

Multiplicação de cadeias de matrizes

Problema 1

A_1
 20×100

A_2
 100×5

A_3
 5×10

Entrada: cadeia de matrizes $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$
 n matrizes

Objetivo: calcular o produto
 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

1. Checar se pode multiplicar

$O(mnp)$

o número de colunas da matriz à esquerda
é igual ao número de linhas da matriz à direita.

2. $A_{m \times p} \times B_{p \times n}$

Para $i \leq m$ e $j \leq n$
Para $k \leq p$

Para $k \leq p$
 $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$

* faz diferença a ordem em que multiplicamos as matrizes?

$$\left(\begin{array}{cc} A_1 & \left(\begin{array}{cc} A_2 & A_3 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} ((A_1 A_2) A_3) \\ 7500 \end{array}$$

(Resultado é
uma 100×50)

$$100 \times 5 \times 50 = 25000$$

$$10 \times 100 \times 50 = 50000$$

75000

Problema 2 : Calcular a melhor forma de
parentizar a multiplicação
da cadeia de matrizes, de forma
a realizar a menor quantidade
possível de multiplicações unitárias.

Notação: cadeia de matrizes (A_1, \dots, A_n)
dimensão de $A_i = p_{i-1} \times p_i$

$$\underbrace{(A_1 \ A_2 \ \dots \ A_o)}_B \underbrace{(A_{o+1} \ \dots \ A_n)}_C$$

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P_k \cdot P(n-k)$$

$\Omega(2^n)$
 ↳ formas de parentizar a mult. de cada um de n matrizes

$$E_k : \langle A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \rangle$$

$$\left((A_1) \left(\begin{matrix} 2 & \dots & 4 \end{matrix} \right) \right)$$

$$(A_1 \ A_2 \ A_3) (A_4)$$

$$(A_2 \ (A_3 \dots A_{10}))$$

$$A_1 (A_2 \ A_3)$$

$$((A \ A_3) \ A_4)$$

$$(A_1 \ A_2) (A_3 \dots A_{10})$$

→

Algoritmo de Programação dinâmica

- temos n matrizes
- $A_i \dots j$ (multiplicação das matrizes i a j)


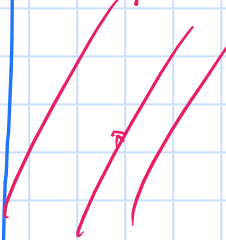

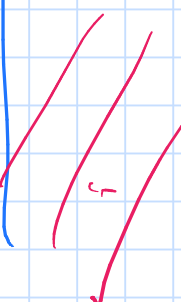

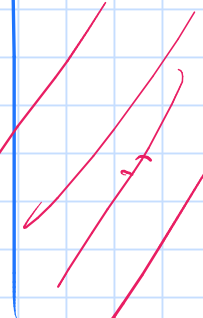
$$\underbrace{A_i \dots k} \times \underbrace{A_{k+1} \dots j}, \quad \forall k \text{ entre } i \text{ e } j$$

$$\begin{array}{c} \text{custo desta} + \text{custo desta} \\ + \end{array}$$

} custo total

custo de multiplicar o
resultado dos dois

$$P_{i-1} \times P_k \times P_j$$

		Δ_2			
		1	2	3	4
Δ_1	1	0	$A_1 A_2$	$(A_1 A_2) A_3$	
	2		0		
	3			0	
	4				0

* Seja $m[i, j]$ o número mínimo de multiplicações efetuadas para o cálculo de $A_{i \dots j}$

($m[1, n]$ pl o problema de entrada.)

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \} & \text{se } i < j \end{cases}$$

dimensão de $A_i = p_{i-1} \times p_i$

$A_i \dots A_k$ $A_{k+1} \dots A_j$
 $B_{p_{i-1} p_k}$ $C_{p_k p_j}$

Mult-Choice-Matrizes (p)

Para $i \leftarrow 1$ até n
 $m[i, i] \leftarrow 0$

Para $l \leftarrow 2$ até n

Para $i \leftarrow 1$ até $n-l+1$

$j \leftarrow i+l-1$
 $m[i, j] \leftarrow \infty$

Para $k \leftarrow i$ até $j-1$

$q \leftarrow m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j$

Se $q < m[i, j]$

$m[i, j] \leftarrow q$

Retorna $m_{i, j}$

1) Executor
algoritmo

2) Ver não de
memorização

3) Quais alternativas
são necessárias
p/ guardar solução
de melhor valor?