

## ED n° 3 – Résolution des systèmes linéaires

### Exercice 1

Résoudre les 4 systèmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Si l'un des systèmes admet une infinité de solutions, décrire cette infinité de solutions.

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} & (II) \quad & \begin{cases} -y + z = 2 \\ x + 5y - z = 3 \\ 2x + 9y - z = 7 \end{cases} \\
 (III) \quad & \begin{cases} 3x - 6y + 9z = 18 \\ 2x + y - 2z = 8 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases} & (IV) \quad & \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 3y + z = 22 \\ y - z = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

### Exercice 2

Inverser la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Quelle est la valeur du déterminant de  $M$ ?

### Exercice 3 – Méthode des moindres carrés - Equation normale

Soit  $A$  une matrice de  $m$  lignes et  $n$  colonnes avec  $m > n$ ,  $b$  un vecteur colonne de  $m$  coordonnées. Le système d'équations  $Ax = b$  comporte plus d'équations que d'inconnues ( $m > n$ ) et est souvent sans solution. La méthode des moindres carrés consiste à rechercher  $x$  qui minimise la distance entre  $Ax$  et  $b$  c'est-à-dire qui minimise  $\|Ax - b\|^2$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. L'objectif est de trouver un  $x$  qui satisfait au « mieux » les équations c'est-à-dire un  $x$  tel que  $Ax$  soit le plus proche possible de  $b$ . On montre que  $x$  minimise  $\|Ax - b\|^2$  si et seulement si  $x$  est solution de l'équation dite *normale*  $A^T Ax = A^T b$  où  $A^T$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a° Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre le système  $Ax = b$ . Ce système a-t-il une solution ?

b° Appliquer la méthode des moindres carrés pour trouver une bonne solution approchée. Pour cela, résoudre l'équation normale.

2. Soient les 3 points de  $\mathbb{R}^3$  :  $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Soit le point  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

On note  $P$  le plan passant par les points  $A_0, A_1, A_2$ . On voudrait savoir si le point  $b$  appartient au plan  $P$ . Répondre à cette question revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 & = & b \\ x_0 + x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}$$

a° Appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan pour savoir si ce système a une solution.

Ce système n'admettant pas de solution, nous allons chercher la projection de  $b$  sur  $P$  c'est-à-dire le point de  $P$  le plus proche de  $b$ . Pour cela, en utilisant la dernière équation du système, on remplace  $x_0$  par  $1 - x_1 - x_2$ . Cela donne le nouveau système, ci-dessous, avec une équation en moins :

$$x_1(A_1 - A_0) + x_2(A_2 - A_0) = b - A_0$$

b° Poser et résoudre l'équation normale associée à ce nouveau système.

c° A partir de la solution  $x_1, x_2$  trouvée, calculer  $x_0 = 1 - x_1 - x_2$  et en déduire la projection de  $b$  sur  $P$ .

### Exercice 4 – Un exemple de décomposition en éléments simples

Trouver  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-x^2 + 11x - 1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\alpha x + \beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{x+2}$$

### Exercice 5

Trouver  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que pour tout polynôme  $P(x)$  de degré 3 :

$$\int_2^4 P(x) \, dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$$