

laboratório 01: Eliminação Gaussiana

Operações elementares

Seja M uma matriz qualquer. As seguintes operações chamadas de operações elementares sobre a matriz:

- trocar duas linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_0 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- multiplicar uma linha por um número ($\neq 0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -9 & 15 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- substituir uma linha pela soma dela mesma com outra multiplicada por um número ($\neq 0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_0} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tarefa 1: operações elementares

Implemente as operações elementares para matrizes quaisquer $n \times m$.

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \alpha L_i$$

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$$

Você deve criar os métodos:

```

void trocar_linhas( ... ){
    // Troca as linhas i e j da matriz M de dimensões  $n \times m$ 

    ...
}

void multiplicar_escalar_linha( ... ){
    // Multiplica a linha i da matriz M de dimensões  $n \times m$ 

    ...
}

void somar_linhas( ... ){
    // Soma à linha i o produto da linha j por a
    // na matriz M de dimensões  $n \times m$ 

    ...
}

```

tarefa 2: zerando uma posição abaixo

Usando operações elementares, podemos alterar os valores em uma matriz.

Considere a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{00}} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Se realizarmos a operação elementar

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$$

Obtemos uma matriz da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{00}} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{20} & \boxed{0} & \mathbf{a'_{22}} & a'_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}$$

O elemento a_{11} da diagonal principal é chamado de pivô.

Em geral, quando temos uma matriz e uma posição (i, j) abaixo da diagonal principal, o pivô é o elemento (j, j) .

Se fizermos a operação

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

a posição (i, j) da matriz será zerada

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \dots & \mathbf{a_{jj}} \\ \vdots \\ a_{ij} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots & \mathbf{a_{jj}} \\ \vdots \\ \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Implemente um método que, dada uma posição (i, j) da matriz que esteja abaixo, zera o elemento $A[i][j]$ utilizando o elemento da diagonal principal como pivô.

Você deve criar o método:

```
void zerar_posicao_abaixo( ... ){
    // Zera a posição  $M[i][j]$  da matriz  $M$ , onde  $i > j$ 
    ...
}
```

tarefa 3: zerando coluna abaixo

Implemente um método que zera todas as posições de uma determinada coluna j que ficam abaixo da diagonal principal matriz.

Você deve criar o método:

```
void zerar_coluna_abaixo( ... ){
    // Zera as posições da coluna  $j$  da matriz  $M$  abaixo da diagonal principal
    ...
}
```

tarefa 4: matriz triangular superior

Implemente um método que zera todas as posições abaixo da diagonal principal da matriz. (Uma matriz em que todas as posições abaixo da diagonal principal estão zeradas é chamada de triangular superior.)

Você deve criar o método:

```
void triangular_superior( ... ){
    // Zera as posições da matriz  $M$  abaixo da diagonal principal
    ...
}
```

tarefa 5: zerando uma posição acima

Implemente um método que zera uma posição acima da diagonal principal (semelhante ao

método que zera as posições abaixo da diagonal principal).

Você deve criar o método:

```
void zerar_posicao_acima( ... ){  
    // Zera a posição  $M[i][j]$  da matriz  $M$ , onde  $i < j$   
    ...  
}
```

tarefa 6: zerando coluna abaixo

Implemente um método que zera todas as posições de uma determinada coluna j que ficam acima da diagonal principal matriz.

Você deve criar o método:

```
void zerar_coluna_abaixo( ... ){  
    // Zera as posições da coluna  $j$  da matriz  $M$  abaixo da diagonal principal  
    ...  
}
```

tarefa 7: matriz triangular inferior

Implemente um método que zera todas as posições acima da diagonal principal da matriz. (Uma matriz em que todas as posições acima da diagonal principal estão zeradas é chamada de triangular inferior.)

Você deve criar o método:

```
void triangular_inferior( ... ){  
    // Zera as posições da matriz  $M$  acima da diagonal principal  
    ...  
}
```

tarefa 8: matriz diagonal

Implemente um método que transforma a matriz em uma matriz diagonal. (Uma matriz diagonal é uma matriz cujas únicas posições não nulas estão na diagonal principal.)

Você deve criar o método:

```
void diagonal( ... ){  
    // Zera as posições da matriz  $M$  acima da diagonal principal  
    ...  
}
```

tarefa 9: matriz inversa

Imagine que tenhamos uma matriz, por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Se expandirmos a matriz da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

E realizarmos uma sequência de operações elementares de forma que a parte da esquerda se torne uma matriz identidade

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ 0 & 1 & 0 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 1 & b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{array} \right]$$

a parte da direita será a inversa da matriz original.

Implemente um algoritmo que calcula a inversa de uma matriz quadrada, inversível dada.

Sistemas de equações lineares

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}x - 2y + 2z &= 1 \\2x + y - 3z &= 5 \\4x - 7y + 1z &= -1\end{aligned}\tag{I}$$

Esse sistema dá origem à seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Imagine que executamos algumas operações elementares sobre a matriz, por exemplo:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow 3 \times L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -9 & 15 \\ 4 & -7 & 1 & -1 \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{cccc} 6 & 3 & -9 & 15 \\ -2 & 4 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right]$$

A matriz obtida corresponde ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned}6x + 3y - 9z &= 15 \\-2x + 4y - 4z &= -2 \\2x - 3y - 3z &= -3\end{aligned}\tag{II}$$

fato: os sistemas (I) e (II) possuem as mesmas soluções.