

# UE UTC501 - Outils mathématiques pour l'informatique

## Cours 3 - Résolution des systèmes linéaires

Alain Faye

Cnam

2024-2025

# Plan du cours

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
  - Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
  - Existence et unicité des solutions
  - Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
  - Méthode de Gauss-Jordan
- 5 Suites et séries

# Plan

## 1 Éléments de logique

## 2 Relations et ordres

## 3 Éléments d'arithmétique

## 4 Résolution des systèmes linéaires

- Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
- Existence et unicité des solutions
- Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
- Méthode de Gauss-Jordan
  - Algorithme
  - Pseudocode
  - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
  - Stabilité et complexité de l'algorithme
  - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan

## 5 Suites et séries

# Plan

## 1 Éléments de logique

## 2 Relations et ordres

## 3 Éléments d'arithmétique

## 4 Résolution des systèmes linéaires

- Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
- Existence et unicité des solutions
- Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
- Méthode de Gauss-Jordan
  - Algorithme
  - Pseudocode
  - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
  - Stabilité et complexité de l'algorithme
  - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan

## 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
  - Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
  - Existence et unicité des solutions
  - Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
  - Méthode de Gauss-Jordan
    - Algorithme
    - Pseudocode
    - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
    - Stabilité et complexité de l'algorithme
    - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
  - Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
  - Existence et unicité des solutions
  - Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
  - Méthode de Gauss-Jordan
    - Algorithme
    - Pseudocode
    - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
    - Stabilité et complexité de l'algorithme
    - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
  - Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
  - Existence et unicité des solutions
  - Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
  - Méthode de Gauss-Jordan
    - Algorithme
    - Pseudocode
    - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
    - Stabilité et complexité de l'algorithme
    - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan
- 5 Suites et séries

# Système d'équations linéaires

- Un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues.
- En général, un système de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les inconnues.



# Forme matricielle d'un système linéaire

- Un système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice de taille  $m \times n$ ,  $\mathbf{x}$  est un vecteur de taille  $n$  et  $\mathbf{b}$  un vecteur de taille  $m$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

# Plan

## 1 Éléments de logique

## 2 Relations et ordres

## 3 Éléments d'arithmétique

## 4 Résolution des systèmes linéaires

- Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
- **Existence et unicité des solutions**
- Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
- Méthode de Gauss-Jordan
  - Algorithme
  - Pseudocode
  - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
  - Stabilité et complexité de l'algorithme
  - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan

## 5 Suites et séries

# Cas possibles pour un système linéaire

- Soit le système linéaire

$$Ax=b$$

avec :

- ▶  $x$  vecteur contenant les  $n$  variables **réelles** recherchées.
  - ▶  $A$  matrice de taille  $m \times n$  contenant des coefficients **réels**.
  - ▶  $b$  vecteur contenant  $m$  **réels**.
- Seulement 3 cas sont possibles pour ce système linéaire :
    - ▶ Le système n'a pas de solution
    - ▶ Le système a une solution unique
    - ▶ Le système a une infinité de solutions.

# Cas possibles pour un système linéaire

## Exercice

Les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ -4x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 14 \\ 16x_1 - 12x_2 = 2 \end{cases} \quad (3)$$

# Cas possibles pour un système linéaire

## Exercice – Correction

Les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ -4x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$$

# Cas possibles pour un système linéaire

## Exercice – Correction

Les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ -4x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$$

- Le système précédent admet une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

# Cas possibles pour un système linéaire

## Exercice – Correction

Les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ -4x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$$

- Le système précédent admet une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- Le système précédent admet une unique solution.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 14 \\ 16x_1 - 12x_2 = 2 \end{cases}$$

# Cas possibles pour un système linéaire

## Exercice – Correction

Les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ -4x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$$

- Le système précédent admet une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- Le système précédent admet une unique solution.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 14 \\ 16x_1 - 12x_2 = 2 \end{cases}$$

- Le système précédent n'admet pas de solution.



# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (1)

### Définition

Le **rang** d'une matrice  $A$ , noté  $\text{rg}(A)$  est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

### Remarque

Si  $A$  est de taille  $m \times n$ , alors  $\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$ .

