s)
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

$$= f(t)u(t)$$

$$u(t) = 1 \qquad t > 0$$

$$= 0 \qquad t < 0$$

Solução:

$$F_1(s) = 1/(s+3)^2$$

$$F(s) = 1/s^2 \longrightarrow tu(t)$$

$$F(s+a) = 1/(s+a)^2 \longrightarrow e^{-at}tu(t)$$

Logo:

$$f_1(t) = e^{-3t}tu(t)$$

Pré-requisitos não abordados nos cursos de Computação da ECEC. Solução: utilizar a Tabela

Expansão em Frações Parciais

Caso 1: Raízes do Denominador de $F(s)$ Reais e Distintas

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Cada um dos fatores é elevado somente à potência unitária

Caso 2: Raízes do Denominador de $F(s)$ Reais e Repetidas

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

Caso 3: Raízes do Denominador de $F(s)$ Complexas ou Imaginárias

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

Expansão em Frações Parciais - Exemplos

Caso 1 - Exemplo 1: Raizes reais e distintas

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Resolvendo frações parciais:

**Para obter K1, multiplica-se primeiro por (s+1) e depois faz-se s teder à -1*

$$\frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{K_1}{S+1} + \frac{K_2}{S+2}$$

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{(s+1)K_2}{(s+2)} \xrightarrow{s=-1} \frac{2}{(s+2)} = K_1 + \cancel{\frac{(s+1)K_2}{(s+2)}}^{\,0} \qquad \boxed{K_1 = 2}$$

-1

$$\frac{2}{(s+1)} = \frac{K_1(s+2)}{S+1} + K_2 \xrightarrow{s=-2} \frac{2}{(s+1)} = \cancel{\frac{K_1(s+2)}{S+1}}^{\,0} + K_2 \qquad \boxed{K_2 = -2}$$

-2

$$\boxed{F(s) = \frac{2}{S+1} + \frac{-2}{S+2}}$$

Aplicando inversa de Laplace:

$$F(s) = \frac{2}{S+1} + \frac{-2}{S+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

Em geral, então, dada uma $F(s)$ cujo denominador possua raízes reais e distintas, é possível efetuar uma expansão em frações parciais,

$$\boxed{\begin{aligned} F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} &= \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_m}{(s+p_m)} + \cdots + \frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned}}$$

Para calcular os resíduos, K_i, multiplica-se a Eq. supracitada pelo denominador da fração parcial correspondente. Assim, se quisermos obter K_m, multiplicamos a Eq supracitada por $(s + p_m)$ e obtemos:

$$\begin{aligned} (s+p_m)F(s) &= \frac{(s+p_m)N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)\cdots(s+p_n)} \\ &= (s+p_m)\frac{K_1}{(s+p_1)} + (s+p_m)\frac{K_2}{(s+p_2)} + \cdots + K_m + \cdots \\ &\quad + (s+p_m)\frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned}$$

Se fizermos s tender a $-p_m$, todos os membros da direita tenderão a zero, exceto k_m

$$\boxed{\left.\frac{\cancel{(s+p_m)}N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots\cancel{(s+p_m)}\cdots(s+p_n)}\right|_{s\to -p_m} = K_m}$$

MathWorks®

Documentation

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/residue.html?s_tid=srchtitle

Description

`[r,p,k] = residue(b,a)` finds the residues, poles, and direct term of a Partial Fraction Expansion of the ratio of two polynomials, where the expansion is of the form

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{r_n}{s - p_n} + \ldots + \frac{r_2}{s - p_2} + \frac{r_1}{s - p_1} + k(s).$$

The inputs to `residue` are vectors of coefficients of the polynomials `b = [bm ... b1 b0]` and `a = [an ... a1 a0]`. The outputs are the residues `r = [rn ... r2 r1]`, the poles `p = [pn ... p2 p1]`, and the polynomial `k`. For most textbook problems, `k` is `0` or a constant.

`[b,a] = residue(r,p,k)` converts the partial fraction expansion back to the ratio of two polynomials and returns the coefficients in `b` and `a`.

MathWorks®

Documentation

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/residue.html?s_tid=srchtitle

Find the partial fraction expansion of the following ratio of polynomials $F(s)$ using `residue`

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{-4s+8}{s^2+6s+8}.$$

```
b = [-4 8];
a = [1 6 8];
[r,p,k] = residue(b,a)
```

```
r =

   -12
     8


p =

    -4
    -2


k =

    []
```

This represents the partial fraction expansion

$$\frac{-4s+8}{s^2+6s+8} = \frac{-12}{s+4} + \frac{8}{s+2}.$$

MathWorks®

Documentation

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/residue.html?s_tid=srchtitle

Convert the partial fraction expansion back to polynomial coefficients using `residue`.

```
[b,a] = residue(r,p,k)
```

```
b =

    -4     8

a =

     1     6     8
```

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{-4s+8}{s^2+6s+8}$$

MathWorks®

Documentation

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/residue.html?s_tid=srchtitle

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} = \frac{1}{s^5 + 5s^4 + 9s^3 + 7s^2 + 2s}$$

Cuja expansão é:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3}}$$

```
>> clear all
>> a = [1 5 9 7 2] % coeficientes do polinômio s^4 + 5*s^3 + 9*s^2 + 7*s + 2

a =
     1     5     9     7     2

>> b = [1] % coeficientes polinomiais

b =
     1
```

```
>> [r, p, k] = residue(b,a) % b é o numerador e a é o denominador

r =
   -1.0000
    1.0000
   -1.0000
    1.0000
p =
   -2.0000
   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000
k =
   []

>> [b,a] = residue(r,p,k)% Obtém a forma polinomial

b =
   -0.0000    -0.0000    -0.0000     1.0000


a =
    1.0000     5.0000     9.0000     7.0000     2.0000
```

Expansão em Frações Parciais - Exemplos

Caso 1 - Exemplo 2: Solução de equação diferencial com transformada de Laplace e frações parciais

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 32u(t)$$

Teoremas das transformadas de Laplace	
$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right]$	$= sF(s) - f(0-)$
$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]$	$= s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$
$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right]$	$= s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$

Transformada de Laplace

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)}$$

$$= \frac{32}{s(s + 4)(s + 8)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s + 4)} + \frac{K_3}{(s + 8)}$$

Raízes reais e distintas

$$K_1 = \left.\frac{32}{(s + 4)(s + 8)}\right|_{s \to 0} = 1$$

$$K_2 = \left.\frac{32}{s(s + 8)}\right|_{s \to -4} = -2$$

$$K_3 = \left.\frac{32}{s(s + 4)}\right|_{s \to -8} = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s + 4)} + \frac{1}{(s + 8)}$$

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$

Transformadas de Laplace

f(t)	F(s)
$u(t)$	$\frac{1}{s}$

Lembrete: Fatoração de Polinômios

Fatoração pelo fator comum em evidência

$$15x + 9y = 3.(5x + 3y)$$
$$50 - 10y = 10.(5 - y)$$

Fatoração por agrupamento

$$ab - b^2 + 2a - 2b = (ab - b^2) + (2a - 2b)$$

$$\boxed{ab - b^2 + 2a - 2b = b(a - b) + 2(a - b) = (a - b)(b + 2)}$$

Fazer pequenos grupos a partir do polinomio principal

$$ab - b^2 = b(a - b)$$
$$2a - 2b = 2(a - b)$$

Outro exemplo

$$a^4 - a^5 + a^2b - a^3b = a^2(a^2 - a^3) + b(a^2 - a^3) = (a^2 - a^3)(a^2 + b)$$

Fatoração pela diferença de dois quadrados

$m^2 - n^2 = (\sqrt{m^2} - \sqrt{n^2}).(\sqrt{m^2} + \sqrt{n^2}) = (m - n).(m + n)$, ou simplesmente
$m^2 - n^2 = (m - n).(m + n)$.

Lembrete: Fatoração de Polinômios

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Verificando se é o quadrado perfeito?

$$x^2 - 8xy + 16y^2 = \sqrt{x^2} - \sqrt{16y^2} = x - 4y(2.x.(-4y) = -8xy) = (x-4y)^2$$ ou

$$x^2 - 8xy + 16y^2 = (x-4y)^2$$

Fatoração da soma ou diferença de dois cubos

$$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$$

Outros exemplos

$$x^3 - y^3 = (x-y).(x^2 + xy + y^2)$$

$$\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right).\left(\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{9}\right)$$

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$x^2 - 2x - 35$$

Encontrar dois números que somados dêem o coeficiente do segundo termo

$$(x-7).(x+5)$$

$$x^2 - 15x - 100 = (x-20).(x+5)$$

$$y^2 + y - 72 = (y+9)(y-8)$$

Lembrete: Fatoração de Polinômios

Fatoração completa

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2).(x^2 + y^2) = (x - y).(x + y).(x^2 + y^2)$$

Outros exemplos

$$3x^2 - 6x + 3 = 3.(x^2 - 2x + 1) = 3.(x - 1)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b - c)(a + b + c)$$

Fatoração por artifício

$$x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$$

Artifício: adicionamos e subtrímos o termo $4x^2y^2$

$$(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 =$$

$$x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 4y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 4y^2 + 2xy)(x^2 + 4y^2 - 2xy)$$

Expansão em Frações Parciais - Exemplos Caso 1

Exemplo 3

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$\frac{1}{\cancel{(x-2)(x+2)}}=\frac{A(x+2)}{\cancel{(x-2)(x+2)}}+\frac{B(x-2)}{\cancel{(x-2)(x+2)}}$$

$$1=A(x+2)+B(x-2)$$

Escolhendo valores apropriados de x para encontrar A e B

$\boxed{x=-2}$ $$1=\cancel{A(-2+2)}+B(-2-2) \qquad B=-\frac{1}{4}$$

$\boxed{x=2}$ $$1=A(2+2)+\cancel{B(2-2)} \qquad A=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^2+4}=\frac{1/4}{(x-2)}+\frac{-1/4}{(x+2)}}$$

Exemplo 4

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x^2-x\ -2)} = \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\boxed{x-1 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}$$

$$\boxed{x=2} \qquad B = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{x=-1} \qquad C = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{x=0} \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/6}{x-2} + \frac{-2/3}{x+1}}$$

Calculem a Inversa supondo x=s (1 minuto)

Expansão em Frações Parciais - Exemplos

- Numerado maior ou igual que o denominador
- Caso 1

Exemplo 5

$$\frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}$$

Índice do numerador maior que do denominador
→ Dividir polinômios

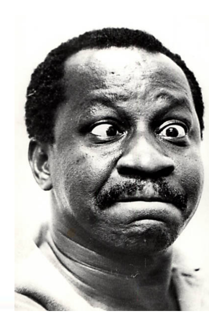
$$\begin{array}{r|l} -\cancel{4x^3} + 0x^2 + 0x + 0 & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2} \cancel{4x^3} + 2x^2 - 4x - 2 & -2 \\ \cline{1-1} 2x^2 - 4x - 2 & \end{array}$$

$$\frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} = -2 + \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x + 1} = -2 + \frac{2x^2 - 4x - 2}{x^2(2x+1) - (2x+1)}$$

$$= -2 + \frac{2x^2 - 4x - 2}{(2x+1)(x-1)(x+1)}$$

Frações parciais:

$$\frac{2x^2 - 4x - 2}{(2x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$



3 minutis??

Solucionatics⋯.

- Numerado maior ou igual que o denominador
- Caso 1

Frações parciais:

$$\frac{2x^2-4x-2}{(2x+1)(x-1)(x+1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$2x^2-4x-2=\boldsymbol{A}(x-1)(x+1)+\boldsymbol{B}(2x+1)(x+1)+\boldsymbol{C}(2x+1)(x-1)$$

$\boxed{x=1}$

$$2x^2-4x-2=\boldsymbol{A}\cancel{(x-1)}(x+1)+\boldsymbol{B}(2x+1)(x+1)+\boldsymbol{C}\cancel{(2x+1)}(x-1)$$

$$\boxed{B=-\frac{2}{3}}$$

$\boxed{x=-1}$

$$2x^2-4x-2=\boldsymbol{A}\cancel{(x-1)}(x+1)+\boldsymbol{B}\cancel{(2x+1)}(x+1)+\boldsymbol{C}(2x+1)(x-1)$$

$$\boxed{C=2}$$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

$$2x^2-4x-2=\boldsymbol{A}(x-1)(x+1)+\boldsymbol{B}\cancel{(2x+1)}(x+1)+\boldsymbol{C}\cancel{(2x+1)}(x-1)$$

$$\boxed{A=-\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\frac{-4x^3}{2x^3+x^2-2x-1}=-2+\frac{-2/3}{2x+1}+\frac{-2/3}{x-1}+\frac{2}{x+1}}$$

Caso 2 – Denominador com termos repetidos

Exemplo 6

$$\frac{3x}{(2x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x = A(x-1)^2 + B(2x+1)(x-1) \quad + C(2x+1)$$

$\boxed{x=1}$ $\quad 3x = \cancel{A(x-1)^2} + \cancel{B(2x+1)(x-1)} \quad + C(2x+1)$

$\boxed{C = 1}$

$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ $\quad 3x = A(x-1)^2 + \cancel{B(2x+1)(x-1)} \quad \cancel{+\,C(2x+1)}$

$\boxed{A = -\frac{2}{3}}$

$\boxed{x=0}$ $\quad 0 = A + B(-1) + C$

$\boxed{B = \frac{1}{3}}$

$$\boxed{\frac{3x}{(2x+1)(x-1)^2} = \frac{-2/3}{2x+1} + \frac{1/3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}}$$

Caso 2 – Denominador com termos repetidos

Exemplo 7

$$\frac{x+2}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

$$x + 2 = \mathrm{A}x^2(x-1) + Bx \quad (x-1) + C\ (x-1) + Dx^3$$

$$\boxed{x = 1} \qquad \boxed{D = 3}$$

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{C = -2}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{x = -1} \\ \boxed{x = 2} \end{array} \quad \begin{cases} 1 = A(-2) + B(-1)(-2) + (-2)(-2) + 3(-1) \\ 4 = A(4)1 + B(2)(1) + (-2)(1) + 3(8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -A + B \\ -9 = 2A + B \end{cases} \qquad \boxed{A = B = -3}$$

$$\boxed{\frac{x+2}{x^3(x-1)} = \frac{-3}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{-2}{x^3} + \frac{3}{x-1}}$$

Caso 3 – Denominador com fatores de segundo grau (raízes complexas imaginárias)
Exemplo 8

$$\frac{x^2}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$x^2 = A\,(x^2+1) + (Bx+C)(x-4)$$

$\boxed{x=4}$ $\quad A = \dfrac{16}{17}$

Caso 3: Raízes do Denominador de $F(s)$ Complexas ou Imaginárias

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

$\boxed{x=0}$ $\quad C = \dfrac{4}{17}$

$\boxed{x=1}$ $\quad B = \dfrac{1}{17}$

$$\boxed{\frac{x^2}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{16/17}{x-4} + \frac{(1/17)x + (4/17)}{(x^2+1)}}$$

3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$

Exemplo 1:

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1.2!}{s^{2+1}}\}$$

Exemplo 2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}\right\}=$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item n.º	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}.1$$

$$=t-1+e^{2t}$$

Exemplo 3:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2-9}\right\} = \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-9} - \frac{6}{s^2-9}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-9}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2-9}\right\} =$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\} =$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3^2}\right\} - \frac{6}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1.3}{s^2-3^2}\right\} =$$

$$2\cos(3t) - \frac{6}{3}sen(3t) =$$

$$2\cos(3t) - 2sen(3t)$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	f(t)	F(s)
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\text{sen}\,\omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos\omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Exemplo 4:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s(s+1)}\right\} =$$

$$\frac{2s+1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$ Frações parciais – caso 1

$$\frac{2s+1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} =$$

$$1 + e^{-t}$$

Tabela 2.1 Transformadas de Laplace

Item nº	f(t)	F(s)
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\text{sen}\,\omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos\,\omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Exemplo 5:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+8}\right\} =$$

Resolvendo equação de segundo grau

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)(s-2)}\right\} =$$

Expandindo em Frações parciais

$$\frac{1}{(s-4)(s-2)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2} = \frac{1/2}{s-4} + \frac{-1/2}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s-4} + \frac{-1/2}{s-2}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} =$$

$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$

$$\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(e^{4t} - e^{2t})$$

Resolução de equações diferenciais

Exemplo 1

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 32u(t)$$

Aplicando transformada de Laplace

$$s^2Y(s) - \cancel{sy(0^-)} - \cancel{\dot{y}(0^-)} + 12sY(s) - \cancel{y(0^-)} + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Condições iniciais iguais a zero

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 12s + 32) = \frac{32}{s}$$

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+8}\right\}$$

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$

Solução

Resolver em pares

10 minutos

Problema: Obter a transformada de Laplace de $f(t) = te^{-5t}$.

Resposta: $F(s) = 1/(s+5)^2$

Problema: Obter a transformada de Laplace inversa de $F(s) = 10/[s(s+2)(s+3)^2]$.

Resposta: $f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$.

Respostas

Aplicação direta da Tabela

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+3)^2} + \frac{D}{(s+3)}$$

$$A = \left.\frac{10}{(s+2)(s+3)^2}\right|_{S\to 0} = \frac{5}{9} \quad B = \left.\frac{10}{s(s+3)^2}\right|_{S\to -2} = -5 \quad C = \left.\frac{10}{s(s+2)}\right|_{S\to -3} = \frac{10}{3}$$

$$D = (s+3)^2 \left.\frac{dF(s)}{ds}\right|_{s\to -3} = \frac{40}{9}$$

$$f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$$

Em geral, então, dada uma $F(s)$ cujo denominador possui raízes reais e repetidas, uma expansão em frações parciais

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{K_1}{(s+p_1)^r} + \frac{K_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_r}{(s+p_1)} \\ &\quad + \frac{K_{r+1}}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{K_n}{(s+p_n)} \end{aligned} \tag{2.27}$$

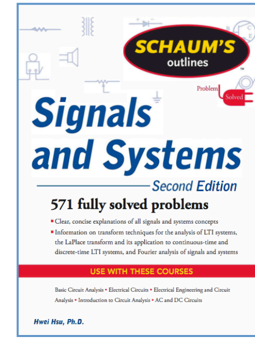
pode ser efetuada se a ordem de $N(s)$ for inferior à ordem de $D(s)$ e as raízes repetidas forem de multiplicidade r em $-p_1$. Para determinar as constantes K_1 a K_r referentes às raízes de multiplicidade superior à unidade, multiplica-se primeiro a Eq. (2.27) por $(s + p_1)^r$ obtendo $F_1(s)$,

$$
\begin{aligned}
F_1(s) &= (s + p_1)^r F(s) \\
&= \frac{(s + p_1)^r N(s)}{(s + p_1)^r (s + p_2) \cdots (s + p_n)} \\
&= K_1 + (s + p_1) K_2 + (s + p_1)^2 K_3 + \cdots + (s + p_1)^{r-1} K_r \\
&\quad + \frac{K_{r+1}(s + p_1)^r}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{K_n (s + p_1)^r}{(s + p_n)}
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

De imediato, é possível determinar K_1 fazendo s tender a $-p_1$. Podemos determinar K_2 derivando a Eq. (2.28) com relação a s e em seguida fazendo s tender a $-p_1$. As derivações subseqüentes permitirão determinar os valores de K_3 a K_r. A expressão geral de K_1 a K_r para raízes múltiplas é

$$
K_i = \frac{1}{(i - 1)!} \left. \frac{d^{i-1} F_1(s)}{ds^{i-1}} \right|_{s \to -p_1} \qquad i = 1, 2, \ldots, r; \quad 0! = 1 \tag{2.29}
$$

Find the inverse Laplace transform of



$$X(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2}$$

X(s) has one simple pole at s = - 3 and one multiple pole at s = - 5 with multiplicity 2

$$X(s) = \frac{c_1}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} + \frac{\lambda_2}{(s+5)^2}$$

$$c_1 = (s+3)X(s)\Big|_{s=-3} = \frac{s^2+2s+5}{(s+5)^2}\Bigg|_{s=-3} = 2$$

$$\lambda_2 = (s+5)^2 X(s)\Big|_{s=-5} = \frac{s^2+2s+5}{s+3}\Bigg|_{s=-5} = -10$$

$$\lambda_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+5)^2 X(s)\right]\Big|_{s=-5} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right]\Bigg|_{s=-5}$$

$$= \frac{s^2+6s+1}{(s+3)^2}\Bigg|_{s=-5} = -1$$

$$\boxed{X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}}$$

No MatLab >> https://www.mathworks.com/help/symbolic/ilaplace.html

```
syms a s x
F = 1/(s - a)^2;
ilaplace(F, x)
```

```
ans =
x*exp(a*x)
```

```
syms s t
ilaplace(1, s, t)
```

```
ans =
dirac(t)
```

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

=1 (impulso unitário)

```
ilaplace(exp(-2*s)/(s^2 + 1) + s/(s^3 + 1), s, t)
```

```
ans =
heaviside(t - 2)*sin(t - 2) - exp(-t)/3 +...
(exp(t/2)*(cos((3^(1/2)*t)/2) + 3^(1/2)*sin((3^(1/2)*t)/2)))/3
```

u[n] $\begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0, \end{cases}$

Lista: Refaça os exemplos anteriories usando o Matlab

Função de Transferência

Definição: Função de Transferência é a variável de saída pela variável de entrada quando regida por equações diferenciais.

Em outras palavras, a Função de Transferência é uma função que define o sistema ou um determinado bloco do sistema, de maneira que, sabendo-se a entrada aplicada, conseguimos calcular o valor da saída.

→ Função que relaciona algebricamente saída à entrada do sistema.
→ Permite combinar algebricamente subsistemas para obter a representação do sistema total.

Equação diferencial de um Sistema físico genérico

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

c(t) é a Saída e r(t) é a entrada

Aplicando transformada de Laplace

$$a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \cdots + a_0 C(s) + \text{termos de condição inicial envolvendo } c(t)$$

$$= b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \cdots + b_0 R(s) + \text{termos de condição inicial envolvendo } r(t)$$

Isolando entrada R(s) e saída C(s)

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0) R(s)$$

Dividindo a saída pela entrada, obtendo função de transferência G(s)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}$$

$$\boxed{C(s) = R(s)G(s)}$$

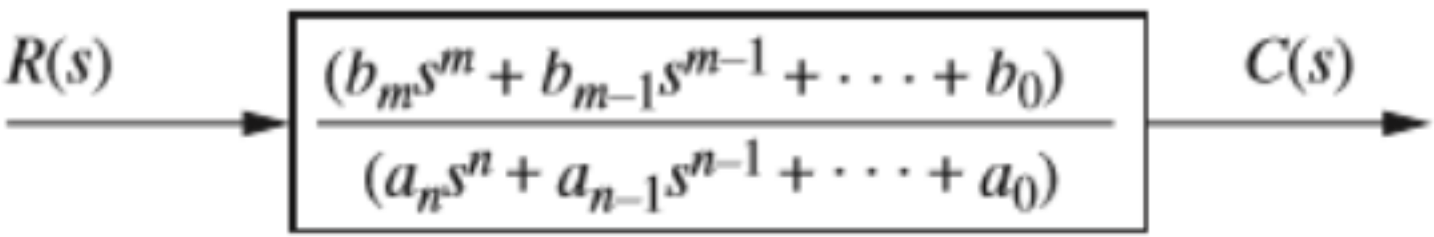


FIGURA 2.2 Diagrama de blocos de uma função de transferência.

Problema Obter a função de transferência representada por

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t)$$

Solução:

$$sC(s) + 2C(s) = R(s)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Problema: usar o resultado do exercício anterior para obter a resposta , c(t), a uma entrada r(t) = u(t), a um degrau unitário, supondo condições iniciais iguais a zero

$$G(s) = 1/(s + 2),$$

$$r(t) = u(t)$$

$$R(s) = 1/s,$$

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Resolver em pares

2 minutos

Problema: Obter a função de transferência, $G(s) = C(s)/R(s)$, correspondente à equação diferencial $\frac{d^3c}{dt^3} + 3\frac{d^2c}{dt^2} + 7\frac{dc}{dt} + 5c = \frac{d^2r}{dt^2} + 4\frac{dr}{dt} + 3r$.

Resposta: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$

Problema: Obter a equação diferencial correspondente à função de transferência

$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 6s + 2}$.

Resposta: $\frac{d^2c}{dt^2} + 6\frac{dc}{dt} + 2c = 2\frac{dr}{dt} + r$.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Convém ressaltar que a Função de Transferência relaciona qualquer entrada com qualquer saída, ou seja, a natureza dos sinais a serem relacionados (tensão, corrente, posição, velocidade, temperatura) não são relevantes.

No caso específico de circuitos eletrônicos, o cálculo da Função de Transferência é facilmente realizado, sabendo-se as equações diferenciais que relacionam tensão e corrente nos diversos componentes e através das duas Leis de Kirchoff.

A relação entre tensão e corrente no resistor (Lei de Ohm) é definida através das seguintes equações:

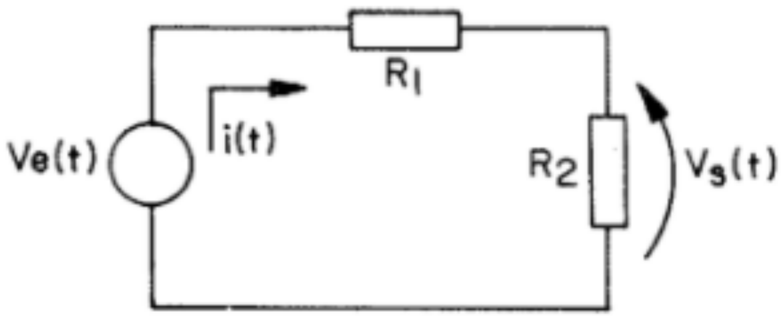
$$v(t) = R \cdot i(t) \quad , \quad i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\, dt \quad , \quad i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad , \quad i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int v(t) \cdot dt$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

Calcular a Função de Transferência F(s) do circuito dado a seguir, sendo ve(t) a entrada e vs(t) a saída.



$$vs(t) = ve(t) \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\frac{vs(t)}{ve(t)} = G = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)}}$$

$$F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{R_2 \cdot I(s)}{(R_1+R_2) \cdot I(s)}$$

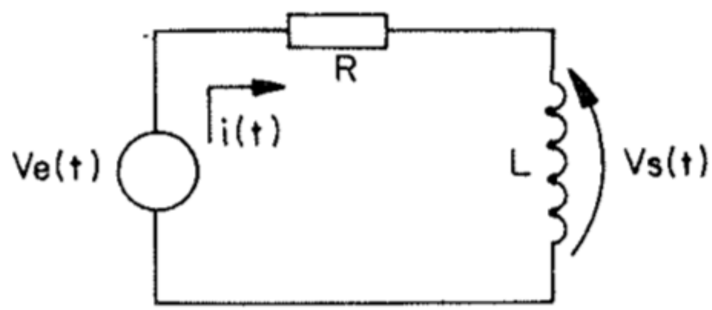
$$Ve(s) = (R_1 + R_2) \cdot I(s)$$

$$Vs(s) = R_2 \cdot I(s)$$

$$\boxed{F(s) = \frac{R_2}{R_1+R_2}}$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

Calcular a Função de Transferência do circuito da figura a seguir, sendo ve(t) a entrada do circuito e vs(t) a saída.



$$vs(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$ve(t) = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando a Transformada nas equações, obtemos:

$$Ve(s) = R \cdot I(s) + L.s.I(s)$$

$$Vs(s) = L \cdot s \cdot I(s)$$

$$F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{L \cdot s \cdot I(s)}{R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s)}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{L \cdot s}{R + L.s}}$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

Quando estamos operando com entrada constante, dizemos que estamos operando com o sistema em regime permanente, e para saber o ganho do mesmo basta utilizarmos s = 0.

Aplicando esta teoria (s = 0) no circuito anterior, temos F(s) = 0, o que nos mostra que o ganho do circuito com entrada constante é nulo. Este resultado, é facilmente comprovado se lembrarmos que ao alimentar o circuito com tensão ve constante, esta tensão cai toda sobre a resistência R, pois o indutor opera como um curto para tensões contínuas. Desta maneira, a tensão de saída vs é nula.

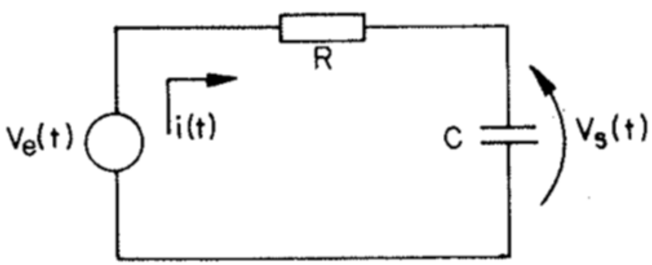
Trocando-se a variável transformada s por jw na equação da Função de Transferência, obtemos:

$$F(jw) = \frac{jwL}{R + jwL}$$

No caso de entrada senoidal, podemos estudar o sistema, trocando s por jw e trabalhando no campo dos números complexos. Isto nos mostra que estes circuitos têm respostas (ganhos) diferentes para cada frequência de entrada aplicada. Esta situação pode ser verificada no circuito anterior, onde a presença do indutor que possui uma reatância dependente da frequência aplicada, faz com que a amplitude da tensão nos seus terminais em caso de entrada senoidal, varie de acordo com a frequência do sinal aplicado.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

Calcular a Função de Transferência do circuito integrador desenhado abaixo, sendo a entrada ve(t) e a saída vs(t).



$$ve(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\, dt$$

$$vs(t) = R \cdot i(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtemos:

$$ve(s) = R \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$

$$Vs(s) = R \cdot I(s)$$

$$F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{R \cdot I(s)}{R \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s)}$$

Multiplicando os dois termos da fração da equação anterior por Cs e dividindo por I(s), obtemos a expressão simplificada da Função de Transferência:

$$\boxed{F(s) = \frac{R\,Cs}{RCs + 1}}$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

$$F(s) = \frac{R\ Cs}{RCs + 1}$$

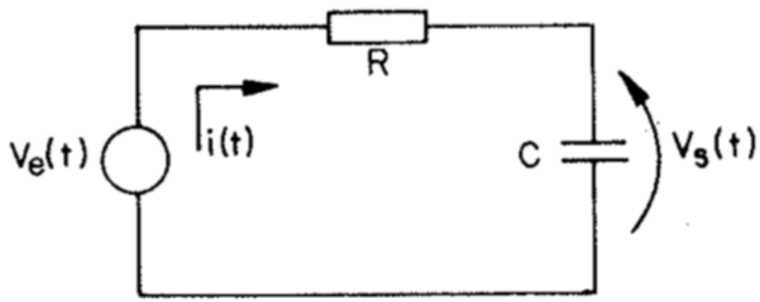
O estudo desta função nos mostra que para valores pequenos de s, se aproximando de 0, o ganho é muito pequeno, enquanto que para valores elevados, o ganho se aproxima de 1.

Este estudo revela que o circuito deixa passar sinais com frequências elevadas, filtrando os sinais de baixa frequência. Este tipo de circuito é chamado circuito passa alta ou circuito diferenciador.

Substitua s por jw

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

Calcular a Função de Transferência do circuito integrador desenhado abaixo, sendo a entrada ve(t) e a saída vs(t).



$$ve(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\, dt$$

$$vs(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\, dt$$

$$Ve(s) = R \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$

$$Vs(s) = \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$

$$F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} \cdot I(s)}{R \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s)}$$

Multiplicando os dois termos da fração definida na equação anterior por Cs e dividindo por I(s), obtemos a expressão simplificada da Função de Transferência.

$$F(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

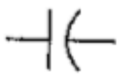
$$F(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Observando esta equação, ao contrário do circuito do exemplo anterior, concluímos que para valores pequenos de s o ganho se aproxima de 1, enquanto que para valores elevados, o ganho tende a 0.

Este tipo de circuito é chamado circuito passa baixas ou circuito integrador, pois sinais com frequências baixas não são atenuados, enquanto que sinais com altas frequências são atenuados.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Tabela 2.3 Relações tensão-corrente, tensão-carga e impedância para capacitores, resistores e indutores

Componente	Tensão-corrente	Corrente-tensão	Tensão-carga	Impedância $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admitância $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Indutor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\,d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Nota: O seguinte conjunto de símbolos e unidades é usado ao longo deste livro: $v(t)$ = V (volts), $i(t)$ = A (ampères), $q(t)$ = Q (coulombs), C = F (farads), $R = \Omega$ (ohms), $G = \mho$ (mhos), L = H (henries).

Para quem não fez Circuitos 2, simplicadamente, por curiosidade ...

admitância, simbolizada *Y*, é o inverso da impedância. Ele é medida S (siemens).

Carga resistiva total, quando o circuito é excitado com entrada senoidal. Medida em Ohms.

Ela é definida por:

$$Y = Z^{-1} = 1/Z$$

Onde :

- *Y* é a admitância em S ;
- *Z* é a impedância em Ω

Sendo a impedância uma resistência complexa, e a condutância G o inverso da resistência, a admitância é uma **condutância complexa**.

A parte real da admitância é a condutância, e sua parte imaginária é a susceptância:

$$Y = G + jB$$

A magnitude da admitância é dada por:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

Onde :

- *G* é a condutância em S ;
- *B* é a susceptância em S ;

Para quem não fez Circuitos 2, simplicadamente, por curiosidade ...

quando um determinado componente cria uma resistência e gasta energia em forma de calor, tem-se o Efeito Joule, isso chama-se resistência, e se o componente não gasta energia em forma de calor temos a reatância. Quando consideramos a resistência e a reatância temos a impedância.

A Reatância é indicada pelo símbolo **X**, sendo:

X < 0

A reatância é capacitiva (**XC**) e o seu valor em ohms é dado por:

$$X_C = \frac{-1}{2\pi f C} \qquad ou \qquad X_C = \frac{-1}{wC}\,, \quad sendo \quad w = 2\pi f$$

onde C é a capacitância dada em Farads, f é a frequência dada em Hertz, π é aproximadamente 3,14159 e ω é a frequência angular.

X > 0

A reatância é indutiva (**XL**) e o seu valor em ohms é dado por:

$$X_L = 2\pi f L \qquad ou \qquad X_L = wL\,, \quad sendo \quad w = 2\pi f$$

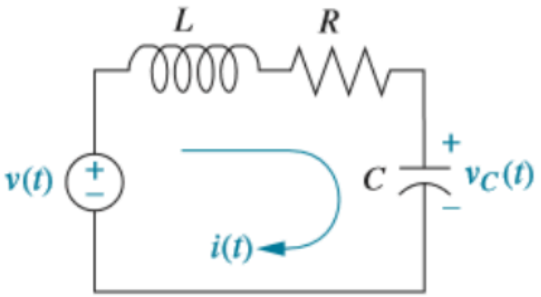
onde L é a Indutância dada em Henrys, f é a frequência dada em Hertz, π é aproximadamente 3,14159 e ω é a frequência angular.

X = 0

A impedância é igual à resistência óhmmica e o circuito é dito como puramente resistivo

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pela Equação diferencial

Problema: Obter função de transferência relacionando a tensão Vc(s) no capacitor e a tensão V(s) de entrada



$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t)$$

Temos aqui a corrente no circuito e a tensão na entrada

$$i(t) = dq(t)/dt$$

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

Temos aqui a carga no circuito e a tensão na entrada

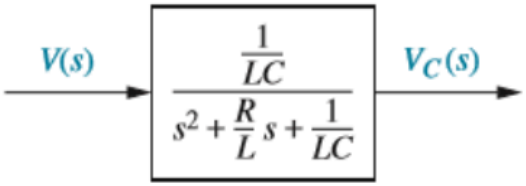
$$q(t) = Cv_C(t)$$

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t)$$

Temos aqui a tensão no capacitor e a tensão na entrada

$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s)$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$



Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: resolução pelo método das malhas

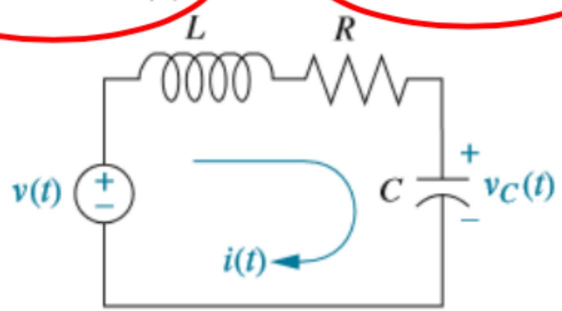
Problema: Obter função de transferência relacionando a tensão Vc(s) no capacitor e a tensão V(s) de entrada

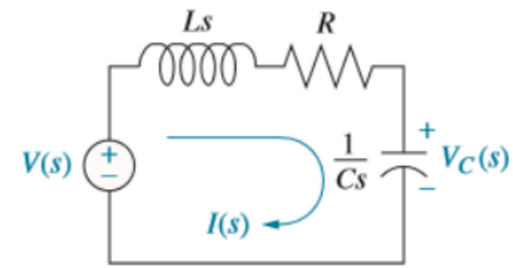
- É possível escrever a equação do circuito direto no domínio da frequência.
- Considerar diretamente as impedâncias, sem escrever a equação no domínio do tempo.

