

# UE UTC501 - Outils mathématiques pour l'informatique

## Cours 1 - Relations et ordres

Alain Faye

Cnam

2024-2025

# Plan du cours

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Relations d'ordre

## Définition (Relation d'ordre)

Soit  $E$  un ensemble. Une relation binaire  $R$  dans  $E$  est une **relation d'ordre** si elle est :

- **réflexive** :  $\forall x \in E, x R x$ ,
- **antisymétrique** :  $\forall x \in E, \forall y \in E, (x R y \text{ et } y R x) \Rightarrow x = y$
- **transitive** :  $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$ .

## Exemple

- La relation d'ordre  $x \leq y$  sur les nombres réels.
- La relation d'ordre  $x \geq y$  sur les nombres réels.
- La relation d'inclusion  $\subset$  sur les parties d'un ensemble.

# Relations d'ordre

## Ensemble ordonné

### Définition

On appelle **ensemble ordonné** tout ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $\leq$ . On note  $(E, \leq)$  un tel ensemble.

# Relations d'ordre

## Exemple : l'ordre lexicographique

- Rappelons la définition de la **relation d'ordre lexicographique** sur les listes finies d'entiers.
- Étant données deux listes d'entiers  $I = (n_1, n_2, \dots, n_r)$  et  $I' = (n'_1, n'_2, \dots, n'_k)$ ,  $I$  est lexicographiquement plus grande que  $I'$  (noté  $I > I'$ ) si :

- ▶ Soit il existe  $p \leq \min(k, r)$  tel que :

$$n_i = n'_i \text{ pour } 1 \leq i < p \text{ et } n_p > n'_p$$

- ▶ Soit :

$$n_i = n'_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } r > k$$

- La relation d'ordre large, notée  $\leq$ , est définie par :

$$I \leq I' \Leftrightarrow (I < I' \text{ ou } I = I')$$



# Relations d'ordre

Exemple : l'ordre lexicographique

listes de même longueur ( $r = k$ )

$$(1, 3, 15, 2) > (1, 3, 14, 2)$$

$$(1, 3, 15, 2) > (1, 3, 14, 5)$$

listes de longueur différentes ( $r \neq k$ )

$$(2, 3, 6) > (2, 3, 5, 7)$$

$$(2, 3, 6, 1, 5) > (2, 3, 6, 1)$$

# Relations d'ordre

## Remarques

- Par analogie avec la relation d'ordre sur les nombres, on note souvent les relations d'ordre avec le symbole  $\leq$  ou  $\preceq$ .
- **Attention :**  
La relation  $x < y$  sur  $\mathbb{R}$  n'est pas une relation d'ordre car

# Relations d'ordre

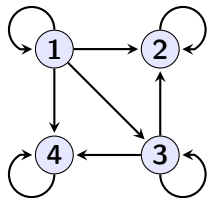
## Remarques

- Par analogie avec la relation d'ordre sur les nombres, on note souvent les relations d'ordre avec le symbole  $\leq$  ou  $\preceq$ .
- **Attention :**  
La relation  $x < y$  sur  $\mathbb{R}$  n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.
- On dit cependant quelquefois que c'est une *relation d'ordre strict*, ce qui est dangereux puisque ce n'est pas une relation d'ordre.
- Même problème pour l'inclusion stricte des ensembles.

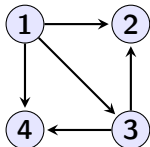
# Relations d'ordre

## Représentation d'une relation d'ordre par son diagramme de Hasse

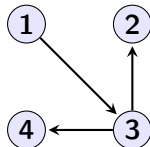
- a On part du digraphe de la relation
- b On *sait* que la relation est réflexive : on peut omettre les boucles
- c On peut également se dispenser de tracer les arcs que l'on peut reconstituer par transitivité
- d On représente tous les arcs de bas en haut (le graphe ne contient aucun circuit de longueur  $\geq 2$ )
- e On peut dès lors se passer de l'orientation



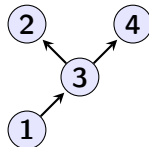
(a)



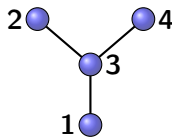
(b)



(c)



(d)



(e)

# Relations d'ordre

## Définition : ordre total

- La relation d'ordre sur les nombres est une **relation d'ordre total** . En effet deux éléments sont toujours **comparables** . Étant donnés deux nombres réels  $x$  et  $y$ , on a toujours  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble  $E$

