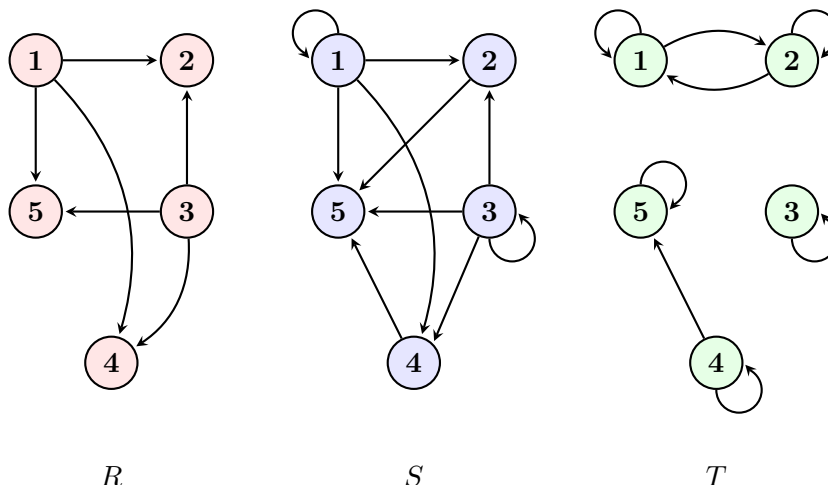


## ED n° 1 – Relations et ordre

**Exercice 1**

Les relations  $R$ ,  $S$  et  $T$  sur  $A = \{1, 2, \dots, 5\}$  décrites par les graphes suivants sont-elles réflexives, antisymétriques, symétriques, transitives ?



On rappelle que l'implication  $P \Rightarrow Q$  est par définition l'expression  $\neg P \vee Q$ . Ainsi si  $P$  est fausse, l'implication est vraie.

**Exercice 2**

Mêmes questions pour les relations  $R$  et  $S$  sur  $\{1, 2, 3, 4\}$  décrites par les matrices booléennes suivantes :

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3**

Mêmes questions pour chacune des relations suivantes :

- a)  $A = \mathbb{Z}$ ,  $(a R b) \iff (a \leq b + 1)$
- b)  $A = \mathbb{N}$ ,  $(a R b) \iff (\exists n \in \mathbb{N} : a = b^n)$
- c)  $A = \mathbb{R}^2$ ,  $((a, b) R (c, d)) \iff ((b - a)(d - c) > 0)$

**Exercice 4**

Sur  $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \text{Div}(18)$  (ensemble des diviseurs de 18), on considère la relation “divise”, notée “ $|$ ”. Représenter le graphe de la relation  $(A, |)$ , puis son diagramme de Hasse.

**Exercice 5**

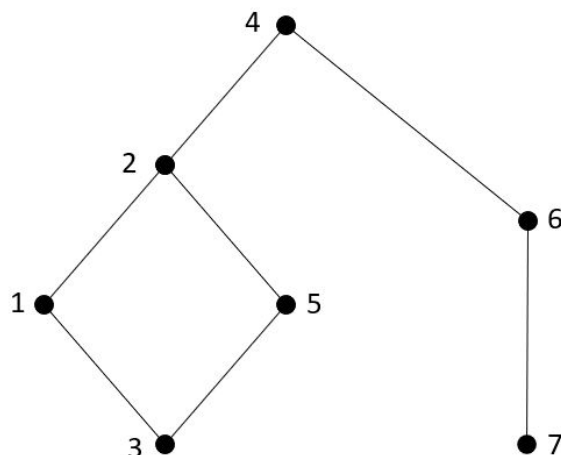
Soit  $E = \{a, b, c\}$ . Représenter le diagramme de Hasse de  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ .

## Exercice 6

Soit  $(A, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné. On appelle tri topologique de  $A$  toute relation d'ordre total  $\leq'$  sur  $A$  telle que :

$$\forall a, b \in A : (a \leq b) \Rightarrow (a \leq' b)$$

Un tri topologique est donc simplement une linéarisation d'un ensemble partiellement ordonné. On considère le diagramme de Hasse suivant, associé à un ensemble ordonné  $(A, \leq)$  :



Effectuer un ou plusieurs tris topologiques de  $(A, \leq)$ .

## Exercice 7 – Relations et ordres

- Soit  $R$  une relation symétrique et transitive sur un ensemble  $E$ . Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :  
 $R$  étant symétrique,  $xRy \Rightarrow yRx$  ; comme  $R$  est transitive,  $(xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow xRx$ . On en déduit que  $R$  est réflexive.
- On définit sur  $\mathbb{R}^2$  une relation notée  $\ll$  et définie par :

$$(x, y) \ll (x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leq y' - y$$

- A-t-on  $(2, 3) \ll (3, 5)$  ? A-t-on  $(2, 3) \ll (1, 5)$  ? A-t-on  $(2, 3) \ll (4, 4)$  ?
  - Vérifier que c'est une relation d'ordre. Indication : pour la transitivité, vous pouvez utiliser le résultat suivant (inégalité triangulaire) :  $\forall x, x', x''$  réels,  $|x'' - x| \leq |x'' - x'| + |x' - x|$ .
  - L'ordre est-il total ?
  - Dessiner les ensembles des majorants d'un couple  $(a, b)$ . Aucune justification n'est demandée. Indication : partant du point  $(a, b)$  si l'on se décale par exemple de 2 unités sur l'axe des abscisses dans un sens ou un autre, un majorant de  $(a, b)$  devra être tel que le décalage correspondant des ordonnées devra être  $\geq 2$ .
  - Question bonus (difficile) : Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$  (disque de rayon 1 centré en  $(0, 0)$ ). Déterminer  $\sup(A)$ .
- Tracer le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur l'ensemble  $D_{24}$  des diviseurs de 24.