Indutor
$V(s) = LsI(s)$

Resistor
$V(s) = RI(s)$

Capacitor
$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$





$$\boxed{[\text{Soma de impedâncias}]\, I(s) = [\text{Soma de tensões aplicadas}]}$$

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = V(s)$$

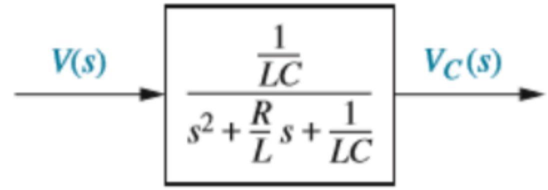
$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

$$V_C(s) = I(s)\frac{1}{Cs}$$

$$\frac{CsV_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

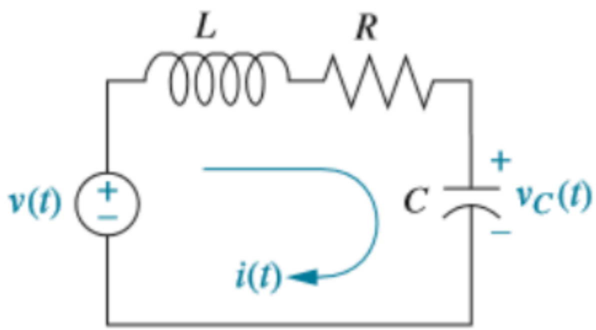
$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1}$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

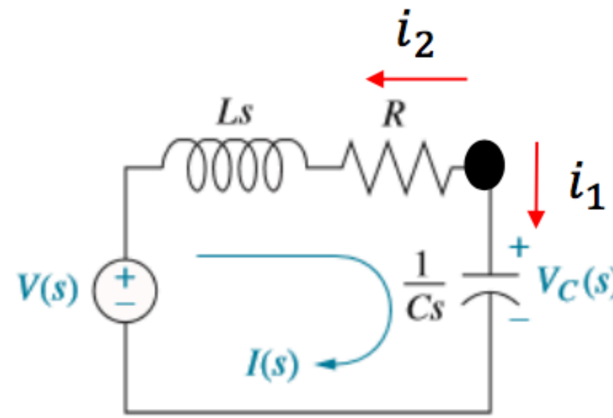


Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: pelo método dos nós

Problema: Obter função de transferência relacionando a tensão Vc(s) no capacitor e a tensão V(s) de entrada



Impedâncias

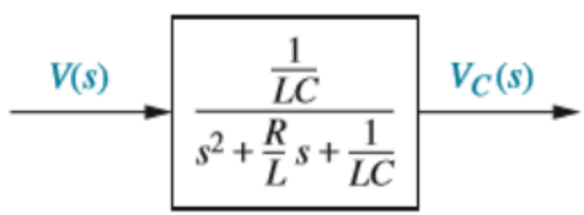


Soma das correntes que saem do nó:

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$\frac{V_C(s)}{1/Cs} + \frac{V_C(s) - V(s)}{R + Ls} = 0$$

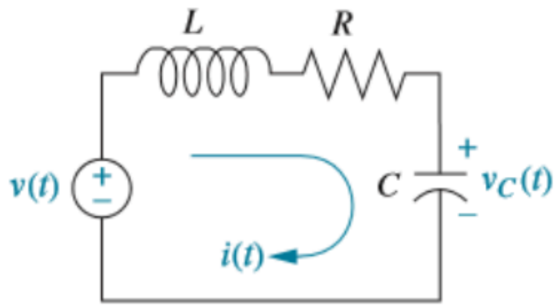
$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$



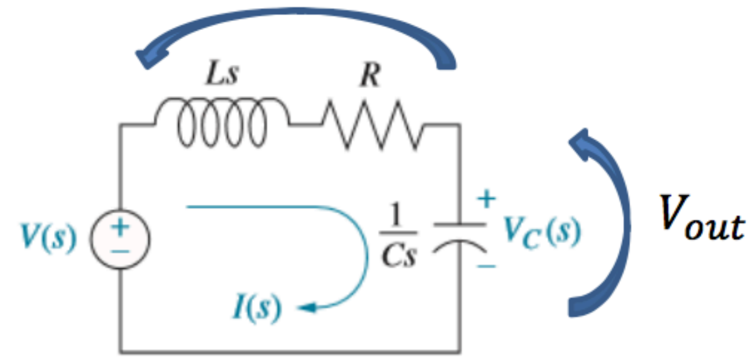
Impedância $Z(s) = V(s)/I(s)$
$\frac{1}{Cs}$
R
Ls

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos: por divisor de tensão

Problema: Obter função de transferência relacionando a tensão Vc(s) no capacitor e a tensão V(s) de entrada

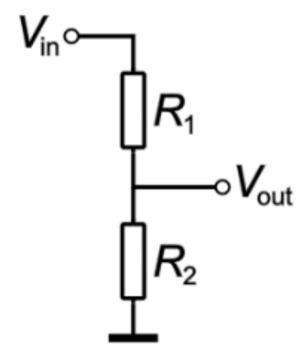


Impedâncias



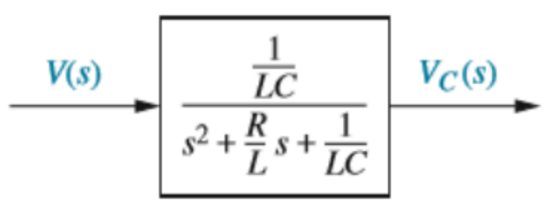
Divisão de tensão

$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_{in}$$



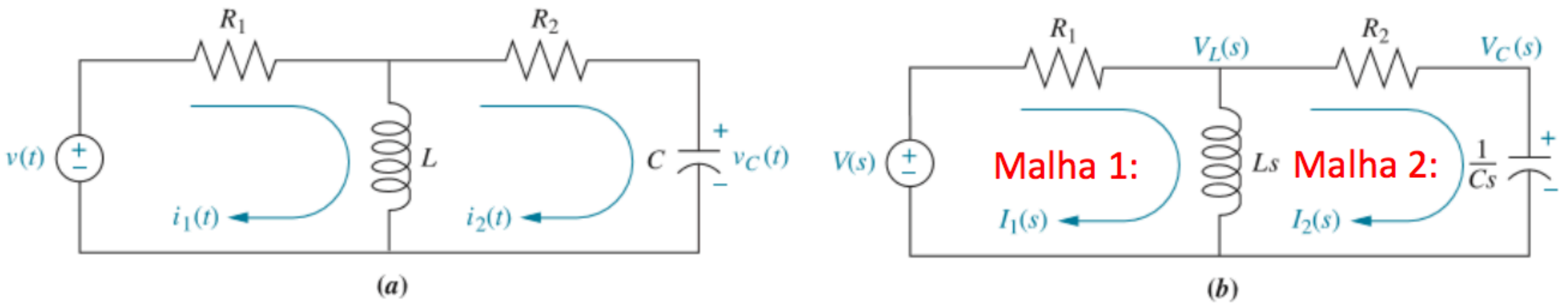
$$V_C(s) = \frac{1/Cs}{\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)} V(s)$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$



Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Problema Dado o circuito da Fig. 2.6(a), obter a função de transferência, $I_2(s)/V(s)$.



Resolvendo pela Regra de Cramer:

Malha 1: $R_1I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$

Malha 2: $LsI_2(s) + R_2I_2(s) + \frac{1}{Cs}I_2(s) - LsI_1(s) = 0$

$$\begin{cases} (R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s) \\ -LsI_1(s) + \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

Revisão da Regra de Cramer:

$$3x + 1y = 9$$
$$2x + 3y = 13$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9 * 3 - 1 * 13}{3 * 3 - 1 * 2} = 2$$

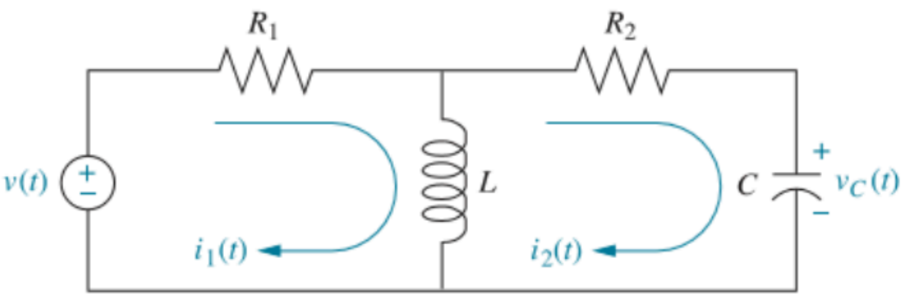
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 * 13 - 9 * 2}{3 * 3 - 1 * 2} = 3$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

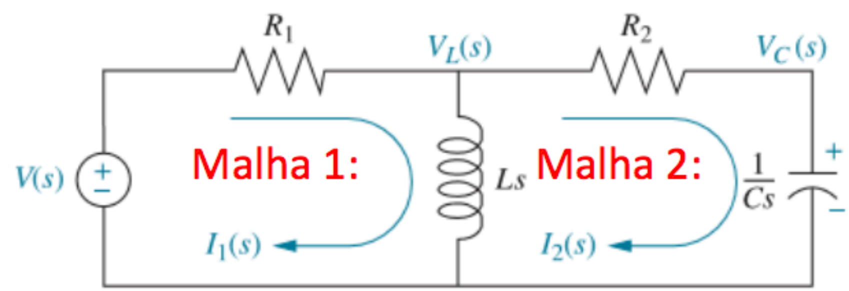
$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{det(A_j)}{det(A)}$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Problema Dado o circuito da Fig. 2.6(a), obter a função de transferência, $I_2(s)/V(s)$.



(a)



(b)

Malha 1: $R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$

Malha 2: $LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) = 0$

Sistema:

$$\begin{cases} (R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s) \\ -LsI_1(s) + \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I_2(s) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo pela Regra de Cramer:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & V(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{LsV(s)}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -Ls \\ -Ls & \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) \end{vmatrix}$$

$$G(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)} = \frac{Ls}{\Delta}$$

$$G(s) = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$

Editor – /Users/Talles/Desktop/untitled5.m

untitled5.m

```
syms s R1 R2 L c V                    % Controi objetos simbolicos para a vari·vel
                                      % da frequencia 's', e 'R1', 'R2', 'L', 'c',
                                      % e 'V'.
                                      % Observacao: Use "c" minusculo na
                                      % declaracao do capacitor.

A2=[(R1+L*s) V;-L*s 0]                % Cria Ak = A2.

A=[(R1+L*s) -L*s;-L*s (L*s+R2+(1/(c*s)))]

                                      % Cria A.
I2=det(A2)/det(A);                    % Usa a regra de Cramer para resolver para
                                      % I2(s).
I2=simplify(I2);                        % Reduz a complexidade de I2(s).
G=I2/V;                               % Cria a funcao de transferencia function,
                                      % G(s) = I2(s)/V(s).
'G(s)'                                % Exibe o tÌtulo.
pretty(G)
```

Command Window

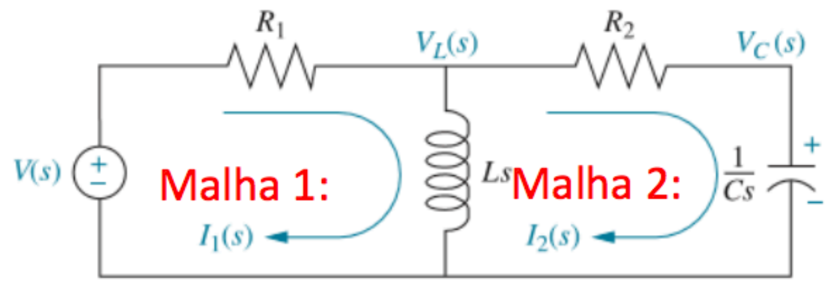
```
A2 =

[ R1 + L*s, V]
[     -L*s, 0]


A =

[ R1 + L*s,                -L*s]
[     -L*s, R2 + L*s + 1/(c*s)]


ans =

G(s)

                          2
                     L c s
--------------------------------------------
                     2            2
R1 + L s + L R1 c s  + L R2 c s  + R1 R2 c s
```

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Montagem do sistema por inspeção:

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias ao}\\ \text{longo da Malha 1}\end{bmatrix} I_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns às}\\ \text{duas malhas}\end{bmatrix} I_2(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 1}\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns às}\\ \text{duas malhas}\end{bmatrix} I_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias ao}\\ \text{longo da Malha 2}\end{bmatrix} I_2(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 2}\end{bmatrix}$$



(b)

$$\begin{cases}(R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s)\\ -LsI_1(s) + \left(Ls + R_2 + \dfrac{1}{Cs}\right)I_2(s) = 0\end{cases}$$

Circuitos Complexos Através da Análise Nodal

Frequentemente, a maneira mais fácil para obter a função de transferência é utilizar a análise nodal em vez da análise das malhas. O número de equações diferenciais simultâneas que devem ser escritas é igual ao número de nós para os quais a tensão é desconhecida. No exemplo anterior escrevemos equações simultâneas das malhas utilizando a lei de Kirchhoff das tensões. Para múltiplos nós, utilizamos a lei de Kirchhoff das correntes e somamos as correntes que saem de cada nó. Novamente, como convenção, as correntes saindo do nó são admitidas como positivas, e correntes entrando no nó são admitidas como negativas.

Antes de seguir para um exemplo, vamos primeiro definir a *admitância*, $Y(s)$, como o inverso da impedância, ou,

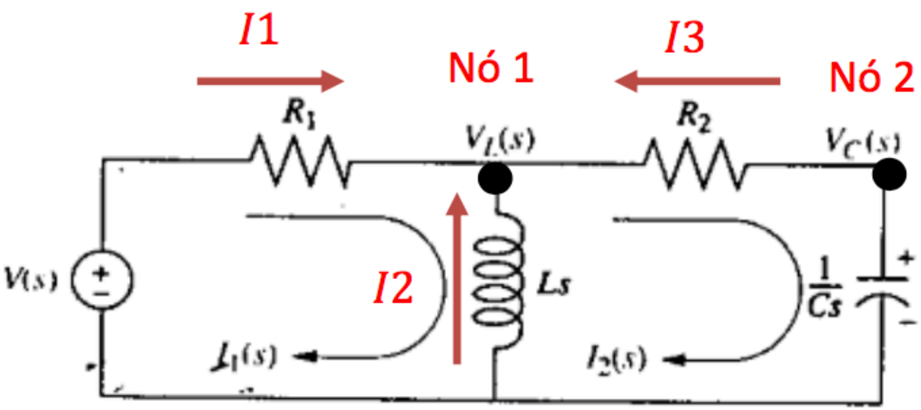
$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)}}$$

Ao escrever as equações dos nós, pode ser mais conveniente representar os elementos do circuito por suas admitâncias.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Circuitos Complexos via método dos Nós

Obter a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$,



$$\sum I = 0$$

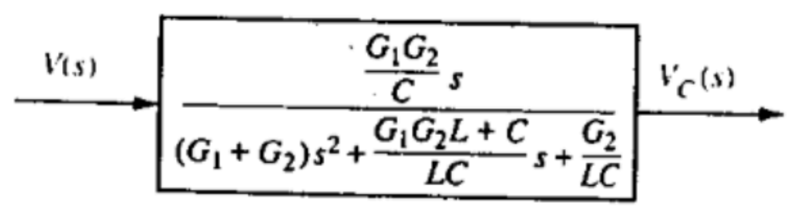
Nó 1: $$\frac{V_L(s) - V(s)}{R_1} + \frac{V_L(s)}{Ls} + \frac{V_L(s) - V_C(s)}{R_2} = 0$$

Nó 2: $$CsV_C(s) + \frac{V_C(s) - V_L(s)}{R_2} = 0$$

Reorganizando e expressando as resitências como condutâncias, G1=1/R1 e G2=1/R2

$$\begin{cases} \left(G_1 + G_2 + \dfrac{1}{Ls}\right)V_L(s) - G_2 V_C(s) = V(s)G_1 \\ -G_2 V_L(s) + (G_2 + Cs)V_C(s) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{G_1G_2}{C}s}{(G_1 + G_2)s^2 + \dfrac{G_1G_2L + C}{LC}s + \dfrac{G_2}{LC}}$$



Outra forma de escrever as equações dos nós é substituir as fontes de tensão por fontes de corrente. Uma fonte de tensão apresenta uma tensão constante para qualquer carga; reciprocamente, uma fonte de corrente fornece uma corrente constante para qualquer carga. Na prática, uma fonte de corrente pode ser construída a partir de uma fonte de tensão colocando uma resistência de alto valor em série com a fonte de tensão. Dessa forma, variações na carga não alterariam significativamente a corrente, uma vez que esta seria determinada, aproximadamente, pelo resistor de resistência elevada em série e pela fonte de tensão. Teoricamente, somos amparados pelo *teorema de Norton*, o qual declara que uma fonte de tensão, $V(s)$, em série com uma impedância, $Z_s(s)$, pode ser substituída por uma fonte de corrente, $I(s) = V(s)/Z_s(s)$, em paralelo com $Z_s(s)$.

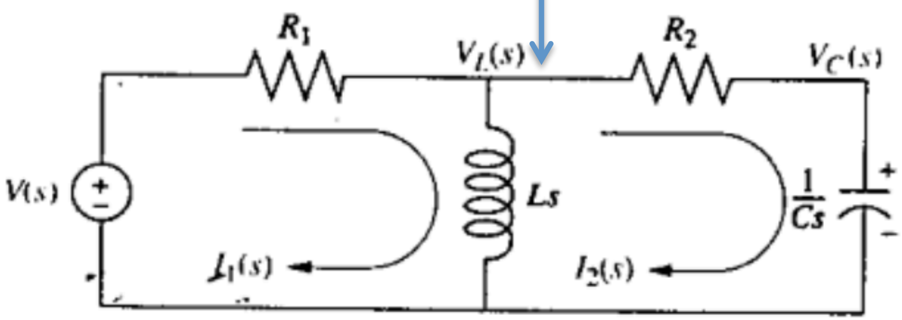
Para lidar com circuitos elétricos com múltiplos nós, podemos executar os seguintes passos:

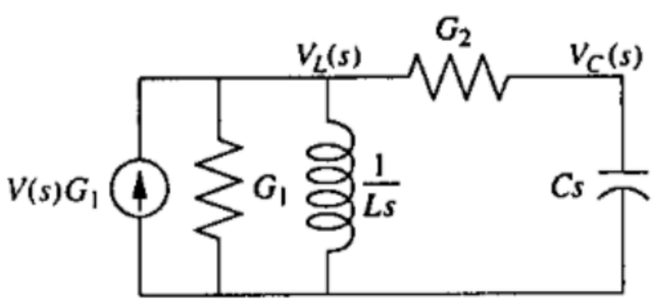
1. Substituir os valores dos elementos passivos por suas admitâncias.
2. Substituir todas as fontes e variáveis temporais por suas transformadas de Laplace.
3. Substituir as fontes de tensão transformadas por fontes de corrente transformadas.
4. Escrever a lei de Kirchhoff das correntes para cada nó.
5. Resolver as equações simultâneas para a saída.
6. Formar a função de transferência.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

PROBLEMA: Para o circuito da Figura 2.6, determine a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$, utilizando análise nodal e um circuito transformado com fontes de corrente.

Circuito equivalente de Norton e condutâncias





$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)}$$

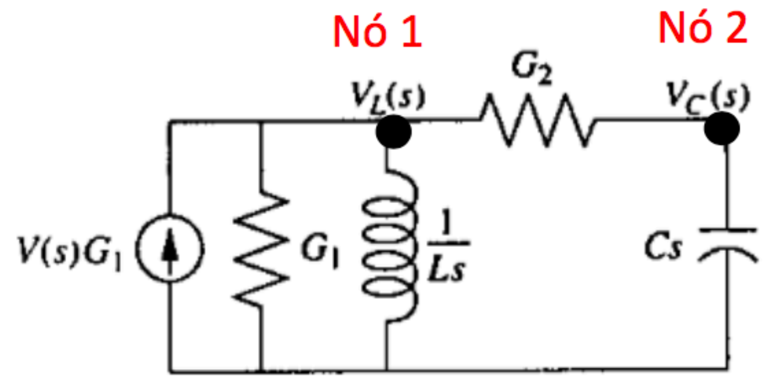
Componente	Admitância $Y(s) = I(s)/V(s)$
Capacitor	Cs
Resistor	$\frac{1}{R} = G$
Indutor	$\frac{1}{Ls}$

SOLUÇÃO: Converta todas as impedâncias em admitâncias e todas as fontes de tensão em série com uma impedância em fontes de corrente em paralelo com uma admitância utilizando o teorema de Norton.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Circuitos Complexos via método dos Nós

Obter a função de transferência, $V_C(s)/V(s)$,



Nó 1: $$G_1 V_L(s) + \frac{1}{Ls} V_L(s) + G_2 [V_L(s) - V_C(s)] = V(s) G_1$$

Nó 2: $$CsV_C(s) + G_2 [V_C(s) - V_L(s)] = 0$$

Montagem do Sistema por inspeção:

$$\begin{bmatrix}\text{Soma das admitâncias}\\ \text{conectadas ao Nó 1}\end{bmatrix} V_L(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{admitâncias comuns}\\ \text{aos dois nós}\end{bmatrix} V_C(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das correntes}\\ \text{aplicadas ao Nó 1}\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{admitâncias comuns}\\ \text{aos dois nós}\end{bmatrix} V_L(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das admitâncias}\\ \text{conectadas ao Nó 2}\end{bmatrix} V_C(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das correntes}\\ \text{aplicadas ao Nó 2}\end{bmatrix}$$

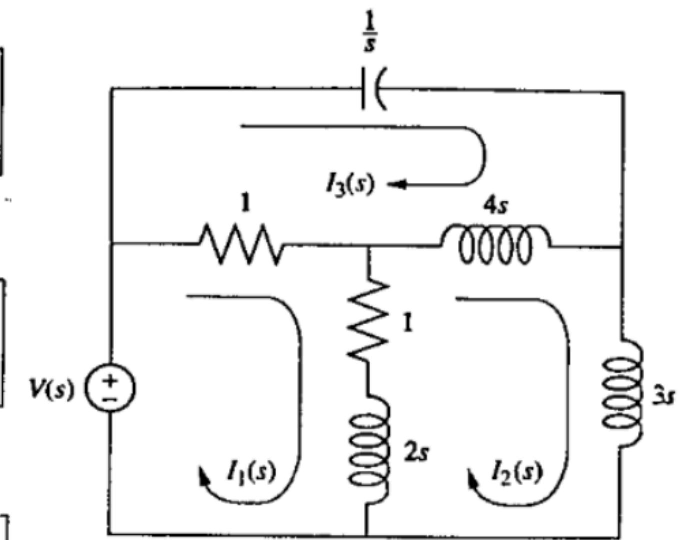
Uma Técnica de Solução de Problemas

Em todos os exemplos anteriores, vimos um padrão repetido nas equações, que podemos utilizar em nosso benefício. Caso reconheçamos esse padrão, não precisamos escrever as equações componente por componente; podemos somar as impedâncias ao longo da malha, no caso das equações das malhas, ou somar as admitâncias em um nó, no caso das equações dos nós. Vamos agora analisar um circuito elétrico com três malhas e escrever as equações das malhas por inspeção para demonstrar o processo.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

PROBLEMA: Escreva, sem resolver, as equações das malhas para o circuito mostrado na Figura 2.9.

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias ao}\\ \text{longo da Malha 1}\end{bmatrix} I_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1 e à}\\ \text{Malha 2}\end{bmatrix} I_2(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 1}\end{bmatrix} \\
-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1}\\ \text{e à Malha 2}\end{bmatrix} I_1(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 2}\end{bmatrix} I_2(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 2 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 2}\end{bmatrix} \\
-\begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 1 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_1(s) - \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias}\\ \text{comuns à}\\ \text{Malha 2 e à}\\ \text{Malha 3}\end{bmatrix} I_2(s) + \begin{bmatrix}\text{Soma das}\\ \text{impedâncias ao}\\ \text{longo da Malha 3}\end{bmatrix} I_3(s) = \begin{bmatrix}\text{Soma das tensões}\\ \text{aplicadas ao}\\ \text{longo da Malha 3}\end{bmatrix}
\end{cases}
$$

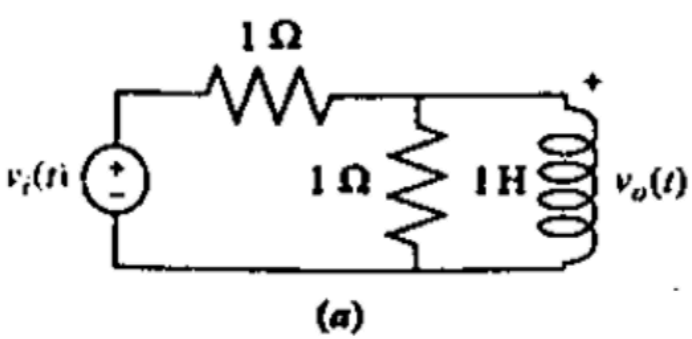


$$
\begin{cases}
+(2s+2)I_1(s) - (2s+1)I_2(s) - I_3(s) = V(s) \\
-(2s+1)I_1(s) + (9s+1)I_2(s) - 4sI_3(s) = 0 \\
-I_1(s) - 4sI_2(s) + \left(4s + 1 + \dfrac{1}{s}\right)I_3(s) = 0
\end{cases}
$$

```
syms s I1 I2 I3 V
A=[(2*s + 2)  -(2*s + 1)...
  -1
  -(2*s + 1)  (9*s + 1)...
  -4*s
  -1 -4*s...
  (4*s + 1 + 1/s)];
B=[I1;I2;I3];
C=[V;0;0;];
B=inv(A)*C;
pretty(B)
```

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

16. Obter a função de transferência, $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, para cada circuito mostrado na Fig. P2.3.



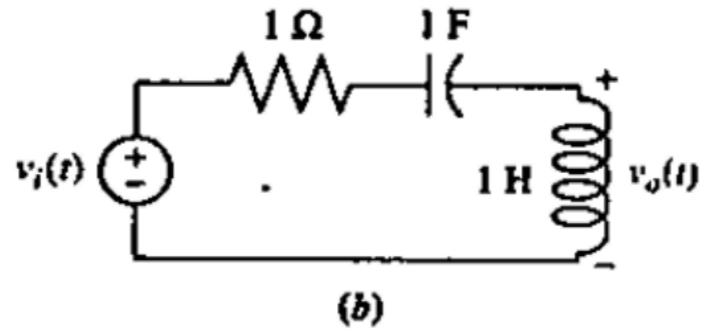


Fig. P2.3

a) Corrente nos nós

$$\frac{V_o - V_i}{1} + \frac{V_o}{1} + \frac{V_o}{1s} = 0$$

$$(V_o - V_i)s + V_o s + V_o = 0$$

$$V_o(1 + 2s) = V_i s$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s}{1 + 2s}$$

b) Usando o divisor de tensão

$$V_o = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_i$$

$$V_o = \frac{Ls}{R_1 + \frac{1}{Cs} + Ls} V_i$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

Amplificadores Operacionais

Um *amplificador operacional*, retratado na Figura 2.10(*a*), é um amplificador eletrônico utilizado como um bloco de construção básico para implementar funções de transferência. Ele apresenta as seguintes características:

1. Entrada diferencial, $v_2(t) - v_1(t)$
2. Alta impedância de entrada, $Z_e = \infty$ (ideal)
3. Baixa impedância de saída, $Z_s = 0$ (ideal)
4. Alta constante de ganho de amplificação, $A = \infty$ (ideal)

A saída, $v_s(t)$, é dada por

$$v_s(t) = A(v_2(t) - v_1(t))$$

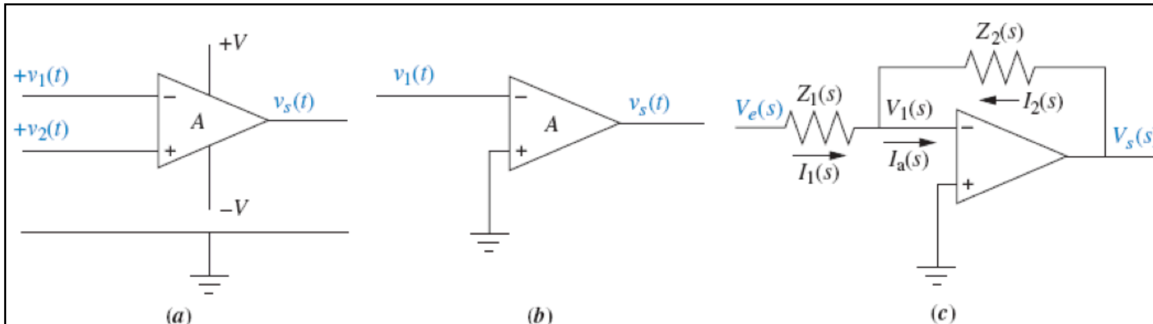
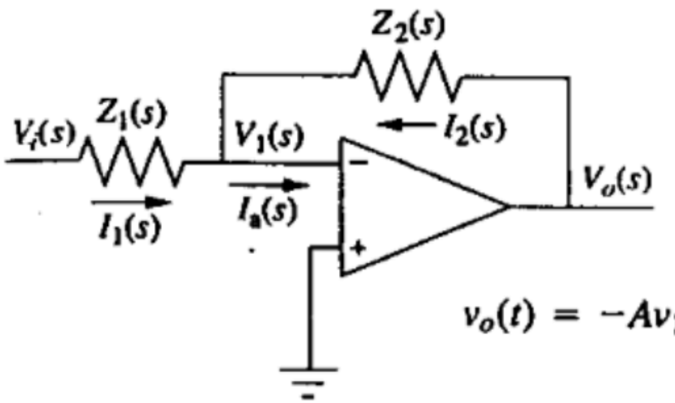


FIGURA 2.10 **a.** Amplificador operacional; **b.** esquema para um amplificador operacional inversor; **c.** amplificador operacional inversor configurado para a realização de uma função de transferência. Tipicamente, o ganho do amplificador, A, é omitido.

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Amplificadores Operacionais

Amplificador operacional inversor



$$v_o(t) = -Av_1(t)$$

$$\begin{cases} I_a(s) = 0 \\ I_1(s) = -I_2(s) \\ v_1(s) = 0 \\ I_1(s) = \dfrac{V_i(s)}{Z_1(s)} \\ I_2(s) = -\dfrac{V_0(s)}{Z_2(s)} \end{cases}$$

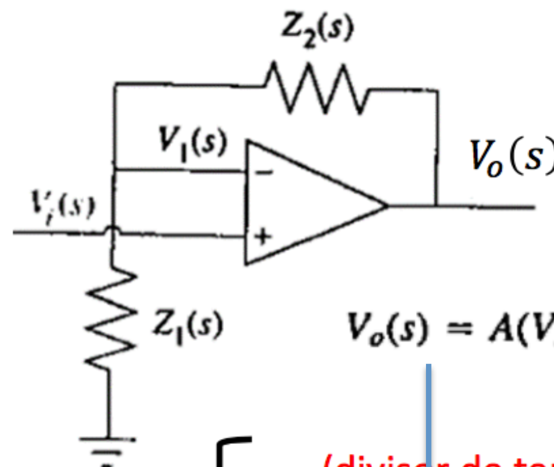
(curto circuito virtual)

Se a impedância for alta, aplica-se lei de kirchhoff das correntes

Para ganho infinito

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Amplificador operacional não-inversor



$$V_o(s) = A(V_i(s) - V_1(s))$$

Substituindo

(divisor de tensão)

$$\begin{cases} V_1(s) = \dfrac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V_o(s) \\ \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)} = \dfrac{A}{1 + AZ_1(s)/(Z_1(s) + Z_2(s))} \end{cases}$$

Para A, extremamente grande

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Problema Obter a função de transferência, $V_o(s)/V_i(s)$

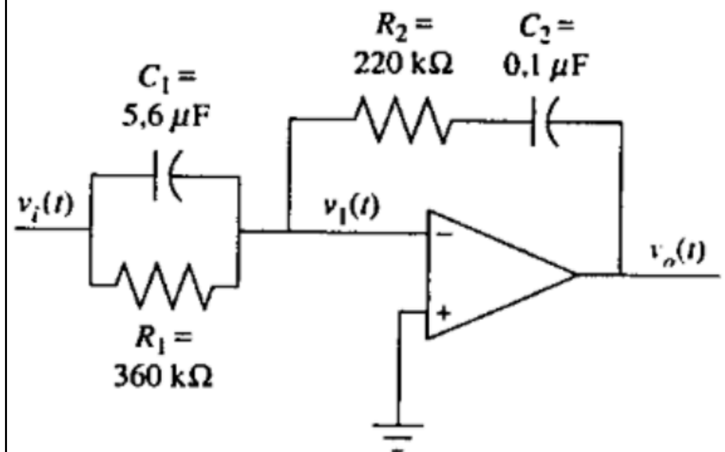
$$Z_1(s) = \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{5{,}6 \times 10^{-6} s + \frac{1}{360 \times 10^3}}$$

$$= \frac{360 \times 10^3}{2{,}016 s + 1}$$

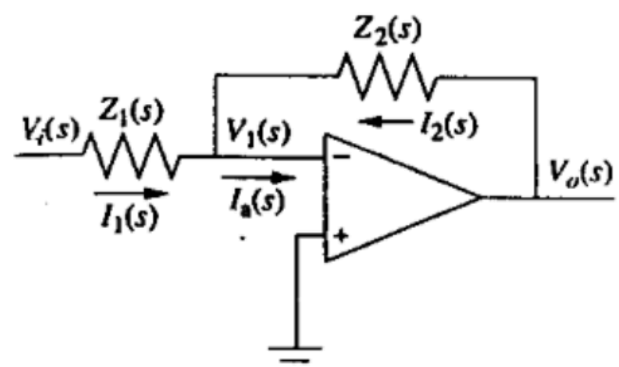
$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = 220 \times 10^3 + \frac{10^7}{s}$$

$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -1{,}232 \frac{s^2 + 45{,}95 s + 22.55}{s}$$

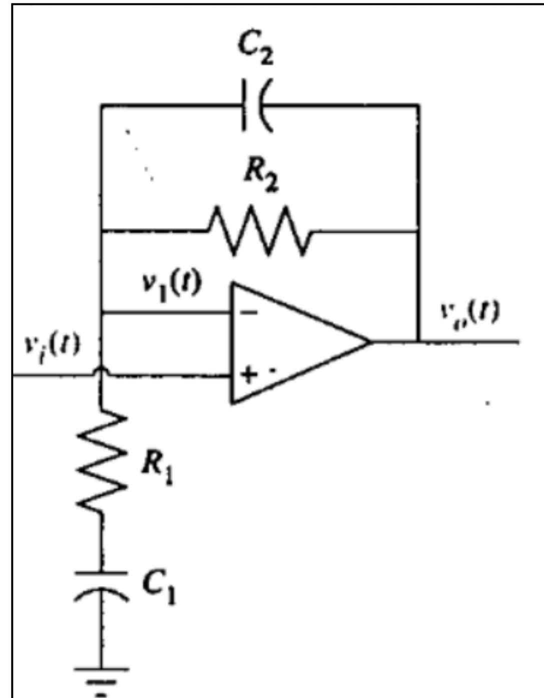


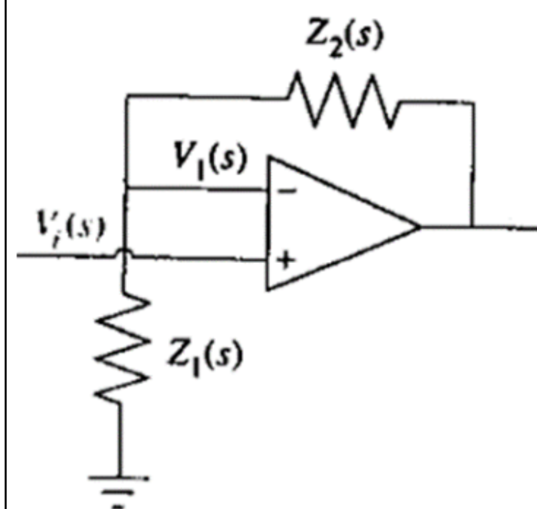
Controlador PID
(Proporcional, integral, derivativo)



Funções de Trasferência de Circuitos Elétricos

Problema Obter a função de transferência, $V_o(s)/V_i(s)$





$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{C_1 s}$$

$$Z_2(s) = \frac{R_2(1/C_2 s)}{R_2 + (1/C_2 s)}$$

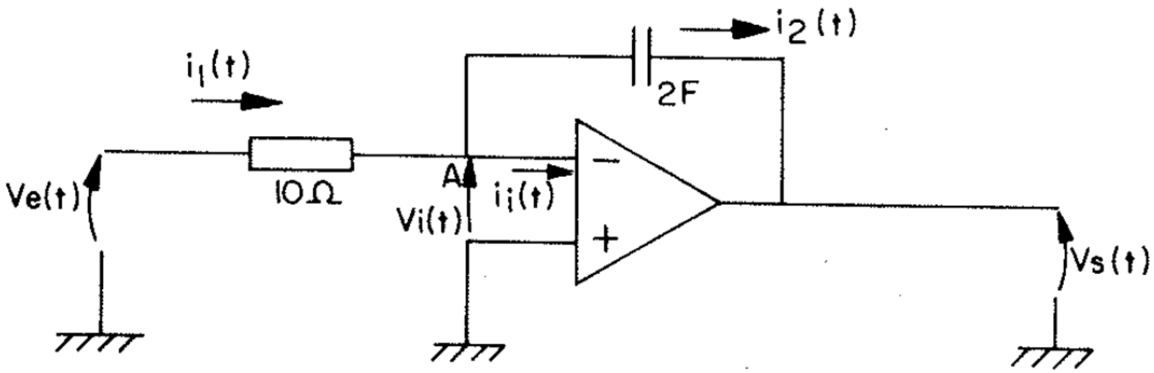
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{R_2\left(\frac{1}{C_2 s}\right)}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{C_2 C_1 R_2 R_1 s^2 + (C_2 R_2 + C_1 R_2 + C_1 R_1)s + 1}{C_2 C_1 R_2 R_1 s^2 + (C_2 R_2 + C_1 R_1)s + 1}$$

Outra forma de resolver ...

Exemplo 2.7 Dado o esquema elétrico do circuito integrador, utilizando Amplificador Operacional, calcular a Função de Transferência, sendo a entrada ve(t) e a saída vs (t).



Aplicando a 1ª lei de Kirchoff no nó A, concluímos:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_i(t)$$

A 2ª lei de Kirchoff, aplicada na malha de entrada do amplificador operacional, resulta:

$$ve(t) = 10 \cdot i_1(t) + v_i(t)$$

A 2ª lei de Kirchoff aplicada na malha de saída, resulta:

$$vs(t) = vi(t) - \frac{1}{2} \cdot \int i_2(t)\, dt$$

Outra forma de resolver …

É sabido que a corrente de entrada $i_i(t)$ no amplificador operacional é aproximadamente nula, e que a queda de tensão entre os seus terminais de entrada vi(t) é aproximadamente zero. Sendo assim, podemos simplificar as equações anteriores, resultando:

$$i_1(t) = i_2(t) \qquad ve(t) = 10 \cdot i_1(t)$$

$$vs(t) = -\frac{1}{2} \cdot \int i_2(t)\, dt$$

Aplicando a equação de $i_1(t)$ na equação de ve(t), obtemos:

$$ve(t) = \overset{R}{10} \cdot i_2(t)$$

Transformando as equações de ve(t) e de vs(t) em Laplace, temos:

$$Vs(s) = -\frac{1}{2s} \cdot I_2(s) \qquad Ve(s) = \overset{R}{10} \cdot I_2(s)$$

Outra forma de resolver …

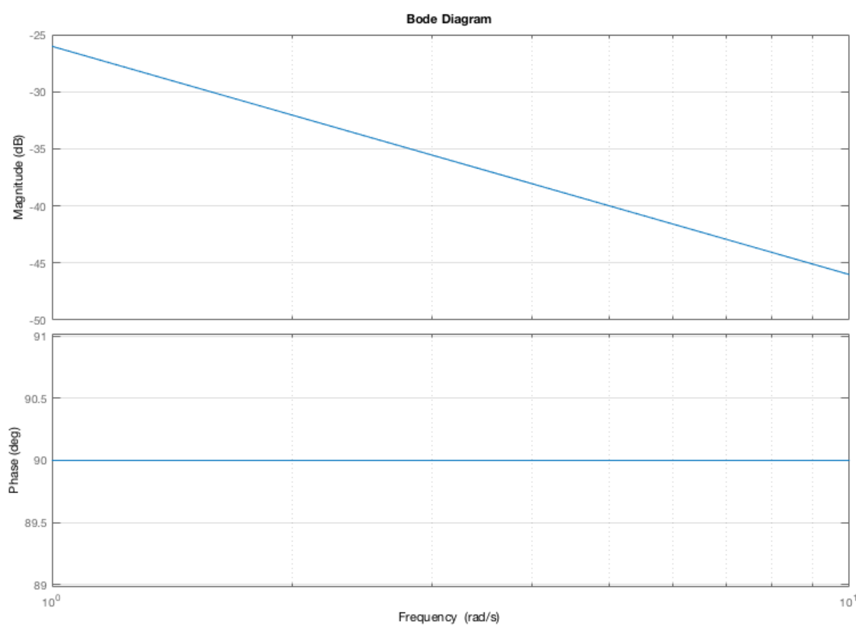
A Função de Transferência do circuito é facilmente calculada, dividindo-se a equação de Vs(s) pela equação de Ve(s), resultando:

$$F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{-\frac{1}{2s} \cdot I_2(s)}{10 \cdot I_2(s)} = \frac{-\frac{1}{sC} \cdot I_2(s)}{R \; I_2(s)} =$$

Simplificando, obtemos:

$$F(s) = -\frac{1}{20s}$$

$$F(s) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{-1}{R.C\,s}$$



Polos, Zeros e a Resposta do Sistema

capítulo 4 – N.Nise

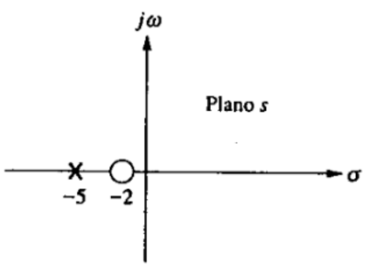
A resposta de saída de um sistema é a soma de duas respostas: a *resposta forçada* e a *resposta natural*.[1] Embora muitas técnicas, como a solução de uma equação diferencial ou a aplicação da transformada inversa de Laplace, permitam que calculemos essa resposta de saída, essas técnicas são trabalhosas e consomem muito tempo. A produtividade é auxiliada por técnicas de análise e projeto que fornecem resultados em um tempo mínimo. Se a técnica for tão rápida que sentimos que deduzimos os resultados desejados por inspeção, algumas vezes utilizamos o atributo *qualitativo* para descrever o método. A utilização dos polos e zeros e de sua relação com a resposta no domínio do tempo de um sistema é uma técnica desse tipo.

