ADAM : Une méthode pour l'optimisation stochastique

Guillaume BERNARD-REYMOND, Guillaume BOULAND,
Camille MOTTIER, Abel SILLY

14 octobre 2024

L'article

Adam : A Method for Stochastic Optimization

Diederik P. Kingma
Université d'Amsterdam, OpenAI

Jimmy Lei Ba
Université de Toronto

Première année de publication : 2014

ICLR

Objectif de l'article : introduire un algorithme d'optimisation stochastique

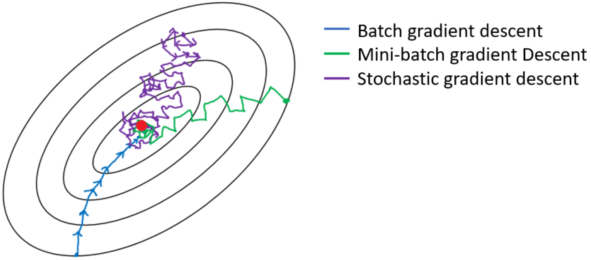
L'objectif

$f(\theta)$: fonction-objectif stochastique

Exemple : $f(\theta) = \sum_{i=1}^{n} L(x_i|\theta)$

Mini-batch : $f_t(\theta) = \sum_{i \in I_t} L(x_i|\theta)$

Objectif : minimiser $\mathbb{E}[f(\theta)]$



Méthode d'ordre 1

Qu'est-ce qu'une méthode d'ordre 1 ? $\longrightarrow$ Évaluation de $f(\theta)$ et de $\nabla_\theta f(\theta)$

Algorithme : Descente de gradient stochastique

Entrées : $f(\theta)$, α, θ_0

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

  $t \longleftarrow t+1$

  $g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$

  $\theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot g_t(\theta_{t-1})$

fin

Sorties : θ_t

L'algorithme Adam

Algorithme : Adam

Entrées : $f(\theta)$, α, β_1, β_2, ε, θ_0

$m_0 \longleftarrow 0$

$v_0 \longleftarrow 0$

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

$\quad t \longleftarrow t + 1$

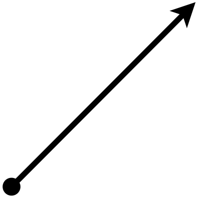
$\quad g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$

$\quad m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t]$)

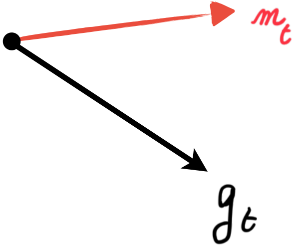
fin

Sorties : θ_t

Gradient à l'instant *t-1*



À l'instant *t*



L'algorithme Adam

Algorithme : Adam

Entrées : $f(\theta)$, α, β_1, β_2, ε, θ_0

$m_0 \longleftarrow 0$

$v_0 \longleftarrow 0$

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

$\quad t \longleftarrow t + 1$

$\quad g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$

$\quad m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t]$)

fin

Sorties : θ_t

L'algorithme Adam

Algorithme : Adam

Entrées : $f(\theta)$, α, β_1, β_2, ε, θ_0

$m_0 \longleftarrow 0$

$v_0 \longleftarrow 0$

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

$t \longleftarrow t+1$

$g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$

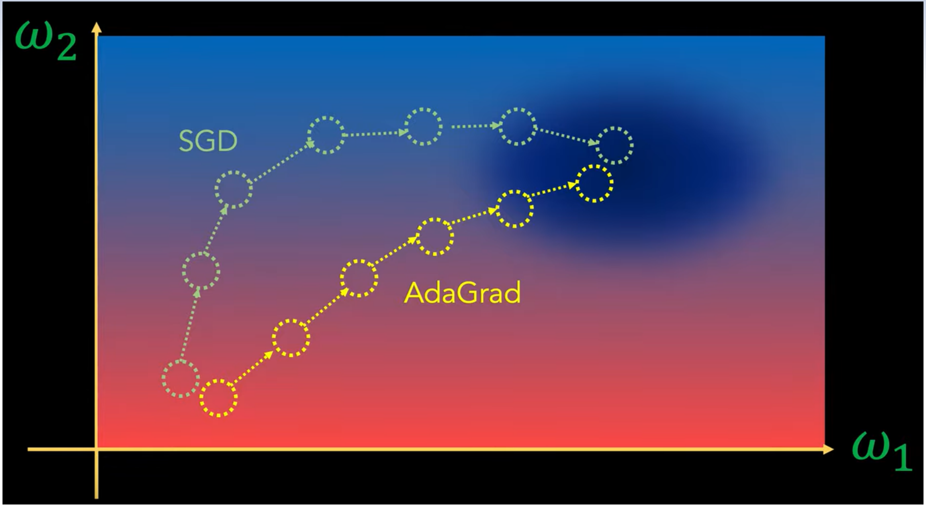
$m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1-\beta_1) \cdot g_t$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t]$)

$v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1-\beta_2) \cdot g_t^2$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t^2]$)

$\theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot m_t / (\sqrt{v_t} + \varepsilon)$ (Mise à jour)

fin

Sorties : θ_t



Youtube, *Optimization for Deep Learning*

L'algorithme Adam

Algorithme : Adam

Entrées : $f(\theta)$, α, β_1, β_2, ε, θ_0

$m_0 \longleftarrow 0$

$v_0 \longleftarrow 0$

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

$\quad t \longleftarrow t + 1$

$\quad g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$

$\quad m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t]$)

$\quad v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot g_t^2$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t^2]$)

