Multiplicação de cadeias de matrizes

Problema 1:

A_1 10×100 A_2 100×5 A_3 5×50

Entrada: Cadeia de matrizes $\langle \underbrace{A_1, A_2, \ldots, A_n}_{n \text{ matrizes}} \rangle$

Objetivo: Calcular o produto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

1. Checar se pode multiplicar $O(mnp)$
   ↳ número de coluna da matriz à esquerda é igual ao número de linhas da matriz à direita.
2. $A_{m \times p} \times B_{p \times n}$

Para $i \leftarrow 1$ até m
  Para $j \leftarrow 1$ até n
    $c_{ij} \leftarrow 0$
    Para $k \leftarrow 1$ de p
      $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$

* Faz diferença a ordem em que multiplicamos as matrizes?

$$\left(A_1 \left(A_2 \quad A_3 \right) \right)$$

$$10\times 100 \quad 100\times 5 \quad 5\times 50$$

$((A_1 \; A_2)\; A_3)$

7 500

(Resultado é uma 100×50)

$$100\times 5\times 50 = 25000$$

$$10\times 100\times 50 = 50000$$

$$75000$$

Problema 2: Calcula a melhor forma de parentizar a multiplicação da cadeia de matrizes, de forma a realizar a menor quantidade possível de multiplicações unitárias.

Notação: cadeia de matrizes $\langle A_1, \dots A_n \rangle$

dimensão de A_i : $p_{i-1} \times p_i$

$$\underbrace{(A_1 \; A_2 \; \dots \; A_i)}_{B}\underbrace{(A_{i+1} \; \dots \; A_n)}_{C}$$

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P_k \cdot P(n-k)$$

$\Omega(2^n)$

$\rightarrow$ formas de parentizar la mult. de cadena de n matrizes

Ex : $\langle A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \rangle$

7

$\left((A_1) \left(\;{}^{2} \quad \ldots \quad {}^{4}\; \right) \right)$

$(A_1 \quad A_2 \quad A_3)\,(A_4)$

$A_1 \; (A_2 \, A_3)$

$(A_2 \; (A_3 \ldots A_{10}))$

$((A \quad A_3) \quad A_4)$

$(A_1 \quad A_2) \; (A_3 \ldots A_{10})$

A

Algoritmo de Programação dinâmica

- temos n matrizes
- $A_{i \ldots j}$ (multiplicação das matrizes i a j)

$$\underbrace{A_{i \ldots k}}_{\text{custo desta}} \times \underbrace{A_{k+1 \ldots j}}_{\text{custo desta}} \quad), \quad \forall k \text{ entre } i \text{ e } j$$

custo desta + custo desta + custo de multiplicar o resultado das duas } custo total

$$p_{i-1} \times p_k \times p_j$$

A_2

A_1

	1	2	3	4
1	0	$A_1 \; A_2$	$(A_1 A_2)(A_3)$	
2		0		
3			0	
4				0

* Seja $m[i, j]$ o número mínimo de multiplicações efetuadas para o cálculo de $A_{i \dots j}$

($m[1, n]$ p/ o problema de entrada.)

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j \} & \text{se } i < j \end{cases}$$

dimensão de A_i : $p_{i-1} \times p_i$

$A_i \dots A_k \; A_{k+1} \dots A_j$

B_{p_{i-1}, p_k} $\quad$ $C_{p_k \, p_j}$

Mult_Cadeia_Matrizes (p)

Para $i \leftarrow 1$ até n

$\quad m[i, i] \leftarrow 0$

Para $l \leftarrow 2$ até n

$\quad$ Para $i \leftarrow 1$ até $n - l + 1$

$\quad\quad j \leftarrow i + l - 1$

$\quad\quad m[i, j] \leftarrow \infty$

$\quad\quad$ Para $k \leftarrow i$ até $j - 1$

$\quad\quad\quad q \leftarrow m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j$

$\quad\quad\quad$ Se $q < m[i, j]$

$\quad\quad\quad\quad m[i, j] \leftarrow q$

Retorna m;

1) Executar algoritmo

2) Versão de memorização

3) Quais alterações são necessárias p/ guardar solução de melhor valor?