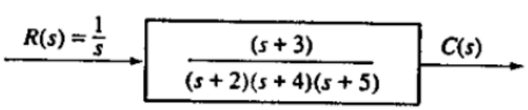
→ Visualizar resposta no tempo do sistema em malha aberta:

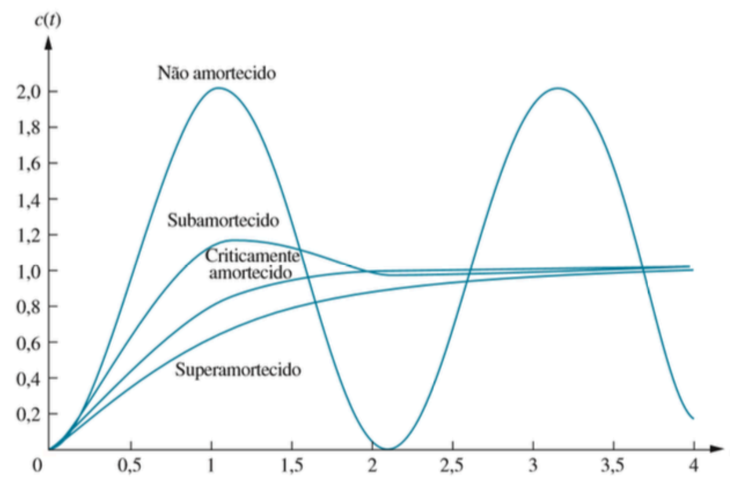
- Resposta transitória e em regime permanente.

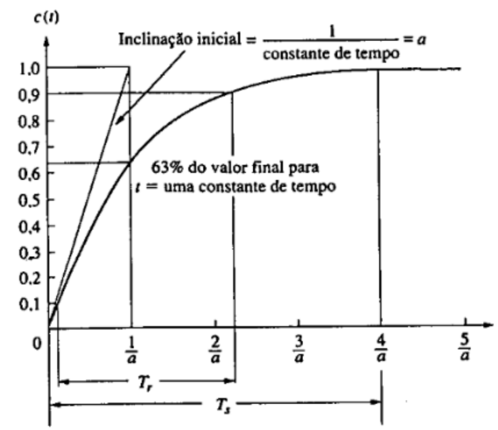
→ Trabalhar com sistemas de primeira e segunda ordem

O estudo da modelagem de sistemas continua no Cap.5 com a modelagem de sistemas em malha fechada









Polos de uma Função de Transferência

Os *polos* de uma função de transferência são (1) os valores da variável da transformada de Laplace, s, que fazem com que a função de transferência se torne infinita, ou (2) quaisquer raízes do denominador da função de transferência que são comuns às raízes do numerador.

Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Pólo = -1

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+2)}$$

Pólos = -1 e -2

Zeros de uma Função de Transferência

Os *zeros* de uma função de transferência são (1) os valores da variável da transformada de Laplace, s, que fazem com que a função de transferência se torne zero, ou (2) quaisquer raízes do numerador da função de transferência que são comuns às raízes do denominador.

Exemplo:

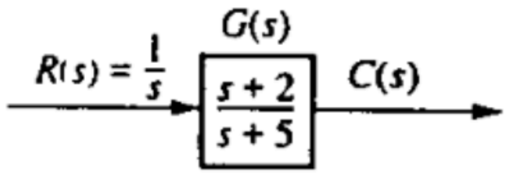
$$G(s) = \frac{s+5}{s+1}$$

Zero = -5

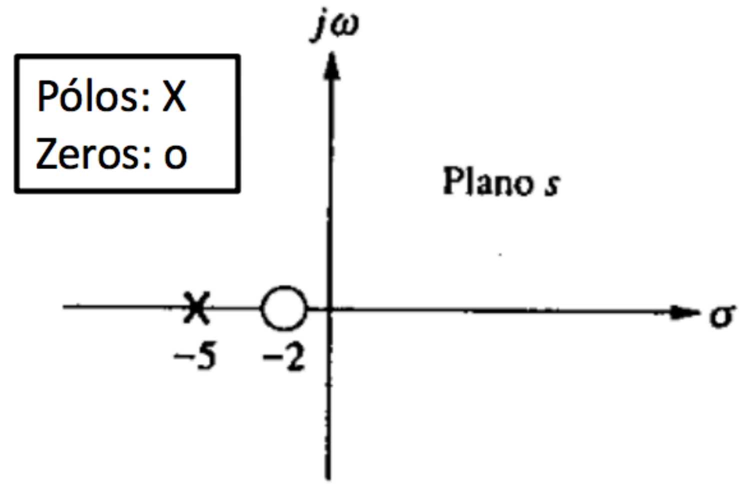
$$G(s) = \frac{(s+2)(s+7)}{(s+1)(s+2)}$$

Zeros = -2 e -7

Sistema com entrada em degrau unitário (1/s)



Representação no Plano s



Resposta do sistema

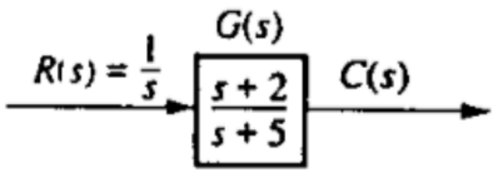
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$ Frações parciais

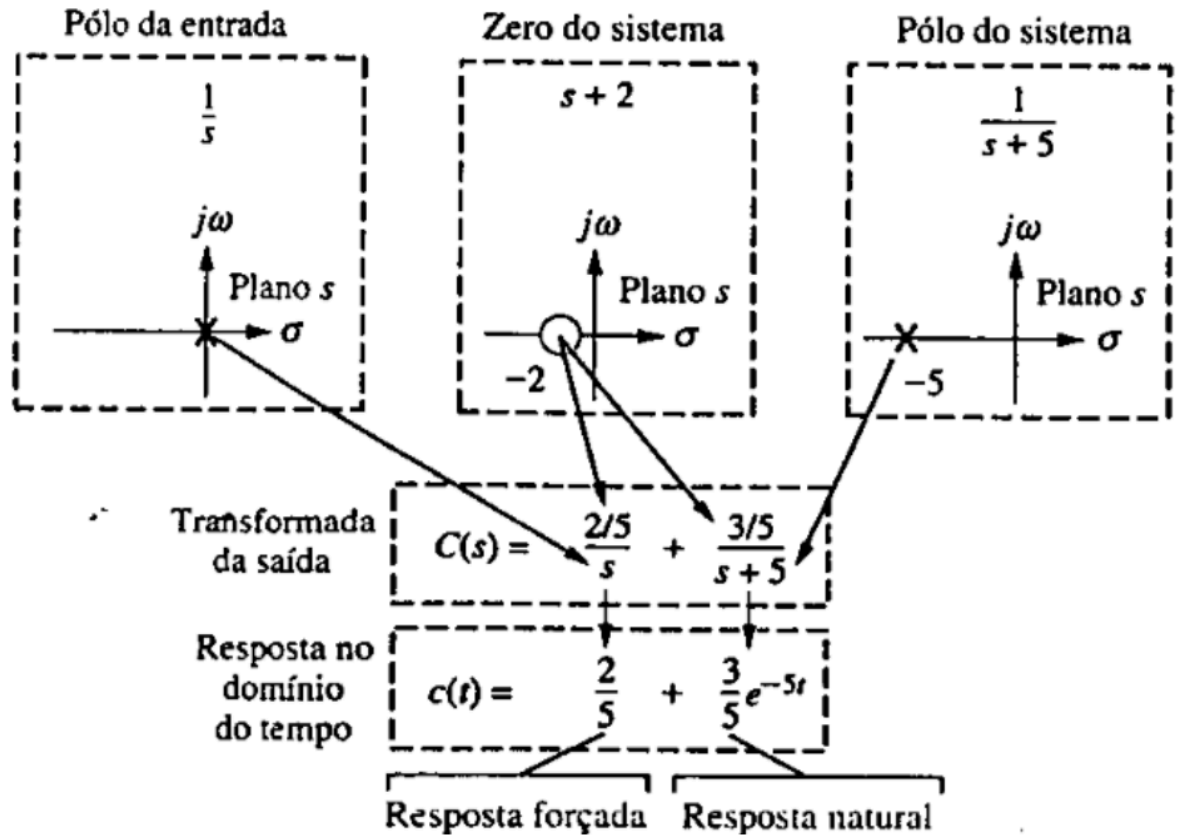
$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s \to 0} = \frac{2}{5} \qquad B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s \to -5} = \frac{3}{5}$$

$$C(s) = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$ Inversa de Laplace

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$

Analisando o sistema





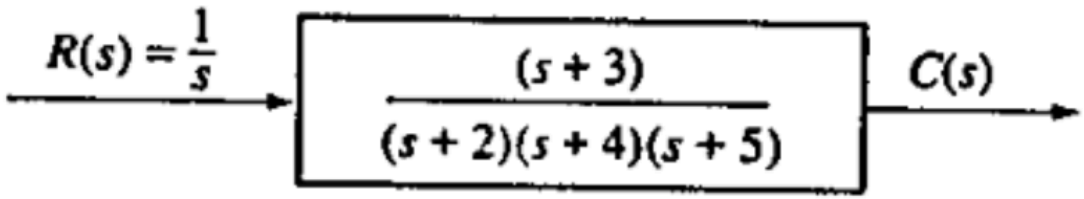
1. Um polo da função de entrada gera a forma da *resposta forçada* (isto é, o polo na origem gerou uma função degrau na saída).

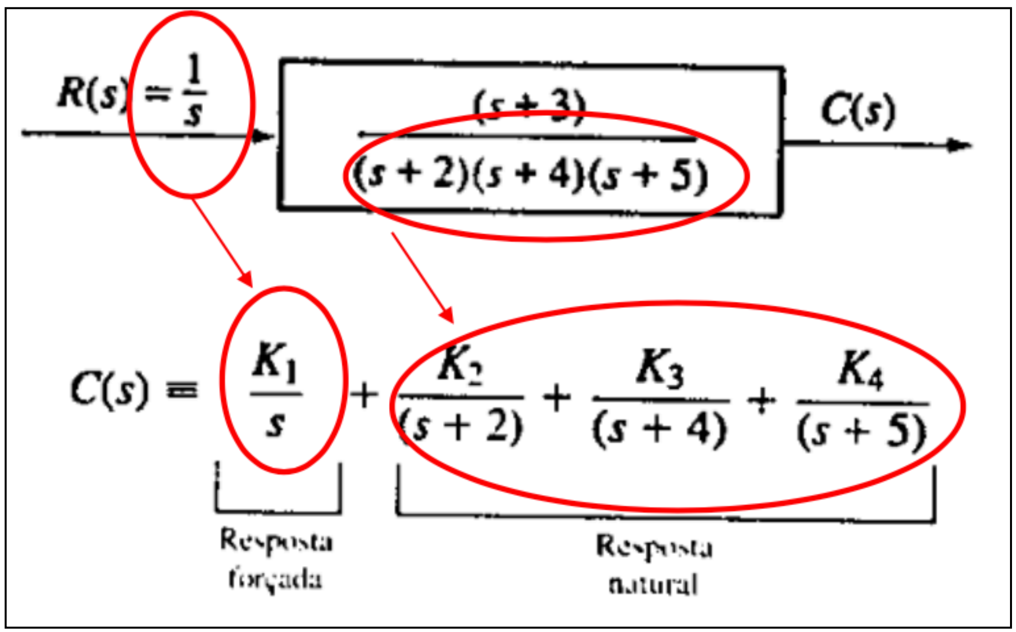
2. Um polo da função de transferência gera a forma da *resposta natural* (isto é, o polo em -5 gerou e^{-5t}).

3. Um polo no eixo real gera uma resposta *exponencial* da forma $e^{-\alpha t}$, em que $-\alpha$ é a posição do polo no eixo real. Assim, quanto mais à esquerda um polo estiver no eixo real negativo, mais rápido a resposta transitória exponencial decairá para zero

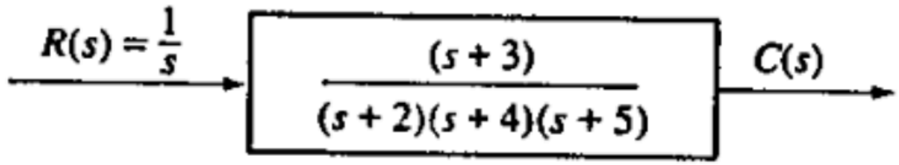
4. Os zeros e os polos geram as *amplitudes* para ambas as respostas, forçada e natural

Calculando resposta no tempo por inspeção





Calculando resposta no tempo por inspeção



$$C(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s}}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{\frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{(s+4)} + \frac{K_4}{(s+5)}}_{\text{Resposta natural}}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$c(t) = \underbrace{K_1}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}}_{\text{Resposta natural}}$$

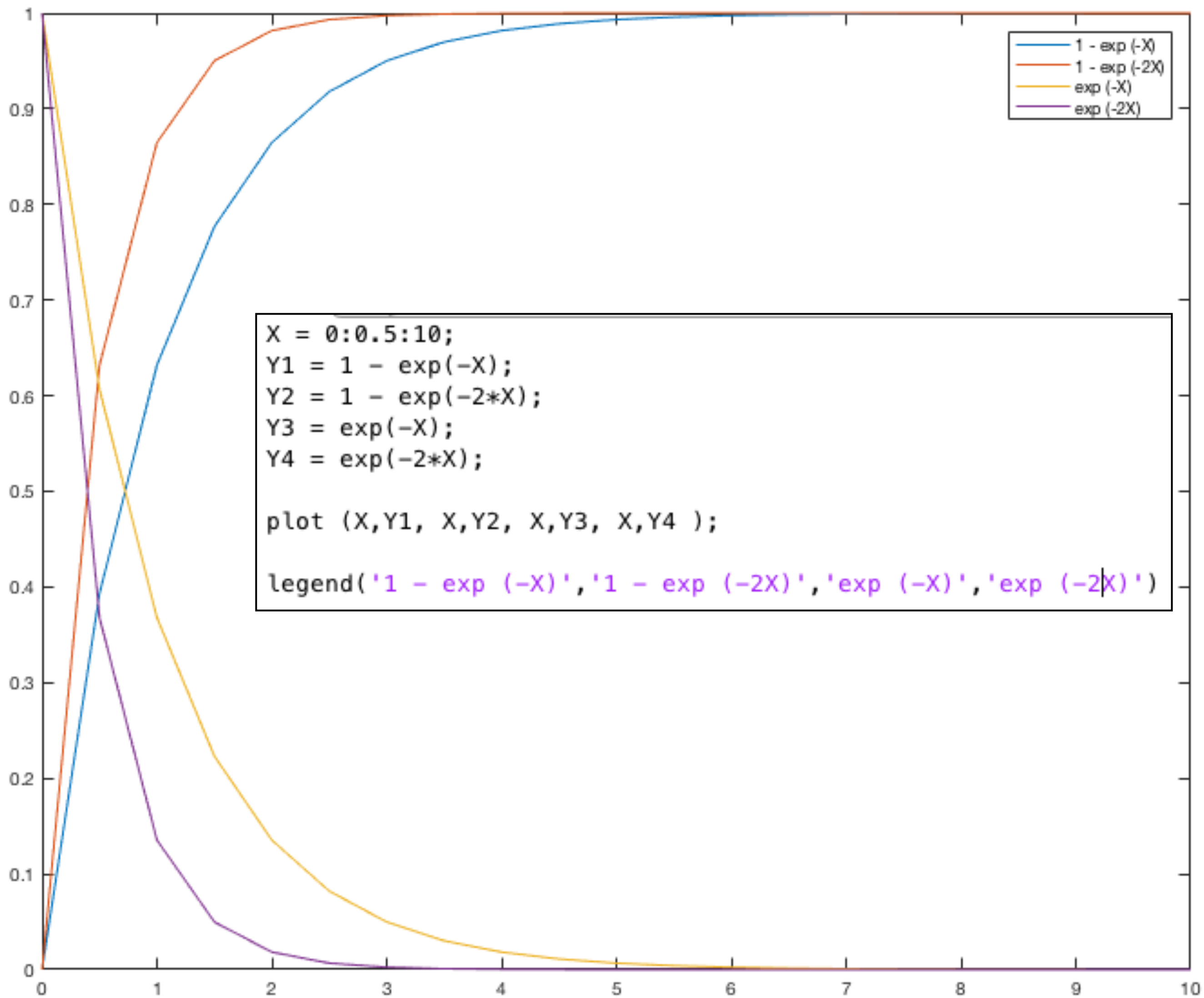
Problema Um sistema possui uma função de transferência $G(s) = \dfrac{10\,(s+4)(s+6)}{(s+1)(s+7)(s+8)\,(s+10)}$.
Escrever, por inspeção, a saída, $c(t)$, em termos genéricos se a entrada for um degrau unitário.

$$C(s) = \frac{10(s+4)(s+6)}{s(s+1)(s+7)(s+8)(s+10)}$$

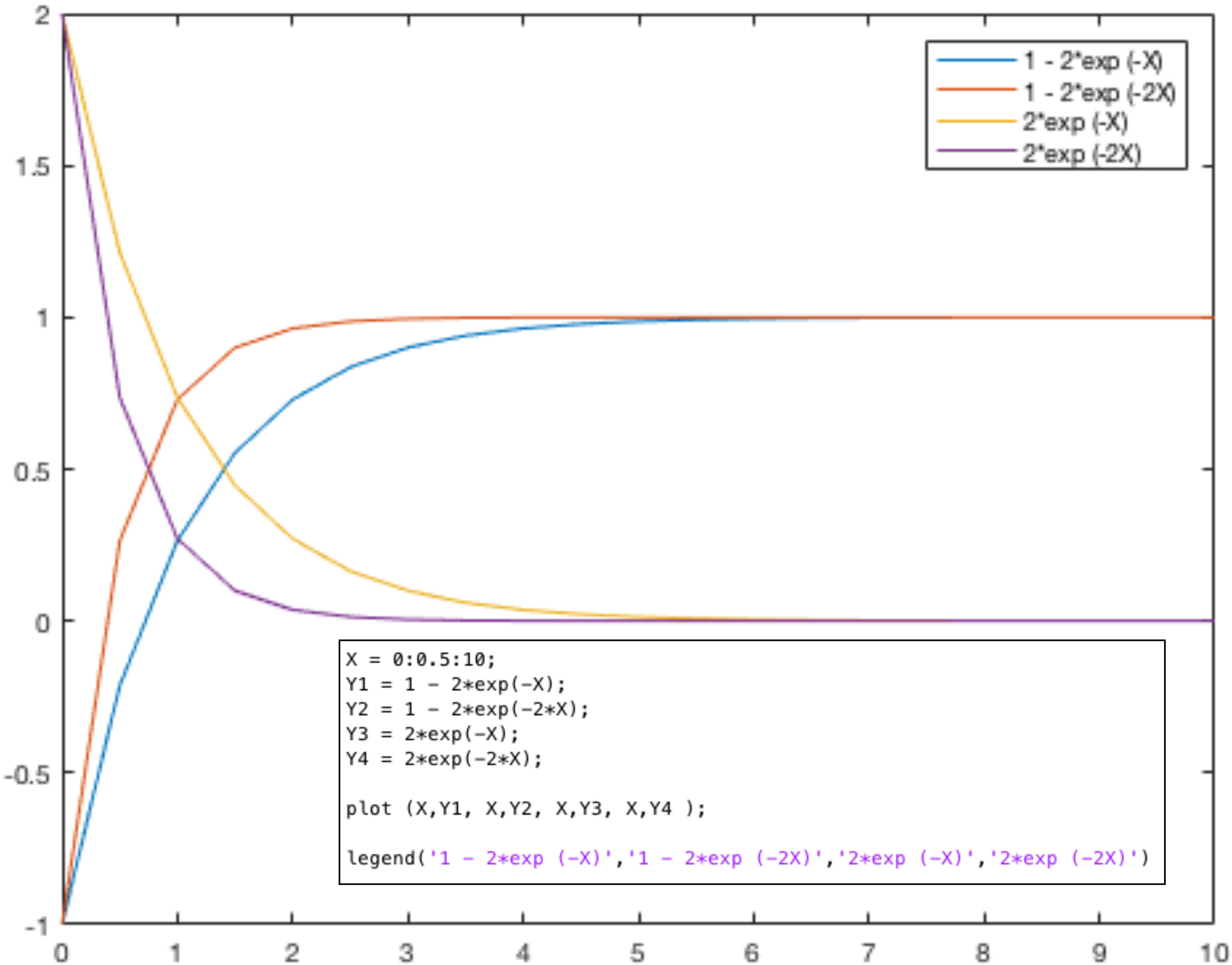
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+7} + \frac{D}{s+8} + \frac{E}{s+10}$$

$$c(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-7t} + De^{-8t} + Ee^{-10t}$$ (Transformada Inversa de Laplace)

Sistemas de Primeira Ordem: resposta exponencial

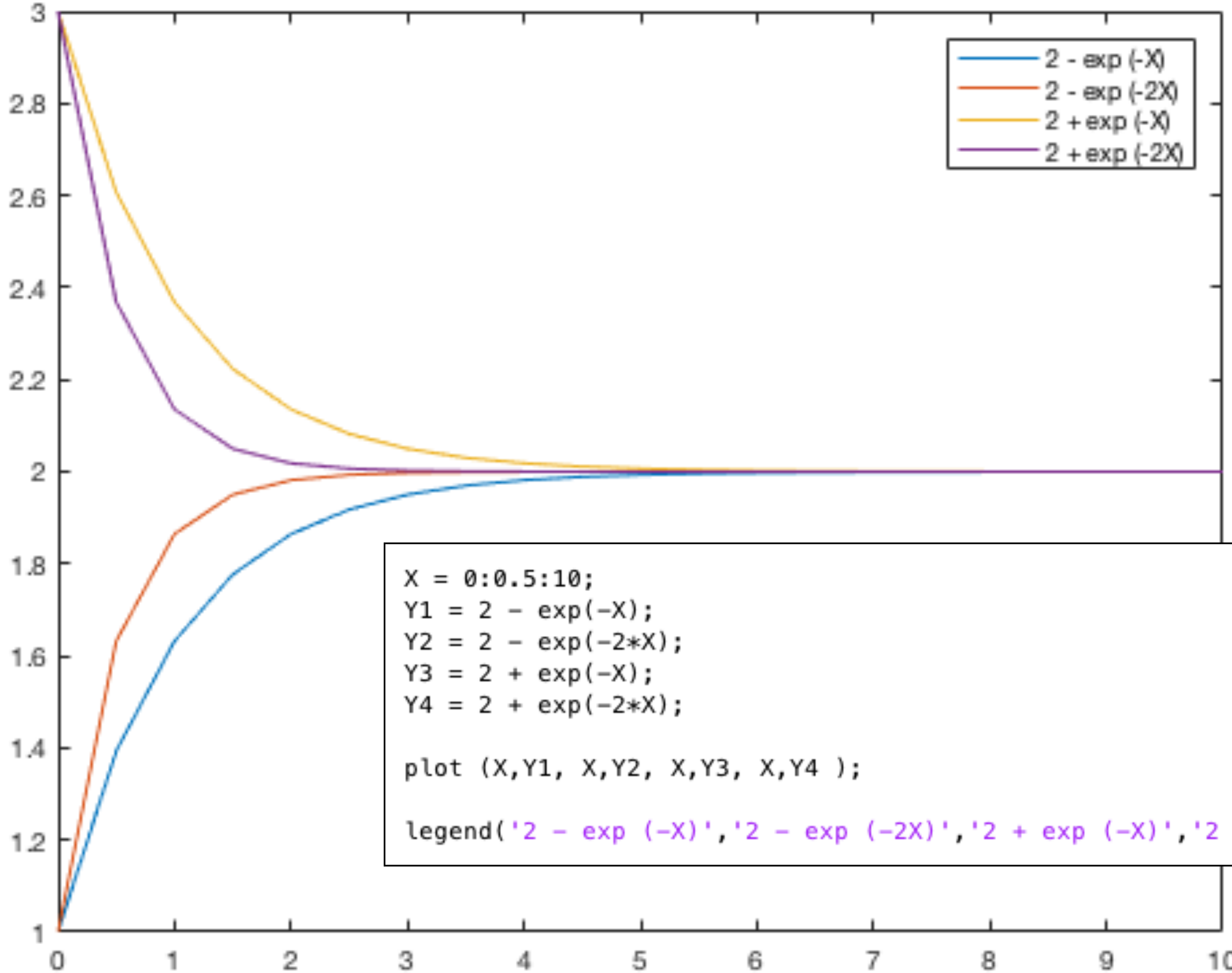


Sistemas de Primeira Ordem: resposta exponencial




```
X = 0:0.5:10;
Y1 = 1 - 2*exp(-X);
Y2 = 1 - 2*exp(-2*X);
Y3 = 2*exp(-X);
Y4 = 2*exp(-2*X);

plot (X,Y1, X,Y2, X,Y3, X,Y4 );

legend('1 - 2*exp (-X)','1 - 2*exp (-2X)','2*exp (-X)','2*exp (-2X)')
```

Sistemas de Primeira Ordem: resposta exponencial




```
X = 0:0.5:10;
Y1 = 2 - exp(-X);
Y2 = 2 - exp(-2*X);
Y3 = 2 + exp(-X);
Y4 = 2 + exp(-2*X);

plot (X,Y1, X,Y2, X,Y3, X,Y4 );

legend('2 - exp (-X)','2 - exp (-2X)','2 + exp (-X)','2 + exp (-2X)')
```

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Considere o sistema de primeira ordem, **SEM ZEROS, com entrada em degrau.**

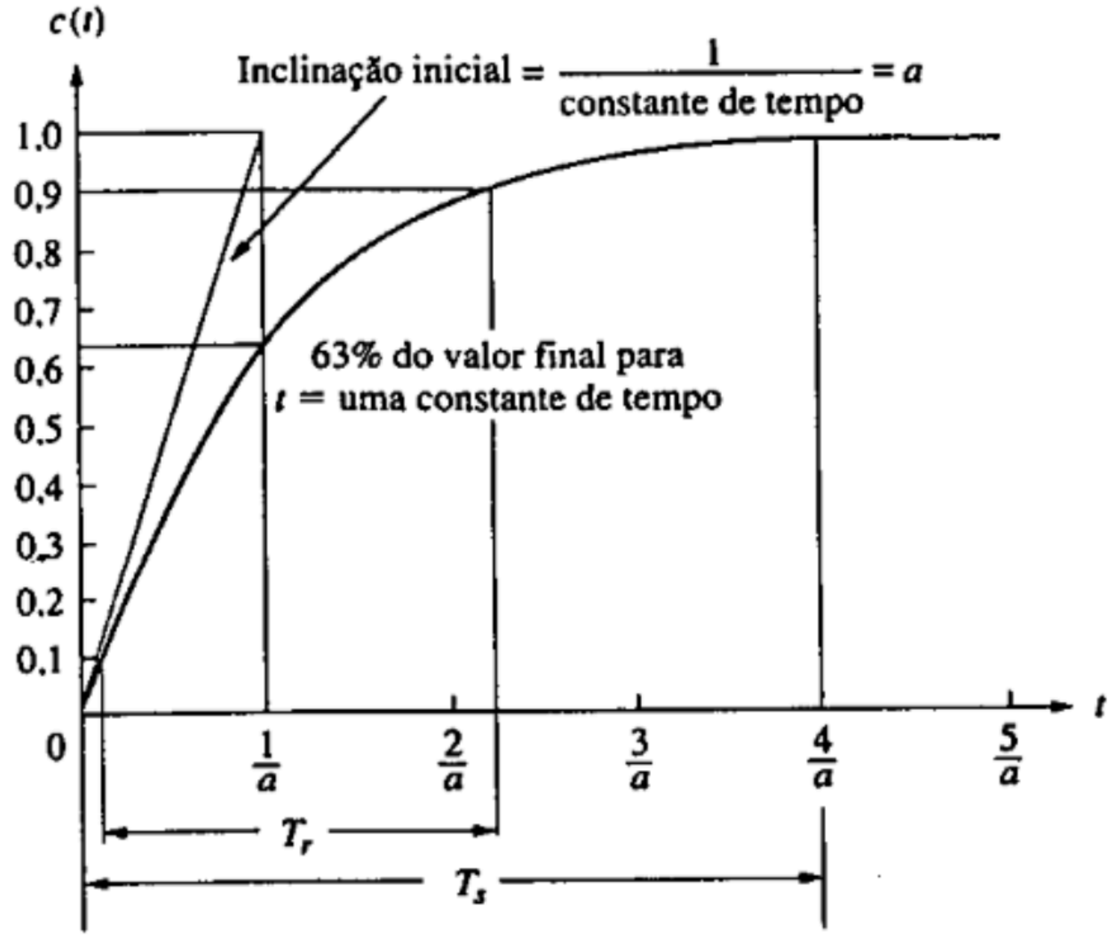
$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

Inversa de Laplace

Resp. forçada + Resp. Natural

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}$$

a é o único parâmetro necessário para descrever a resposta transitória do sistema



O inverso da constante de tempo tem a unidade (1/segundos), ou frequência. Assim, podemos chamar **o parâmetro *a* de *frequência exponencial***. Uma vez que a derivada de e^{-at} é $-a$ quando $t = 0$, a é a taxa inicial de variação da exponencial em $t = 0$. Assim, a constante de tempo pode ser considerada uma especificação da resposta transitória para um sistema de primeira ordem, uma vez que ela está relacionada à rapidez com a qual o sistema responde a uma entrada em degrau.

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

comportamento de "a", quando t=1/a

Tc = tempo necessário para e^{-at} decair 37% do valor inicial

- **Constante de Tempo T_c = 1/a**

$$c(t) = 1 - e^{-at}$$

$$e^{-at}\big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0{,}37$$

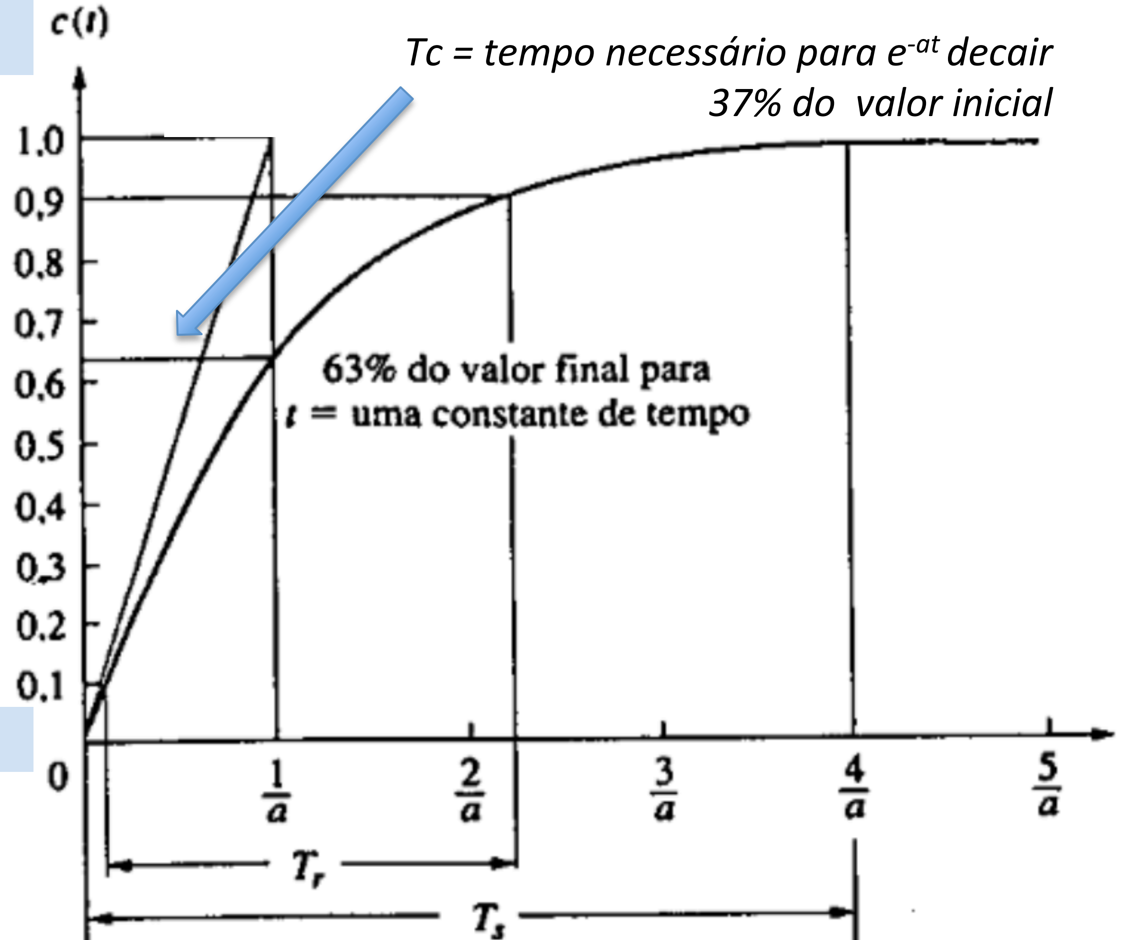
$$c(t)\big|_{t=1/a} = 1 - 0{,}37 = 0{,}63$$

- **Tempo de Subida, T_r**

Tempo necessário para que a forma de onda vá de 0.1 a 0.9 do seu valor final.

$c(t) = 0{,}1$ ou $0{,}9 = 1 - e^{-at}$

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a}$$



$c(t) = 0{,}98 = 1 - e^{-at}$

- **Tempo de Assentamento, T_s**

$$T_s = \frac{4}{a}$$

Tempo necessário para que a resposta alcance uma faixa de valores de 2% em torno do valor final e aí permaneça.

$$c(t) = 0.98$$
$$T_s = 4/a$$

Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Considere o sistema de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

Para uma entrada em degrau temos:

$$C(s) = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{s+a}$$

$$c(t) = \frac{K}{a} - K_2 e^{-at}$$

valor da entrada forçada em regime permanente

<u>Características de sistemas de primeira ordem:</u>

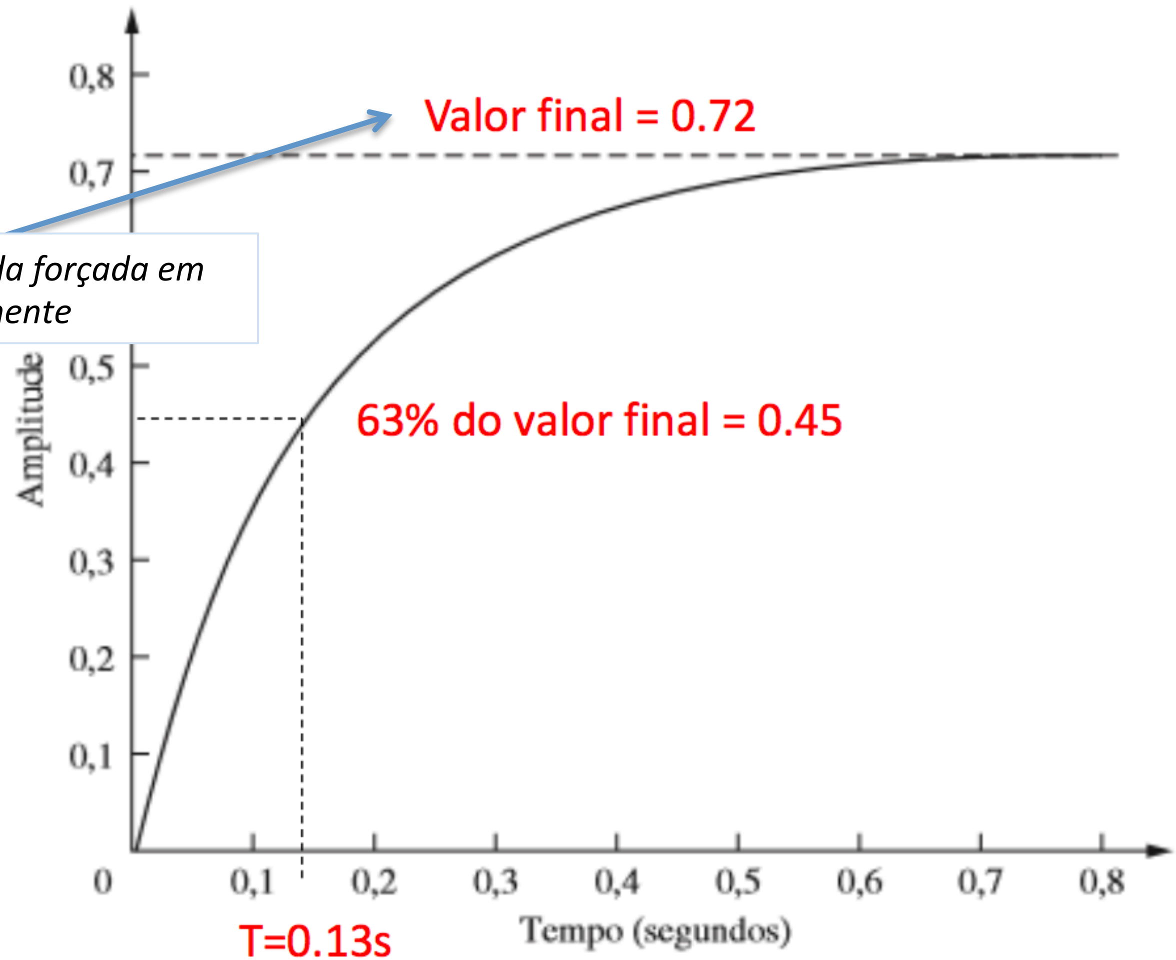
- Sem ultrapassagem
- Inclinação inicial não nula

Constante de Tempo = 0.13s

a = 1/0.13=7.7

Valor estacionário da função: K/a = 0.72

K/a=0.72 → K=0.72*7.7=5.54



Análise de Sistemas de Primeira Ordem

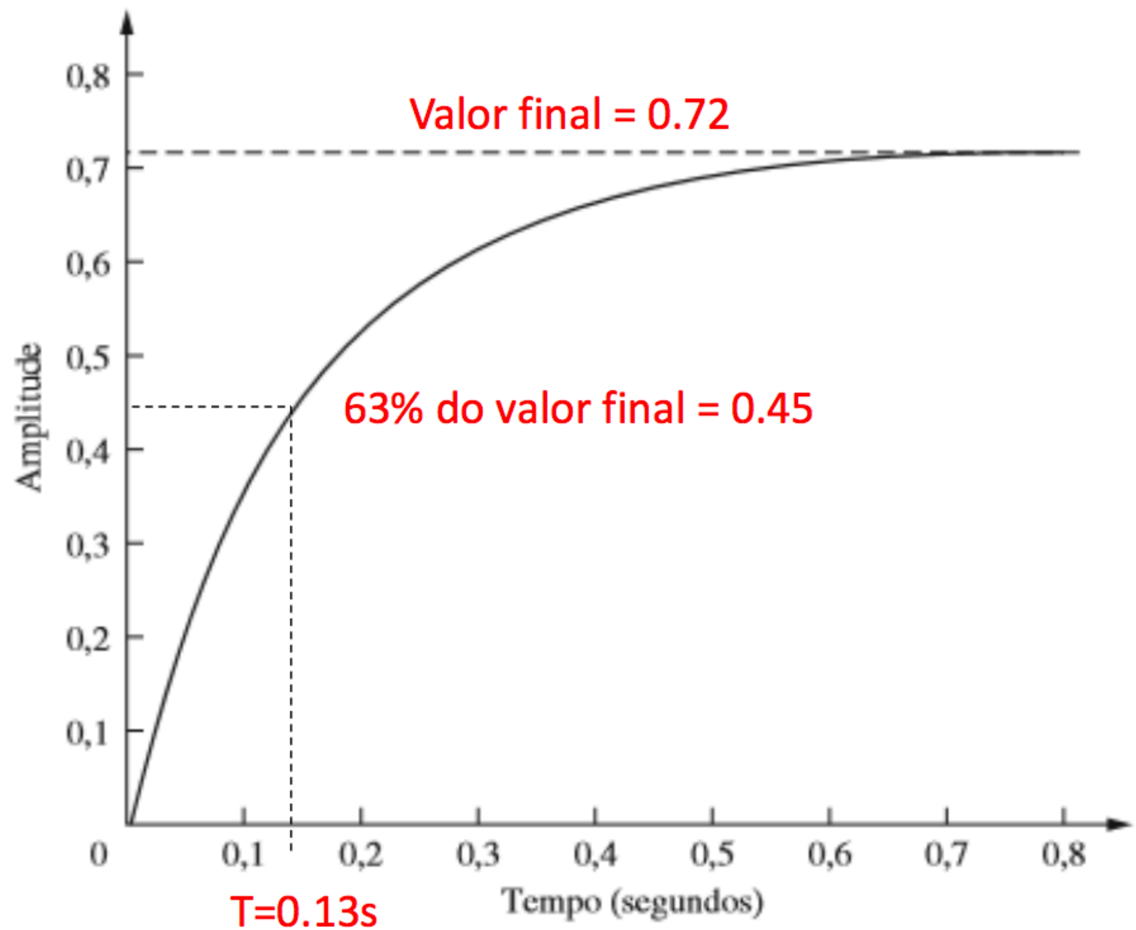
Logo, a função de transferência obtida experimentalmente será:

$$G(s) = \frac{5.54}{s + 7.7}$$

A função original na verdade era:

$$G(s) = \frac{5}{s + 7}$$

Observa-se uma boa aproximação



Exercício 4.2

PROBLEMA: Um sistema possui uma função de transferência, $G(s) = \dfrac{50}{s + 50}$. Determine a constante de tempo, T_c, o tempo de acomodação, T_s, e o tempo de subida, T_r.

