ADAM : Une méthode pour l'optimisation stochastique

Guillaume BERNARD-REYMOND, Guillaume BOULAND,
Camille MOTTIER, Abel SILLY

14 octobre 2024

L'article

Adam : A Method for Stochastic Optimization

Diederik P. Kingma
Université d'Amsterdam, OpenAI

Jimmy Lei Ba
Université de Toronto

Première année de publication : 2014

L'objectif

$f(\theta)$: fonction-objectif stochastique

Exemple : $f(\theta) = \sum_{i=1}^{n} L(x_i|\theta)$

Mini-batch : $f_t(\theta) = \sum_{i \in I_t} L(x_i|\theta)$

Objectif : minimiser $\mathbb{E}[f(\theta)]$

Méthode d'ordre 1

Rappel : Qu'est-ce qu'une méthode d'ordre 1 ? Évaluation de $f(\theta)$ et de $\nabla_\theta f(\theta)$

Algorithme 1 : Descente de gradient stochastique

Entrées : $f(\theta)$, α, θ_0

$t \longleftarrow 0$

tant que θ_t *ne converge pas* **faire**

  $t \longleftarrow t + 1$

  $g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$

  $\theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot g_t(\theta_{t-1})$

fin

Sorties : θ_t

L'algorithme

Entrées : $f(\theta)$, α, β_1, β_2, ε, θ_0

$m_0 \longleftarrow 0$
$v_0 \longleftarrow 0$
$t \longleftarrow 0$

Tant que θ_t ne converge pas

$t \longleftarrow t+1$
$g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$
$m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1-\beta_1) \cdot g_t$
$v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1-\beta_2) \cdot g_t^2$
$\widehat{m}_t \longleftarrow m_t / (1-\beta_1^t)$
$\widehat{v}_t \longleftarrow v_t / (1-\beta_2^t)$
$\theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot \widehat{m}_t / (\sqrt{\widehat{v}_t} + \varepsilon)$

Sorties : θ_t

Explications

$f_1, \ldots, f_T$: fonction f restreinte à des mini-batches aléatoires

Explications

$f_1, \ldots, f_T$: fonction f restreinte à des mini-batches aléatoires
$g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$: mise à jour du gradient

Explications

$f_1, \ldots, f_T$: fonction f restreinte à des mini-batches aléatoires
$g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$: mise à jour du gradient

$$\left.\begin{array}{l} m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1-\beta_1) \cdot g_t \\ v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1-\beta_2) \cdot g_t^2 \end{array}\right\} \text{ : mise à jour des moments d'ordre 1 et 2 par moyenne mobile}$$

Explications

$f_1, \ldots, f_T$: fonction f restreinte à des mini-batches aléatoires
$g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$: mise à jour du gradient

$$\left.\begin{array}{l} m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1-\beta_1)\cdot g_t \\ v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1-\beta_2)\cdot g_t^2 \end{array}\right\}$$

: mise à jour des moments d'ordre 1 et 2 par moyenne mobile

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{m}_t \longleftarrow m_t/(1-\beta_1^t) \\ \widehat{v}_t \longleftarrow v_t/(1-\beta_2^t) \end{array}\right\}$$

: débiaisage des moments d'ordre 1 et 2

Explications

$f_1, \dots, f_T$: fonction f restreinte à des mini-batches aléatoires
$g_t \longleftarrow \nabla_\theta f_t(\theta_{t-1})$: mise à jour du gradient

$$\left.\begin{array}{l} m_t \longleftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1-\beta_1) \cdot g_t \\ v_t \longleftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1-\beta_2) \cdot g_t^2 \end{array}\right\}$$: mise à jour des moments d'ordre 1 et 2 par moyenne mobile

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{m}_t \longleftarrow m_t/(1-\beta_1^t) \\ \widehat{v}_t \longleftarrow v_t/(1-\beta_2^t) \end{array}\right\}$$: débiaisage des moments d'ordre 1 et 2

$\theta_t \longleftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot \widehat{m}_t/(\sqrt{\widehat{v}_t} + \varepsilon)$: Mise à jour de θ_t

Résultats de convergence

On définit le regret par :

$$R(T) = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{T} f_t(x)$$

Théorème

Sous certaines hypothèses de majoration du gradient de f_t, et de l'écart entre les valeurs de θ_n on a :

$$\frac{R(T)}{T} = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

Simulations numériques

Mettre images et commenter