Resposta Dinâmica de Sistemas

Sistemas cuja saída(s) variam com o tempo, quando há uma variação na ENTRADA ou quando a ENTRADA VARIA COM O TEMPO SÃO DINÂMICOS

SAÍDA $\quad$ ENTRADA

$$x(t) \longleftarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longleftarrow y(t)$$

dx/dt taxa na qual x varia em relação a t

d^2x/dt informa como dx/dt varia em relação a t

MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS
- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS "TEMPO CONTÍNUO"
- EQUAÇÕES DAS DIFERENÇAS "TEMPO DISCRETO" ---→ ADIANTE NO CURSO

Para a equação de ordem zero, ou simplesmente, algébrica $x^2 - 3x + 2 = 0$ procura-se um número que substituindo x na equação, reduza o membro da esquerda a zero. Assim, "1" e "2" possuem essa propriedade ---→ ou, de segunda ordem.

Por outro lado, para a equação diferencial de ordem 2 $y'' + y = 0$, procura-se uma FUNÇÃO, definida num intervalo, capaz de justificar a identidade para esse intervalo. Por exemplo, sen x é uma solução da E.D. supracitada, para todo x, visto que $(\text{SEN})'' + \text{SEN } x = 0 \quad -\infty < x < +\infty$. Analogamente, cos x também é uma solução.

Sistemas de Primeira Ordem

para y(t) entrada e x(t) saída:

$$\boxed{a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y}$$

a_1, a_0 e b_0 são constantes. Portanto trata-se de uma E.D.O com coeficientes constantes. Ideal para SISTEMAS DINÂMICOS DE PRIMEIRA ORDEM LINEARES

a) RESPOSTA NATURAL "NÃO HÁ ENTRADA FORÇANDO MUDANÇA NO SISTEMA, APENAS VARIAÇÃO NATURAL, AO LONGO DO TEMPO"

$$\boxed{a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0} \longrightarrow$$

Por separação de variáveis:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{a_0}{a_1} dt \; ; \; \int \frac{dx}{x} = \int -\frac{a_0}{a_1} dt$$

$$\ln x = -\frac{a_0}{a_1} t \; ; \; \boxed{x = e^{-a_0 t / a_1}}$$

↓ solução em termos de RAÍZES CARACTERÍSTICAS

Sendo $x = Ae^{st}$ uma solução para $a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$, com A e s constantes. Então, $\boxed{\frac{dx}{dt} = sAe^{st}}$. Assim,

$$\boxed{a_1 s A e^{st} + a_0 A e^{st} = 0}$$

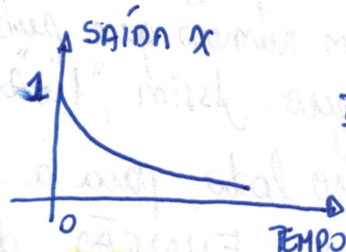
cuja EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA É:

$$a_1 s + a_0 = 0$$
$$s = -a_0/a_1$$

Portanto, $\boxed{x = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}t}}$ Resposta NATURAL

Obs. Pode-se determinar o valor da constant A fornecendo alguma condição inicial (ou condição de contorno). Por exemplo, se $x = 1$ quando $t = 0$, Então, $A = 1$. Assim, $x = e^{-a_0 t/a_1}$

$y(t)$ ENTRADA EM ZERO → SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM → $x(t)$



DECAIMENTO EXPONENCIAL

RESPOSTA NATURAL DE UM SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

b) RESPOSTA COM ENTRADA FORÇADA

$$\boxed{a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y}$$

A Solução x é composta de duas partes: $x = \boxed{\text{Solução p/a Resposta NATURAL}} + \boxed{\text{Solução p/a RESPOSTA FORÇADA}}$

A resposta forçada é dependente da forma do sinal de entrada y. As funções de entrada mais utilizadas em sistemas de controle são:

Analogament aos ...ulos DE E.D.O, a solução ...da EQUAÇÃO:
$x = x_h + x_p$,
...olução da homogênea (x_h)
... solução da particular (x_p)

a) Degrau: $y_{(t)} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k, & t \geq 0 \end{cases}$

b) Impulso: $y_{(t)} = \begin{cases} k, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

c) Rampa: $y_{(t)} = k.t$, k é constante.