RESPOSTA: $T_c = 0{,}02$ s, $T_s = 0{,}08$ s e $T_r = 0{,}044$ s.

$$G(s) = \frac{K}{s + a}$$

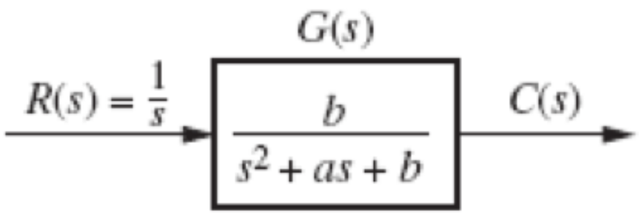
- **Constante de Tempo T_c = 1/a**
- **Tempo de Subida, T_r**

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a}$$

- **Tempo de Assentamento, T_s**

$$T_s = \frac{4}{a}$$

Análise de Sistemas de Segunda Ordem



Geral

Estudo específico para sistemas com 2 pólos e nenhum zero

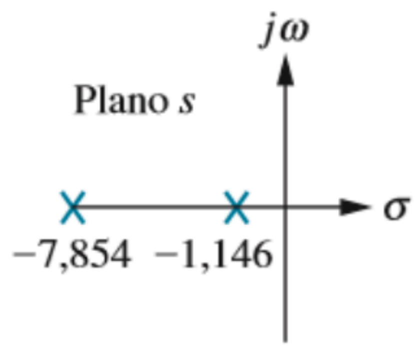
Resposta **SuperAmortecida**

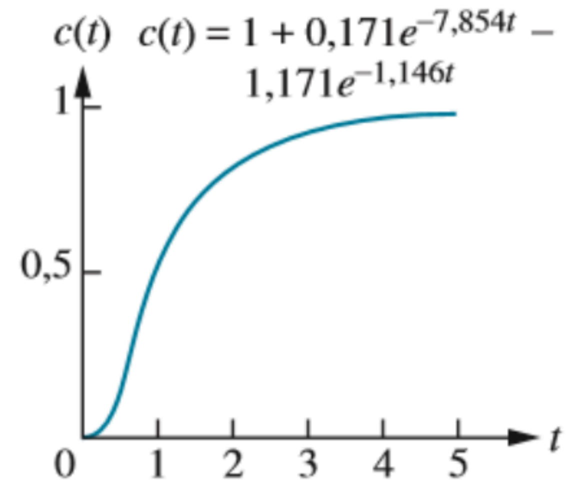
$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)}$$

$$= \frac{9}{s(s + 7{,}854)(s + 1{,}146)}$$

$$c(t) = K_1 + \boxed{K_2 e^{-7{,}854t} + K_3 e^{-1{,}146t}}$$

Resposta forçada (pólo na origem – entrada)





Resposta lenta

Resposta natural (pólos do sistema)
→ Duas raízes reais distintas

Análise de Sistemas de Segunda Ordem

1. *Respostas superamortecidas*

Polos: Dois reais em $-\sigma_1$ e $-\sigma_2$

Resposta natural: Duas exponenciais com constantes de tempo iguais ao inverso das posições dos polos, ou

$$\boxed{c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t}}$$

$$\frac{9}{s(s+7{,}854)(s+1{,}146)} \Rightarrow c(t) = K_1 + K_2 e^{-7{,}854t} + K_3 e^{-1{,}146t}$$

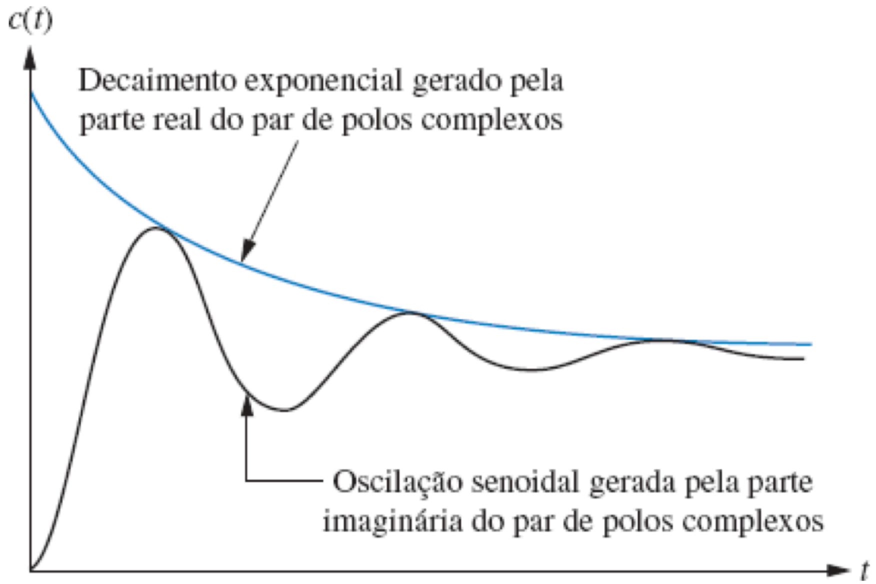
Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Resposta **SubAmortecida**

Polos: Dois complexos em $-\sigma_d \pm j\omega_d$

Resposta natural: Senoide amortecida com uma envoltória exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da parte real do polo. A frequência, em radianos, da senoide, a frequência de oscilação amortecida, é igual à parte imaginária dos polos, ou

$$\boxed{c(t) = Ae^{-\sigma_d t}\cos(\omega_d t - \phi)}$$

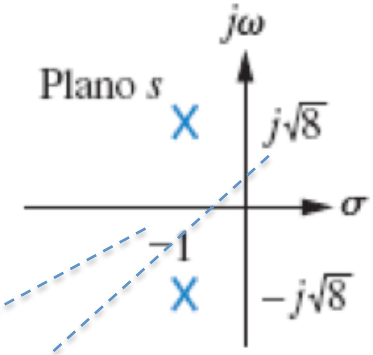


Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Resposta **SubAmortecida**

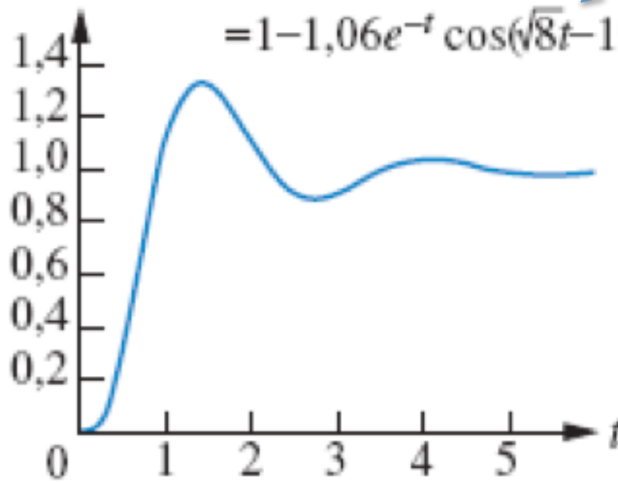
$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 2s + 9)}$$

Resposta forçada, entrada = degrau unitário



os polos que geram a resposta natural estão em $s = -1 \pm j\sqrt{8}$

$$c(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos\sqrt{8}t + \frac{\sqrt{8}}{8}\,\mathrm{sen}\sqrt{8}t\right)$$
$$= 1 - 1{,}06e^{-t}\cos(\sqrt{8}t - 19{,}47^\circ)$$



Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Resposta **SubAmortecida**

PROBLEMA: Por inspeção, escreva a forma da resposta ao degrau do sistema na Figura 4.9.

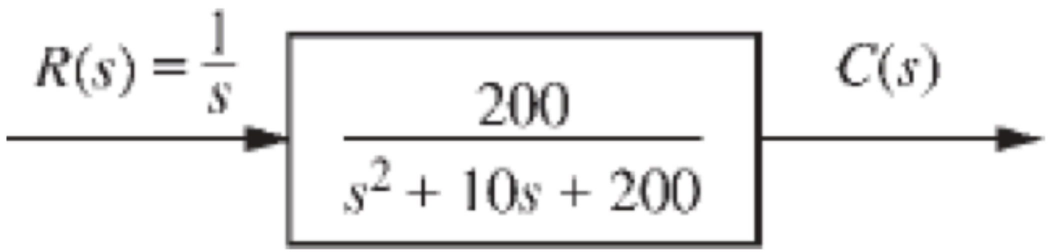
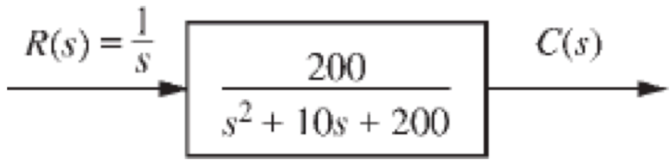


FIGURA 4.9 Sistema para o Exemplo 4.2.

Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Resposta **SubAmortecida**



SOLUÇÃO:

polos como $s = -5 \pm j13{,}23$

-5, é a frequência exponencial do amortecimento

$$c(t) = K_1 + e^{-5t}(K_2 \cos 13{,}23t + K_3 \operatorname{sen} 13{,}23t)$$

$$\boxed{c(t) \quad = \quad K_1 + K_4 e^{-5t}(\cos 13{,}23t - \phi),}$$

$\phi = \tan^{-1} K_3/K_2$,

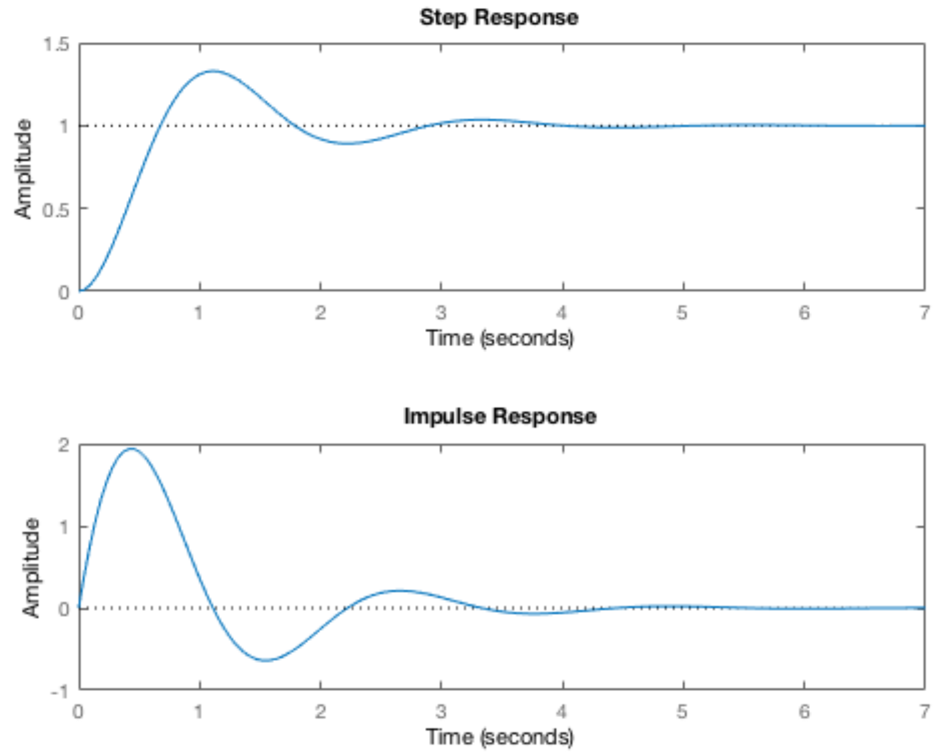
$K_4 = \sqrt{(k_2)^2 + (k_3)^2}$

MATLAB: resposta no tempo

```
sys = tf ([9],[1 2 9])

subplot (2,1,1);
step (sys);
subplot (2,1,2);
impulse (sys);
```

Command Window

```
>> systime

sys =

        9
  -------------
  s^2 + 2 s + 9

Continuous-time transfer function.

>>
```

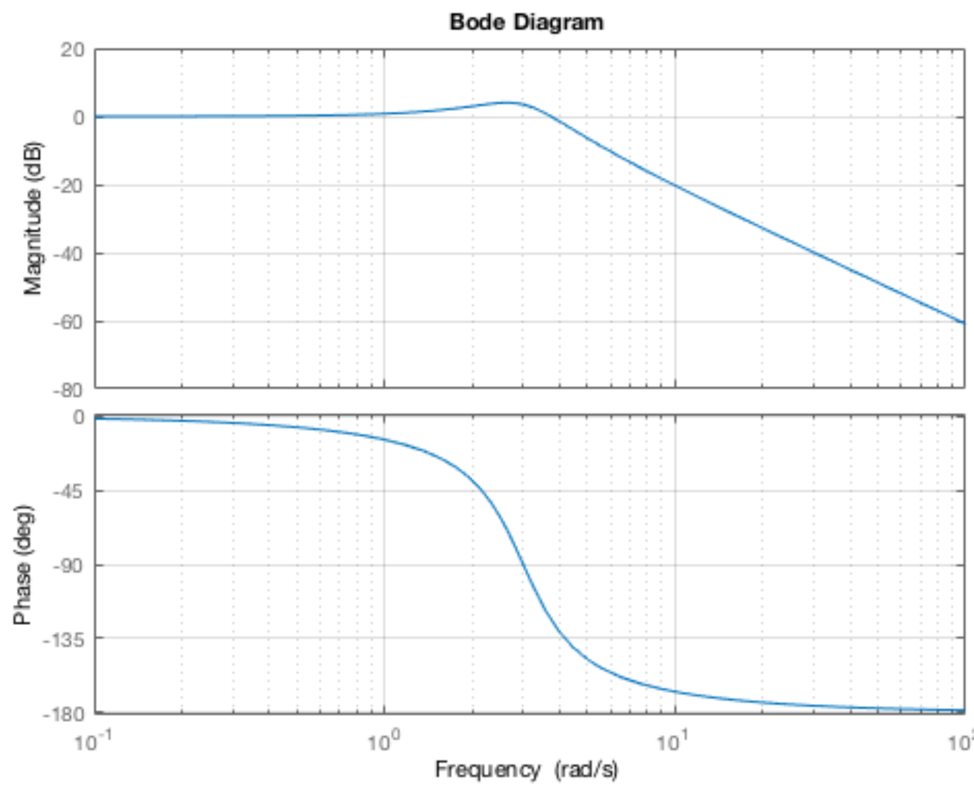


MATLAB: resposta na frequência

```
3 -    sys = tf ([9],[1 2 9])
4
5 -    bode(sys);
6 -    grid
```

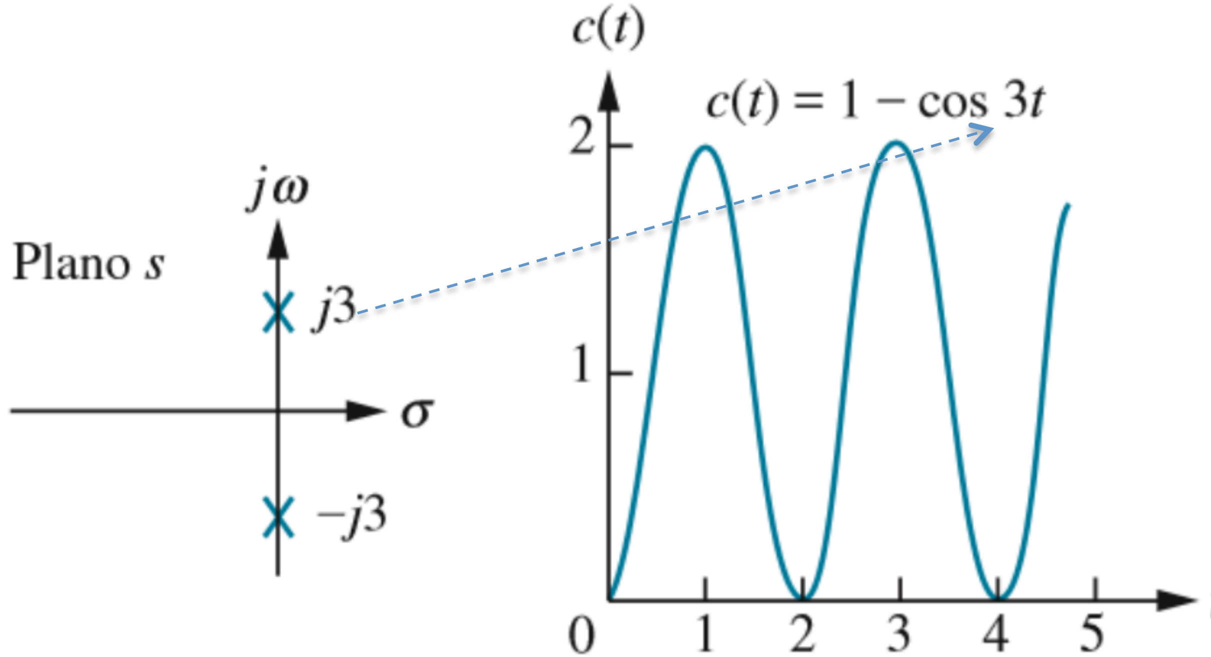
Command Window

```
sys =

        9
  -------------
  s^2 + 2 s + 9

Continuous-time transfer function.
```



Resposta **não Amortecida**

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+9)}$$



<u>Raízes:</u> $\pm j3$

→ Um pólo na origem

- Proveniente da entrada em degrau
- Produz a resposta forçada de valor constante k1

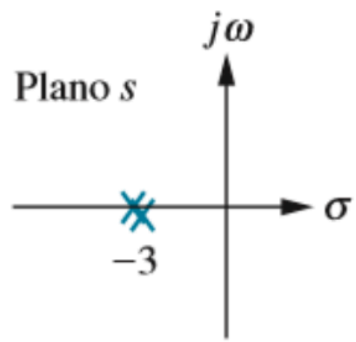
→ Dois pólos sobre o eixo imaginário

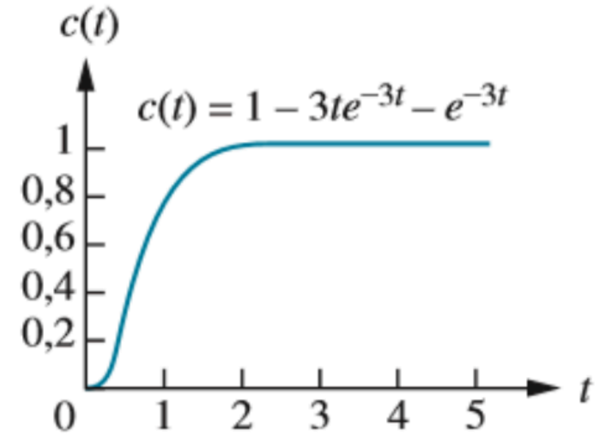
- Produz a resposta senoidal
- Sem parte real não há decaimento $e^{-0t} = 1$

Resposta: $\boxed{c(t) = K_1 + K_4\cos(3t - \phi)}$

Resposta **criticamente Amortecida**

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s + 3)^2}$$





→ Um pólo da origem (entrada em degrau unitário)

- Gera a resposta forçada constante

→ Dois pólos reais múltiplos

- Gera uma resposta natural exponencial e outra exponencial multiplicada pelo tempo

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-3t}$$

Resposta mais rápida possível de ser obtida sem ultrapassagem

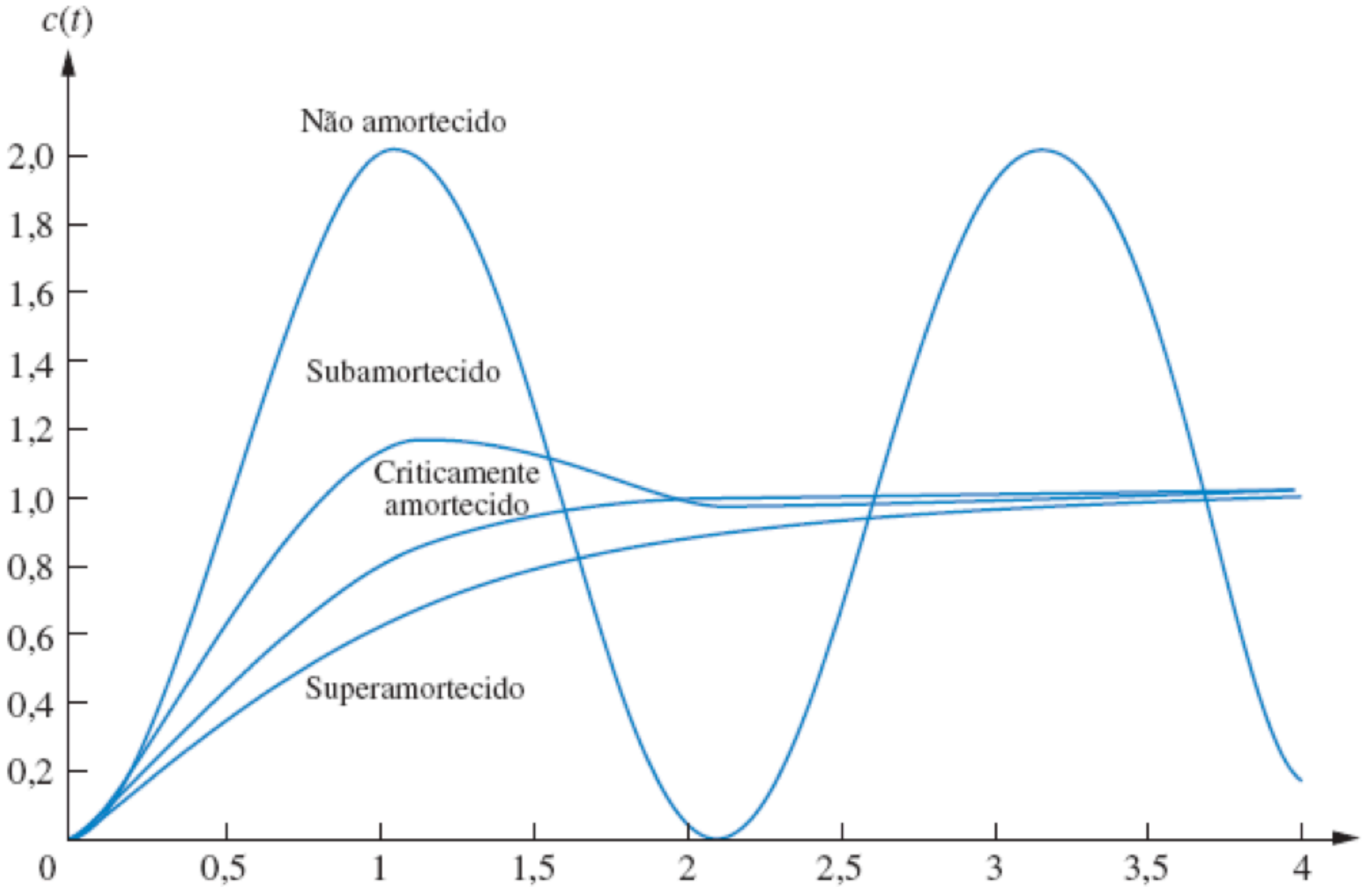


FIGURA 4.10 Respostas ao degrau para os casos de amortecimento de sistemas de segunda ordem.

PROBLEMA: Para cada uma das funções de transferência a seguir, escreva, por inspeção, a forma geral da resposta ao degrau:

a. $G(s) = \dfrac{400}{s^2 + 12s + 400}$

b. $G(s) = \dfrac{900}{s^2 + 90s + 900}$

c. $G(s) = \dfrac{225}{s^2 + 30s + 225}$

d. $G(s) = \dfrac{625}{s^2 + 625}$

RESPOSTAS:

a. $c(t) = A + Be^{-6t}\cos(19{,}08t + \phi)$

b. $c(t) = A + Be^{-78{,}54t} + Ce^{-11{,}46t}$

c. $c(t) = A + Be^{-15t} + Cte^{-15t}$

d. $c(t) = A + B\cos(25t + \phi)$

Respostas:

a. $G(s) = \dfrac{400}{s^2 + 12s + 400}$ ⇨ pólos $-6 \pm j19{,}08$ $c(t) = A + Be^{-6t}\cos(19{,}08t + \phi)$

b. $G(s) = \dfrac{900}{s^2 + 90s + 900}$ ⇨ pólos $-78{,}54$ e $-11{,}46$ $c(t) = A + Be^{-78{,}54t} + Ce^{-11{,}4t}$

c. $G(s) = \dfrac{225}{s^2 + 30s + 225}$ ⇨ Pólos repetidos em -15 $c(t) = A + Be^{-15t} + Cte^{-15t}$

d. $G(s) = \dfrac{625}{s^2 + 625}$ ⇨ pólos $\pm j25$ $c(t) = A + B\cos(25t + \phi)$

Frequência Natural, ω_n

A *frequência natural* de um sistema de segunda ordem é a **frequência de oscilação do sistema sem amortecimento**. Por exemplo, a frequência de oscilação de um circuito *RLC* em série com a resistência em curto-circuito seria a frequência natural.

Fator de Amortecimento, ζ

$$\zeta = \frac{\text{Frequência de decaimento exponencial}}{\text{Frequência natural (rad/segundo)}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\text{Período natural (segundos)}}{\text{Constante de tempo exponencial}}$$

"...a razão entre a frequência de decaimento exponencial da envoltória e a frequência natural. Esta razão é constante, independentemente da escala de tempo da resposta. Além disso, o inverso, que é proporcional à razão entre período natural e a constante de tempo exponencial, permanece o mesmo, independentemente da base de tempo."

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Caso geral: sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + b}$$

Caso específico: sistema sem amortecimento

Por definição, a frequência natural, ω_n, é a frequência de oscilação desse sistema. Uma vez que os polos desse sistema estão no eixo $j\omega$ em $\pm j\sqrt{b}$.

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{b}} \qquad \boxed{b = \omega_n^2}$$

que é o termo *a*?

Admitindo um sistema subamortecido, os polos complexos possuem uma parte real, σ, igual a $-a/2$. A magnitude desse valor é então a frequência de decaimento exponencial descrita

Parte real dos pólos complexos

$$\zeta = \frac{\text{Frequência de decaimento exponencial}}{\text{Frequência natural (rad/segundo)}} = \frac{|\sigma|}{\omega_n} = \frac{a/2}{\omega_n}$$

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

$$\boxed{a = 2\zeta\omega_n} \qquad \boxed{b = \omega_n^2}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Exemplo 4.3

Determinando ζ e ω_n para um Sistema de Segunda Ordem

PROBLEMA: Dada a função de transferência da Equação (4.23), determine ζ e ω_n.

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4{,}2s + 36} \tag{4.23}$$

SOLUÇÃO: Comparando a Equação (4.23) à Equação (4.22), $\omega_n^2 = 36$, a partir do que $\omega_n = 6$. Além disso, $2\zeta\omega_n = 4{,}2$. Substituindo o valor de ω_n, $\zeta = 0{,}35$.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Cálculo dos polos em função da frequencia natural e do fator de amortecimento

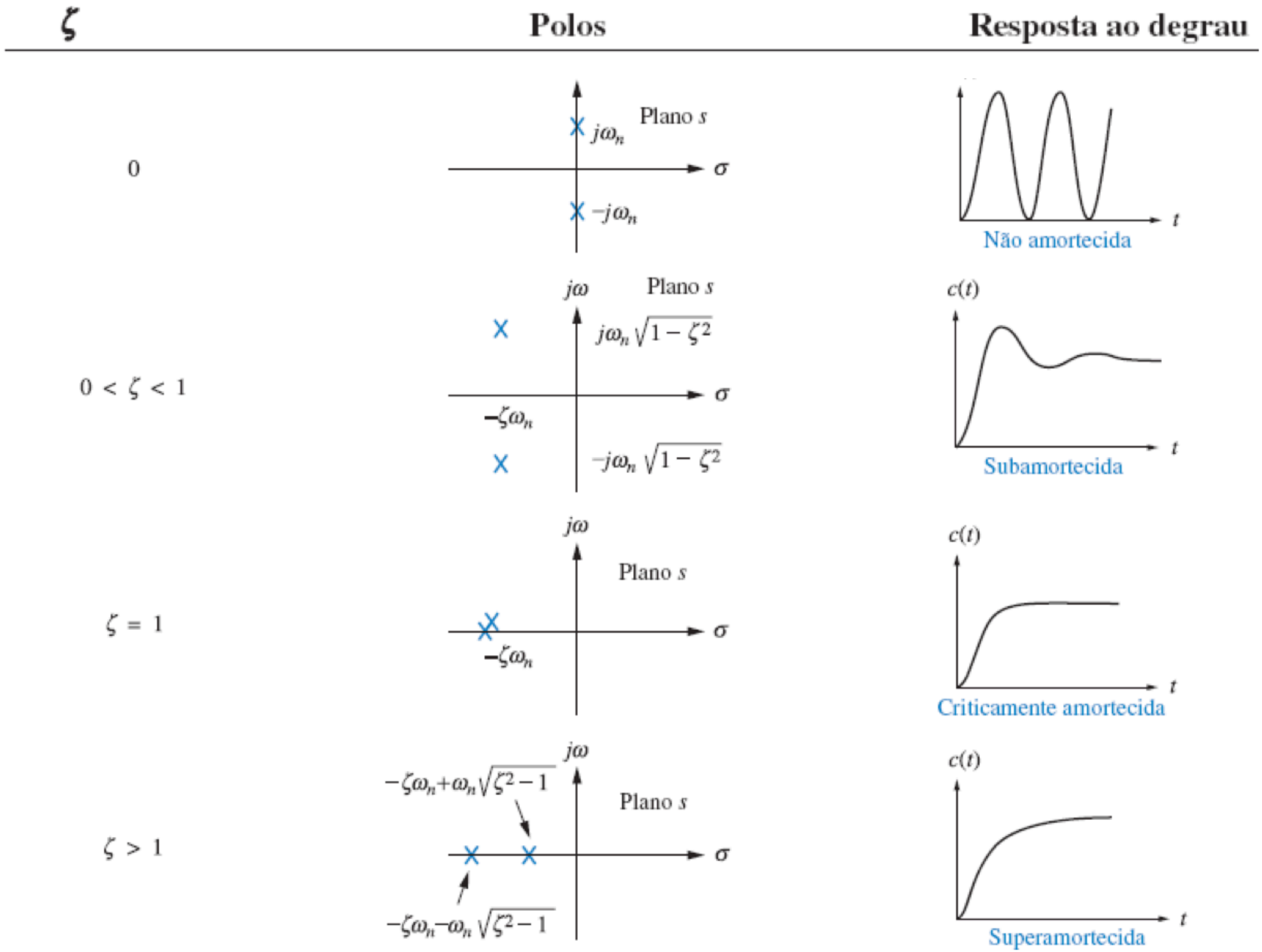
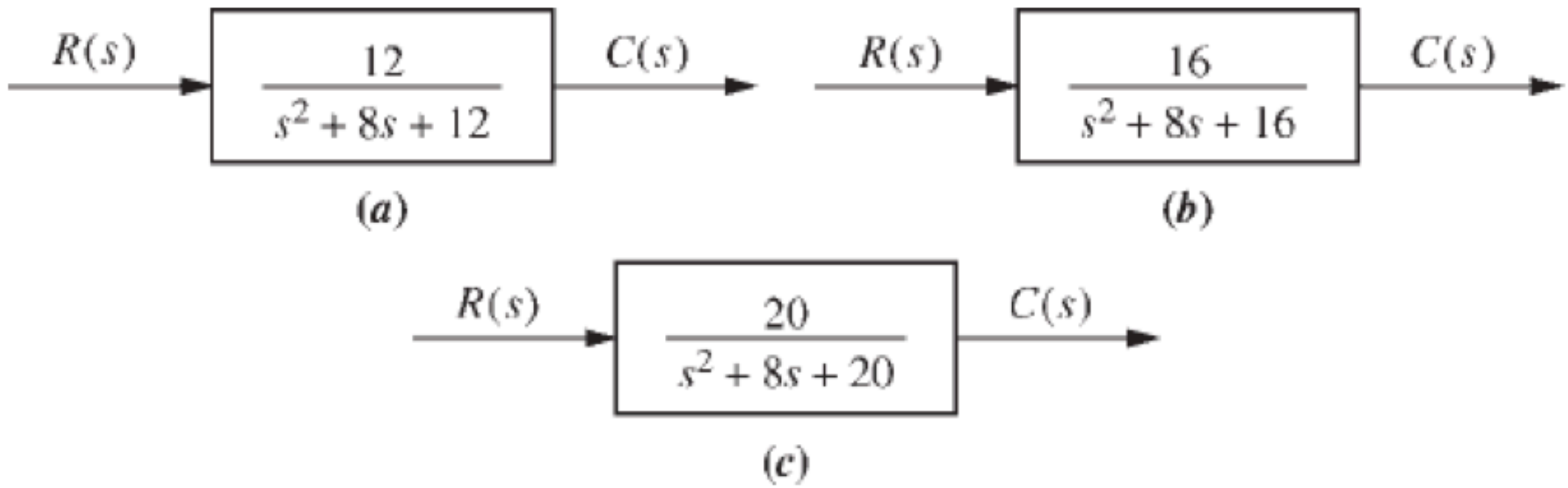


FIGURA 4.11 Resposta de segunda ordem em função do fator de amortecimento.

PROBLEMA: Para cada um dos sistemas mostrados na Figura 4.12, determine o valor de ζ e descreva o tipo de resposta esperado.



Uma vez que $a = 2\zeta\omega_n$ e $\omega_n = \sqrt{b}$,

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}}$$

PROBLEMA: Para cada uma das funções de transferência do Exercício 4.3, faça o seguinte: (1) Determine os valores de ζ e ω_n; (2) caracterize a natureza da resposta.

RESPOSTAS:

a. $\zeta = 0{,}3$, $\omega_n = 20$; o sistema é subamortecido

b. $\zeta = 1{,}5$, $\omega_n = 30$; o sistema é superamortecido

c. $\zeta = 1$, $\omega_n = 15$; o sistema é criticamente amortecido

d. $\zeta = 0$, $\omega_n = 25$; o sistema é não amortecido

Exercício 4.3

a. $G(s) = \dfrac{400}{s^2 + 12s + 400}$

b. $G(s) = \dfrac{900}{s^2 + 90s + 900}$

c. $G(s) = \dfrac{225}{s^2 + 30s + 225}$

d. $G(s) = \dfrac{625}{s^2 + 625}$

Sistemas de Segunda Ordem Subamortecidos

Função de transferência

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Resposta ao degrau

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

se supõe $\zeta < 1$ (isto é, o caso subamortecido)

aplicação da transformada de Laplace inversa

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi\right)$$

onde $\phi = \mathrm{tg}^{-1}(\zeta / \sqrt{1-\zeta^2})$

Sistemas de Segunda Ordem Subamortecidos : outros parâmetros

1. ***Tempo de subida***, T_r. O tempo necessário para que a forma de onda vá de 0,1 do valor final até 0,9 do valor final.

2. ***Instante de pico***, T_p. O tempo necessário para alcançar o primeiro pico, ou pico máximo.

3.***Ultrapassagem percentual***, *%UP*. O valor pelo qual a forma de onda ultrapassa o valor em regime permanente, ou valor final, no instante de pico, expresso como uma percentagem do valor em regime permanente.

