

# UE UTC501 - Outils mathématiques pour l'informatique

## Cours 1 - Relations et ordres

Alain Faye

Cnam

2024-2025

# Plan du cours

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Relations

## Définition

- Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une relation entre  $E$  et  $F$ , ou de  $E$  vers  $F$ , est définie par la donnée d'un sous-ensemble  $G$  du produit cartésien  $E \times F$ .

## Exemple

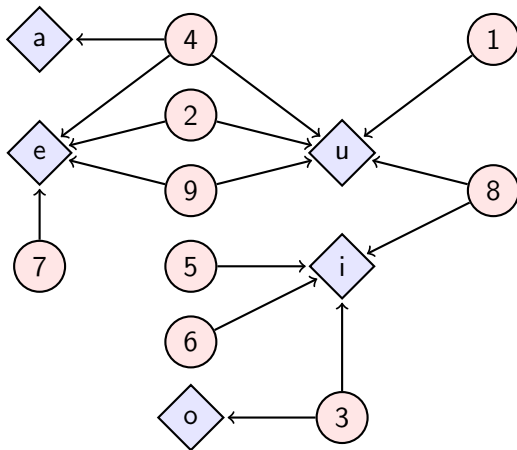
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $F = \{a, e, i, o, u\}$
- $a \in E$  est en relation avec  $b \in F$  si la lettre  $b$  intervient dans l'écriture du chiffre  $a$ .
- $G = \{(1, u), (2, e), (2, u), (3, i), (3, o), (4, a), (4, e), (4, u), (5, i), (6, i), (7, e), (8, i), (8, u), (9, e), (9, u)\}$

$G$  est le graphe de la relation. C'est l'ensemble des couples des éléments de  $E$  et des éléments de  $F$  en relation.

# Relations

## Représentation

- **Diagramme sagittal** : les éléments de  $E$  et  $F$  sont des points appelés sommets du diagramme et si  $a$  est en relation avec  $b$  on dessine une flèche du point  $a$  au point  $b$ .



# Relations

## Représentation

- **Matrice de la relation** :  $M$  matrice binaire comportant autant de lignes que d'éléments de  $E$ , autant de colonnes que d'éléments de  $F$  et telle que  $M_{a,b}$  vaut 1 quand  $a$  est en relation avec  $b$ , 0 sinon :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Relations

## Définitions

- Une relation définie sur deux ensembles  $E$  et  $F$  est appelée parfois relation binaire.
- Lorsque les deux ensembles sont les mêmes, on parle de **relation sur un ensemble**  $E$ .

# Relations

## Définition d'une relation sur un ensemble

### Définition

*Soit un ensemble  $E$  on dit qu'on a défini une relation  $R$  sur l'ensemble  $E$  si on s'est donné un ensemble  $G \subset E \times E$  appelé graphe de la relation.*

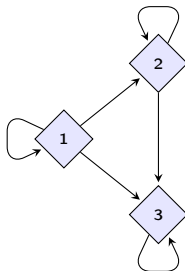
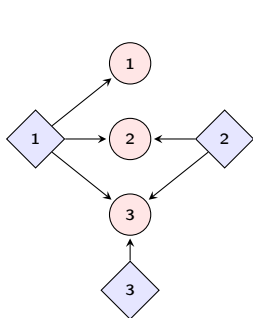
- Cette définition revient à dire que pour définir une relation, on se donne l'ensemble des couples  $(x, y)$  d'éléments de  $E$  qui vérifient la relation.
- Au lieu de noter  $(x, y) \in G$  nous noterons  $x R y$
- Dans ce chapitre, nous étudions deux types classiques de relations :
  - ▶ les relations d'équivalence
  - ▶ les relations d'ordre

# Relation sur un ensemble

## Représentation

On peut représenter une relation sur un ensemble par :

- son diagramme sagittal (à gauche)
- son **graphe** (ou digraphe, au centre)
- sa matrice (à droite)



	1	2	3
1	1	1	1
2		1	1
3			1

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Relations d'équivalence

## Définition

- On dit qu'une relation est une **relation d'équivalence** si elle est :
  - ▶ **symétrique** :  $\forall x \in E, \forall y \in E, x R y \Rightarrow y R x$ ,
  - ▶ **réflexive** :  $\forall x \in E, x R x$ ,
  - ▶ **transitive** :  $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$ .
- Dans le cas d'une relation d'équivalence, deux éléments en relation sont aussi dits équivalents.