d) SENOIDAL: $y_{(t)} = K \operatorname{sen} \omega t$, onde K é constante e ω = frequência angular $= 2\pi f$, f é frequência natural

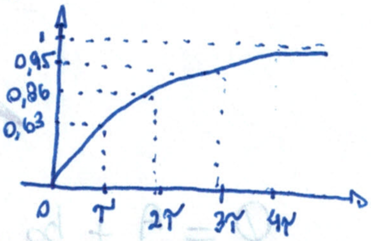
CONSTANTE DE TEMPO E GANHO DE ESTADO ESTACIONÁRIO

"Para um sistema com entrada em degrau, quando $t = a_1/a_0$, o termo exponencial tem valor $e^{-1} = 0{,}37$. Portanto, a saída aumenta para 0,63 do seu valor de estado estacionário"

⇒ Portanto, pode-se definir uma constante de tempo

$$\boxed{\tau = \frac{a_1}{a_0}}$$

e calcular a saída após 2τ, 3τ e etc.



Com isto, pode-se escrever a Equação e a Resposta característica para o sistema de primeira ordem:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

cuja resposta é:

$$\boxed{x = \text{valor de ESTADO ESTACIONÁRIO} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$\boxed{\tau \frac{dx}{dt} + x = \frac{b_0}{a_0} y}$$

Influi na DURAÇÃO DO ESTADO TRANSIENTE

Mas, b_0/a_0 é o fator pelo qual a entrada y é multiplicada para se obter o valor de estado estacionário

Assim, esta fração é denominada GANHO DE ESTADO ESTACIONÁRIO e determina QUANTAS VEZES A SAÍDA É MAIOR QUE A ENTRADA em condições de estado estacionário

Assim, se GANHO DE ESTADO ESTACIONÁRIO = $G_{SS} = b_0/a_0$, TEMOS QUE:

$$\boxed{\tau \frac{dx}{dt} + x = G_{SS}\, y}$$

“Nos cursos de E.D.O., utiliza-se o método dos coeficientes a determinar. Este, supõe conhecida a forma da solução particular a menos de constantes arbitrárias multiplicativas. Essas constantes são, em seguida, calculadas, levando-se a solução suposta conhecida na equação diferencial em estudo, e identificando-se os coeficientes.”

⇒ Para uma entrada em degrau, quando y é constante para todos os instantes maiores do que 0, ou seja, $y_{(t)} = K$, podemos testar a solução

$$X_{(t)} = A$$

A diferenciação de uma constante é zero; portanto, quando esta solução é levada na eq. diferencial, obtém-se:

$$a_0 A = b_0 K$$ e, assim:

$$\boxed{Y = \underbrace{Ae^{-a_0 t/a_1}}_{\text{PARTE HOMOGÊNEA}} + \frac{b_0}{a_0}K}$$

PARTE OU SOLUÇÃO PARTICULAR

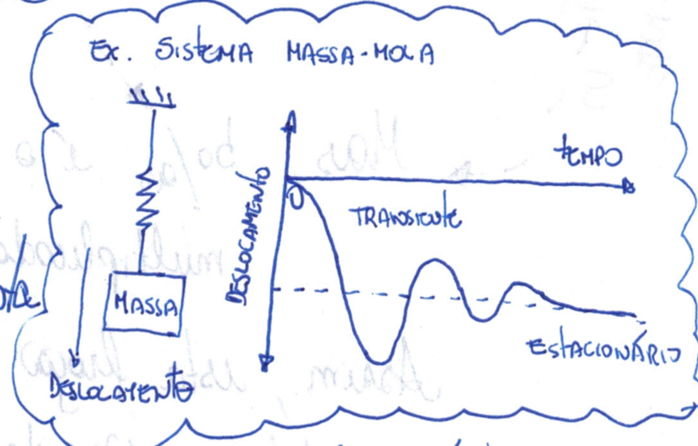
utilizando $Y = 0$, quando $t = 0$ (condição válida para o degrau)