4.***Tempo de assentamento***, T_s. O tempo necessário para que as oscilações amortecidas transitórias alcancem e permaneçam dentro de uma faixa de ±2 % em torno do valor em regime permanente.

.

Sistemas de Segunda Ordem Subamortecidos : outros parâmetros

Instante de pico, T_p Tempo necessário para alcançar o primeiro valor de pico (máximo).

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Ultrapassagem percentual, %UP

O quanto a forma de onda, no instante de pico, ultrapassa o valor de estado estacionário, final, expresso como uma percentagem do valor de estado estacionário.

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

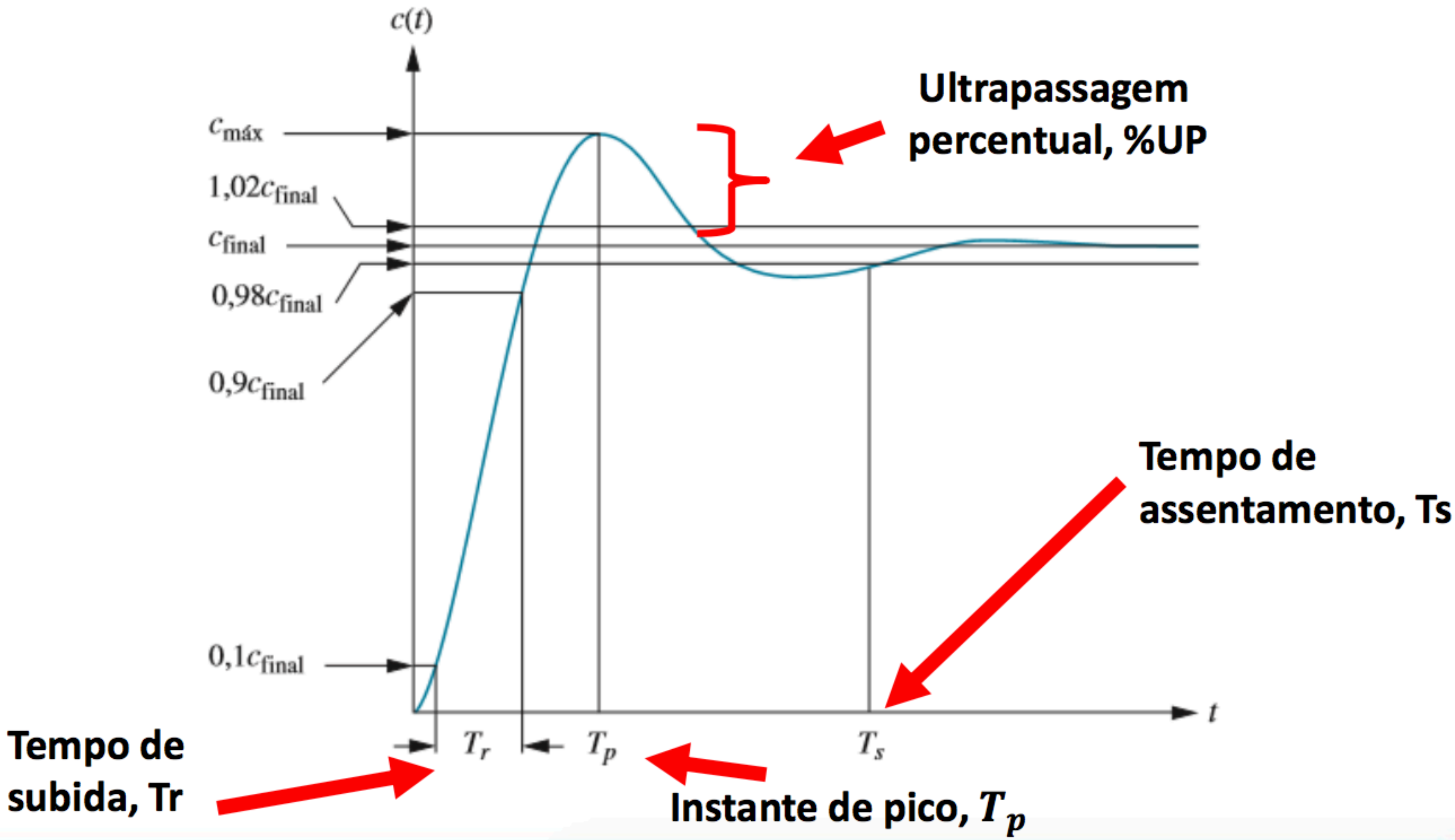
$$\zeta = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%UP/100)}}$$

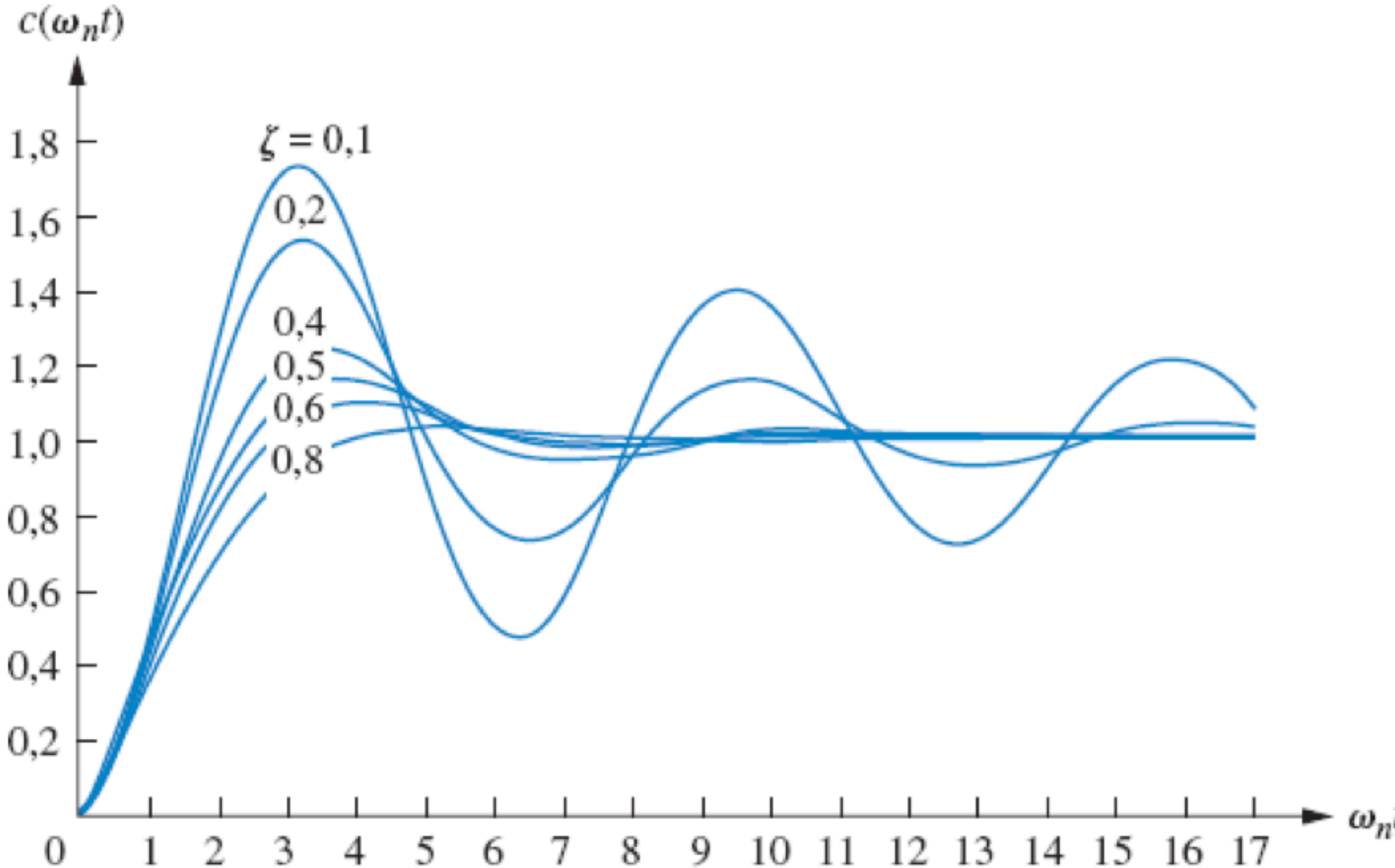
Tempo de assentamento, Ts

Tempo necessário para que as oscilações amortecidas do regime transitório entrem e permaneçam no interior de uma faixa de valores de ±2% em torno do valor de estado estacionário

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Não é possível obter uma relação analítica para esse parâmetro em sistemas de segunda ordem.





O tempo de subida, o instante de pico e o tempo de acomodação fornecem informações sobre a rapidez da resposta transitória. Essas informações podem auxiliar um projetista a determinar se a rapidez e a natureza da resposta degradam ou não o desempenho do sistema

PROBLEMA: Dada a função de transferência

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

determine T_p, $\%UP$, T_s e T_r.

Calculando: ω_n e ζ

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s - 100} \Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Logo:

$$\omega_n = 10$$

$$\zeta = 0.75$$

Resolução:

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad T_p = 0,475 \text{ s}$$

$$\boxed{\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100} \qquad \%UP = 2.838$$

$$\boxed{T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}} \qquad T_s = 0,533 \text{ s}$$

Calculando o tempo de subida *Tr*

$$T_{r(norm)} = 2.3s$$

$$T_{r(norm)} = T_r \cdot \omega_n$$

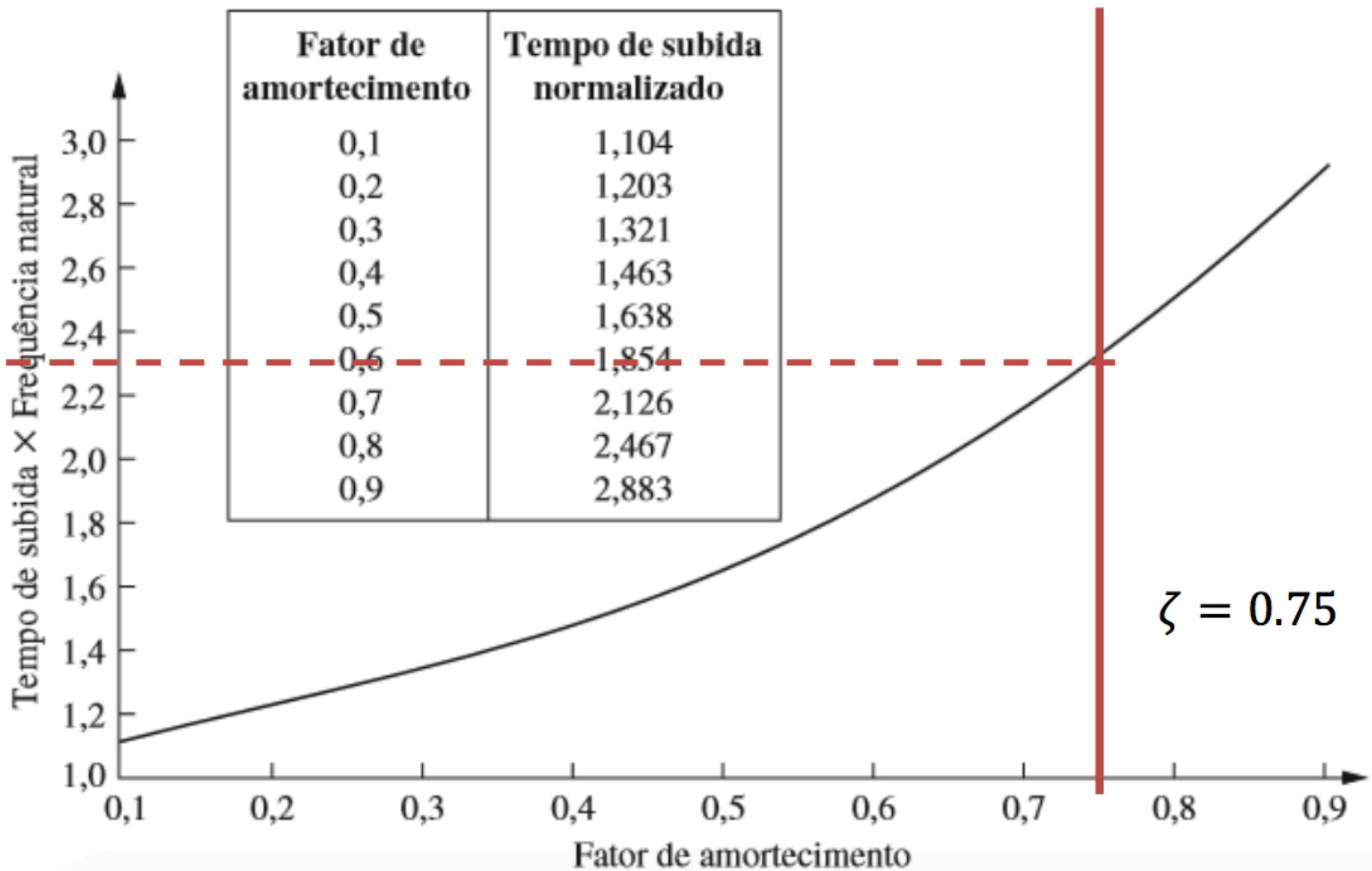
$$T_r = \frac{T_{r(norm)}}{\omega_n}$$

$$T_r = \frac{2.3}{10}$$

$$T_r = 0.23s$$

Tempo de subida

Tabela do tempo de subida normalizado



Fator de amortecimento	Tempo de subida normalizado
0,1	1,104
0,2	1,203
0,3	1,321
0,4	1,463
0,5	1,638
0,6	1,854
0,7	2,126
0,8	2,467
0,9	2,883

<u>O gráfico dos pólos fornece importantes informações</u>

Frequência natural

Distância entre o pólo e a origem

Fator de amortecimento

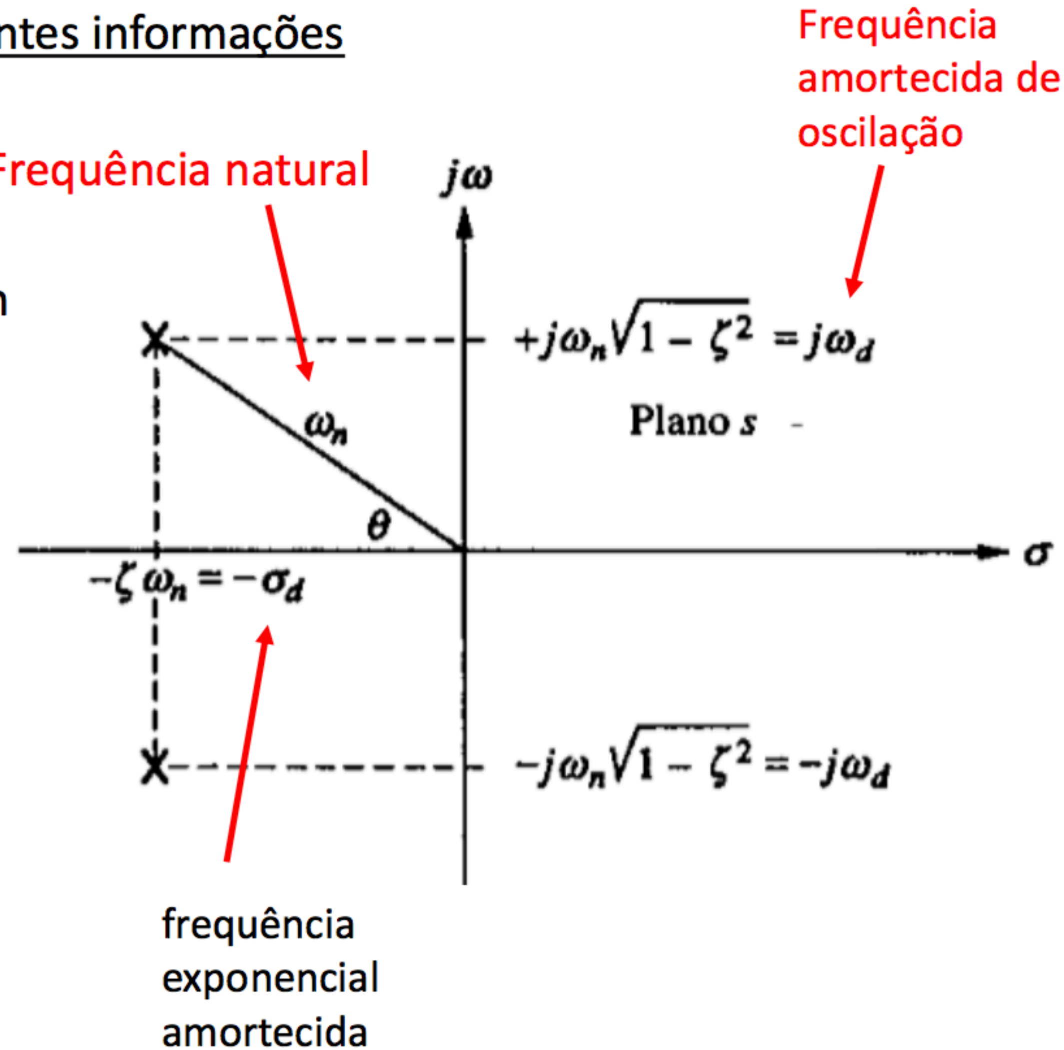
$$\cos\theta = \zeta$$

Instante de pico

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tempo de assentamento

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d}$$



ω_d é a parte imaginária do polo e é chamada **de *frequência de oscilação amortecida***, e σ_d é a magnitude da parte real do polo e é a ***frequência de amortecimento exponencial*.**

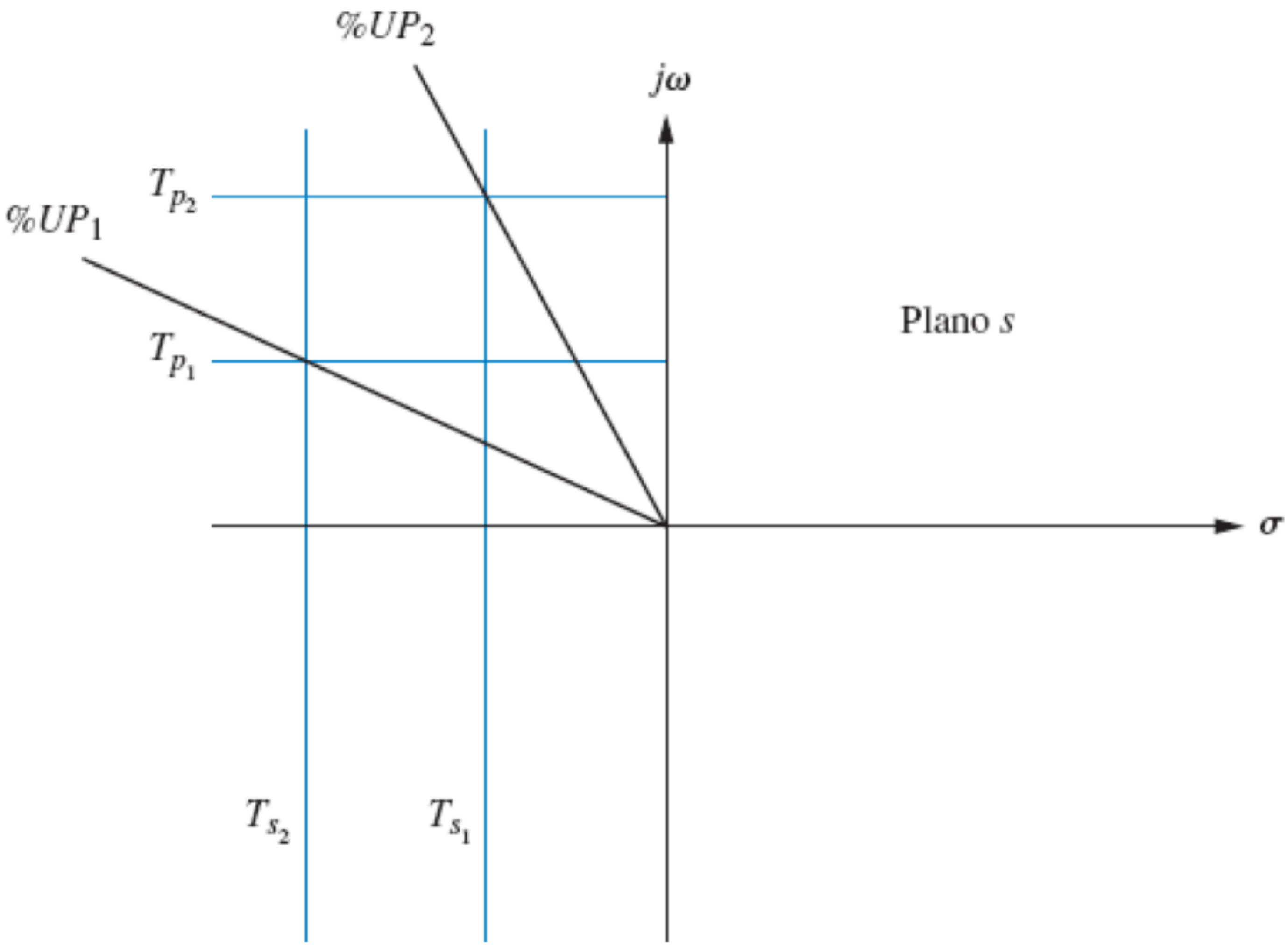
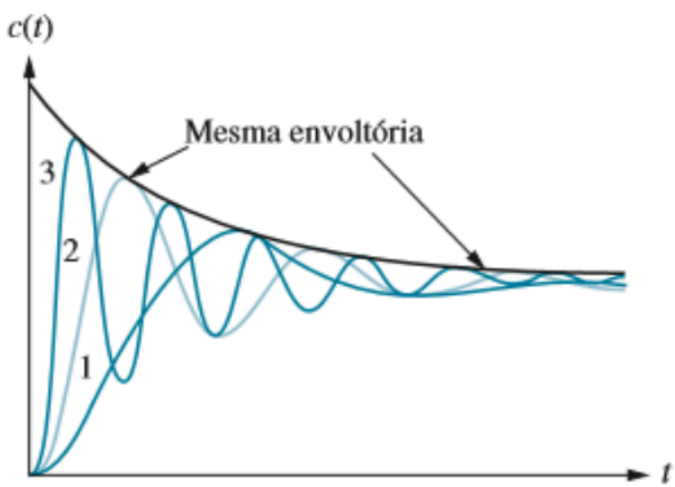


FIGURA 4.18 Linhas de instante de pico, T_p, tempo de acomodação, T_s, e ultrapassagem percentual, $\%UP$, constantes. *Observação*: $T_{s_2} < T_{s_1}$; $T_{p_2} < T_{p_1}$ e $\%UP_1 < \%UP_2$.

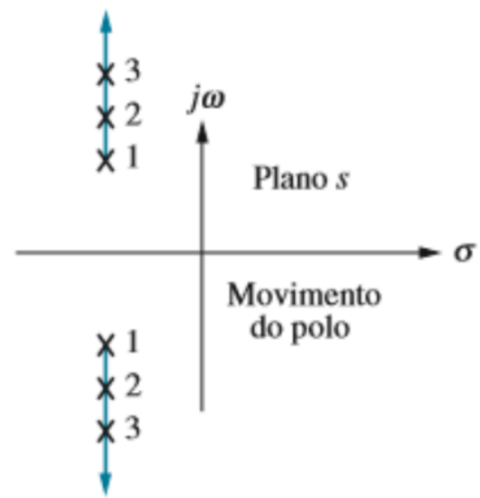
Analisando efeito da movimentação dos pólos na resposta de saída do sistema

Pólos subindo

- Frequência natural aumenta mas envoltória permanece a mesma (parte real constante).
- Tempo de assentamento permanece constante.
- A medida que o a ultrapassagem aumenta o tempo de pico diminui.

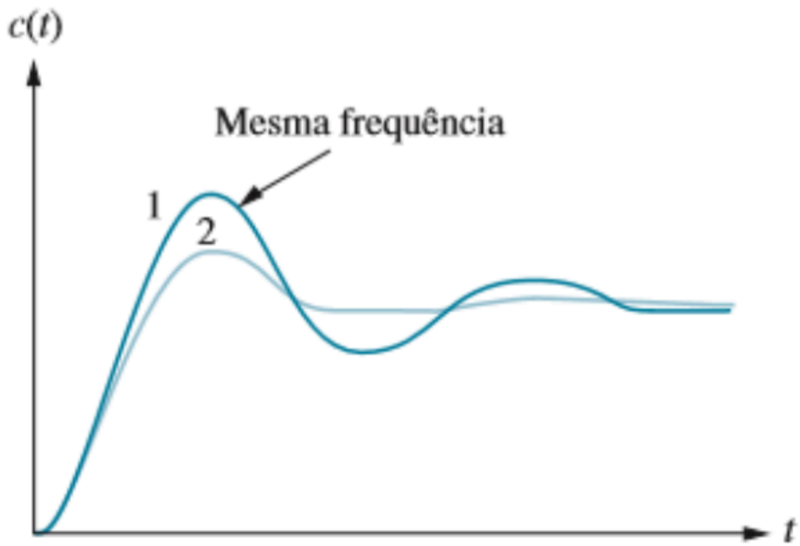


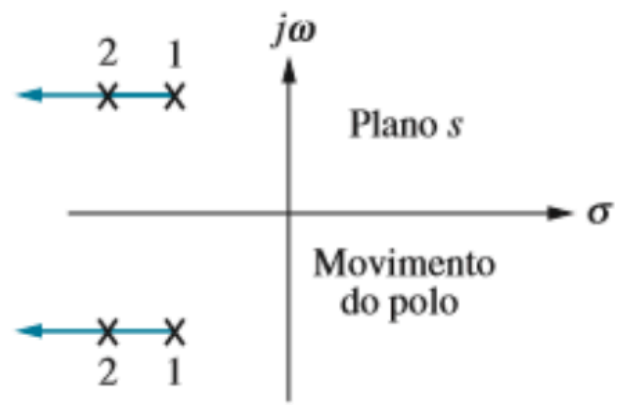
(a)



Pólos deslocando para esquerda

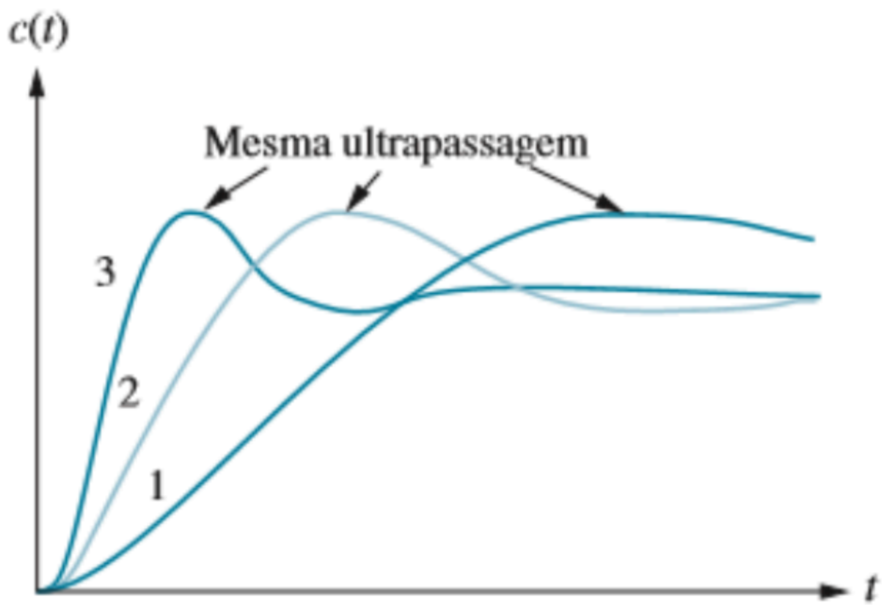
- Parte imaginária constante: frequência de oscilação constante
- Instante de pico permanece o mesmo.
- Amortecimento se torna mais rápido.

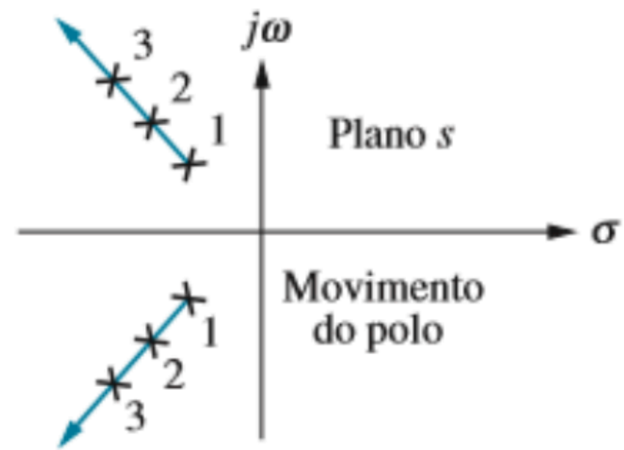




Pólos deslocando ao longo de uma linha radial

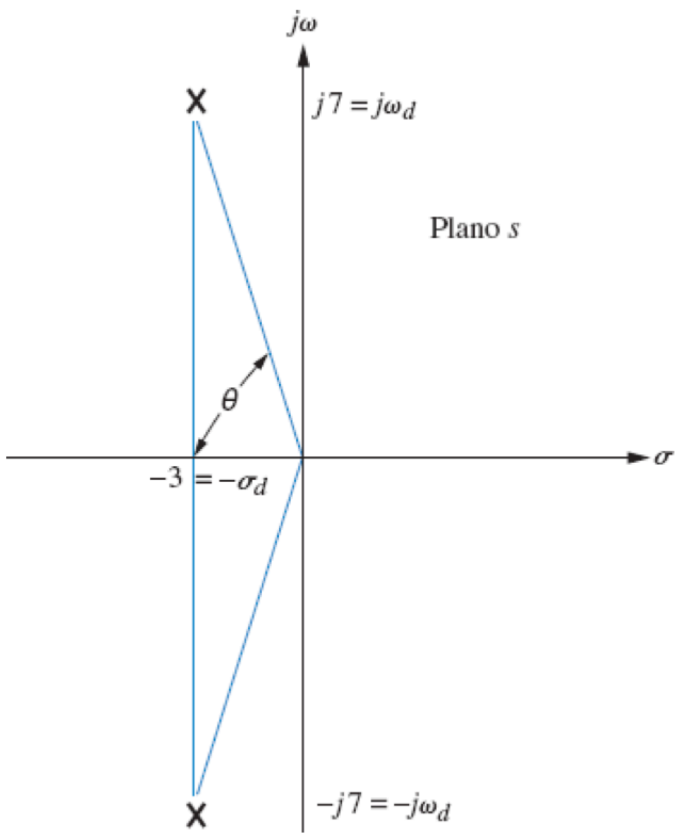
- Ultrapassagem percentual permanece a mesma
- Quanto mais longe da origem, mais rápida a resposta.





PROBLEMA: Dado o diagrama de polos mostrado na Figura 4.20, determine ζ, ω_n, T_p, $\%UP$ e T_s.

SOLUÇÃO: O fator de amortecimento é dado por $\zeta = \cos\theta = \cos[\text{arctg}\,(7/3)] = 0{,}394$. A frequência natural, ω_n, é a distância radial da origem ao polo, ou $\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7{,}616$. O instante de pico é



$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0{,}449 \text{ segundo}$$

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 26\,\%$$

$$T_s = \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1{,}333 \text{ segundo}$$

FIGURA 4.20 Diagrama de polos para o Exemplo 4.6.

```
% CapÌtulo 4: Resposta no DomÌnio do Tempo
%
% (ch4p1) Exemplo 4.6: Pode-se utilizar o MATLAB para calcular as
% caracterÌsticas de um sistema de segunda ordem, como a fator de amortecimento,
% z, a freq¸Íncia natural, wn, a ultrapassagem percentual, %UP, o tempo de
% acomodaÁ„o, Ts e o instante de pico, Tp. Seguem os comandos para a soluÁ„o
% do Exemplo 4.6 do texto.


'(ch4p1) Exemplo 4.6'                % Exibe o tÌtulo.
p1=[1 3+7*i];                        % Define o polinÙmio contendo o
                                     % primeiro polo.
p2=[1 3-7*i];                        % Define o polinÙmio contendo o
                                     % segundo polo.
deng=conv(p1,p2);                    % Multiplica os dois polinÙmios para
                                     % obter o polinÙmio de segunda ordem,
                                     % as^2+bs+c.
omegan=sqrt(deng(3)/deng(1))         % Calcula a frequÍncia
                                     % natural, sqrt(c/a).
zeta=(deng(2)/deng(1))/(2*omegan)    % Calcula o fator de
                                     % amortecimento, ((b/a)/2*wn).
Ts=4/(zeta*omegan)                   % Calcula o tempo de acomodaÁ„o,
                                     % (4/z*wn).
Tp=pi/(omegan*sqrt(1-zeta^2))        % Calcula o instante de
                                     %  pico, pi/wn*sqrt(1-z^2).
up=100*exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))
                                     % Calcula a ultrapassagem percentual,
                                     % (100*e^(-z*pi/sqrt(1-z^2)).
```

Command Window

```
>> teste

ans =

(ch4p1) Exemplo 4.6


omegan =

    7.6158


zeta =

    0.3939


Ts =

    1.3333


Tp =

    0.4488


up =

   26.0176
```

PROBLEMA: Determine ζ, ω_n, T_s, T_p, T_r e $\%UP$ para um sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{361}{s^2 + 16s + 361}.$$

RESPOSTAS:

$\zeta = 0{,}421$, $\omega_n = 19$, $T_s = 0{,}5$ s, $T_p = 0{,}182$ s, $T_r = 0{,}079$ s e $\%UP = 23{,}3\ \%$.

Use as seguintes instruções MATLAB para calcular as respostas do Exercício 4.5. As reticências significam que o código continua na linha seguinte.

```
numg=361;
deng=[1 16 361];
omegan=sqrt(deng(3).../deng(1))
zeta=(deng(2)/deng(1)).../(2* omegan)
Ts=4/(zeta* omegan)
Tp=pi/(omegan*sqrt...(1-zeta^2))
pos=100*exp(-zeta*...pi/sqrt(1-zeta^2))
Tr=(1.768*            zeta^3            -...0.417*
zeta^2+1.039*...zeta+1)/omegan
```

Resposta do Sistema com Polos Adicionais

As equações para cálculo de tempo de assentamento, ultrapassagem percentual e instante de pico foram deduzidas para sistemas com apenas 2 pólos e nenhum zero.

Se o sistema possuir mais de 2 pólos ou algum zero as **<u>expressões são inválidas</u>**.

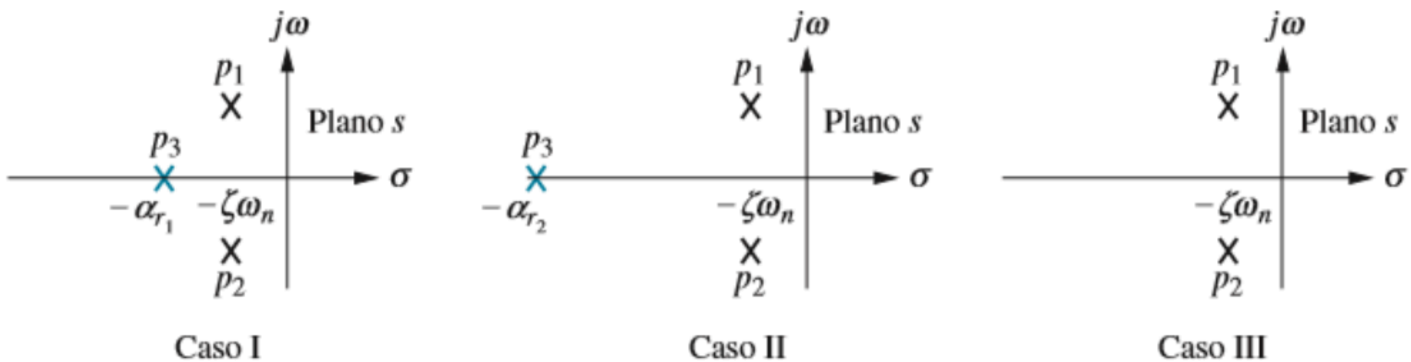
Contudo alguns sistemas com mais de 2 pólos e com zeros podem ser aproximados como sistemas de segunda ordem com ***dois pólos dominantes complexos***.