# Relations d'ordre

## Définition : ordre total

- La relation d'ordre sur les nombres est une **relation d'ordre total** . En effet deux éléments sont toujours **comparables** . Étant donnés deux nombres réels  $x$  et  $y$ , on a toujours  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble  $E$  n'est pas une relation d'ordre total sur  $\mathcal{P}(E)$ . Il existe des ensembles tel que le premier ne soit pas inclus dans le second, ni le second inclus dans le premier. Par exemple

# Relations d'ordre

## Définition : ordre total

- La relation d'ordre sur les nombres est une **relation d'ordre total** . En effet deux éléments sont toujours **comparables** . Étant donnés deux nombres réels  $x$  et  $y$ , on a toujours  $x \leq y$  ou  $y \leq x$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble  $E$  n'est pas une relation d'ordre total sur  $\mathcal{P}(E)$ . Il existe des ensembles tel que le premier ne soit pas inclus dans le second, ni le second inclus dans le premier. Par exemple  $[1, 3] \not\subset [0, 2]$  et  $[0, 2] \not\subset [1, 3]$  pour des intervalles de  $\mathbb{R}$ .
- Lorsqu'un ordre n'est pas total, on parle d' **ordre partiel** .

# Relation d'ordre

## Éléments extrémaux

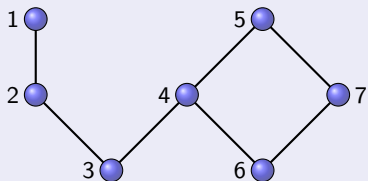
- Soit  $(E, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné et soit  $a \in E$ . On dit que  $a$  est un **élément maximal** de  $E$  si :  
$$\forall x \in E, (a \leq x) \implies (a = x).$$
- On dira que  $a$  est un **élément minimal** de  $E$  si :  
$$\forall x \in E, (x \leq a) \implies (a = x).$$



# Relation d'ordre

## Éléments extrémaux

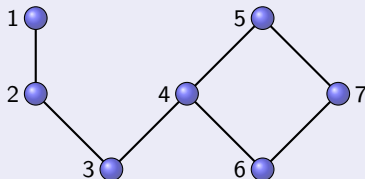
### Exemple



# Relation d'ordre

## Éléments extrémaux

### Exemple



*Dans l'ensemble ordonné décrit par ce diagramme de Hasse, les éléments 1 et 5 sont maximaux, les éléments 3 et 6 sont minimaux.*

- Tout ensemble ordonné  $(E, \leq)$  fini et non vide possède au moins un élément maximal et au moins un élément minimal.

# Relation d'ordre

## Majorant

### Définition (majorant)

*Soit un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre notée  $\leq$  et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit qu'un élément  $M \in E$  est un **majorant** de  $F$  s'il est plus grand que tous les éléments de  $F$  :*

$$\forall x \in F, x \leq M$$

Si  $M$  est un majorant de  $F$ , tout élément plus grand que  $M$  est aussi un majorant.

# Relation d'ordre

## Minorant

### Définition (minorant)

On dit qu'un élément  $m \in E$  est un **minorant** de  $F$  s'il est plus petit que tous les éléments de  $F$  :

$$\forall x \in F, m \leq x$$

Si  $m$  est un minorant de  $F$ , tout élément plus petit que  $m$  est aussi un minorant.

# Relation d'ordre

Ensemble majoré, ensemble minoré

## Définition (ensemble majoré)

On dit qu'un sous-ensemble  $F$  de  $E$  ensemble ordonné est **majoré** s'il possède un majorant.

$$\exists M \in E, \forall x \in F, x \leq M$$

## Définition (ensemble minoré)

On dit qu'un sous-ensemble  $F$  de  $E$  ensemble ordonné est **minoré** s'il possède un minorant.

$$\exists m \in E, \forall x \in F, m \leq x$$

# Relation d'ordre

## Ensemble borné

### Définition (ensemble borné)

*Un sous-ensemble d'un ensemble ordonné est **borné** s'il possède à la fois un majorant et un minorant, c'est-à-dire s'il est à la fois majoré et minoré.*

$$\exists m \in E, \exists M \in E, \forall x \in F, m \leq x \leq M$$

# Relation d'ordre

## Plus grand élément

### Définition (plus grand élément)

Soit  $E$  un ensemble muni d'une relation d'ordre notée  $\leq$  et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ .

**On dit qu'un élément  $M \in F$  est le plus grand élément de  $F$  si c'est un majorant de  $F$** , c'est-à-dire s'il est plus grand que tous les éléments de  $F$  :

$$M \in F \text{ et } (\forall x \in F, x \leq M)$$

On définit de la même façon le **plus petit élément**  $m$  de  $F$  :

$$m \in F \text{ et } (\forall x \in F, m \leq x)$$

# Relation d'ordre

## Unicité du plus grand élément

- Nous avons écrit **le** plus grand élément de  $F$ , car il est facile de voir que si nous supposons dans  $F$  deux tels éléments  $M'$  et  $M''$  on a  $M' \leq M''$  et  $M'' \leq M'$  et donc d'après l'antisymétrie de la relation d'ordre,  $M' = M''$ .
- Si un majorant de  $F$  appartient à  $F$  alors c'est le plus grand élément de  $F$ .
- Un sous-ensemble  $F$  majoré peut ne pas avoir de plus grand élément.



# Relation d'ordre

## Unicité du plus grand élément

- Nous avons écrit le plus grand élément de  $F$ , car il est facile de voir que si nous supposons dans  $F$  deux tels éléments  $M'$  et  $M''$  on a  $M' \leq M''$  et  $M'' \leq M'$  et donc d'après l'antisymétrie de la relation d'ordre,  $M' = M''$ .
- Si un majorant de  $F$  appartient à  $F$  alors c'est le plus grand élément de  $F$ .
- Un sous-ensemble  $F$  majoré peut ne pas avoir de plus grand élément. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels inférieurs à  $\sqrt{2}$  est majoré par exemple par 2 mais il n'a pas de plus grand élément.

# Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

## Définition (borne supérieure)

Soit un ensemble  $E$  ordonné et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On suppose que  $F$  est majoré. Si l'ensemble des majorants de  $F$  admet un plus petit élément, il est appelé **borne supérieure** (ou supremum) de  $F$  et noté  $\sup F$ .

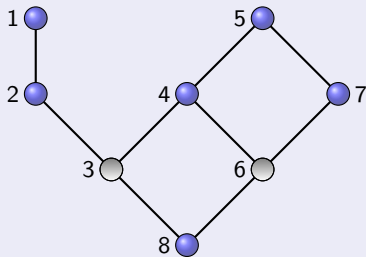
## Définition (borne inférieure)

Soit un ensemble  $E$  ordonné et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On suppose que  $F$  est minoré. Si l'ensemble des minorants de  $F$  admet un plus grand élément, il est appelé **borne inférieure** (ou infimum) de  $F$  et noté  $\inf F$ .

# Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

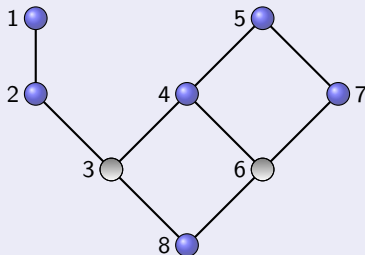
## Exemple



# Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

## Exemple



*Dans l'ensemble ordonné décrit par ce diagramme de Hasse, l'ensemble  $F = \{3, 6\}$  a 2 majorants 4 et 5, le plus petit de ces majorants est 4. C'est la borne sup de  $F$ .*

*$F$  a un minorant 8. Comme c'est le seul, 8 est aussi borne inf.*

# Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

## Exemple

Soit  $F = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$  sous-ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$ .

- $F$  admet  $-1$  comme borne inférieure et  $\frac{3}{2}$  comme borne supérieure.
- $-1 \notin F$  et  $\frac{3}{2} \in F$  donc  $\frac{3}{2}$  est le plus grand élément de  $F$ .  $F$  n'admet pas de plus petit élément.

