TP1-ADM

Guillaume Bernard-Reymond et Lorenzo Gaggini

October 2023

1 Partie 1

Dans cette partie, nous désignerons par (x_i) où $i \in \{1; ...; 21\}$ les individus et (x^j) où $j \in \{1; ...; 32\}$ les variables, qu'elles soient quantitatives ou bien qualitatives. Enfin nous noterons (z^j) où $j \in \{4; ...; 32\}$ les variables quantitatives centrées-réduites.

1. Dans cette question nous placerons dans le cas général où $i \in \{1; ...; n\}$ et $j \in \{1; ...; p\}$

   - On considère $(w_i)_{i\in\{1...n\}}$ une suite de poids telle que $\sum_{i=1}^{n} = 1$ et soit $j \in \{1; ...; p\}$. On peut alors écrire :

     $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i z_i^j &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{x_i^j - \overline{x^j}}{\sigma_{x^j}}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_{x^j}} \sum_{i=1}^{n} \left(w_i x_i^j - w_i \overline{x^j}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_{x^j}} \left(\overline{x^j} - \overline{x^j} \sum_{i=1}^{n} w_i\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

     Le barycentre du nuage est donc bien $0_{\mathbb{R}^p}$.

-
$$
\begin{aligned}
In_O\left(\{z_i;w_i\}_{i=1,\ldots,n}\right) &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left\|z_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{j=1}^{p} {z_i^j}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} w_i {z_i^j}^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i {z_i^j}^2\right)
\end{aligned}
$$

  Or l'expression $\sum_{i=1}^{n} w_i {z_i^j}^2$ n'est rien d'autre que l'expression de la variance de notre variable quantitative centrée réduite qui vaut donc 1.
  Ainsi : $In_O\left(\{z_i;w_i\}_{i=1,\ldots,n}\right) = p$ c'est à dire le nombre de variables quantitatives.

2.