Aproximando um sistema com 3 pólos

Considere um sistema com 3 pólos recebendo uma entrada em degrau:

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+\zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s+\alpha_r}$$

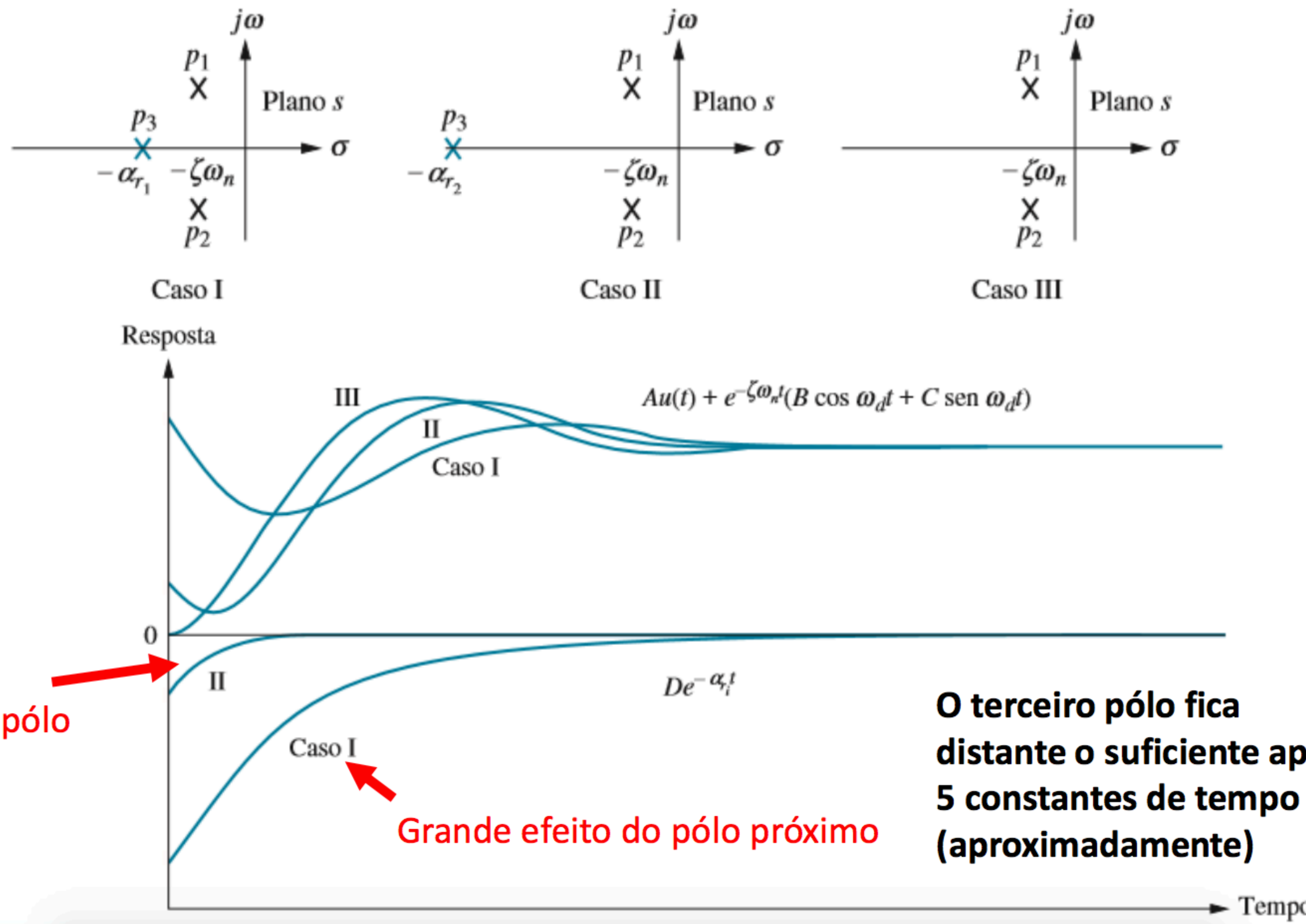
$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}(B\cos\omega_d t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_d t) + De^{-\alpha_r t}$$



Pólo 3 não muito distante dos pólos dominantes
Aproximação inválida

Pólo 3 distante dos pólos dominantes
Aproximação válida

Pólo 3 infinitamente distante dos pólos dominantes
Aproximação válida



Pequeno efeito do pólo distante

Grande efeito do pólo próximo

O terceiro pólo fica distante o suficiente após 5 constantes de tempo (aproximadamente)

Exemplo 4.8

Comparando Respostas de Sistemas com Três Polos

PROBLEMA: Obtenha a resposta ao degrau de cada uma das funções de transferência apresentadas nas Equações (4.62) até (4.64) e compare-as.

$$T_1(s) = \frac{24{,}542}{s^2 + 4s + 24{,}542} \tag{4.62}$$

$$T_2(s) = \frac{245{,}42}{(s+10)(s^2 + 4s + 24{,}542)} \tag{4.63}$$

$$T_3(s) = \frac{73{,}626}{(s+3)(s^2 + 4s + 24{,}542)} \tag{4.64}$$

SOLUÇÃO: A resposta ao degrau, $C_i(s)$, para a função de transferência, $T_i(s)$, pode ser obtida multiplicando a função de transferência por $1/s$, uma entrada em degrau; utilizando expansão em frações parciais, seguida pela transformada inversa de Laplace, podemos obter a resposta, $c_i(t)$. Com os detalhes deixados como exercício para o estudante, os resultados são

$$c_1(t) = 1 - 1{,}09e^{-2t}\cos(4{,}532t - 23{,}8^\circ) \tag{4.65}$$

$$c_2(t) = 1 - 0{,}29e^{-10t} - 1{,}189e^{-2t}\cos(4{,}532t - 53{,}34^\circ) \tag{4.66}$$

$$c_3(t) = 1 - 1{,}14e^{-3t} + 0{,}707e^{-2t}\cos(4{,}532t + 78{,}63^\circ) \tag{4.67}$$

As três respostas são representadas graficamente na Figura 4.24. Observe que $c_2(t)$, com seu terceiro polo em −10 e mais afastado dos polos dominantes, é a melhor aproximação de $c_1(t)$, a resposta do sistema de segunda ordem puro; $c_3(t)$, com um terceiro polo mais próximo dos polos dominantes, resulta no maior erro.

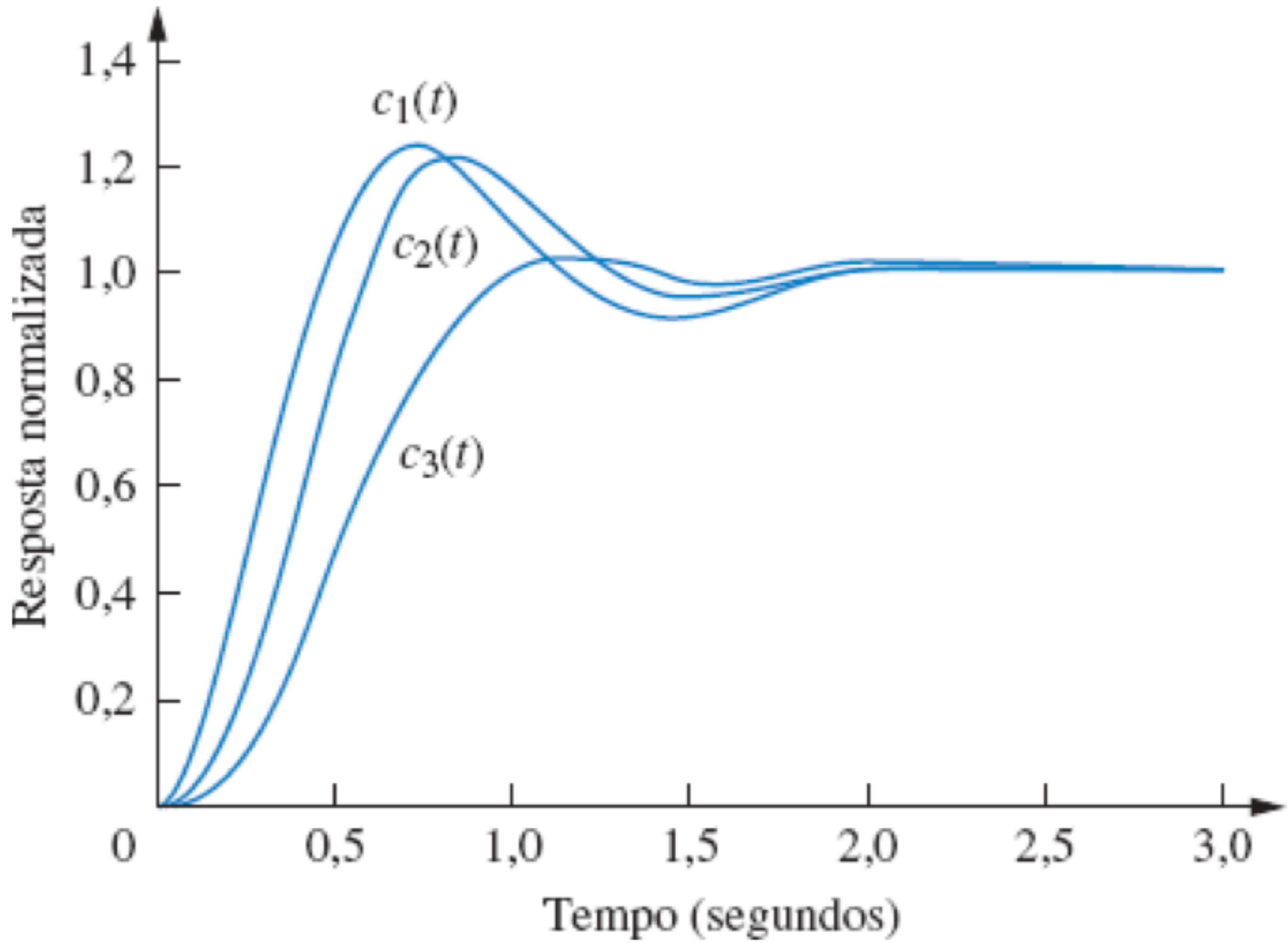


FIGURA 4.24 Respostas ao degrau do sistema $T_1(s)$, do sistema $T_2(s)$ e do sistema $T_3(s)$.

PROBLEMA: Determine a validade de uma aproximação de segunda ordem para cada uma dessas duas funções de transferência:

a. $$G(s) = \frac{700}{(s+15)(s^2+4s+100)}$$

b. $$G(s) = \frac{360}{(s+4)(s^2+2s+90)}$$

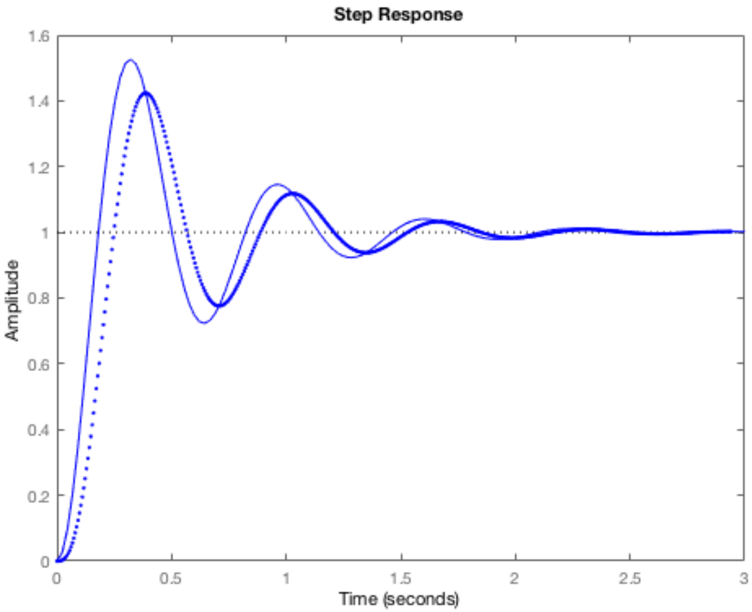
RESPOSTAS:

a. A aproximação de segunda ordem é válida.

b. A aproximação de segunda ordem não é válida.

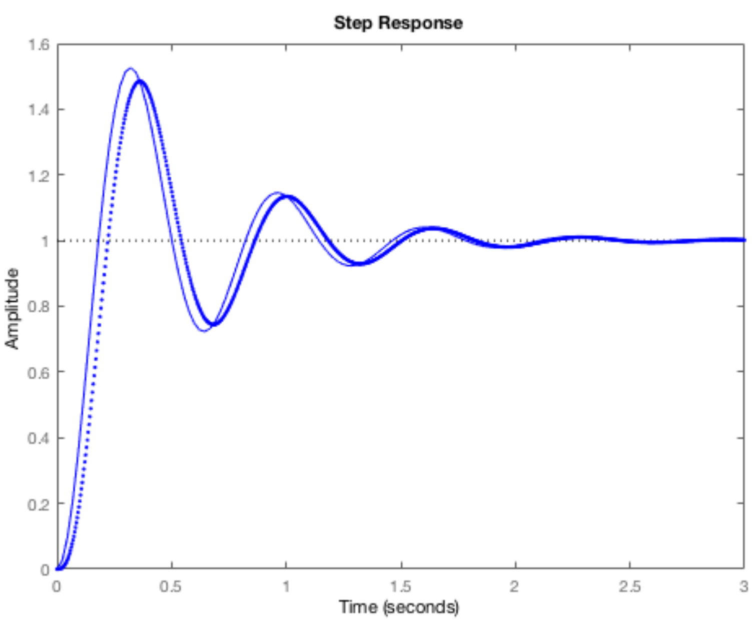
a. A aproximação de segunda ordem é válida, uma vez que os polos dominantes possuem uma parte real de –2 e o polo de ordem superior está posicionado em –15, isto é, mais de cinco vezes mais afastado.

b. A aproximação de segunda ordem não é válida, uma vez que os polos dominantes possuem uma parte real de –1 e o polo de ordem superior está posicionado em –4, isto é, um afastamento inferior a cinco vezes.



$$G(s) = \frac{700}{(s+15)(s^2+4s+100)}$$

```
a=15;
numga=100*a;
denga=conv([1 a],[1 4 100]);
Ta=tf(numga,denga);
numg=100;
deng=[1 4 100];
T=tf (numg,deng);
step(Ta,'.',T,'-')
```




```
a=25;
numga=100*a;
denga=conv([1 a],[1 4 100]);
Ta=tf(numga,denga);
numg=100;
deng=[1 4 100];
T=tf (numg,deng);
step(Ta,'.',T,'-')
```

os zeros de uma resposta afetam o resíduo, ou a amplitude, de uma componente da resposta, mas não afetam sua natureza – exponencial, senoide amortecida, e assim por diante

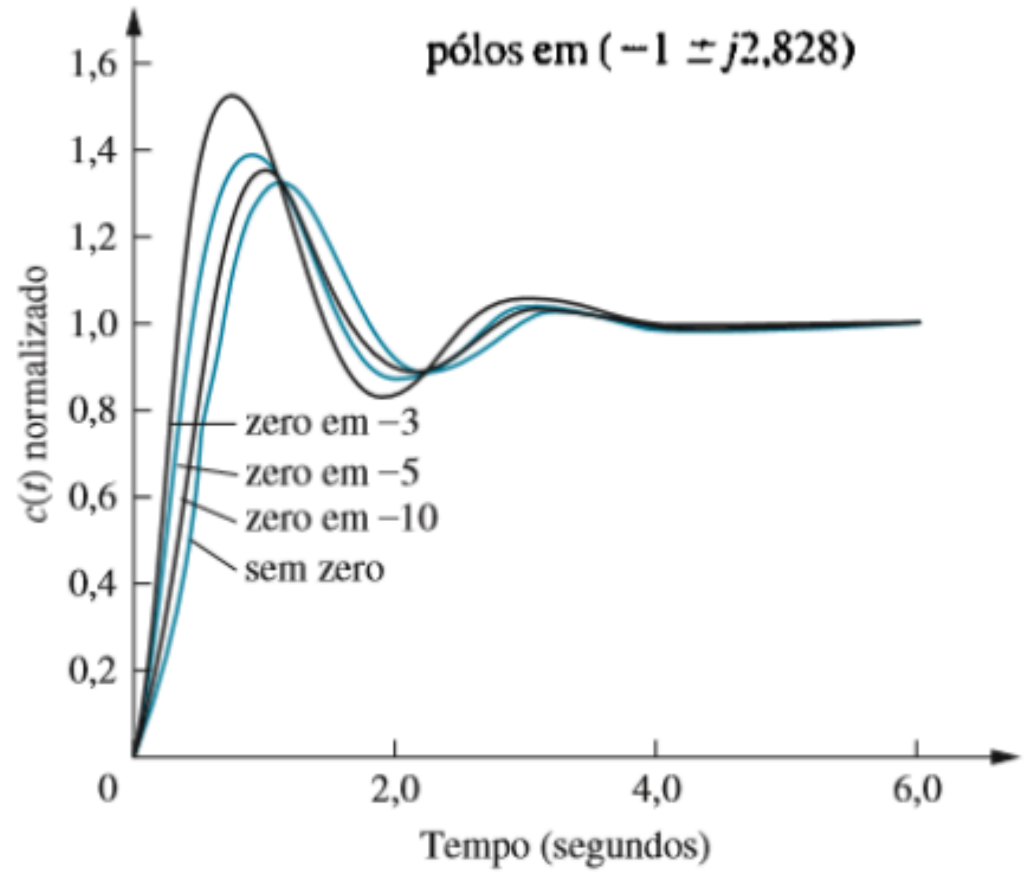
Estudando sistemas com 2 pólos e 1 zero

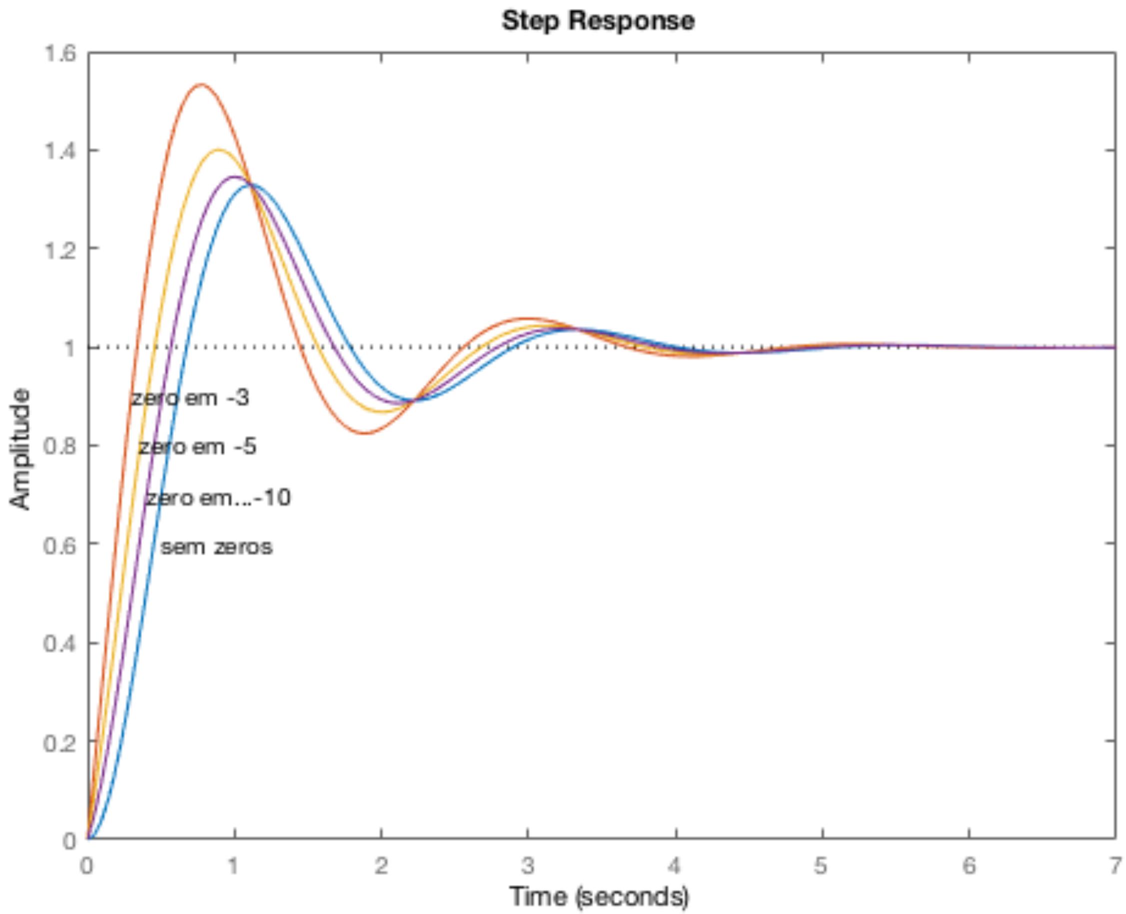
<u>1 zero no semiplano da esquerda:</u>

Testando zeros em -3, -5 e -10

- Quanto mais próximo o zero do pólo dominante, maior o efeito na resposta transitória.

- **Zero afastado →** resposta tende ao sistema com dois pólos e nenhum zero






```
deng=[1 2 9];
Ta=tf([1 3]*9/3,deng);
Tb=tf([1 5]*9/5,deng);
Tc=tf([1 10]*9/10,deng);
T=tf(9,deng);
step(T,Ta,Tb,Tc)
text(0.5,0.6,'sem zeros')
text(0.4,0.7,...
'zero em...-10')
text(0.35,0.8,...
'zero em -5')
text(0.3,0.9,'zero em -3')
```

Estudando sistemas com 2 pólos e 1 zero

<u>1 zero no semiplano da esquerda:</u>

A resposta de um sistema com um zero corresponde a duas componentes da resposta atual:

$$(s+a)C(s) = sC(s) + aC(s)$$

Derivada do sistema original

Sistema original com um ganho simples

- Se o zero for muito grande a resposta será uma escala da original: $aC(s)$
- Se o zero não for muito grande, a resposta terá uma componente adicional derivada:

$$(s+a)C(s) = sC(s) + aC(s)$$

Aumento na ultrapassagem percentual

Estudando sistemas com 2 pólos e 1 zero

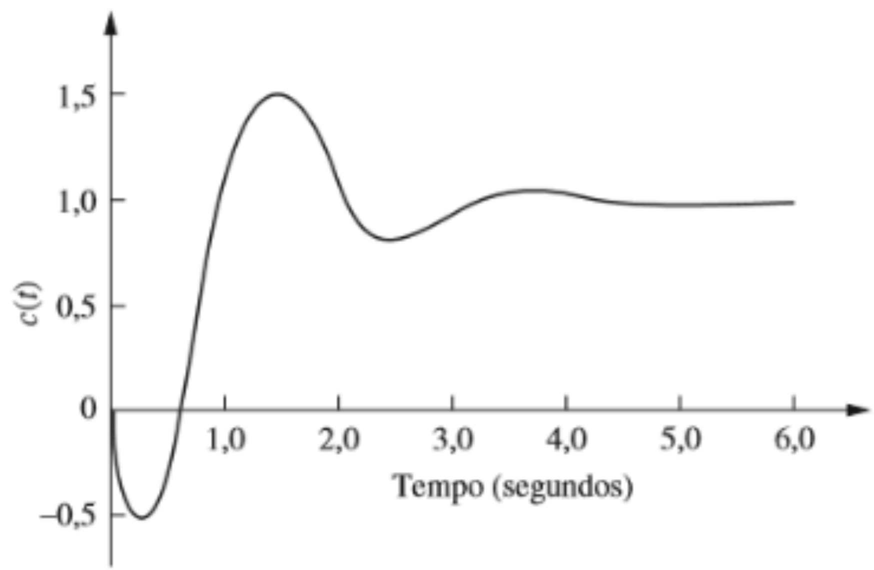
<u>1 zero no semiplano da direita:</u>

- Quando **“a” é negativo**

- Sistemas de **resposta não mínima**.

Exemplo:

Se uma **motocicleta** ou um **avião** forem de **fase não-mínima,** virarão inicialmente para a esquerda ao serem comandados para manobrar para a direita



Redução de Subsistemas Múltiplos

5

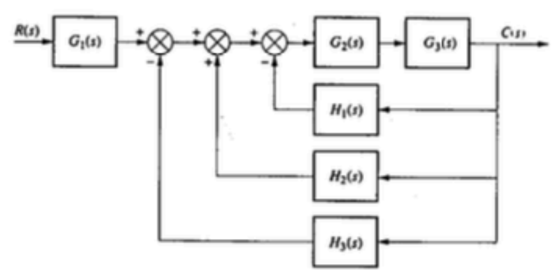
Sistemas mais complexos são representados pela interligação de muitos subsistemas.

Podemos calcular a resposta apenas de uma função de transferência simples.

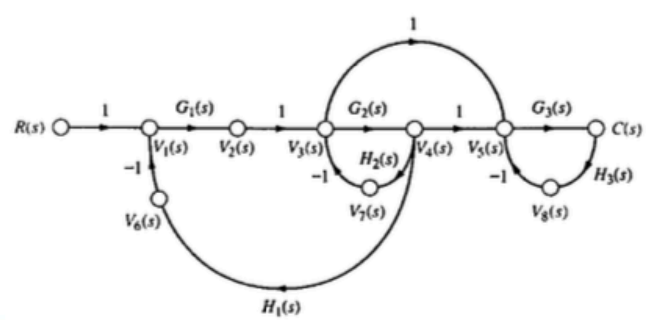
Desejamos representar os subsistemas múltiplos por meio de uma única função de transferência.

Representação de subsistemas múltiplos:

- Diagramas de blocos



- Diagramas de fluxo de sinal

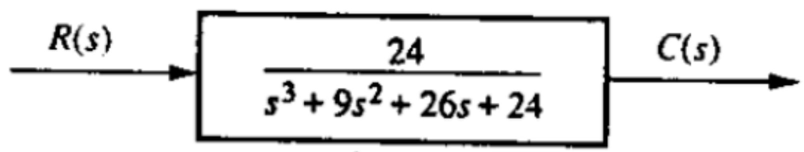


Redução de Subsistemas Múltiplos

5

Representação de subsistemas múltiplos:

- **Diagramas de blocos**
  - Análise e projeto no domínio da frequência
  - Álgebra de diagramas de blocos



- **Diagramas de fluxo de sinal**
  - Análise no espaço de estados
  - Representam funções de transferência por meio de linhas
  - Representam sinais por meio de pequenos círculos (nós)
  - Regra de Mason

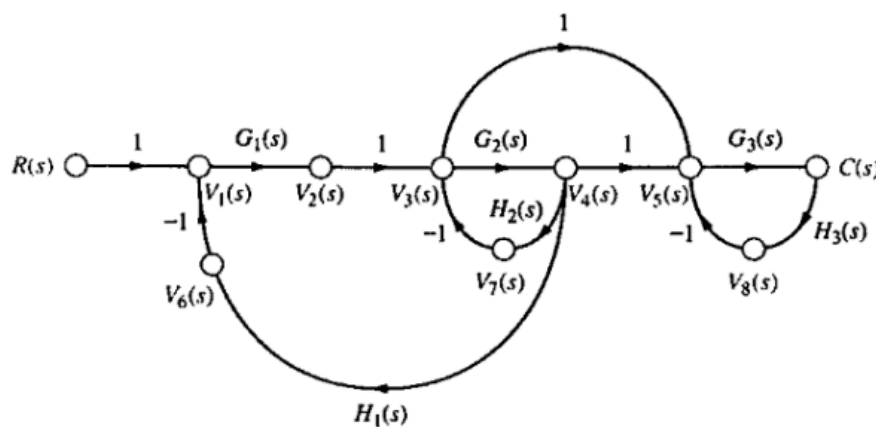
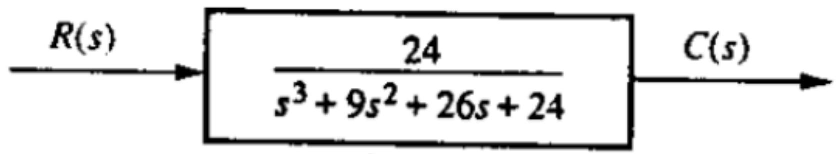


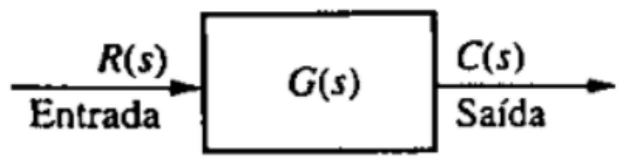
Diagrama de Blocos

Um subsistema é representado por um bloco com uma entrada, uma saída e uma função de transferência.

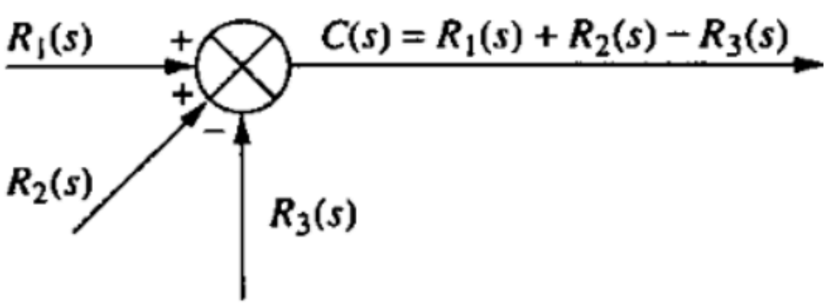


Ao se interligar subsistemas, devemos acrescentar ***junções de soma*** e ***pontos de coleta de sinal***

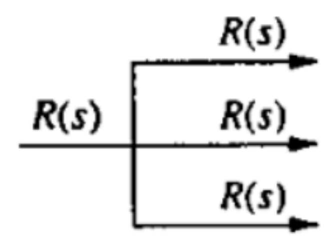
Sinais



Sistema



Junção somadora

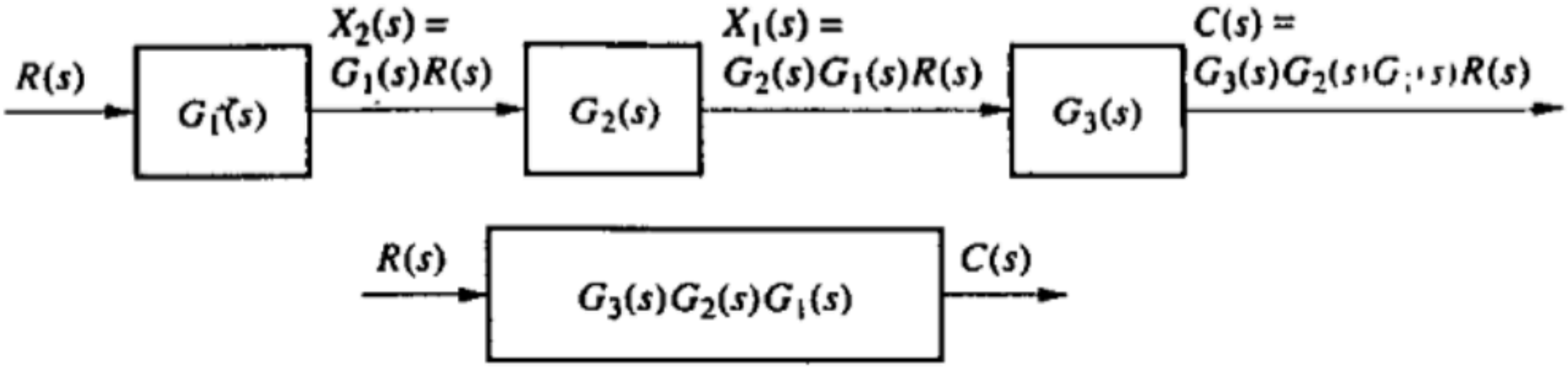


ponto de coleta de sinal

Ponto de distribuição de sinais

Diagrama de Blocos

Associação em Cascata



$$G_e(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)$$

Associação em Paralelo

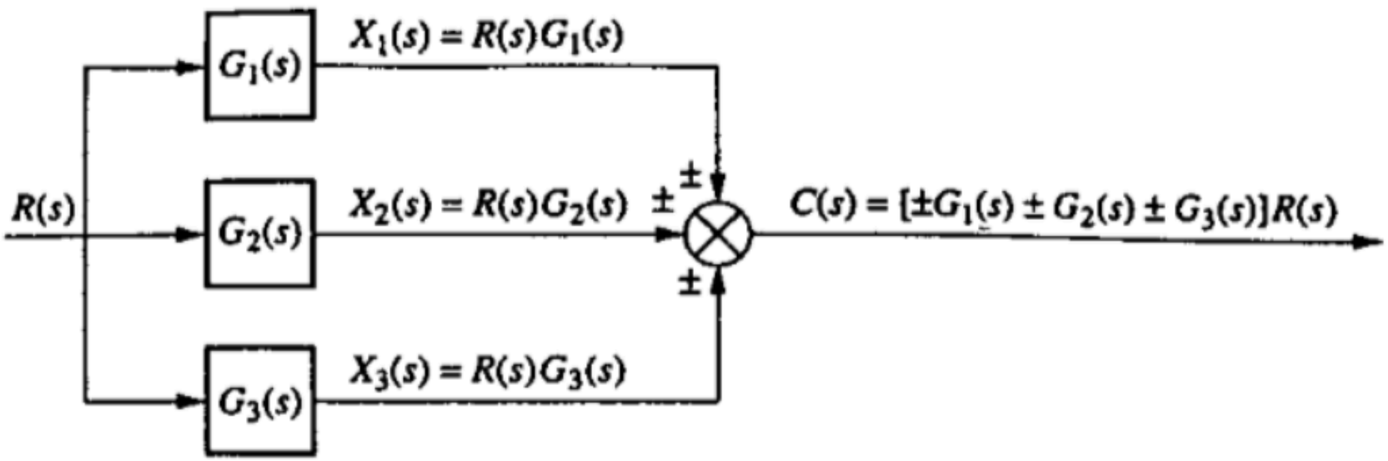
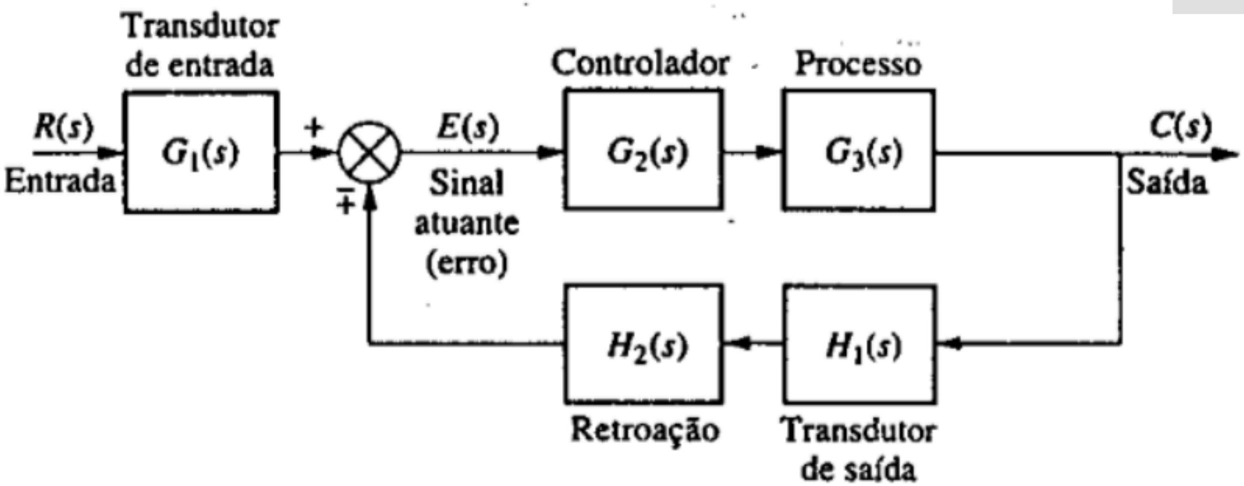
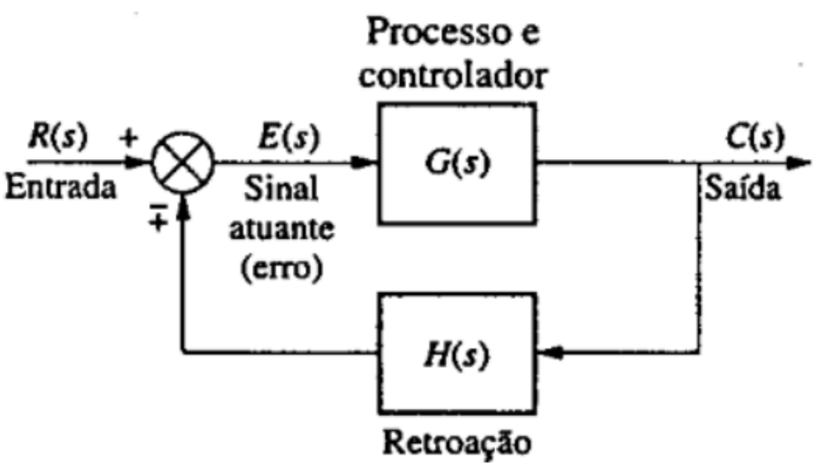


Diagrama de Blocos

Associação com Retroação **ou realimentação**

forma a base para o estudo da engenharia de sistemas de controle





Modelo simplificado

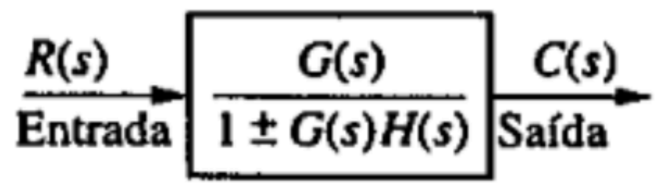
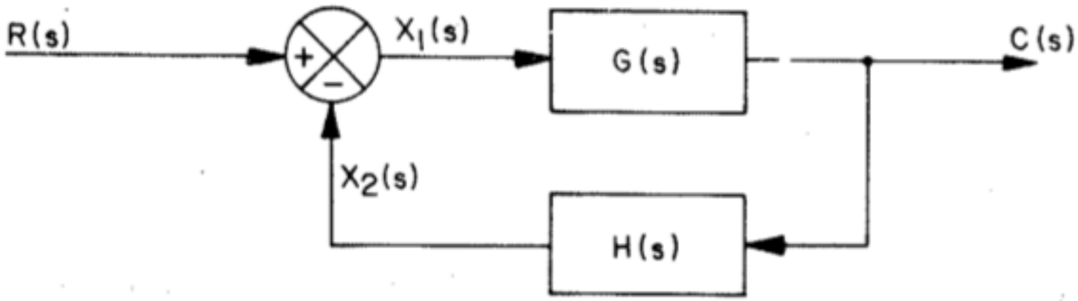


Diagrama de Blocos

Exemplo 2.9 Calcular a Função de Transferência do sistema desenhado abaixo, sendo a entrada R(s) e a saída C(s).



Sabendo que C(s) é a saída do bloco cuja Função de Transferência vale G(s), podemos escrever a seguinte expressão:

$$C(s) = X_1(s) \cdot G(s)$$

Conforme vimos anteriormente, podemos escrever a equação da saída do bloco detetor de erro em função das entradas, da seguinte maneira:

$$X_1(s) = R(s) - X_2(s)$$

Substituindo a equação anterior na equação de C(s), obtemos:

$$C(s) = G(s) \cdot (R(s) - X_2(s))$$

O sinal $X_2(s)$, na saída do bloco de realimentação, pode ser escrito através da seguinte equação:

$$X_2(s) = C(s) \cdot H(s)$$

Aplicando a equação anterior na equação de C(s), obtemos:

$$C(s) = G(s) \cdot (R(s) - C(s) \cdot H(s))$$

Diagrama de Blocos

Manipulando algebricamente a equação anterior, podemos calcular a Função de Transferência do sistema, conforme cálculos abaixo:

$$C(s) = G(s) \cdot R(s) - C(s) \cdot G(s) \cdot H(s)$$

$$C(s) + C(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = G(s) \cdot R(s)$$

$$C(s)\,(1 + G(s) \cdot H(s)) = G(s) \cdot R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

$$F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \qquad F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

possui malha com realimentação negativa, porque o comparador realiza uma operação de subtração.

Para $G(s) = \frac{3}{s(s+3)}$ e $H(s) = 2$, podemos calcular o valor da Função de Transferência Global do sistema, substituindo estes valores na expressão anterior, resultando:

$$F(s) = \frac{\frac{3}{s(s+3)}}{1 + \frac{3}{s(s+3)} \cdot 2}$$

Quando H = 1, diz-se que o sistema possui malha com realimentação unitária, e quando H = 0, diz-se que o sistema é de malha aberta

Multiplicando-se os dois termos da fração por s(s+3), obtemos:

$$F(s) = \frac{3}{s(s+3)+6} \qquad \text{Resultando:} \qquad F(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 6}$$

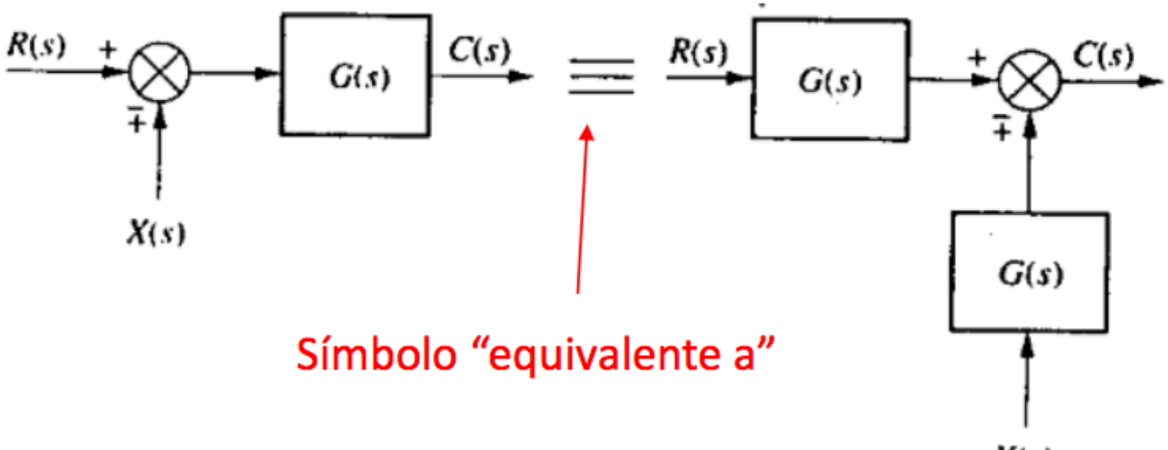
Diagrama de Blocos

Movendo Blocos para Criar Formas Conhecidas

As formas comuns (cascata, paralela e retroação) nem sempre ocorrem de modo evidente.

