

ED n° 0 – Outils mathématiques - Élément de logique

Exercice 1

1° Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ n'implique pas $a = b$.

2° Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \geq 0$, $b \geq 0$, montrer que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ implique $a = b$. Faire une démonstration par l'absurde.

Exercice 2

Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier. Faire une démonstration par l'absurde : poser $a = \sqrt{n^2 + 1}$, supposer a entier et trouver une contradiction sur la quantité $a + n$.

Exercice 3

1° Soient a et b , 2 entiers positifs tels que $b - a \geq 2$.

Montrer par récurrence sur p , que $(a + 1)^p + (b - 1)^p \leq a^p + b^p$ pour tout entier $p \geq 1$.

2° Soit $p \geq 1$ un entier, $n \geq 2$ un autre entier et un réel (entier ou pas) $K \geq 0$. Ces 3 paramètres sont fixés. On considère le problème (P) suivant :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \sum_{i=1}^n x_i^p \\ & \text{sous la contrainte } \sum_{i=1}^n x_i \geq K \\ & \text{avec } x_i \in \mathbb{N} \ i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

On note x^* une solution optimale et x_i^* ses coordonnées pour $i = 1, \dots, n$. Montrer qu'il existe une solution optimale x^* telle que $\forall i \neq j \ |x_i^* - x_j^*| \leq 1$.

3° Application numérique. Résoudre le problème (P) pour $n = 4$, $K = 10$, $p = 2$.