# Relation d'ordre

## Propriétés des bornes sup et inf

### Propriété

*Soit un ensemble ordonné  $E$  et un sous-ensemble  $F$  de  $E$ .*

- *Si  $F$  admet un plus grand élément  $M$ , alors  $M$  est la borne supérieure de  $F$ .*
- *Si  $F$  admet une borne supérieure  $a$ , alors  $a$  est un majorant de  $F$ .*
- *Si  $F$  a une borne supérieure qui appartient à  $F$ , alors c'est aussi le plus grand élément de  $F$ .*
- *Si  $F$  admet un plus petit élément  $m$ , alors  $m$  est la borne inférieure de  $F$ .*
- *Si  $F$  admet une borne inférieure  $a$ , alors  $a$  est un minorant de  $F$ .*
- *Si  $F$  a une borne inférieure qui appartient à  $F$ , alors c'est aussi le plus petit élément de  $F$ .*

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

## Définition (treillis)

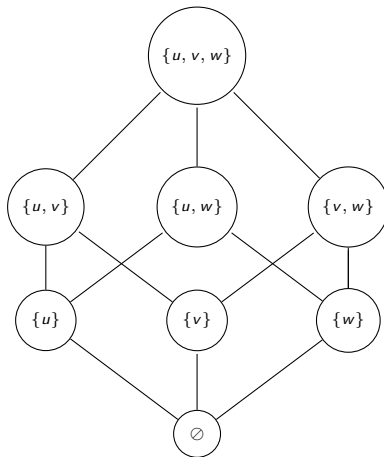
Soit  $(L, \leq)$  un ensemble ordonné. On dit que  $(L, \leq)$  est un **treillis** si, pour toute paire  $\{a, b\}$  d'éléments de  $L$ , le supremum et l'infimum de  $\{a, b\}$  existent.

- Dans un treillis  $(L, \leq)$ , nous utiliserons les notations  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  pour désigner, respectivement, le supremum et l'infimum de  $\{a, b\}$ .



# Treillis

Exemple : les parties d'un ensemble muni de la relation d'ordre inclusion

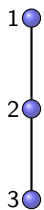


# Trellis

## Exemples

# Treillis

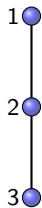
## Exemples



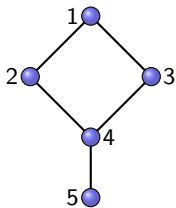
(a)

# Treillis

Exemples



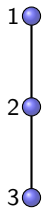
(a)



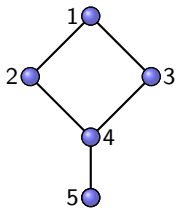
(b)

# Treillis

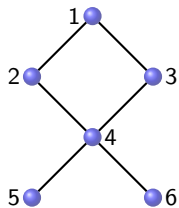
Exemples



(a)



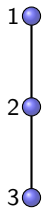
(b)



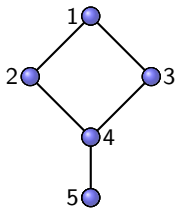
(c)

# Treillis

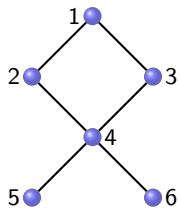
Exemples



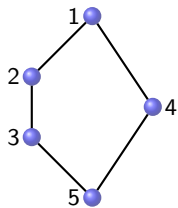
(a)



(b)



(c)



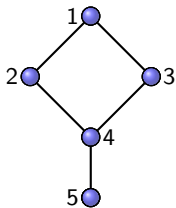
(d)

# Treillis

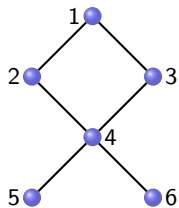
Exemples



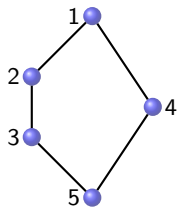
(a)



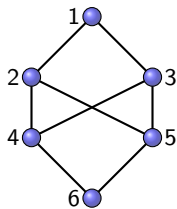
(b)



(c)



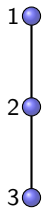
(d)



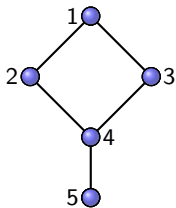
(e)

# Treillis

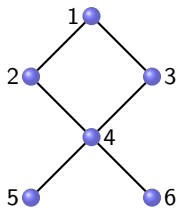
## Exemples



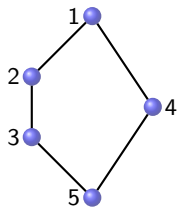
(a)



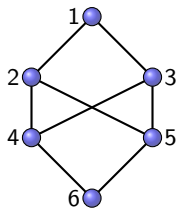
(b)



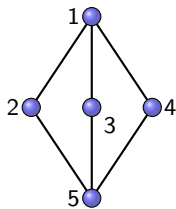
(c)



(d)



(e)

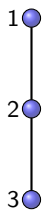


(f)