### Remarque

$\text{rg}(A)$  est également la taille de la plus grande sous-matrice carrée inversible que l'on peut extraire de  $A$ .

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (1) – Exercice

- **Exercice** : Quel est le rang de cette matrice ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (1) – Exercice

- **Exercice** : Quel est le rang de cette matrice ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Correction** : Notons  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  les lignes de la matrice  $A$ .
  - Au moins une des lignes est non nulle, donc  $\text{rg}(A) \geq 1$ .

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (1) – Exercice

- **Exercice** : Quel est le rang de cette matrice ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Correction** : Notons  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  les lignes de la matrice  $A$ .
  - ▶ Au moins une des lignes est non nulle, donc  $\text{rg}(A) \geq 1$ .
  - ▶  $l_1$  et  $l_2$  sont linéairement indépendantes. En effet, il n'existe pas de réel  $\lambda$  tel que  $l_2 = \lambda l_1$ , donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ .

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (1) – Exercice

- **Exercice** : Quel est le rang de cette matrice ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Correction** : Notons  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  les lignes de la matrice  $A$ .
  - ▶ Au moins une des lignes est non nulle, donc  $\text{rg}(A) \geq 1$ .
  - ▶  $l_1$  et  $l_2$  sont linéairement indépendantes. En effet, il n'existe pas de réel  $\lambda$  tel que  $l_2 = \lambda l_1$ , donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ .
  - ▶  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_4$  sont linéairement indépendantes. En effet, il n'existe pas de réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $l_4 = \lambda l_1 + \mu l_2$ , donc  $\text{rg}(A) \geq 3$ .

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (1) – Exercice

- **Exercice** : Quel est le rang de cette matrice ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Correction** : Notons  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  les lignes de la matrice  $A$ .
  - ▶ Au moins une des lignes est non nulle, donc  $\text{rg}(A) \geq 1$ .
  - ▶  $l_1$  et  $l_2$  sont linéairement indépendantes. En effet, il n'existe pas de réel  $\lambda$  tel que  $l_2 = \lambda l_1$ , donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ .
  - ▶  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_4$  sont linéairement indépendantes. En effet, il n'existe pas de réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $l_4 = \lambda l_1 + \mu l_2$ , donc  $\text{rg}(A) \geq 3$ .
  - ▶ Mais  $l_3 = 2l_1 + l_2 - l_4$  :  $l_3$  n'est pas linéairement indépendante de  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_4$  d'où

$$\text{rg}(A) = 3$$

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (2)

### Théorème (Rouché-Fontené)

Soit le système suivant  $Ax=b$  avec

- $x$  vecteur contenant les  $n$  variables *réelles* recherchées.
- $A$  matrice de taille  $m \times n$  contenant des coefficients *réels*.
- $b$  vecteur contenant  $m$  *réels*.

Ce système admet une solution *si et seulement si*

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

De plus, si  $\text{rg}(A) = n$ , alors le système admet une unique solution. Sinon le système admet une infinité de solutions.

$((A|b))$  est appelée matrice augmentée.)

# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (2) – Exemple 1

- Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

- La matrice  $A$  des coefficients et la matrice augmentée  $(A|b)$  sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

- Puisque ces deux matrices ont le même rang (2), il existe au moins une solution. Et puisque leur rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues (3), il y a une infinité de solutions.



# Existence et unicité des solutions

## Un peu de théorie (2) – Exemple 2

- Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

- La matrice  $A$  des coefficients et la matrice augmentée  $(A|b)$  sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

- La matrice  $A$  est de rang 2, tandis que la matrice  $(A|b)$  est de rang 3.
- Donc ce système d'équations n'a pas de solution.
- En effet, une augmentation du nombre de lignes linéairement indépendantes rend le système d'équations incohérent.