# Relations d'équivalence

## Exemples

- 1 Sur tout ensemble, l'égalité de deux éléments.
- 2 Sur l'ensemble des droites (du plan ou de l'espace), la relation “droites parallèles ou confondues”.
- 3 Dans  $\mathbb{Z}$  la relation  $x \equiv y \pmod{n}$ , si est  $x - y$  divisible par l'entier  $n$ .
- 4 Dans  $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $(a, b) R (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$ .
- 5 Dans  $E = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ ,  $(p, q) R (p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$

# Relations d'équivalence

## Classes d'équivalence

### Définition (Classe d'équivalence)

Étant donné un ensemble  $E$  muni d'une relation d'équivalence  $R$ , on appelle **classe d'équivalence** d'un élément  $x$  l'ensemble  $C_x$  défini par :

$$C_x = \{y \in E \mid x R y\}$$

### Propriété

*Toute classe d'équivalence contient au moins un élément.*

En effet, puisque tout élément  $x$  est équivalent à lui-même, la classe  $C_x$  de  $x$  contient au moins l'élément  $x$ .

# Relations d'équivalence

## Classes d'équivalence

### Théorème

*Soient les classes  $C_x$  et  $C_y$  de deux éléments  $x$  et  $y$ . Ces classes sont disjointes ou sont confondues.*

### Démonstration



# Relations d'équivalence

## Classes d'équivalence

### Théorème

*Soient les classes  $C_x$  et  $C_y$  de deux éléments  $x$  et  $y$ . Ces classes sont disjointes ou sont confondues.*

### Démonstration

- 1<sup>er</sup> cas :  $C_x \cap C_y = \emptyset$ . Les deux classes sont disjointes.

# Relations d'équivalence

## Classes d'équivalence

### Théorème

*Soient les classes  $C_x$  et  $C_y$  de deux éléments  $x$  et  $y$ . Ces classes sont disjointes ou sont confondues.*

### Démonstration

- 1<sup>er</sup> cas :  $C_x \cap C_y = \emptyset$ . Les deux classes sont disjointes.
- 2<sup>e</sup> cas :  $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ .
  - ▶ Soit  $z \in C_x \cap C_y$ . On a  $x R z$  et  $y R z$ , et par transitivité  $x R y$ . On en conclut que  $y$  est dans la classe de  $x$  :  $y \in C_x$ .
  - ▶ Montrons que la classe de  $y$  est contenue dans celle de  $x$ . Soit  $w \in C_y$ . On a  $y R w$  et  $x R y$ , et donc par transitivité  $x R w$ . C'est-à-dire  $w \in C_x$  et donc  $C_y \subset C_x$ . De la même façon, on montre  $C_x \subset C_y$ .
  - ▶ Donc les deux classes et sont confondues.

# Relations d'équivalence

## Classes d'équivalence

### Définition (Représentant d'une classe)

$C_x$  est la classe d'équivalence de tout élément  $z$  de  $C_x$ . En effet, si  $y$  et  $z$  appartiennent à la classe de  $x$ , alors leurs classes sont confondues avec celle de  $x$ . Ceci justifie d'appeler tout élément d'une classe **représentant de cette classe**.

# Relation d'équivalence

## Ensemble quotient

- L'ensemble  $E$  est partagé en une réunion disjointe de classes.

$$E = \bigcup_{x \in E} C_x$$

- Les classes forment une **partition de l'ensemble  $E$**  :
  - ▶ Chaque élément de  $E$  appartient à une classe au moins
  - ▶ Chaque élément de  $E$  appartient à une seule classe.