$\quad \theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot m_t / (\sqrt{v_t} + \varepsilon)$ (Mise à jour)

fin

Sorties : θ_t

L'algorithme Adam

Algorithme : Adam

Entrées : $f(\theta)$, α, β_1, β_2, ε, θ_0

$m_0 \longleftarrow 0$

$v_0 \longleftarrow 0$

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

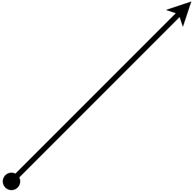
- $t \longleftarrow t + 1$
- $g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$
- $m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t]$)
- $v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot g_t^2$ (Estimateur de $\mathbb{E}[g_t^2]$)
- $\widehat{m}_t \longleftarrow m_t / (1 - \beta_1^t)$ (« débiaisage »)
- $\widehat{v}_t \longleftarrow v_t / (1 - \beta_2^t)$
- $\theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot \widehat{m}_t / (\sqrt{\widehat{v}_t} + \varepsilon)$ (Mise à jour)

fin

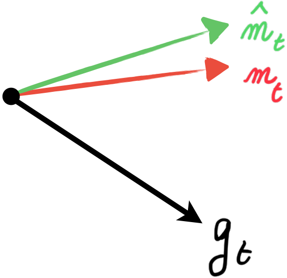
Sorties : θ_t

Correction de biais

Gradient à l'instant *t-1*



À l'instant *t*

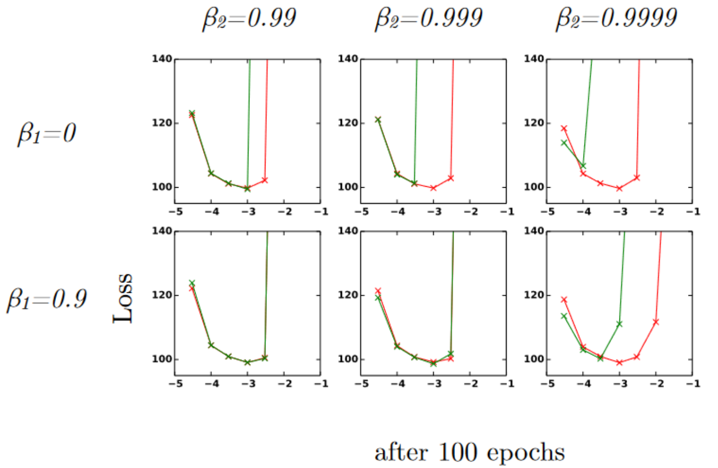


Correction de biais

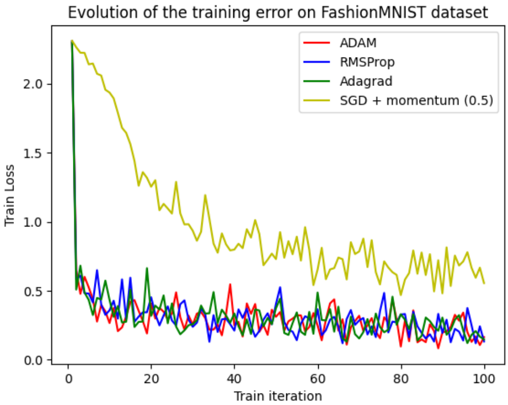
$$m_t = (1 - \beta_1) \sum_{i=1}^{t} \beta_1^{t-i} \cdot g_i$$

$$\mathbb{E}[m_t] = \mathbb{E}[g_t]\underbrace{(1 - \beta_1^t)}_{<1} + \zeta$$

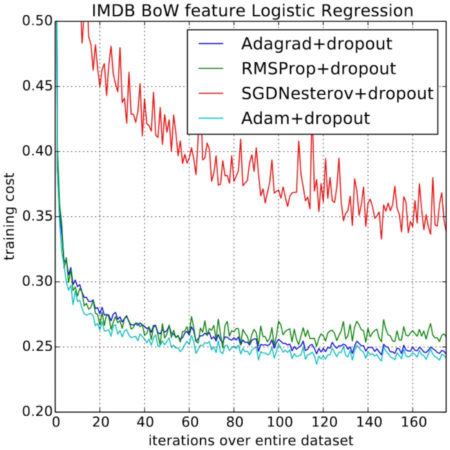
$$\widehat{m}_t \longleftarrow m_t / (1 - \beta_1^t)$$

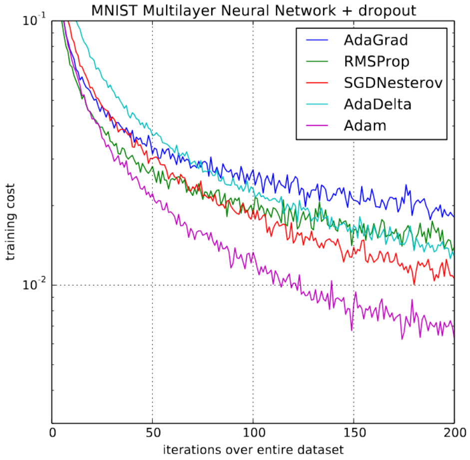


Simulations numériques



Simulations numériques





Résultat de convergence

On définit le regret par :

$$R(T) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\theta_t) - \min_{\theta \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\theta)$$

Théorème

Sous certaines hypothèses de majoration du gradient de f_t, et de l'écart entre les valeurs de θ_n on a :

$$\frac{R(T)}{T} = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

Conclusion

ADAM est un algorithme :

- facilement implémentable
- peu gourmand en mémoire
- efficace dans de nombreux cas

D'où son succès !

Limite de l'article : manque de support théorique

MERCI !