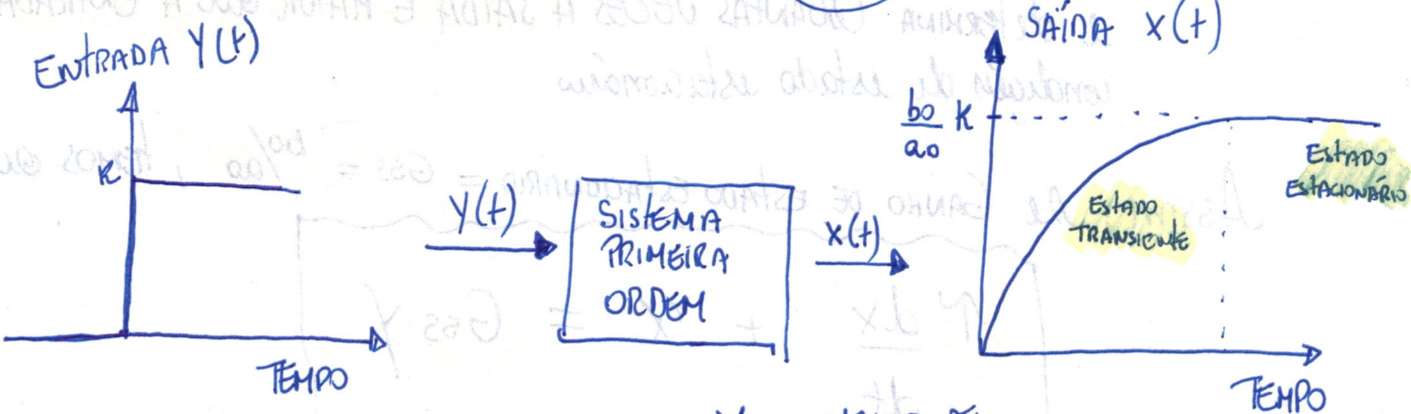
$$0 = A + \frac{b_0}{a_0}K$$

portanto, $A = -(b_0/a_0)K$

Assim, $$\boxed{X_{(t)} = \frac{b_0}{a_0}K\left(1 - e^{-a_0 t/a_1}\right)}$$

Quando $t \to \infty$, a exponencial tende a zero, ou seja, a resposta em estado Estacionário. Enquanto o termo exponencial fornece a resposta em estado TRANSIENTE



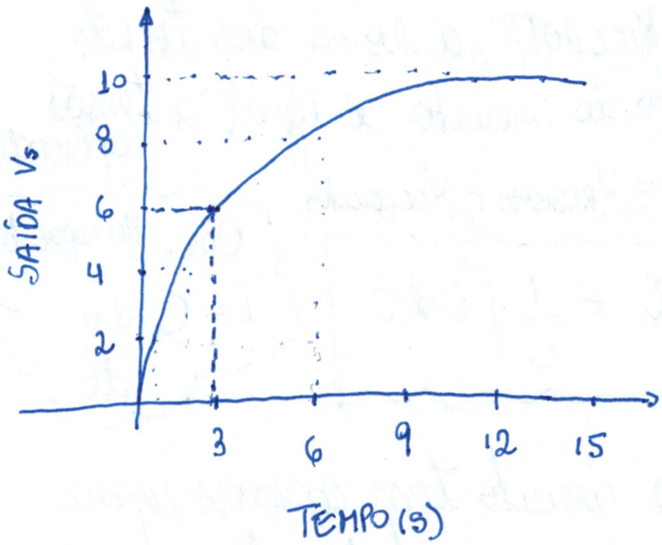


ENTRADA EM DEGRAU

$X =$ VALOR DE ESTADO ESTACIONÁRIO $\cdot \left(1 - e^{-a_0 t/a_1}\right)$

EXERCÍCIOS:

a) A saída de um sistema de primeira ordem, quando submetida a uma entrada em degrau de 5V, varia em acordo com o gráfico:



Assim sendo, encontre a Equação diferencial que modela o sistema em questão

* Pelo gráfico, verifica-se que τ é aproximadamente igual a 3s, pois, reflete o tempo gasto para que a saída varie de 0 a 0,63 em relação ao valor de estado estacionário