### Définition (Ensemble quotient)

Étant donnée une relation d'équivalence  $R$  sur un ensemble  $E$ , l' **ensemble quotient** de  $E$  par la relation  $R$ , noté  $E/R$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}(E)$  (ensemble des parties de  $E$ ) des classes d'équivalences.

$$E/R = \{C_x \in \mathcal{P}(E) \mid x \in E\}$$

# Relation d'équivalence

## Ensemble quotient

- L'ensemble quotient peut aussi être appelé “l'ensemble  $E$  quotienté par  $R$ ” ou “l'ensemble  $E$  considéré *modulo*  $R$ ”.
- L'idée derrière ces appellations est de travailler dans l'ensemble quotient comme dans  $E$ , mais sans distinguer entre eux les éléments équivalents selon  $R$ .

# Classes d'équivalence

## Exemples

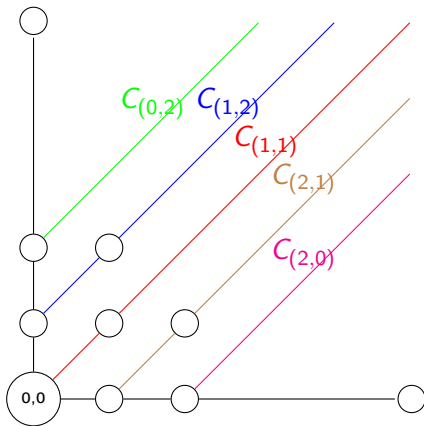
- Pour la congruence modulo  $n$ , les classes d'équivalence sont représentées par  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  où  $C_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x - i = kn\}$ .  
C'est l'ensemble des nombres qui ont le même reste  $i$  dans la division par  $n$ .
- par exemple  $n = 3$ 
  - ▶  $C_0 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
  - ▶  $C_1 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$
  - ▶  $C_2 = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$
  - ▶ les  $C_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) ne s'intersectent pas et leur union est  $\mathbb{Z}$

# Classes d'équivalence

## Exemples

- $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $(a, b) R (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$ . La classe de  $(a, b)$  est par définition les couples  $(a', b')$  t.q.  $b' = a' + b - a$ .

La classe de  $(a, b)$  est l'ensemble des points  $(a', b')$  entiers et situés sur la droite de pente 1 et qui passe par  $(a, b)$ .

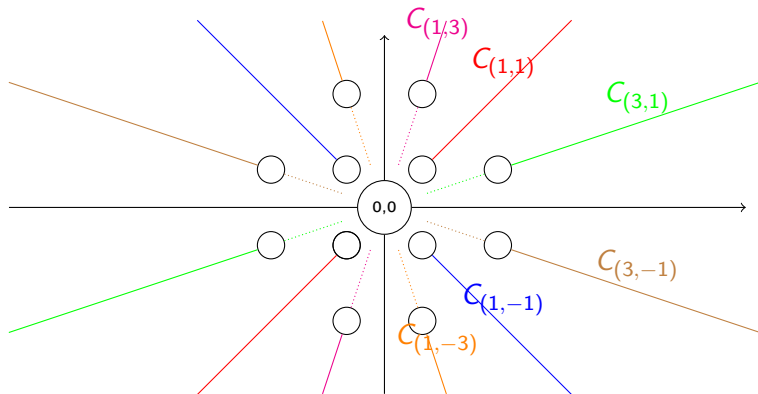


# Classes d'équivalence

## Exemples

- $E = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ ,  $(p, q) R (p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$ . La classe de  $(p, q)$  est par définition les couples  $(p', q')$  t.q.  $q' = \frac{q}{p}p'$ .

C'est l'ensemble des points  $(p', q')$  entiers et situés sur la droite de pente  $\frac{q}{p}$  et passant par l'origine (et aussi par  $(p, q)$ ).





# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations
  - Relations d'équivalence
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries