

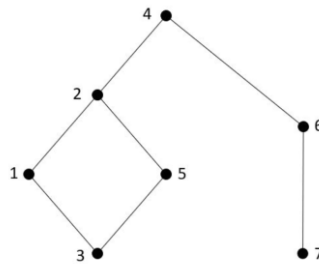
UTEC, UTC501. Devoir maison n°2

Exercice1. Relation d'ordre – Tri topologique

Soit (A, \leq) un ensemble partiellement ordonné. On appelle *tri topologique* toute relation d'ordre total \leq' sur A tel que :

$$\forall a, b \in A: (a \leq b) \Rightarrow (a \leq' b)$$

On considère le diagramme de Hasse suivant, associé à un ensemble partiellement ordonné (A, \leq) :



Proposer quelques tris topologiques de (A, \leq) . Les représenter par leur diagramme de Hasse.

Exercice2. Equation diophantienne – Algorithme d'Euclide

1° Soit l'équation $ax = by + c$ avec a, b, c entiers. On recherche les solutions x, y entières.

Montrer que si x_0, y_0 est solution, il en est de même pour $x_0 + kb, y_0 + ka$ pour tout k entier.

2° On considère l'équation $25x = 31y - 1$ avec x et y entiers. Remarquant que 25 et 31 sont premiers entre eux, utiliser l'algorithme d'Euclide (étendu) pour résoudre cette équation.

3° Alice change sa clé tous les 25 jours. Bob change sa clé tous les 31 jours. Sachant qu'Alice a changé sa clé aujourd'hui et que Bob a changé sa clé 3 jours auparavant, on voudrait savoir dans combien de jours Alice et Bob changeront de clé au même moment.

A° Poser l'équation qui permet de répondre à la question.

B° En utilisant, le résultat de la question précédente 2°, résoudre l'équation.

C° Déterminer quand aura lieu la deuxième synchronisation.

Exercice3. Système d'équations linéaires. Equation normale.

Soit A une matrice de m lignes et n colonnes avec $m > n$, b un vecteur colonne de m coordonnées. Le système d'équations $Ax = b$ comporte plus d'équations que d'inconnues ($m > n$) et est souvent sans solution. La méthode des moindres carrés consiste à rechercher x qui minimise la distance entre Ax et b c'est-à-dire qui minimise $\|Ax - b\|^2$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. L'objectif est de trouver un x qui satisfait au « mieux » les équations c'est-à-dire un x tel que Ax soit le plus proche possible de b .

On montre que x minimise $\|Ax - b\|^2$ si et seulement si x est solution de l'équation dite *normale* $A^T Ax = A^T b$ où A^T désigne la matrice transposée de A .

On a un système représenté par une boîte « noire » admettant une entrée e et une sortie s . On a effectué 3 relevés de s pour 3 entrées e . Les 3 couples (e, s) mesurés sont les suivants : (1,2), (2,3), (3,3). On voudrait établir une relation entre e et s de la forme suivante : $s = f(e) = x_0 + x_1 e$.

1° Etablir le système d'équations linéaires que doivent satisfaire x_0, x_1 .

2° Appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan pour montrer que ce système n'a pas de solution.

3° En s'appuyant sur la méthode des moindres carrés, résoudre l'équation normale pour déterminer x_0, x_1 .