* A saída em estado estacionário é $V_S = 10V$, ENQUANTO a entrada em degrau $V_E = 5V$. Portanto, o ganho em ESTADO ESTACIONÁRIO $G_{SS} = 10/5 = 2$. Então, a EQ. DIFERENCIAL

$$\boxed{3\frac{dV_S}{dt} + V_S = 2V_E}$$

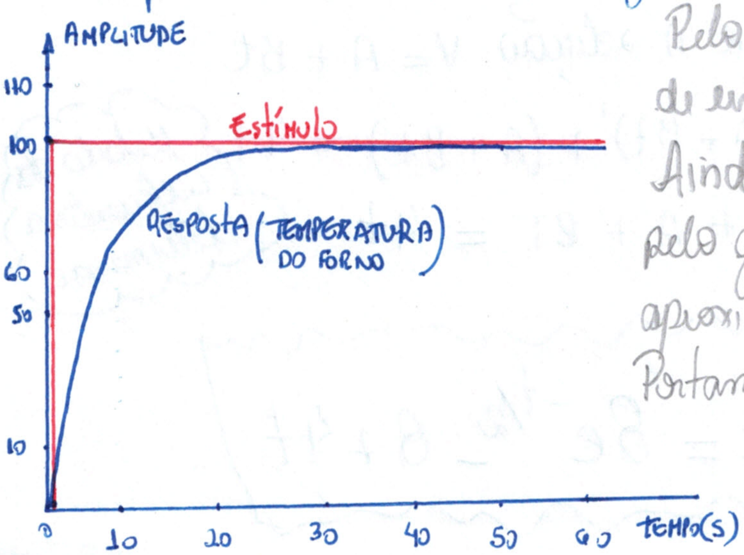
modela o sistema supracitado

Adicionalmente, a equação:

$$\boxed{X = 10 \cdot (1 - e^{-t/3})}$$

DESCREVE O comportamento em função do TEMPO

b) Um forno resistivo tem um estímulo de tensão e resposta de acordo com o gráfico. DETERMINE A RESPOSTA DO SISTEMA.

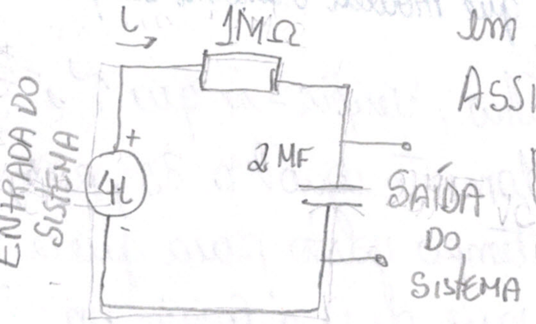


Pelo gráfico, verifica-se que o estímulo trata-se de uma entrada em degrau de amplitude 100. Ainda, considera-se que $\tau = 10$, pois, pelo gráfico, neste momento, a saída alcança aproximadamente 0,63 do valor de estado estacionário.

Portanto: $X = \text{valor de ESTADO ESTACIONÁRIO} \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{1}{\tau}}\right)$

$$\boxed{X = 100 \cdot (1 - e^{-t/10})}$$

c) Para um circuito elétrico composto por um resistor de 1 MΩ em série com um capacitor de 2 MF, encontre a equação que modela o sistema para "resposta em tensão sobre o capacitor" (SAÍDA DO SISTEMA). É necessário informar que no instante $t = 0$, o circuito é submetido a uma tensão em rampa de $4t$ V.



Pela 2ª lei de KIRCHOFF, a soma das tensões em cada elemento do circuito é igual à tensão aplicada

Assim: $V_{ENTRADA} = V_{RESISTOR} + V_{capacitor}$

$$\boxed{V_{ENTRADA} = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt}$$

Obs.: No capacitor $i = C\dfrac{dv}{dt}$

Entretanto, considera-se que o circuito tem apenas uma malha e, portanto, a corrente é a mesma em todos elementos. Assim, a saída pode ser escrita em função de Vcapacitor (ou V_C).