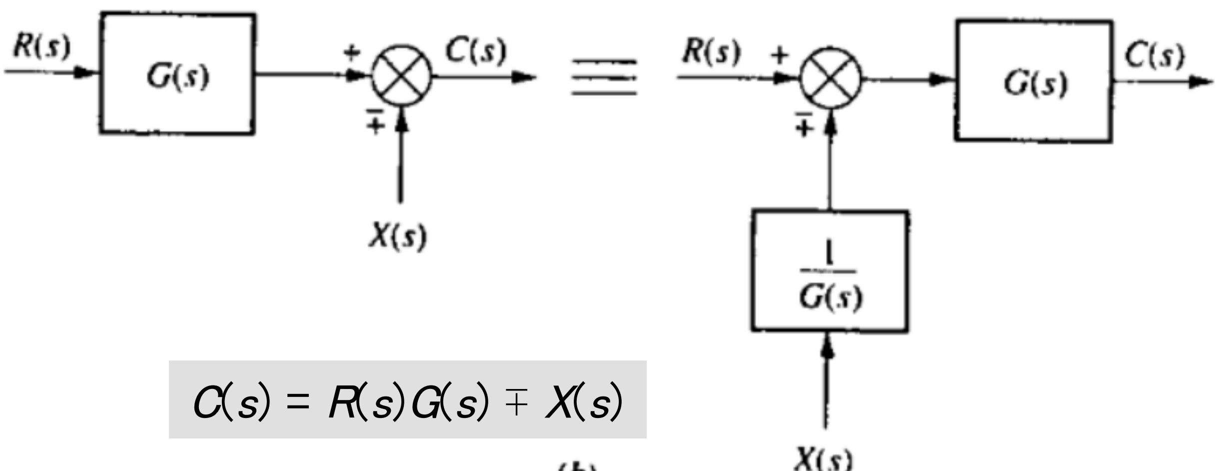
Junção somadora

$$C(s) = R(s)G(s) \mp X(s)G(s)$$



(a)

Deslocamento para a esquerda da junção somadora



$$C(s) = R(s)G(s) \mp X(s)$$

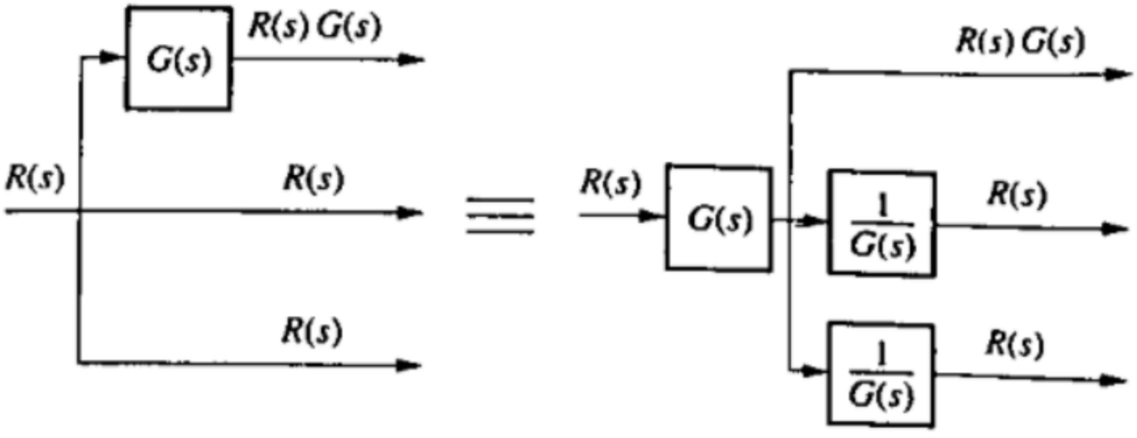
(b)

Deslocamento para a direita da junção somadora

Diagrama de Blocos

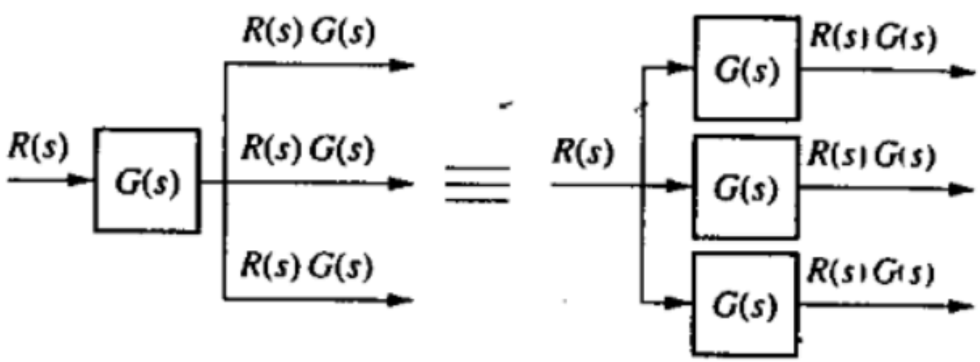
Movendo Blocos para Criar Formas Conhecidas

Ponto de coleta de sinal



(a)

Deslocamento para a esquerda do ponto de coleta de sinal



(b)

Deslocamento para a direita do ponto de coleta de sinal

Diagrama de Blocos

PROBLEMA: Reduza o diagrama de blocos mostrado na Figura 5.9 a uma única função de transferência.

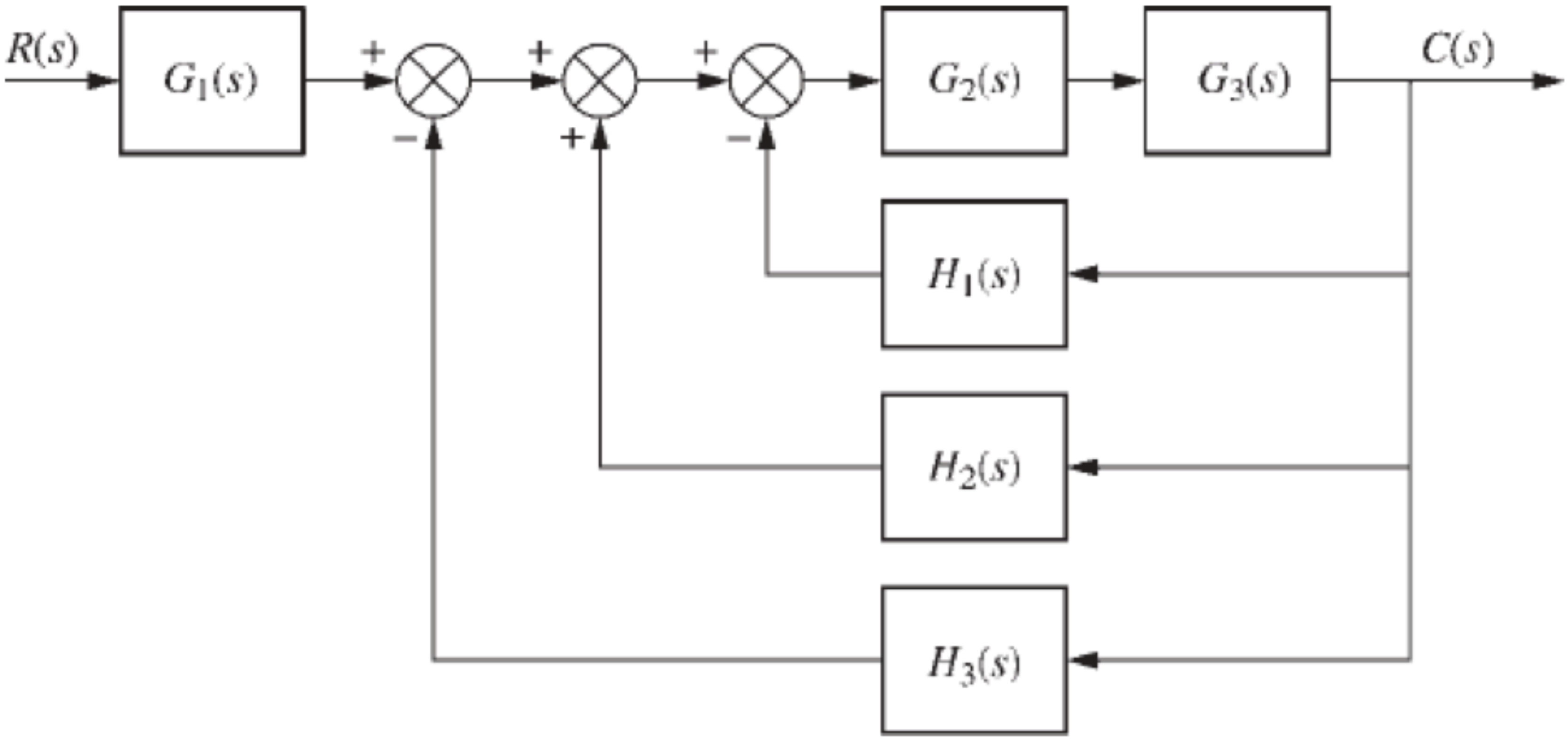
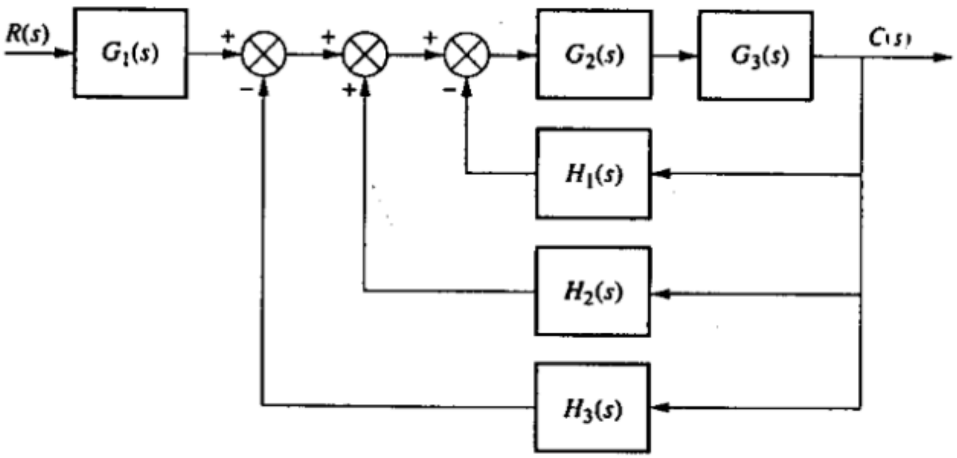
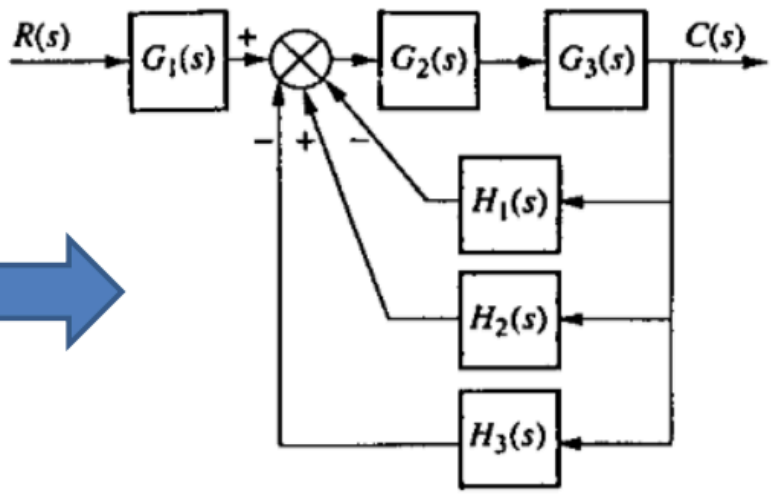
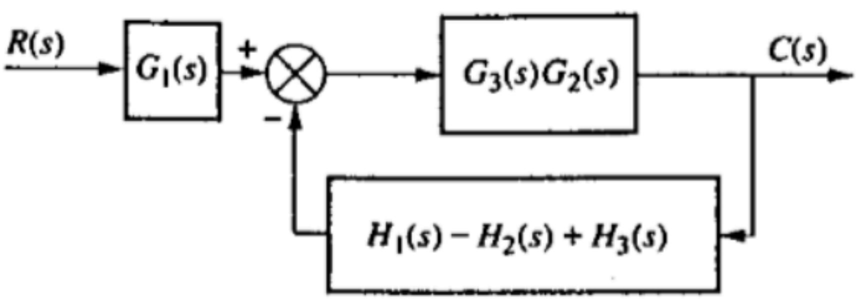


Diagrama de Blocos





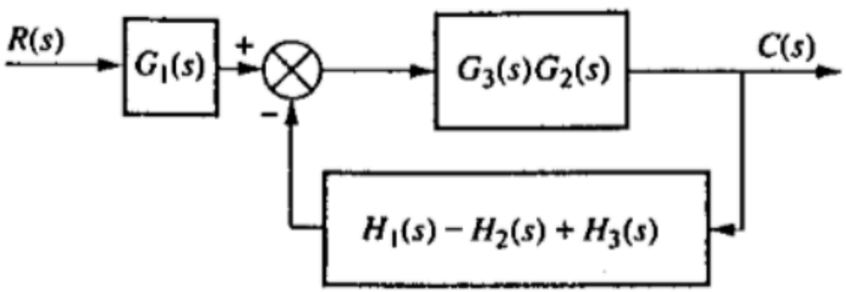
Fundir as três junções de soma em uma única

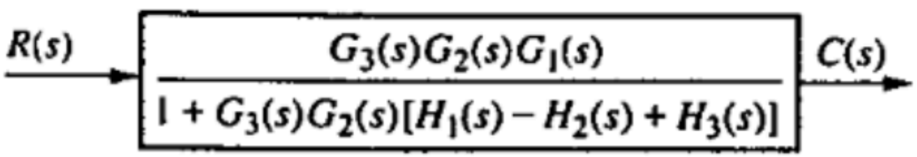


As três funções de retroação estão conectadas em paralelo.

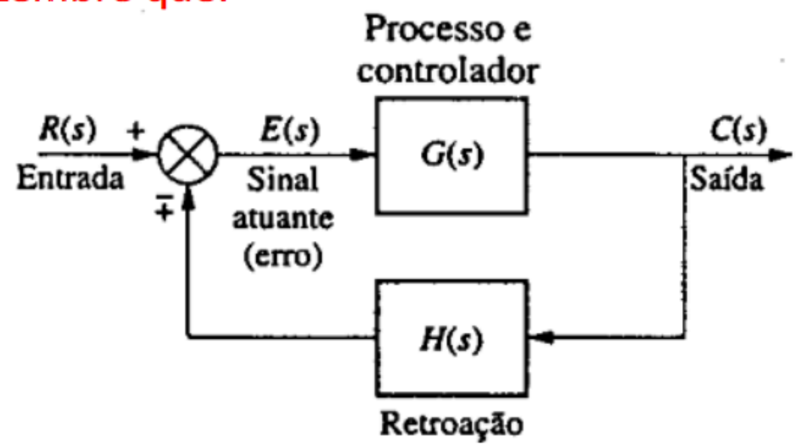
G2(s) e G3(s) estão conectadas em cascata

Diagrama de Blocos

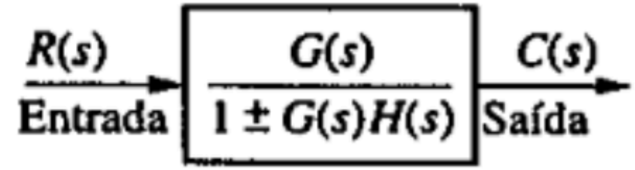




Lembre que:



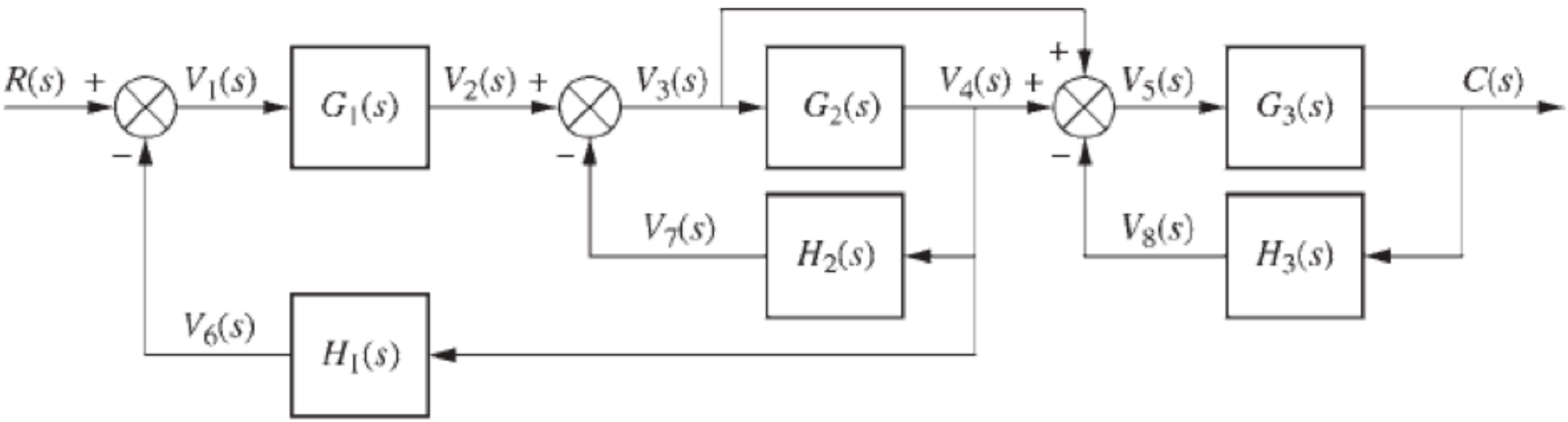
É equivalente a:



O sistema com retroação é reduzido e multiplicado por G1(s)

Diagrama de Blocos

PROBLEMA: Reduza o sistema mostrado na Figura 5.11 a uma única função de transferência.



SOLUÇÃO: Primeiro, mova $G_2(s)$ para a esquerda passando o ponto de ramificação para criar subsistemas paralelos e reduzir o sistema com realimentação consistindo em $G_3(s)$ e $H_3(s)$.

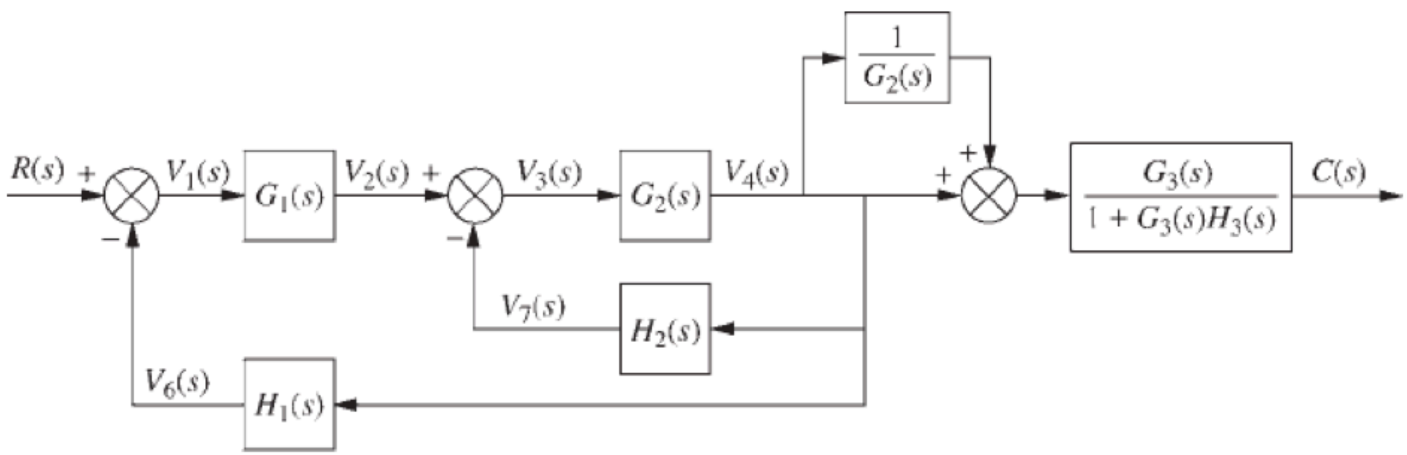


Diagrama de Blocos

Segundo, reduza o par paralelo consistindo em $1/G_2(s)$ e a unidade, e mova $G_1(s)$ para a direita passando a junção de soma, criando subsistemas paralelos na realimentação.

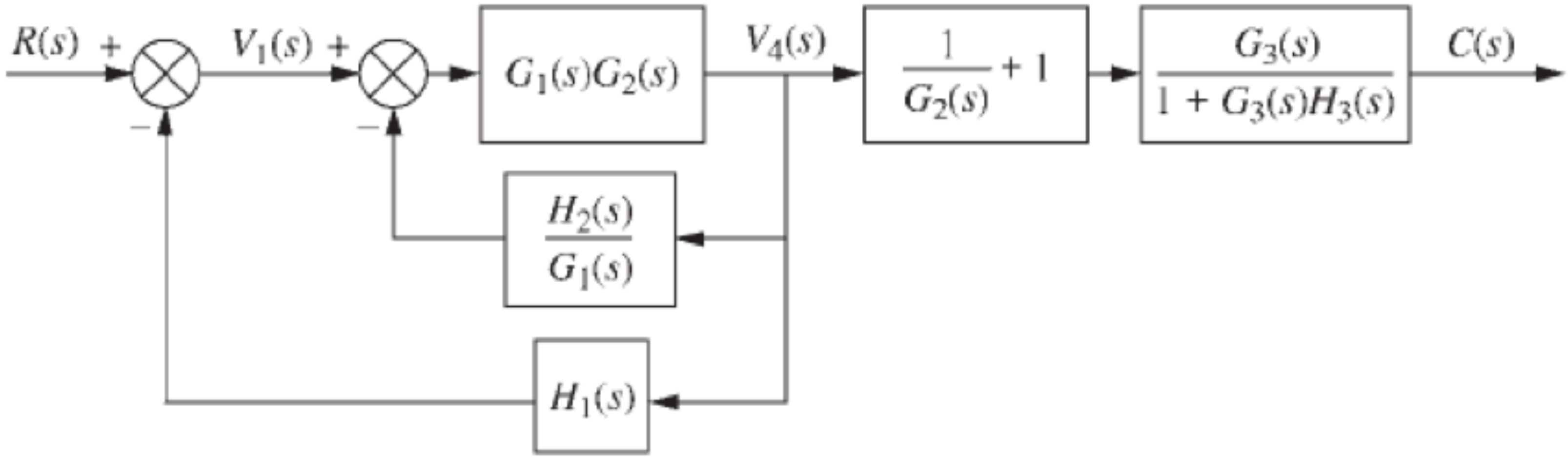
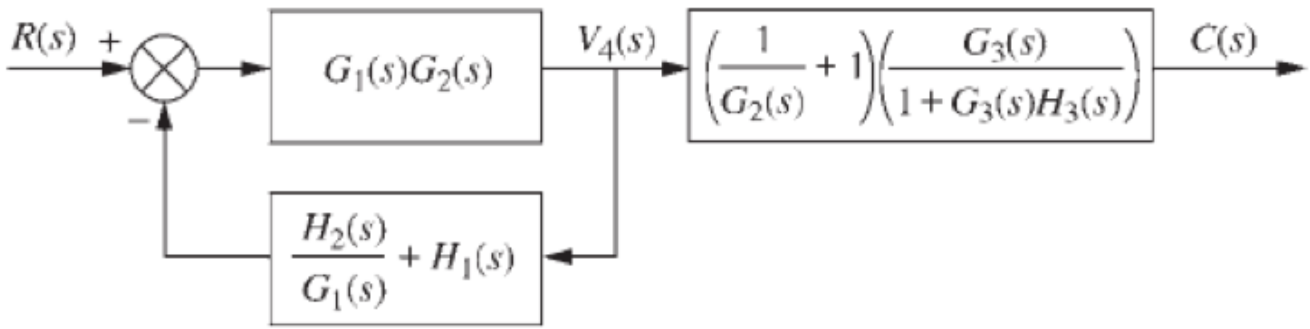
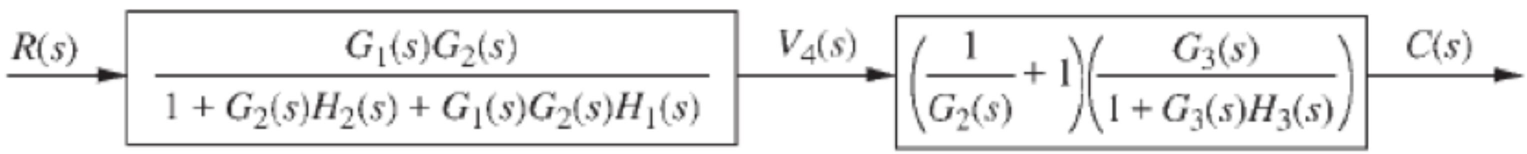


Diagrama de Blocos

Terceiro, combine as junções de soma, some os dois elementos de realimentação e combine os dois últimos blocos em cascata.



Quarto, utilize a fórmula da realimentação



Finalmente, multiplique os dois blocos em cascata

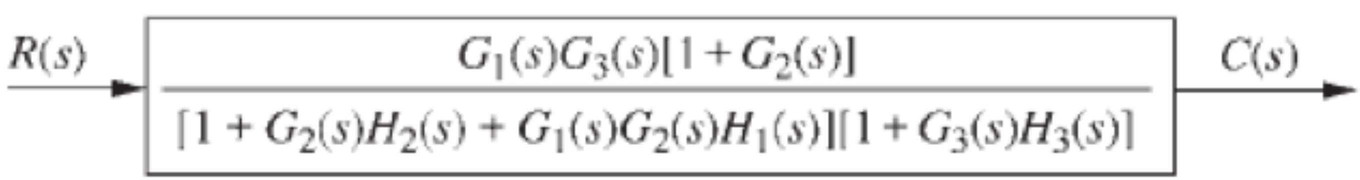
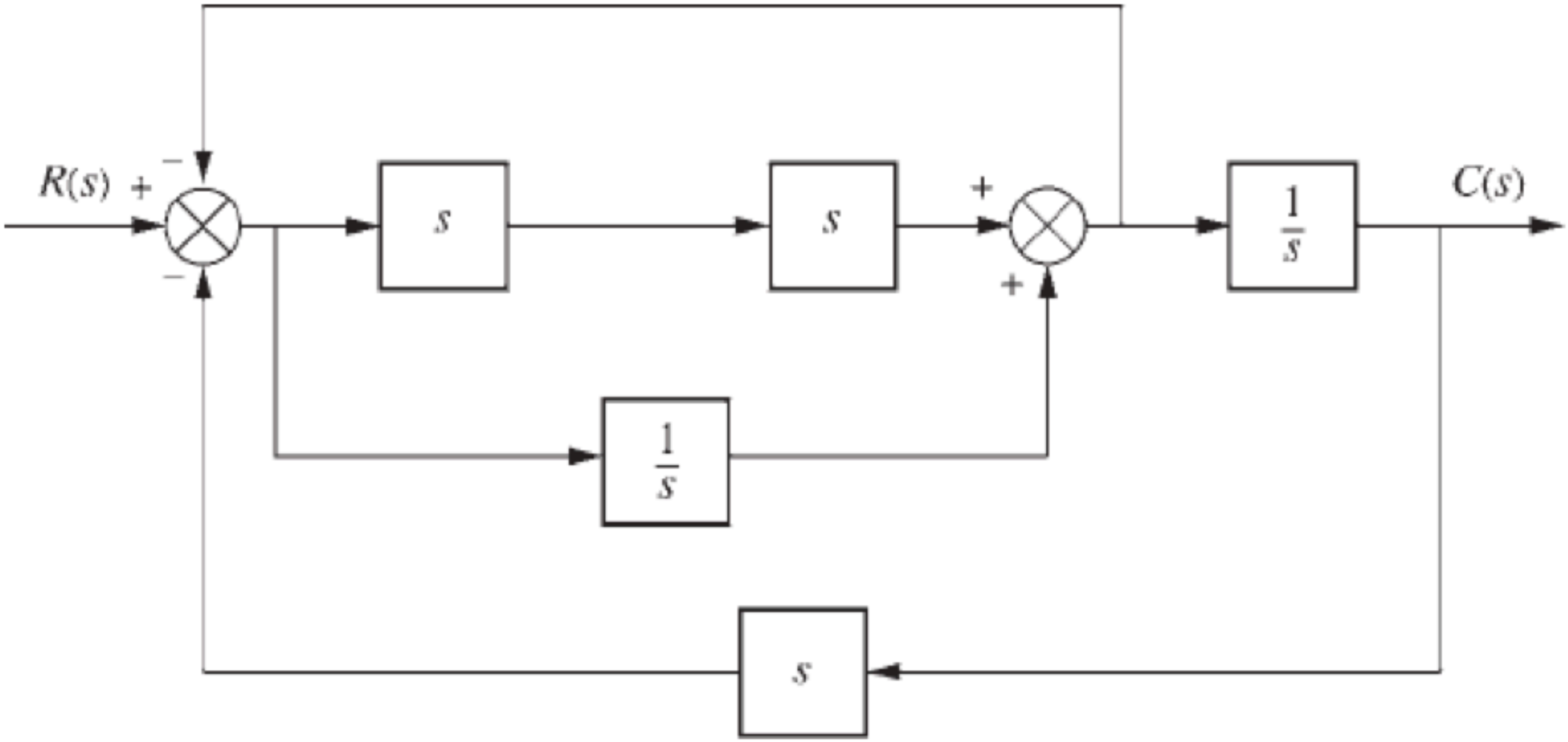


Diagrama de Blocos

PROBLEMA: Obtenha a função de transferência equivalente, $T(s) = C(s)/R(s)$, para o sistema mostrado na Figura 5.13.

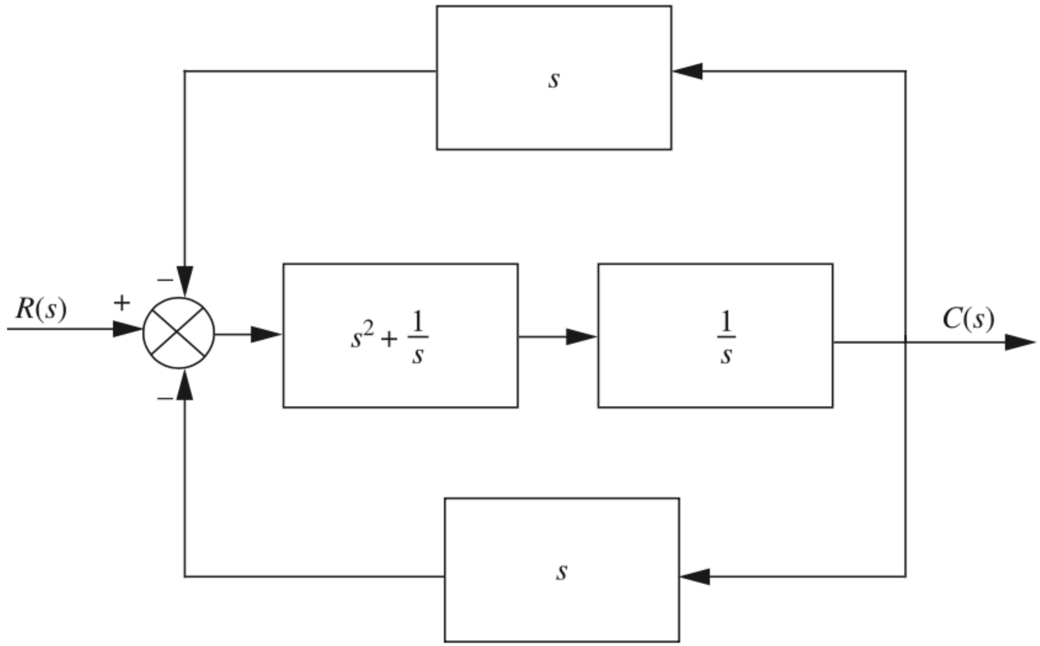


RESPOSTA:

$$T(s) = \frac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$$

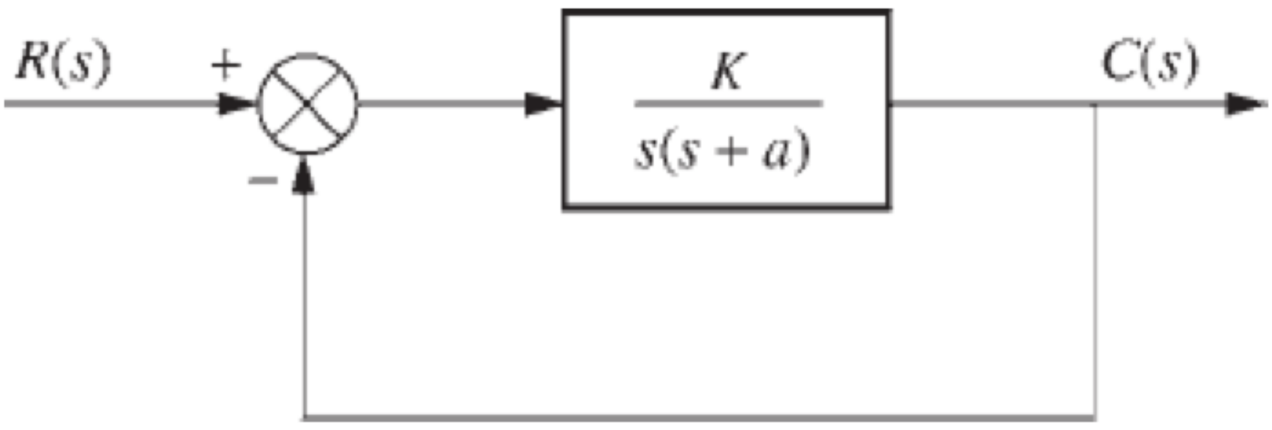
Diagrama de Blocos

Combine os blocos em paralelo no caminho direto. Em seguida, desloque $\frac{1}{s}$ para a esquerda passando o ponto de coleta de sinal.



Combine os caminhos de realimentação em paralelo e estabeleça dois blocos s. Em seguida, aplique a fórmula de realimentação, simplifique e obtenha $T(s) = \dfrac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$.

Análise e o projeto de sistemas com realimentação que possam ser reduzidos a sistemas de segunda ordem



$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

À medida que *K* varia, os polos se movem através das três faixas de operação de um sistema de segunda ordem: superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido

Análise e o projeto de sistemas com realimentação que possam ser reduzidos a sistemas de segunda ordem

para *K* entre 0 e $a^2/4$, os polos do sistema são reais e estão localizados em

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4K}}{2}$$

À medida que *K* aumenta, os polos se movem ao longo do eixo real e o sistema permanece superamortecido até $K = a^2/4$. Neste ganho, os polos são reais e iguais, e o sistema é **criticamente amortecido**.

Para ganhos acima de $a^2/4$, o sistema é **subamortecido**, com polos complexos

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{\sqrt{4K - a^2}}{2}$$

À medida que *K* aumenta, a parte real permanece constante e a parte imaginária aumenta. Assim, o instante de pico diminui e a ultrapassagem percentual aumenta, enquanto o tempo de acomodação permanece constante

PROBLEMA: Para o sistema mostrado na Figura 5.15, obtenha o instante de pico, a ultrapassagem percentual e o tempo de acomodação.

SOLUÇÃO: A função de transferência em malha fechada obtida a partir da Equação (5.9) é

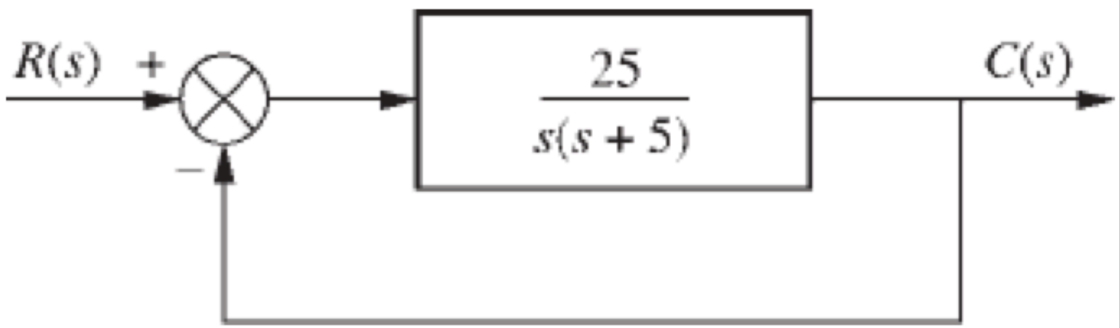


FIGURA 5.15 Sistema com realimentação para o Exemplo 5.3.

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + K}$$

$$2\zeta\omega_n = 5$$

e

$$\omega_n = \sqrt{K}$$

Assim,

$$\zeta = \frac{5}{2\sqrt{K}}$$

Uma vez que a ultrapassagem é função apenas de ζ, mostra que a ultrapassagem percentual é uma função apenas de *K*. Uma ultrapassagem de 10 % implica que ζ = 0,591. Substituindo este valor para o fator de amortecimento resolvendo para *K,* temos **K = 17,9**

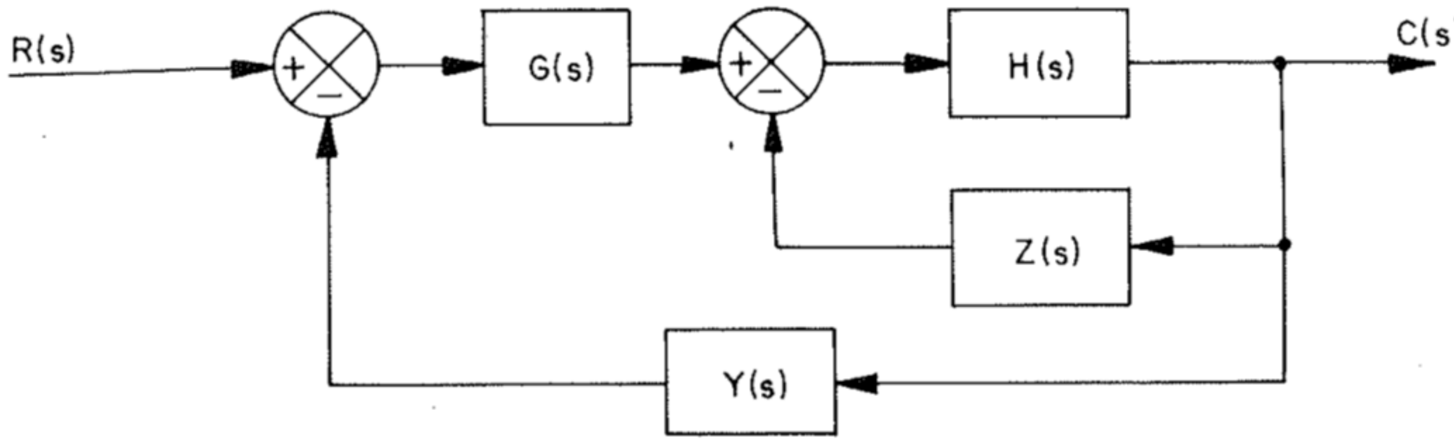
PROBLEMA: Para um sistema de controle com realimentação unitária com uma função de transferência do caminho à frente $G(s) = \frac{16}{s(s+a)}$, projete o valor de a para produzir uma resposta ao degrau em malha fechada que tenha 5 % de ultrapassagem.

