Algoritmos gulosos

↳ Problemas de otimização: existe forma mais simples de resolver alguns

* Fazem a cada passo a melhor escolha local, na esperança que leve ao ótimo global.

↳ Subestrutura ótima

- Mais simples de entender e implementar.
- Temos que provar!!! *

Problema da Mochila

- n itens
- cada item tem { peso p_i / valor v_i
- Mochila com capacidade C kilos

Objetivo: Maximizar o valor carregado na mochila (itens inteiros)

<u>Ideia 1</u>: Seleciona itens em ordem decrescente de valor.

$C = 10 \quad \{ \underset{\text{item 1}}{(\overset{p}{10}, \overset{v}{5})}, \underset{\text{item 2}}{(\overset{p}{5}, \overset{v}{4})}, \underset{\text{item 3}}{(\overset{p}{5}, \overset{v}{4})} \}$

Solução: (10, 5)
valor total: 5

Solução ótima? $\{(5, 4), (5, 4)\}$
(8)

Ideia 2: Seleciona itens em ordem crescente de peso.

$$C = 2 \qquad \{ \overset{p,\ v}{(1, 1)},\ \overset{p,\ v}{(1, 1)},\ \overset{p,\ v}{(2, 1000)} \}$$

Solução da ideia 2: $\{(1,1), (1,1)\}$

valor: 2

Solução ótima: $(2, 1000)$

$\boxed{\text{valor: } 1000}$

Problema da Mochila (fracionário)

- n itens
- cada item tem $\begin{cases} \text{peso } p_i \\ \text{valor } v_i \end{cases}$
- Mochila com capacidade C kilos

Objetivo: Maximizar o valor carregado na mochila (itens inteiros ou pedaços de itens)

Ideia 3: Seleciona itens de acordo com a razão $\boxed{\frac{\text{peso}}{\text{valor}}}$ de maneira crescente.

Teorema: O algoritmo da Ideia 3 encontra uma solução ótima para o problema da mochila fracionária. Suposição: todos os itens possuem razão $\frac{peso}{valor}$ diferentes.

Prova: Vamos representar uma solução como

$sol: [l_1, l_2, \dots, l_n]$, onde l_i indica a quantidade (peso) selecionada do i-ésimo objeto. (O índice dos objetos corresponde à ordenação da ideia 3)

Solução da ideia 3: Ordena de forma crescente por $\frac{peso}{valor}$.

$$S = [p_1, p_2, \dots, p_{j-1}, l_j, 0, 0, \dots, 0]$$

k m

Ideia da prova: mostrar que qualquer solução diferente da encontrada pelo algoritmo pode ser melhorada.

Seja S' qualquer redução satisfazendo:

(i) $S'[k] < S[k]$

(ii) $S'[m] > S[m]$

Ideia: construir S'' a partir de S', reduzindo o peso do m-ésimo item e aumentar o peso do k-ésimo.

Seja $x = \min\{ S'[m], p_k - S'[k] \}$

$$S''[i] = \begin{cases} S'[i], & i \neq k, m \\ \underline{S'[k] + x}, & i = k \\ S'[m] - x, & i = m \end{cases}$$

Calcular Valor(S'') − Valor(S')

$$\sum_{i=1}^{n} S''[i]\cdot\frac{v_i}{p_i} - \sum_{i=1}^{n} S'[i]\,\frac{v_i}{p_i} =$$

$$\left(S''[k]\cdot\frac{v_k}{p_k} + S''[m]\,\frac{v_m}{p_m}\right) - \left(S'[k]\,\frac{v_k}{p_k} + S'[m]\,\frac{v_m}{p_m}\right)$$

$$(S'[k]+x)\,\frac{v_k}{p_k} + (S'[m]-x)\,\frac{v_m}{p_m} - \cancel{S'[k]\,\frac{v_k}{p_k}} - \cancel{S'[m]\,\frac{v_m}{p_m}} =$$

$$= \underbrace{x}_{>0}\,\underbrace{\left(\frac{v_k}{p_k} - \frac{v_m}{p_m}\right)}_{>0} > 0$$

$$\frac{p_k}{v_k} < \frac{p_m}{v_m}$$

$\blacksquare$