Lista de exercícios 4 (Algoritmos gulosos)
Cana - 2023.1

Questão 1. No problema da pilha de caixas são dadas n caixas. Cada caixa possui peso e quantidade de objetos atribuídos a ela. O problema consiste em construir uma pilha P com todas as caixas, de modo a minimizar o esforço. Para uma pilha P com as n caixas, considere C_1 a caixa do topo da pilha, C_n a caixa na posição mais baixa, e p_i, k_i o peso e a quantidade de objetos da caixa C_i na i-ésima posição à partir do topo, respectivamente. O esforço da pilha é calculado como $esforo(P) = \sum_{j=1}^{n}(k_j \times (\sum_{i=1}^{j} p_i))$ (k_j é a quantidade de objetos na caixa j e o somatório interno representa a soma dos pesos das caixas acima da caixa j). Proponha um algoritmo guloso para resolver este problema, isto é, que descreva qual critério deve ser utilizado para empilhar as todas as caixas, de modo a minimizar o esforço da pila. Mostre que seu algoritmo encontra uma solução ótima.

Questão 2. Em um torneio de duplas mistas de tênis, participam n mulheres com índices $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (ordenados) e n homens com índices $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (ordenados). O índice do time $t_k = (m_i, h_j)$ é definido por $I(t_k) = \frac{m_i + h_j}{2}$. Proponha um algoritmo para formar times equilibrados, de forma a minimizar a função $\max_k I(t_k) - \min_k I(t_k)$. Prove que o seu algoritmo encontra uma solução ótima para o problema.

Questão 3. Seja $1, \ldots, n$ um conjunto de tarefas. Cada tarefa consome um dia de trabalho; durante um dia de trabalho somente uma das tarefas pode ser executada. Os dias de trabalho são numerados de 1 a n. A cada tarefa T está associado um prazo P_T : a tarefa deveria ser executada em algum dia do intervalo $1, \ldots, P_T$. A cada tarefa T está associada uma multa não-negativa M_T. Se uma dada tarefa T é executada depois do prazo P_T, sou obrigado a pagar a multa M_T (mas a multa não depende do número de dias de atraso). Problema: Programar as tarefas (ou seja, estabelecer uma bijeção entre as tarefas e os dias de trabalho) de modo a minimizar a multa total. Escreva um algoritmo guloso para resolver o problema e argumente porque ele é correto.

Questão 4. O problema de encontrar a árvore geradora mínima de um grafo pode ser resolvido pelo algoritmo de Kruskal, que utiliza uma estratégia gulosa.

Algoritmo 1: Kruskal simplificado

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e função w de peso nas arestas de G
Saída: Árvore geradora mínima T de G

```
T ← V(G) e conjunto vazio de arestas;
Ordenar E(G) tal que w(e_1) ≤ w(e_2) ≤ ... ≤ w(e_m);
para i ← 1...m faça
    se T + e_i não contém ciclo então
        T ← T + e_i;
retorna T;
```

Seja T^* uma árvore geradora de peso mínimo de um grafo G, e T a árvore que o algoritmo de Kruskal retorna. Prove que T é uma árvore de peso mínimo.