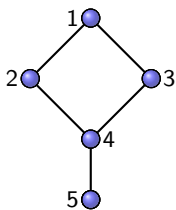


# Treillis

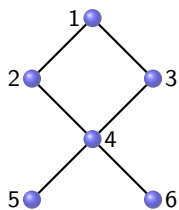
## Exemples



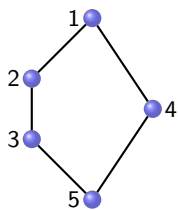
(a)



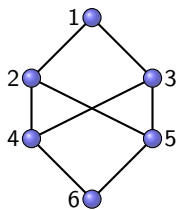
(b)



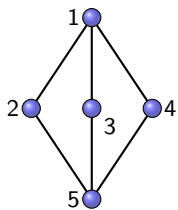
(c)



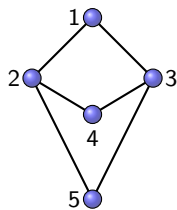
(d)



(e)



(f)



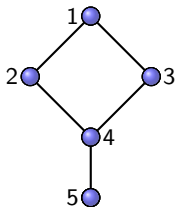
(g)

# Treillis

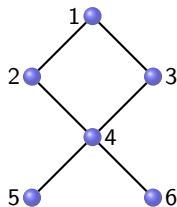
## Exemples



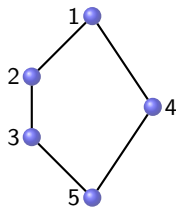
(a)



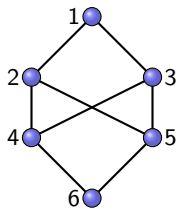
(b)



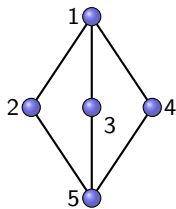
(c)



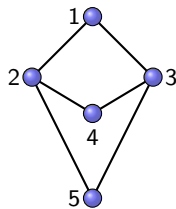
(d)



(e)



(f)



(g)

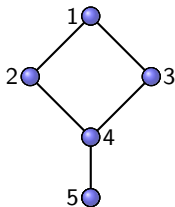
Les ensembles ordonnés (a), (b), (d) et (f) sont des treillis.

# Treillis

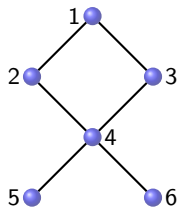
## Exemples



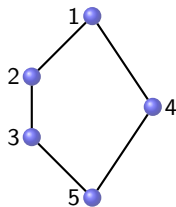
(a)



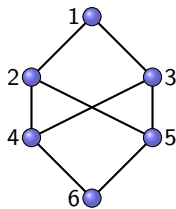
(b)



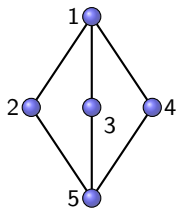
(c)



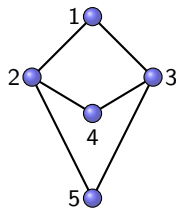
(d)



(e)



(f)

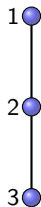


(g)

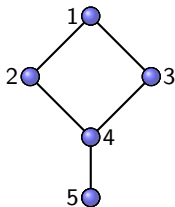
Les ensembles ordonnés (a), (b), (d) et (f) sont des treillis.

# Treillis

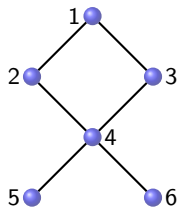
## Exemples



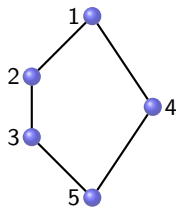
(a)



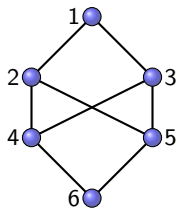
(b)



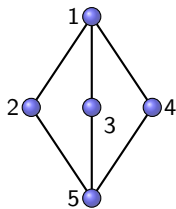
(c)



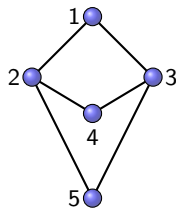
(d)



(e)



(f)



(g)

Les ensembles ordonnés (a), (b), (d) et (f) sont des treillis.

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
  - Relations d'ordre
  - Treillis
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Résolution des systèmes linéaires
- 5 Suites et séries