# Plan

## 1 Éléments de logique

## 2 Relations et ordres

## 3 Éléments d'arithmétique

## 4 Résolution des systèmes linéaires

- Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
- Existence et unicité des solutions
- **Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$**
- Méthode de Gauss-Jordan
  - Algorithme
  - Pseudocode
  - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
  - Stabilité et complexité de l'algorithme
  - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan

## 5 Suites et séries

# Méthodes de résolution d'un système linéaire $Ax = b$

- Il existe de nombreuses méthodes permettant à la fois de calculer le rang de la matrice  $A$  du système (et donc de connaître le nombre de solutions) et de trouver, s'il en existe une, la ou les solutions du systèmes.
- Méthodes “directes” :
  - ▶ élimination de Gauss-Jordan (ou méthode des pivots de Gauss)
  - ▶ décomposition LU (si  $A$  est une matrice carrée)
  - ▶ décomposition en valeurs singulières
  - ▶ décomposition QR, ...
- Méthodes “itératives” (si  $A$  est une matrice carrée) :
  - ▶ méthode de Jacobi
  - ▶ méthode de Gauss-Seidel
  - ▶ méthode SOR, ...
- D'autres méthodes existent si  $A$  possède des propriétés particulières (par ex. si  $A$  est symétrique, factorisation de Cholesky)
- Nous allons nous intéresser à la méthode de Gauss-Jordan.

# Plan

## 1 Éléments de logique

## 2 Relations et ordres

## 3 Éléments d'arithmétique

## 4 Résolution des systèmes linéaires

- Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
- Existence et unicité des solutions
- Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
- **Méthode de Gauss-Jordan**
  - Algorithme
  - Pseudocode
  - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
  - Stabilité et complexité de l'algorithme
  - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan

## 5 Suites et séries

# Résolution du système linéaire $Ax = b$

## Méthode d'élimination de Gauss-Jordan

- En algèbre linéaire, l'élimination de Gauss-Jordan, aussi appelée méthode du pivot de Gauss, nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est un **algorithme** pour :
  - ▶ déterminer les solutions d'un **système d'équations linéaires**,
  - ▶ déterminer le **rang d'une matrice**
  - ▶ ou pour calculer **l'inverse d'une matrice** (carrée) inversible.
- Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss à une matrice, on obtient sa forme *échelonnée réduite*.

(Source : Wikipedia - Élimination de Gauss-Jordan)

# Méthode de Gauss-Jordan

## Matrice échelonnée – Définition

- Une matrice est dite **échelonnée** en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(les \* désignent des coefficients quelconques, les  $\oplus$  des pivots, coefficients non nuls)

# Méthode de Gauss-Jordan

## Matrice échelonnée réduite – Définition

- Une matrice échelonnée est dite **matrice échelonnée réduite**, ou matrice canonique en lignes, si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls. La matrice échelonnée réduite associée à l'exemple précédent est :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Méthode de Gauss-Jordan

## Algorithme – Opérations

- L'algorithme de Gauss-Jordan produit la **matrice échelonnée réduite** d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.
- Trois types d'opérations élémentaires sont utilisées :
  - ▶ **Échange** de deux lignes ;
  - ▶ **Multiplication** d'une ligne par un scalaire non nul ;
  - ▶ **Ajout** du multiple d'une ligne à une autre ligne.



# Méthode de Gauss-Jordan

## Algorithme – Pseudocode

**Algorithme Gauss-Jordan**(A : matrice de dimensions  $m \times n$ )

```
r = 0
Pour j de 1 jusqu'à n
    Rechercher max(|A[i,j]|,  $r+1 \leq i \leq m$ ).
    Noter k l'indice de ligne du maximum
    Si A[k,j] ≠ 0 alors
        r=r+1
        Diviser la ligne k par A[k,j]

        Échanger les lignes k et r
        Pour i de 1 jusqu'à m
            Si i ≠ r alors
                Soustraire à la ligne i la
                    ligne r multipliée par A[i,j]
            Fin Si
        Fin Pour
    Fin Si
Fin Pour
Fin Gauss-Jordan
```

### Commentaires :

$r$  est l'indice de ligne du dernier pivot trouvé

$j$  décrit tous les indices de colonnes

A[k, j] est le pivot

$r$  désigne l'indice de la future ligne servant de pivot

On normalise la ligne de pivot de façon que le pivot prenne la valeur 1

On place la ligne du pivot en position  $r$

On simplifie les autres lignes

de façon à annuler A[i, j]

# Méthode de Gauss-Jordan

## Exemple

- On part de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- Première itération**,  $j = 1$  (et  $r = 0$ ) :
  - étape 1.1** : on cherche dans la première colonne de la matrice la valeur maximale des valeurs absolues des coefficients. Elle vaut 2, située en  $(1, 1)$ , de sorte que  $k = 1$ ,
  - étape 1.2.1** :  $r = 1$ ,
  - étape 1.2.2** :  $r = k$ , il n'y a pas d'échange,
  - étape 1.2.3** : on divise la ligne 1 par  $A(1, 1) = 2$ , soit  $(1 \quad -1/2 \quad 0)$ ,
  - étape 1.2.4** :
    - ★ ligne  $i = 2$ , on a  $A(2, 1) = -1$ ; on calcule  $(-1 \quad 2 \quad -1) - (-1) \times (1 \quad -1/2 \quad 0) = (0 \quad 3/2 \quad -1)$ ,
    - ★ ligne  $i = 3$ , on a  $A(3, 1) = 0$ , la ligne n'est donc pas modifiée,
  - la matrice est alors  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

# Méthode de Gauss-Jordan

## Exemple (suite)

- la matrice est alors  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  ;
- Deuxième itération**,  $j = 2$  (et  $r = 1$ ) :
  - ▶ **étape 2.1** : on cherche dans les lignes 2 à 3 de la deuxième colonne la valeur maximale en valeur absolue. Il s'agit de  $3/2$ , situé en  $(2, 2)$ ,
  - ▶ **étape 2.2.1** :  $r = 2$ ,
  - ▶ **étape 2.2.2** :  $r = k$ , il n'y a pas d'échange.
  - ▶ **étape 2.2.3** : on divise la ligne 2 par  $A'(2, 2) = 3/2$ , soit  $(0 \ 1 \ -2/3)$ ,
  - ▶ **étape 2.2.4** :
    - ★ ligne  $i = 1$ , on a  $A'(1, 2) = -1/2$ ; on calcule  $(1 \ -1/2 \ 0) - (-1/2) \times (0 \ 1 \ -2/3) = (1 \ 0 \ -1/3)$ ,
    - ★ ligne  $i = 3$ , on a  $A'(3, 2) = -1$ ; on calcule  $(0 \ -1 \ 2) - (-1) \times (0 \ 1 \ -2/3) = (0 \ 0 \ 4/3)$ ,
  - ▶ la matrice est alors  $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$

# Méthode de Gauss-Jordan

## Exemple (fin)

- La matrice est alors  $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$
- **Troisième itération**,  $j = 3$  (et  $r = 2$ ) :
  - ▶ **étape 3.1** : le pivot de la 3<sup>ème</sup> colonne, 3<sup>ème</sup> ligne est  $4/3$ . Donc  $k = 3$
  - ▶ **étape 3.2.1** :  $r = k$ ,
  - ▶ **étape 3.2.2** : il n'y a aucune ligne à permuter,
  - ▶ **étape 3.2.3** : on divise la ligne 3 par  $A''(3,3) = 4/3$ , elle devient  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - ▶ **étape 3.2.4** :
    - ★ ligne  $i = 1$ , on a  $A''(1,3) = -1/3$ . La dernière étape annule ce coeff.
    - ★ ligne  $i = 2$ , on a  $A''(2,3) = -2/3$ . La dernière étape annule ce coeff.
  - ▶ la matrice est alors  $A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui est réduite échelonnée.

# Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de $Ax = b$

- L'élimination de Gauss-Jordan peut résoudre un système d'équations  $Ax = b$ , où  $A$  est une matrice  $m \times n$  de rang  $r$ ,  $b$  est un vecteur fixé, et  $x$  le vecteur inconnu. On crée un tableau à  $m$  lignes et  $n + 1$  colonnes en bordant la matrice  $A$  par le vecteur  $b$ . On réduit la matrice sous forme échelonnée réduite.
- Si les pivots de la matrice échelonnée réduite associée à  $(A|b)$  sont situés uniquement dans les  $n$  premières colonnes (ce qui est toujours le cas si  $r = m$ ) et ont pour indice de colonnes  $k_1, \dots, k_r$ , alors la dernière colonne fournit une solution particulière, obtenue en prenant tous ses termes nuls sauf ceux situés à la ligne d'indice  $k_i$  et à qui on donne la valeur du terme situé à la ligne  $i$  de la dernière colonne,  $i$  variant de 1 à  $r$ .

# Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de $Ax = b$

## Suite

- On obtient la solution générale du système en ajoutant à cette solution particulière un élément quelconque du noyau de  $A$ . Celle-ci s'obtient en donnant des valeurs quelconques aux coefficients de  $x$  situés à un indice de ligne autre que les  $k_i$ , et en déterminant les coefficients situés aux lignes d'indice  $k_i$  de façon à satisfaire le système (ce qui est facile compte tenu de la forme échelonnée de la matrice).
- Si le dernier pivot de la matrice échelonnée réduite associée à  $(A|b)$  se situe dans la dernière colonne, alors il n'y a pas de solution.
- Si la matrice  $A$  est carrée inversible (autrement dit, le système est de Cramer), alors on obtient dans la dernière colonne l'unique solution  $x$  du système.

# Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de $Ax = b$

## Variante

- **Variante** : dans l'algorithme précédent, si on se borne à obtenir une matrice échelonnée (non réduite), on obtient une matrice triangulaire supérieure. Il ne reste plus qu'à “remonter” pour retrouver les valeurs des coefficients de  $x$ .

## Exemple 1 – Solution unique

- Soit le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

- On établit la matrice correspondante :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right)$$



# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 1

- On commence par la colonne 1. Le pivot est le maximum en valeur absolue entre 1, 3 et 2, soit 3 :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ (3) & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right)$$

- On divise la ligne où se trouve le pivot, ici la ligne 2, par le pivot qui est toujours  $\neq 0$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right)$$

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 1

- On échange les lignes 1 et 2 :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \text{devient : } \left( \begin{array}{ccc|c} (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right)$$

- On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot, au-dessus (s'il en existe), et en-dessous (s'il en existe).

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 1

- On analyse les lignes autres que celle du pivot :

- ▶ Ligne 2, on a  $A(2,1) = 1$ . On calcule :

$$(1 \quad -1 \quad 2 \quad 5) - (1) \times (1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{10}{3}) = (0 \quad -\frac{5}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{3})$$

- ▶ Ligne 3, on a  $A(3,1) = 2$ . On calcule :

$$(2 \quad -3 \quad -2 \quad -10) - (2) \times (1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{10}{3}) = (0 \quad -\frac{13}{3} \quad -\frac{8}{3} \quad -\frac{50}{3})$$

- On remplace les lignes 2 et 3 ainsi calculées :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \text{devient : } \left( \begin{array}{ccc|c} (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} \end{array} \right)$$

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 2

- On passe à la colonne 2. Le pivot est le maximum en valeur absolue entre  $-\frac{5}{3}$  et  $-\frac{13}{3}$ , soit  $-\frac{13}{3}$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & (-\frac{13}{3}) & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} \end{array} \right)$$

- On divise la ligne où se trouve ce pivot, c-à-d. la ligne 3, par le pivot :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & (1) & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \end{array} \right)$$

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 2

- On échange les lignes 2 et 3 :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & (1) & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \end{array} \right) \rightarrow \text{devient : } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & (1) & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right)$$

- On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot, au-dessus (s'il en existe), et en-dessous (s'il en existe).

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 2

- On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot.

- ▶ Ligne 1, on a  $A(1,2) = \frac{2}{3}$ . On calcule :

$$\left(1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{10}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(0 \quad 1 \quad \frac{8}{13} \quad \frac{50}{13}\right) = \left(1 \quad 0 \quad -\frac{1}{13} \quad \frac{10}{13}\right)$$

- ▶ Ligne 3, on a  $A(3,2) = -\frac{5}{3}$ . On calcule :

$$\left(0 \quad -\frac{5}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(0 \quad 1 \quad \frac{8}{13} \quad \frac{50}{13}\right) = \left(0 \quad 0 \quad \frac{35}{13} \quad \frac{105}{13}\right)$$

- On remplace les lignes 1 et 3 ainsi calculées :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & (1) & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \rightarrow \text{devient : } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & (1) & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ 0 & 0 & \frac{35}{13} & \frac{105}{13} \end{array}\right)$$

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 3

- On passe à la colonne 3. Le pivot est  $\frac{35}{13}$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ 0 & 0 & \left(\frac{35}{13}\right) & \frac{105}{13} \end{array} \right)$$

- On divise la ligne où le pivot se trouve (c.à.d. la ligne 3) par le pivot :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{array} \right)$$

- Comme ce pivot est déjà ligne 3, on n'a pas besoin d'échanger de lignes.

# Exemple 1 – Solution unique – Suite

## Colonne 3

- On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot.

► Ligne 1, on a  $A(1,3) = -\frac{1}{13}$ . On calcule :

$$\left(1 \quad 0 \quad -\frac{1}{13} \quad \frac{10}{13}\right) - \left(-\frac{1}{13}\right) \times (0 \quad 0 \quad 1 \quad 3) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

► Ligne 2, on a  $A(2,3) = \frac{8}{13}$ . On calcule :

$$\left(0 \quad 1 \quad \frac{8}{13} \quad \frac{50}{13}\right) - \left(\frac{8}{13}\right) \times (0 \quad 0 \quad 1 \quad 3) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 2)$$

- On remplace les lignes 1 et 2 ainsi calculées :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{devient : } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{array} \right)$$



# Exemple 1 – Solution unique – Fin

## Conclusion

- Toutes les colonnes à gauche de la barre verticale ont été traitées et la dernière matrice obtenue est donc :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

- Nous sommes en présence d'une matrice échelonnée réduite, avec la matrice identité d'un côté et la valeur des variables de l'autre.
- La solution du système d'équations est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

## Exemple 2 – Infinité de solutions

- Soit le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & - & 5x_5 & = & -6 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array} \right.$$

## Exemple 2

- La matrice échelonnée réduite associée à

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 4 & 8 & 5 & -6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

est

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- Les pivots sont situés aux colonnes d'indice 1 et 3. Une solution particulière est donc :  $x_1 = -5, x_3 = 4, x_2 = x_4 = x_5 = 0$ , ce qui

correspond au vecteur :  $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Exemple 3 – Pas de solution

- Soit le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_5 = -6 \\ 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

- La matrice échelonnée réduite associée à

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 4 & 8 & 5 & -6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ est } \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- Il n'y a pas de solution.

# Stabilité numérique

- La première section de l'algorithme, soit l'échange de ligne avec la valeur de pivot la plus grande, a pour but d'améliorer la stabilité numérique de l'algorithme.
- Cette étape tente de minimiser les erreurs d'arrondis cumulatives causant de l'instabilité numérique.
- Cette stratégie permet en général de remédier à cette instabilité, même si on peut donner des contre-exemples.

# Complexité algorithmique

- La complexité algorithmique asymptotique de l'élimination de Gauss est  $O(n^3)$  (notations de Landau) :  $n \times n$  est la taille de la matrice et le nombre d'instructions à réaliser est proportionnel à  $n^3$ .
- Cet algorithme peut être utilisé sur un ordinateur pour des systèmes avec des milliers d'inconnues et d'équations.
- Cependant, l'algorithme de Strassen, qui est en  $O(n^{2,807})$  a une meilleure complexité algorithmique asymptotique.
- La complexité algorithmique du pivot de Gauss reste  $O(n^3)$  quand la matrice est creuse. En effet, prenons une matrice  $n \times n$  dont seulement  $kn$  entrées sont non nulles mais dont les entrées sont régulièrement réparties sur les lignes et les colonnes, alors au cours de l'algorithme du pivot de Gauss le nombre moyen de valeurs non nulles sur une ligne passera de  $k$  à  $2k$  puis  $3k$  jusqu'à  $n$ . On trouve donc que le nombre d'instructions est de l'ordre de  $nn(n-1)/2$ .

# Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan

- L'algorithme de Gauss-Jordan peut être utilisé également pour :
  - ▶ Déterminer le rang d'une matrice.
  - ▶ Inverser une matrice carrée.
  - ▶ Calculer le déterminant d'une matrice carrée.

# Calcul de l'inverse d'une matrice

- L'élimination de Gauss-Jordan peut être utilisée pour inverser une **matrice carrée** si celle-ci est inversible.
- Pour cela, on crée une matrice à  $n$  lignes et  $2n$  colonnes en bordant la matrice  $A$  par la matrice identité  $I_n$  ce qui génère une **matrice augmentée** notée  $[A|I]$ .
- Si la matrice d'entrée est inversible, on applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée.
- La matrice finale est de la forme  $[I|A^{-1}]$  et contient l'inverse de la matrice initiale dans sa section de droite.



# Calcul de l'inverse d'une matrice

## Pseudocode

On peut modifier légèrement le pseudocode vu précédemment pour l'adapter à l'inversion d'une matrice :

```
Algorithme Inversion-Gauss-Jordan(A : matrice de dimensions  $m \times n$ )
// A désigne ici la matrice augmentée
r = 0
Pour j de 1 jusqu'à n
    Rechercher  $\max(|A[i,j]|, r+1 \leq i \leq m)$ .
    Noter k l'indice de ligne du maximum
    Si  $A[k,j] \neq 0$  alors
        r=r+1
        Diviser la ligne k par  $A[k,j]$ 

        Échanger les lignes k et r
        Pour i de 1 jusqu'à m
            Si  $i \neq r$  alors
                Soustraire à la ligne i la
                    ligne r multipliée par  $A[i,j]$ 
            Fin Si
        Fin Pour
    Sinon A n'est pas inversible, abandonner
        (on sait ici que le rang de la matrice initiale est r)
Fin Pour
Fin Gauss-Jordan
```

# Calcul de l'inverse d'une matrice

## Exemple 1

- Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Pour trouver l'inverse de cette matrice, il faut générer la matrice augmentée  $[A|I]$  comme suit :

$$[A|I] = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice

## Exemple 1 – Suite

- En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient la matrice augmentée sous sa forme échelonnée réduite suivante :

$$[I|B] = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

- On en conclut que l'inverse de la matrice  $A$  est :

$$A^{-1} = B = \left( \begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

# Calcul du rang d'une matrice

## Exemple 2

- On applique l'algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice  $A$  suivante, dont on a déjà calculé le rang (page 15) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- On obtient la matrice échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On en conclut que  $rg(A) = 3$  ( $A$  n'est donc pas inversible)

# Calcul du déterminant d'une matrice

- L'algorithme de Gauss-Jordan permet également de calculer le déterminant d'une matrice  $A$  :

$$\det(A) = (-1)^p \cdot \prod_{j=1}^n (A[k, j])$$

avec  $p$  le nombre de permutations de lignes, et  $A[k, j]$  le pivot noté à l'étape  $j$  de l'algorithme.

- Si l'un des pivots est nul alors le déterminant de la matrice est nul et celle-ci n'est pas inversible.

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
  - Qu'est-ce qu'un système linéaire ?
  - Existence et unicité des solutions
  - Méthodes de résolution d'un système linéaire  $Ax = b$
  - Méthode de Gauss-Jordan
    - Algorithme
    - Pseudocode
    - Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution de  $Ax = b$
    - Stabilité et complexité de l'algorithme
    - Autres utilisations de l'élimination de Gauss-Jordan
- 5 Suites et séries