Portanto: $\boxed{\underbrace{RC}_{2}\dfrac{dv_C}{dt} + v_C = 4t}$

Neste caso, a solução $V_C = V_{C\,natural} + V_{C\,forçada}$

$V_{C\,natural} \Rightarrow \boxed{2\dfrac{dv}{dt} + v = 0}$ testar uma solução $v = Ae^{st}$

Assim: $2Ase^{st} + Ae^{st} = 0$

$\Downarrow$

$2s + 1 = 0$ $\boxed{s = -1/2}$

$\boxed{v = Ae^{-1/2\,t}}$

condições iniciais
$v = 0$ quando $t = 0$
$A = 8$

$V_{C\,forçada} \Rightarrow \boxed{2\dfrac{dv}{dt} + v = 4t}$ testar a solução $v = A + Bt$

$2(A+Bt)' + (A+Bt) = 4t$ Método dos coeficientes a determinar

$2B + A + BT = 4t$

$-8 = A = 2B$ $B = 4$

$v = -8 + 4t$

A solução final: $\boxed{V_C = 8e^{-t/2} - 8 + 4t}$

d) Coloca-se um corpo com temperatura desconhecida em um galpão mantido à temperatura de 30°F. Se, após 10 minutos, a temperatura do corpo é 0°F e após 20 minutos é 15°F, determine a temperatura inicial desconhecida.

"A lei de variação de temperatura de Newton afirma que a taxa de variação de temperatura é proporcional à diferença entre o corpo e o meio ambiente"

Assim, sendo T a temperatura do corpo, T_m a temperatura do meio, então, a variação de temperatura é $\frac{dT}{dt}$ e a regra de Newton: $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$ ou

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + KT = KT_m}$$

K é uma constante de proporcionalidade. Para resfriamento, torna-se K negativo tal que T é maior que Tm

Retornando ao problema:

$\frac{dT}{dt} + KT = 30K$, cuja solução é $T = Ae^{-Kt} + 30$

* Quando $t = 10$, $T = 0 \longrightarrow Ae^{-10K} = -30$; $A = \frac{-30}{e^{-10K}}$

* Quando $t = 20$, $T = 15 \longrightarrow Ae^{-20K} = -15$; $\frac{-30}{e^{-10K}} \cdot e^{-20K} = -$

$\frac{e^{-20K}}{e^{-10K}} = -\frac{1}{2}$; $e^{(-20+10)K} = -\frac{1}{2} \Rightarrow e^{-10K} = 1/2$; $K = \frac{1}{10} \ln 2$

$\boxed{K = 0,069}$

Para encontrar A: $Ae^{-0,069t} + 30 = 0$; $A = -60$

Assim: $\boxed{T = -60e^{-0,069t} + 30}$

Para $t = 0$
$T = -60$

e) Refaça o exercício "c" para o caso do capacitor ser substituído por um indutor de 1 Henry. Note que $V_L = L\frac{di}{dt}$ e $i_L = \frac{1}{L}\int v\,dt$

f) Coloca-se uma bola de metal à temperatura de 100°F em um quarto com temperatura constante de 0°F. Se, após 20 minutos a temperatura da bola é de 50°F, determine o tempo para a bola chegar à temperatura de 25°F e a temperatura da bola após 10 minutos

Resposta: $t = 39{,}6$ minutos e T para $t = 10$ $= 70{,}5°F$

g) Resolva as seguintes equações:

1) $y' - 3y' = 6$

Resposta: $y = Ae^{3x} - 2$

3) $y' + y = \operatorname{sen} x$

RESP. $y = Ae^{-x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$

5) $y' + \frac{2}{x}y = x$; $y(1) = 0$

RESP. $y = \frac{1}{4}(-x^{-2} + x^2)$

2) $y' - 2xy = x$

Resp: $y = Ae^{x^2} - 1/2$

4) $y' - 5y = 0$

RESP. $y = Ae^{5x}$

6) $y' + 6xy = 0$; $y(\pi) = 5$

RESP. $y = 5e^{-3(x^2 - \pi^2)}$

h) Resolva as equações pelo método dos coeficientes a determinar:

1) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

RESP: $y = y_h + y_p = A_1e^{-x} + A_2e^{-2x} - 2x^2 + 2x - 3$

3) $y'' - y' - 2y = \operatorname{sen} 2x$

$y = A_1e^{-x} + A_2e^{2x} - \frac{3}{20}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$

2) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Resp: $y = \underbrace{A_1e^{-x} + A_2e^{-2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{3x}}_{y_p}$

4) $y' - y = e^x$

$y = A_1e^x + xe^x$