RESPOSTA:

$$a = 5{,}52$$

Obtenha a função de transferência em malha fechada $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{16}{s^2+as+16}$, em que $G(s) = \frac{16}{s(s+a)}$ e $H(s) = 1$. Assim, $\omega_n = 4$ e $2\zeta\omega_n = a$, de onde se obtém $\zeta = \frac{a}{8}$. Porém, para 5 % de ultrapassagem, $\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%\mathrm{SP}}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%\mathrm{SP}}{100}\right)}} = 0{,}69$. Como $\zeta = \frac{a}{8}$, $a = 5{,}52$.

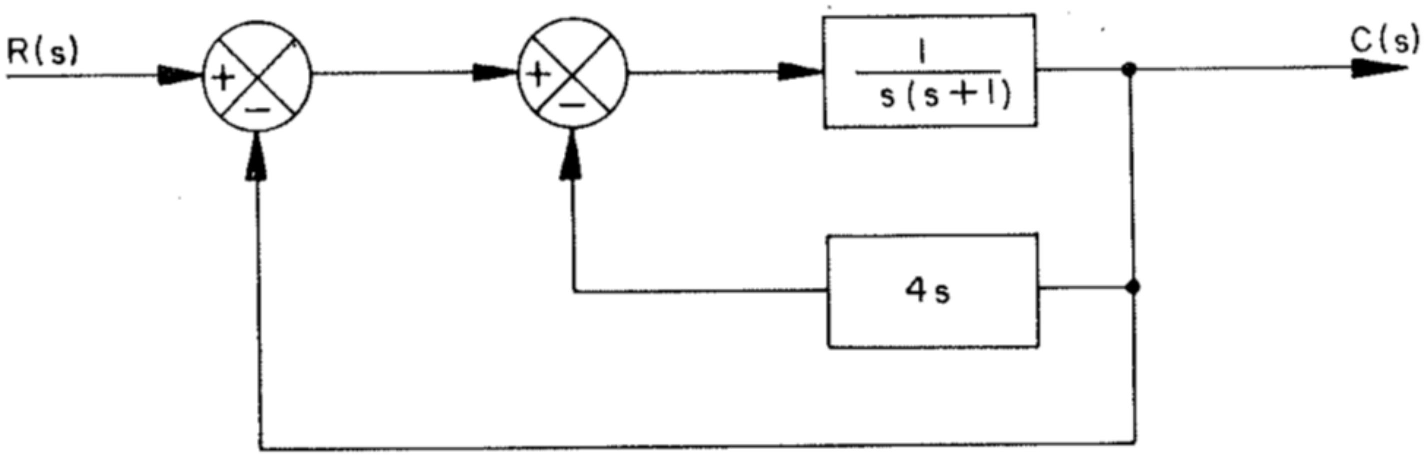
Calcular a Função de Transferência do sistema desenhado a seguir, sendo a entrada R(s) e a saída C(s).



Resposta:

$$F(s) = \frac{H(s)\ .\ G(s)}{1 + Z(s).H(s) + Y(s).G(s).H(s)}$$

Calcular a Função de Transferência do sistema desenhado abaixo, determinar o polinômio característico, a ordem, os zeros e os pólos, sendo a entrada R(s) e a saída C(s).



Resposta

$$F(s) = \frac{1}{s^2+5s+1}$$

$$Q(s) = s^2 + 5s + 1$$

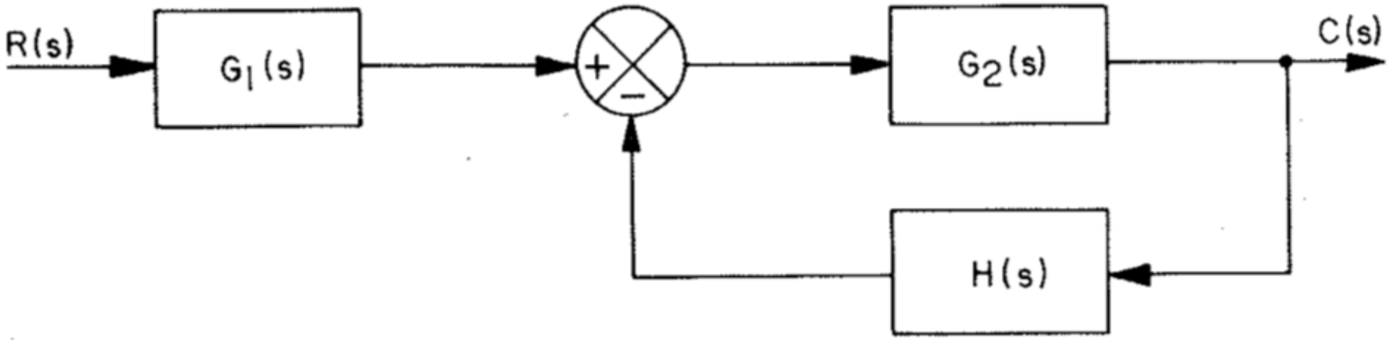
Ordem: 2ª

zero : $\nexists$

pólos: $s_1 = -0,2087$

$s_2 = -4,7913$

Calcular a Função de Transferência do sistema desenhado abaixo, determinar o polinômio característico, a ordem, os zeros e os pólos, sendo a entrada R(s) e a saída C(s).



$G_1(s) = 3s$ $\quad G_2(s) = \dfrac{10}{s+4}$ $\quad H(s) = \dfrac{5}{s+6}$

Resposta

$$F(s) = \frac{30s^2 + 180s}{s^2+10s+74}$$

$$Q(s) = s^2 + 10s + 74$$

Ordem: 2ª

zeros: $s_1 = 0$, $s_2 = -6$

pólos: $s_2 = -5+7i$, $s_2 = -5-7i$

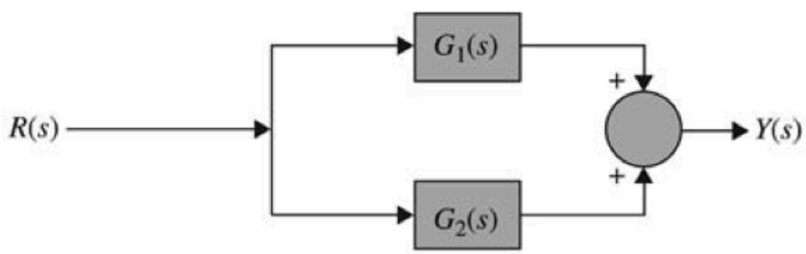
Diagrama de Blocos

Considere as seguintes funções de transferência, que correspondem aos diagramas de blocos

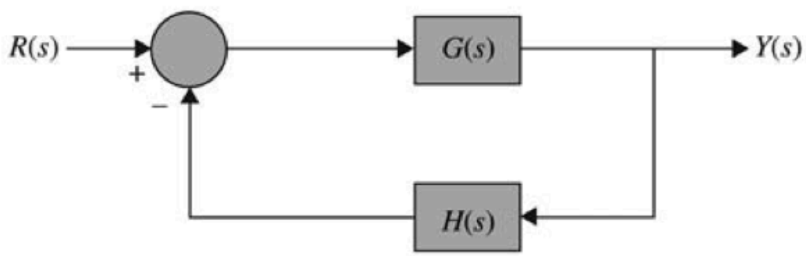
$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad H(s) = 10$$

Utilize o MATLAB para obter a função de transferência Y(s)/R(s) para cada caso

(a)



(b)



(c)

Diagrama de Blocos

Caso (a) Utilize o programa MATLAB para obter $G_1 * G_2$.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+2)}$$

Procedimento 1

```
>> clear all
>> s = tf('s');
>> G1=1/(s+1)

Transfer function:
 1
---
s + 1

>> G2=(s+1)/(s+2)

Transfer function:
```

Procedimento 2

```
>> clear all
>> G1=tf([1],[1 1])

Transfer function:
  1
---
s + 1

 >> G2=tf([1 1],[1 2])

Transfer function:
s + 1
```

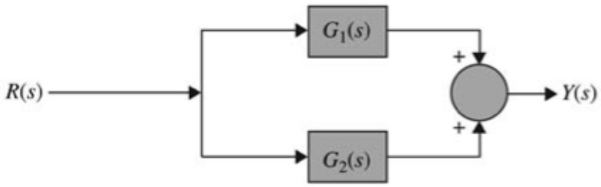
Diagrama de Blocos

```
s + 1
---
s + 2
>> YR=G1*G2

Transfer function:

    s + 1
-------------
s^2 + 3 s + 2

>> YR_simple=minreal(YR)

Transfer function:
 1
---
s + 2
```

```
---
s + 2

>> YR=G1*G2

Transfer function:
    s + 1
-------------
s^2 + 3 s + 2

>> YR_simple=minreal(YR)

Transfer function:
 1
---
s + 2
```

Utilize a função “minreal(YR)” para o cancelamento de polos e zeros, se necessário
De forma alternativa, utilize “YR=series(G1,G2)” em substituição a “YR=G1*G2”

Caso (b) Utilize o programa MATLAB para obter $G_1 + G_2$.



(b)

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s+1}{s+2},$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2(s+1{,}5)}{(s+1)(s+2)}$$

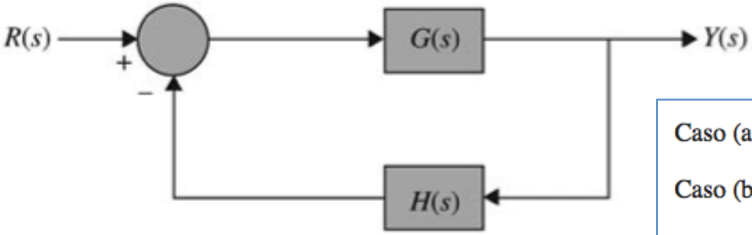
Procedimento 1

```
>> clear all
>> s = tf(‘s’);
>> G=1/(s+1)

Transfer function:
 1
---
s + 1

>> G2 = (s+1)/(s+2)

Transfer function:
s + 1
-----
s + 2

>> YR=G1+G2

Transfer function:
s^2 + 3 s + 3
-------------
s^2 + 3 s + 2

>> YR=parallel(G1,G2)

Transfer function:
s^2 + 3 s + 3
-------------
s^2 + 3 s + 2
```

Procedimento 2

```
>> clear all
>> G1=tf([1],[1 1])

Transfer function:
  1
 ---
s + 1

>> G2=tf([1 1],[1 2])

Transfer function:
s + 1
-----
s + 2

>> YR=G1+G2

Transfer function:
s^2 + 3 s + 3
-------------
s^2 + 3 s + 2

>> YR=parallel(G1,G2)

Transfer function:
s^2 + 3 s + 3
 -------------
s^2 + 3 s + 2
```

Utilize a função “minreal(YR)” para o cancelamento de polos e zeros, se necessário
De forma alternativa, utilize “YR=parallel(G1,G2)” em substituição a “YR=G1+G2”



(c)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad H(s) = 10$$

Caso (a) Utilize o programa MATLAB para obter a função de realimentação da malha fechada $\frac{G}{1+GH}$

Caso (b) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+s+10}$

Procedimento 1

```
>> clear YR
>> s = tf('s');
>> G=1/(s*(s+1))

Transfer function:
   1
 -----
s^2 + s

>> H=10

H =

   10

>> YR=G/(1+G*H)

Transfer function:
          s^2 + s
----------------------
s^4 + 2 s^3 + 11 s^2 + 10 s

>> YR_simple=minreal(YR)

Transfer function:
     1
----------
s^2 + s + 10
```

Procedimento 2

```
>> clear all
>> G=tf([1],[1 1 0])

Transfer function:
   1
-----
s^2 + s

>> H=10

H =

   10

>> YR=G/(1+G*H)

Transfer function:
        s^2 + s
----------------------
s^4 + 2 s^3 + 11 s^2 + 10 s

>> YR_simple=minreal(YR)

Transfer function:
     1
----------
s^2 + s + 10
```

Utilize a função "minreal(YR)" para o cancelamento de polos e zeros, se necessário

De forma alternativa, utilize:

```
>> YR=feedback(G,H)

Transfer function:

     1
----------
s^2 + s + 10
```

Utilize a função "pole(YR)" para obter os polos da função de transferência:

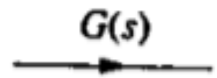
```
>> pole(YR)

ans =

-0.5000 + 3.1225i
-0.5000 - 3.1225i
```

Diagrama de Fluxo de Sinal

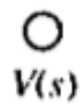
Representação:

- Arcos → representam sistemas

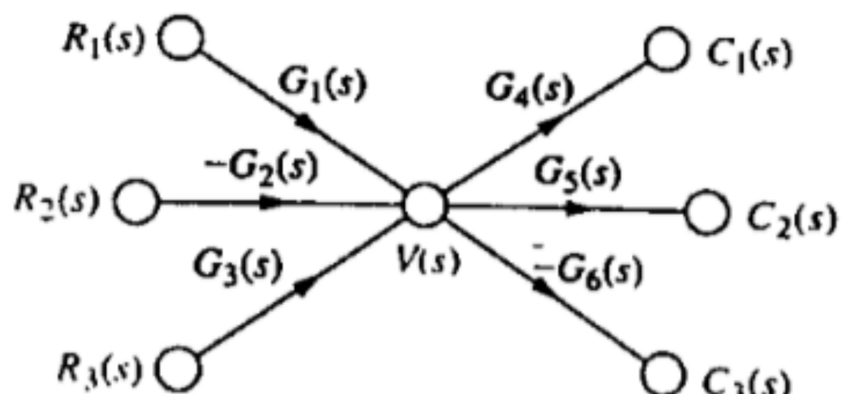
Um sistema é representado por uma linha com uma seta mostrando o sentido do fluxo de sinal através do sistema.



- Nós → representam sinais



<u>Cada sinal é a soma dos sinais que chegam ao nó respectivo.</u>



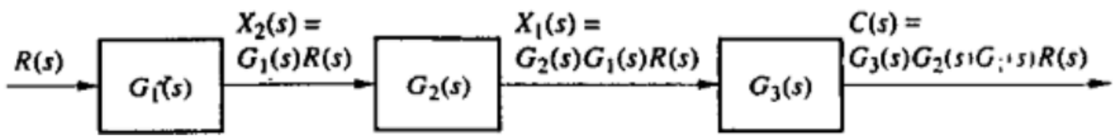
Exemplos:

$$V(s) = R_1(s)G_1(s) - R_2(s)G_2(s) + R_3(s)G_3(s).$$

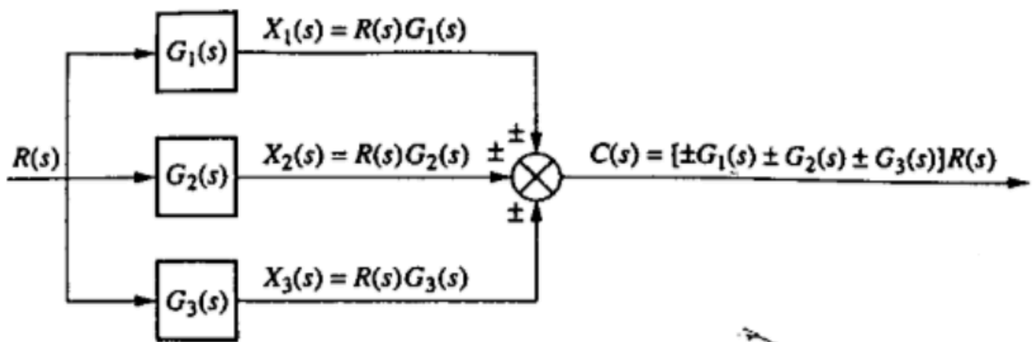
$$C_2(s) = V(s)G_5(s)$$

Diagrama de Fluxo de Sinal

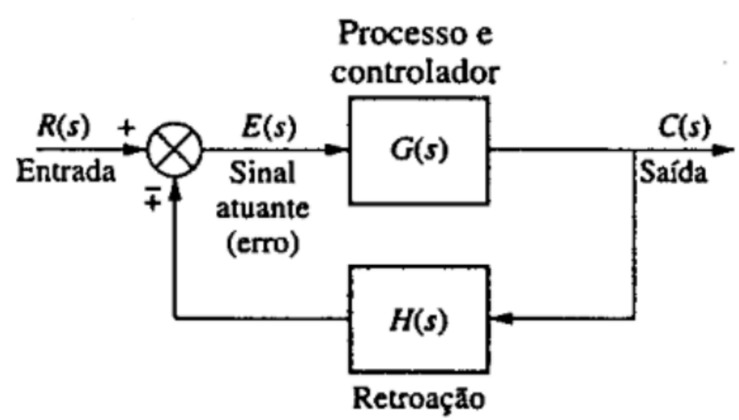
Problema Converter as associações em cascata, em paralelo e com retroação dos diagramas de blocos mostradas nas Figs. 5.3(a), 5.5(a) e 5.6(b), respectivamente, em diagramas de fluxo de sinal.



a)

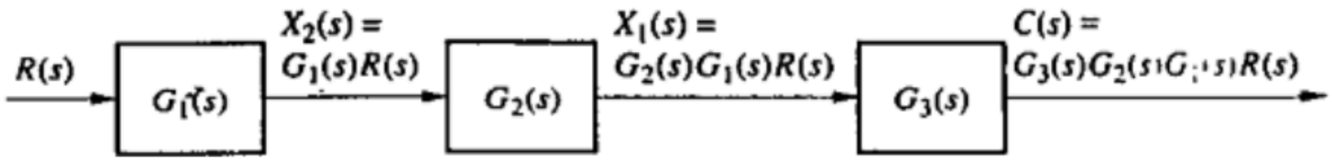


b)

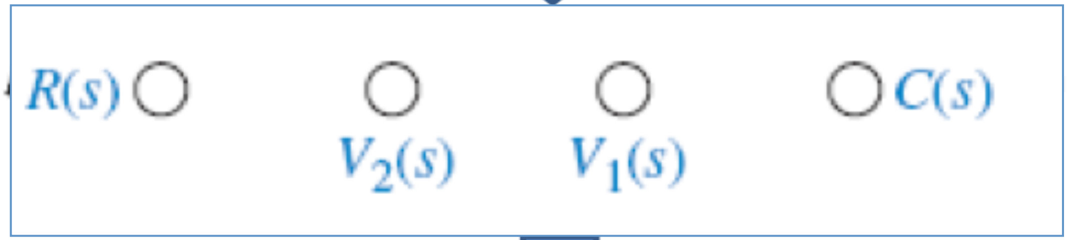


c)

Diagrama de Fluxo de Sinal



a)



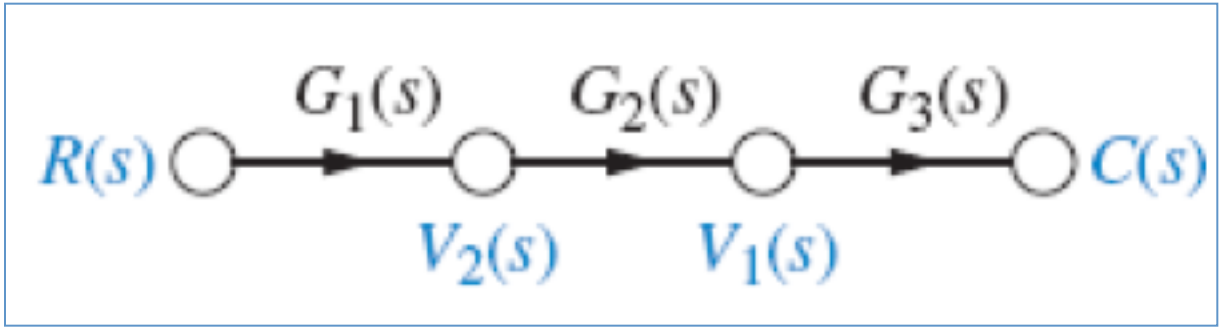
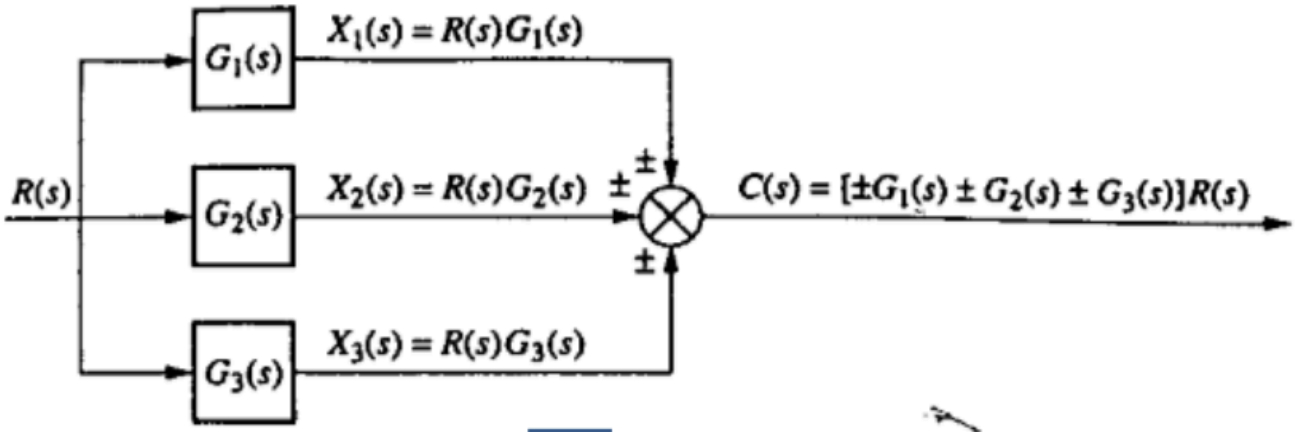
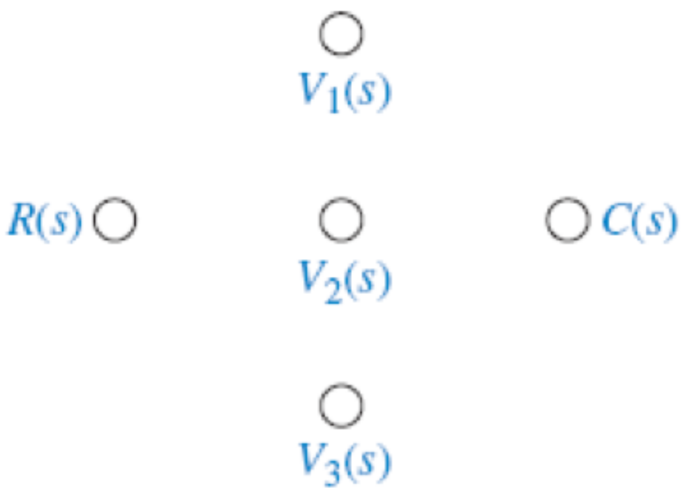


Diagrama de Fluxo de Sinal





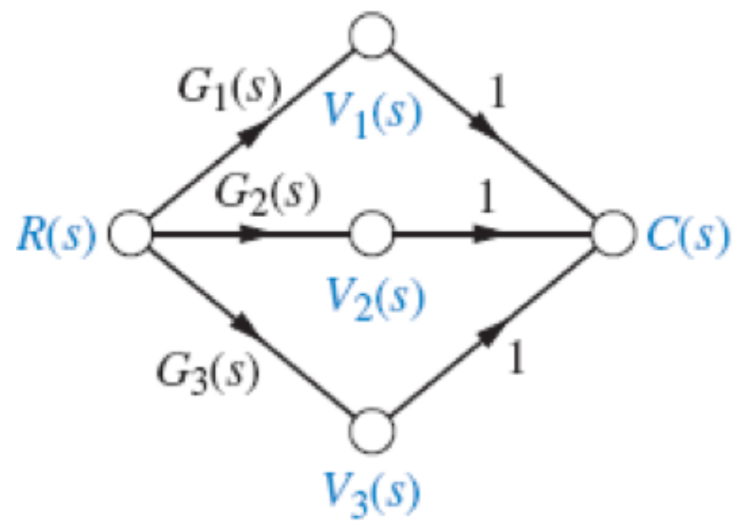
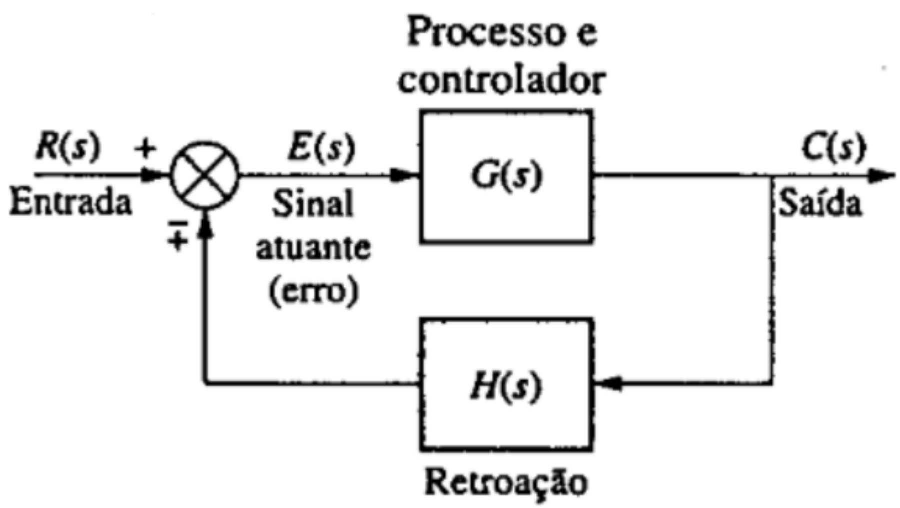


Diagrama de Fluxo de Sinal



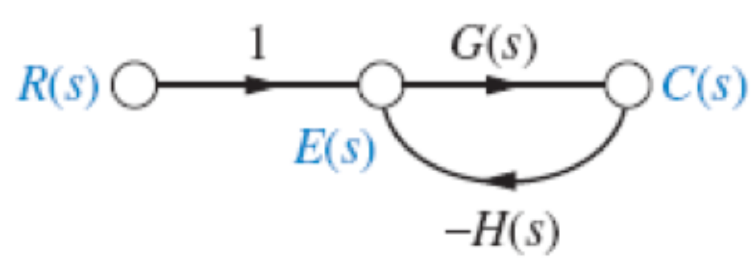
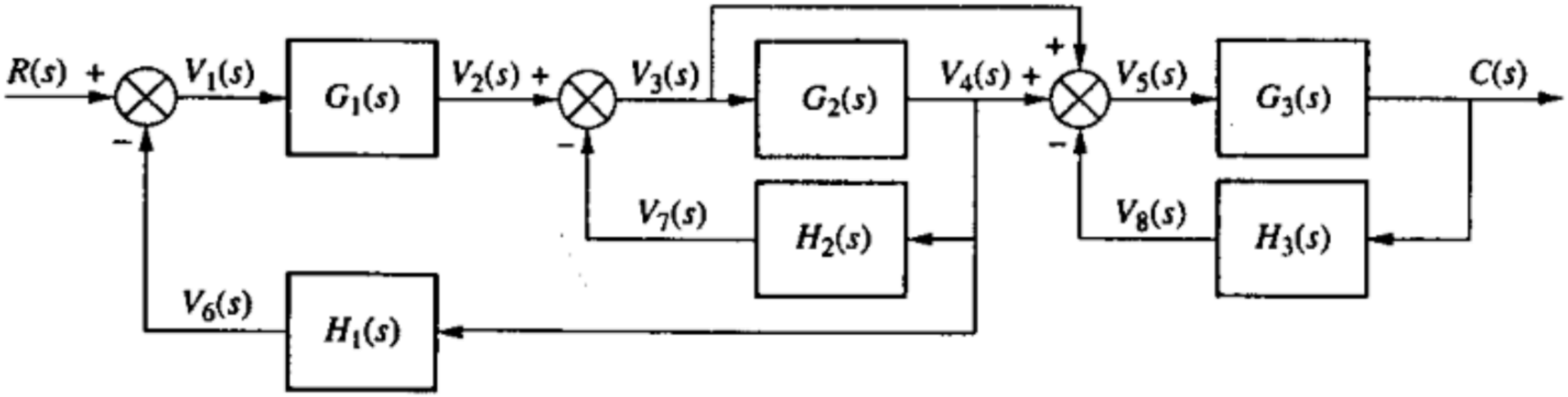


Diagrama de Fluxo de Sinal

Problema Converter o diagrama de blocos da Fig. 5.11 em diagrama de fluxo de sinal.



Comece desenhando os nós de sinal

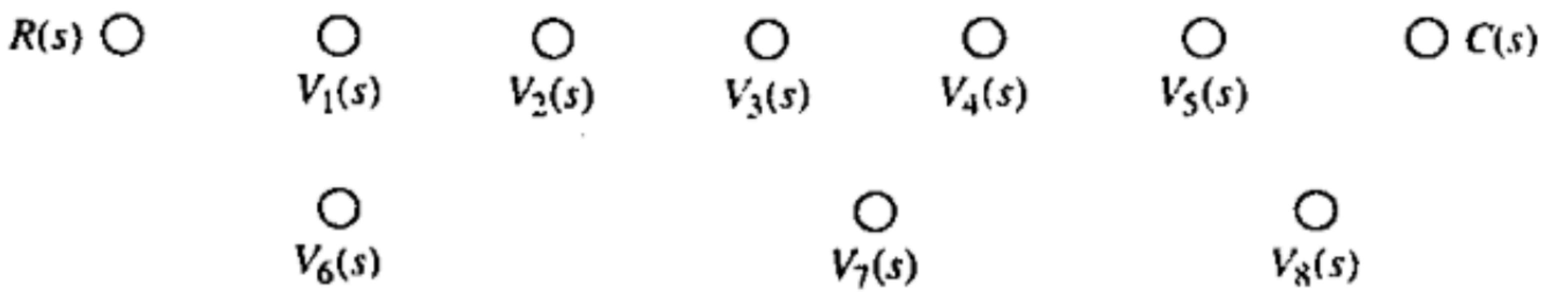
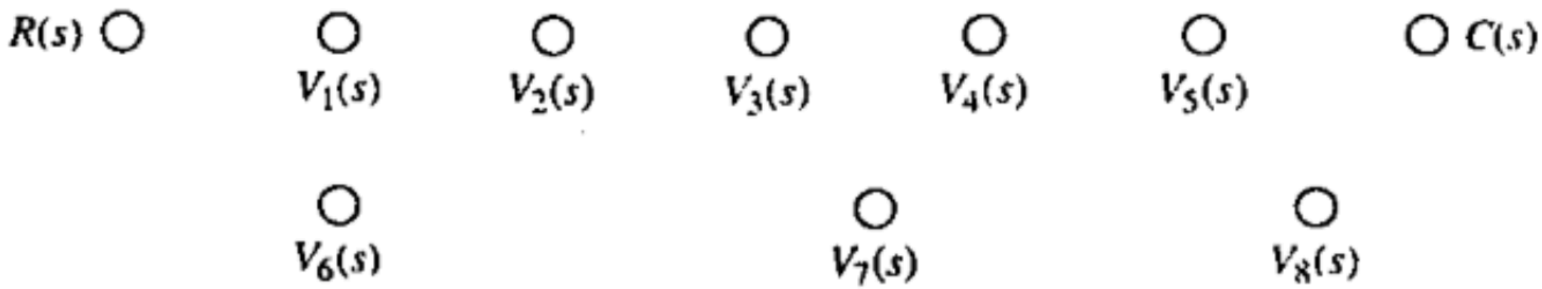
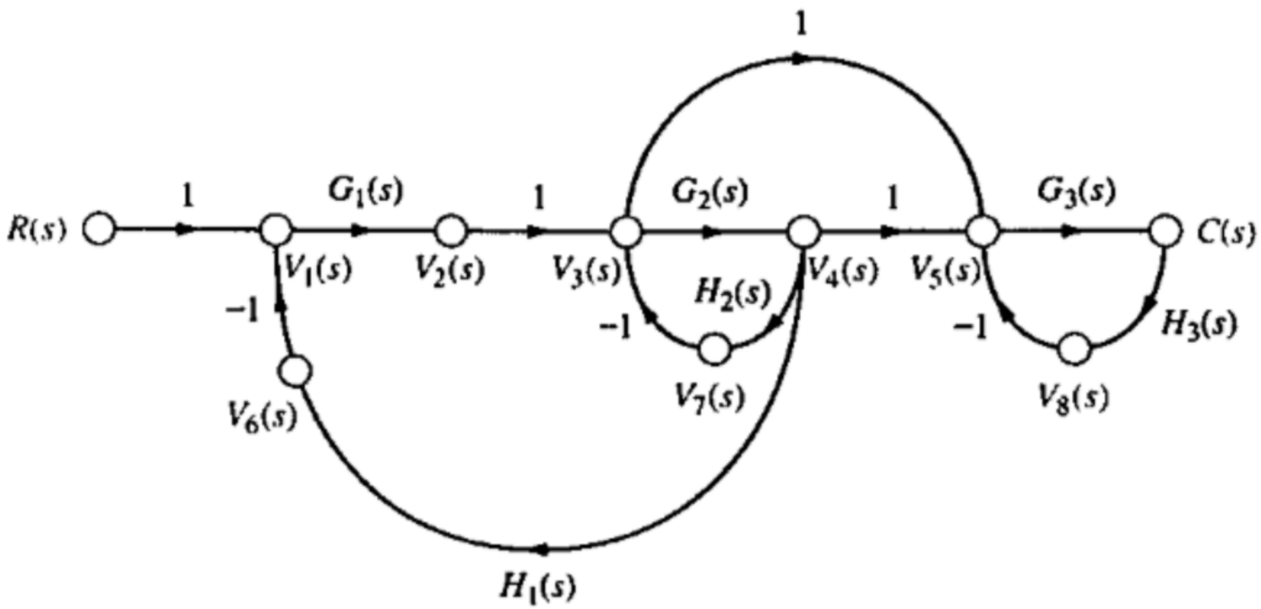


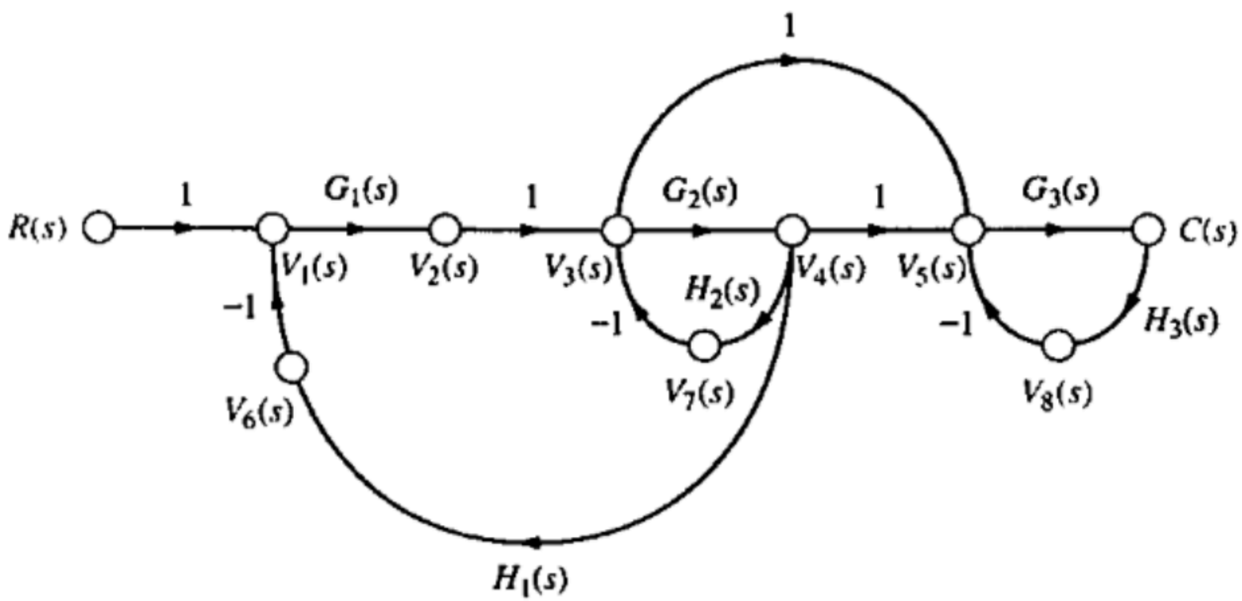
Diagrama de Fluxo de Sinal





Interconecte os nós, mostrando o sentido do fluxo de sinal e identificando cada função de transferência

Diagrama de Fluxo de Sinal



Simplifique o diagrama de fluxo através da eliminação de sinais com um único fluxo de entrada e um único fluxo de saída.

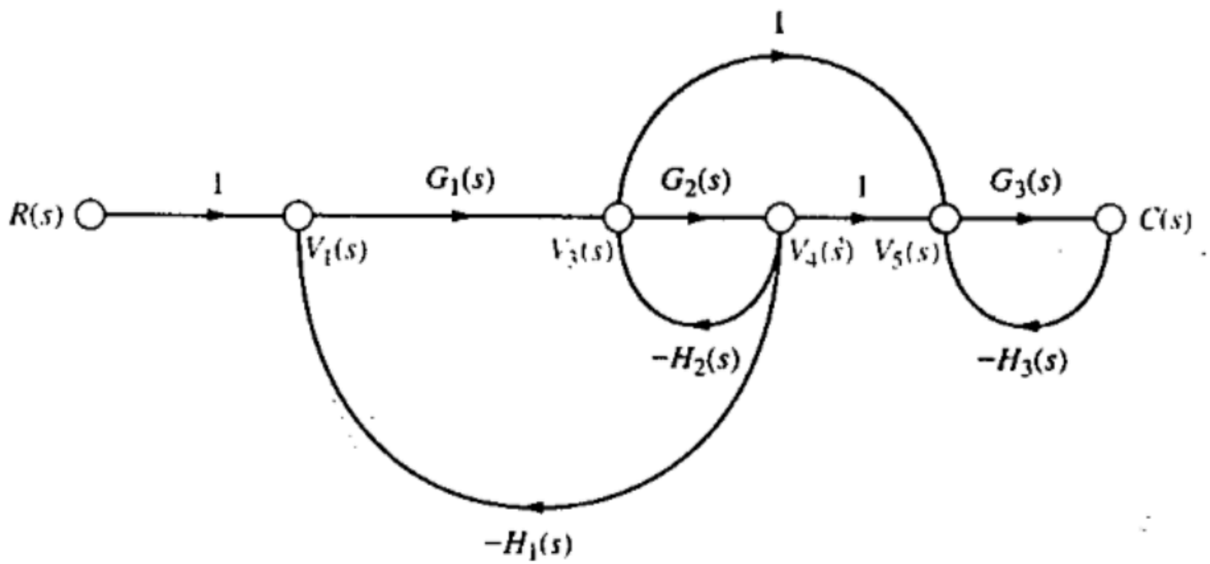


Diagrama simplificado