Logique combinatoire

Technicien(ne) Supérieur(e) de Support en Informatique

Module 1 : Support matériel

Séquence 1 : Architecture des ordinateurs

Phase 4

Résumé :

Mots clés :

Auteur :

Dernière révision :

Référence et Version de ce document :

Définitions et conventions de base

En logique, tout est affaire de conventions. C'est pourquoi il est indispensable de préciser les termes employés.

Variables binaires

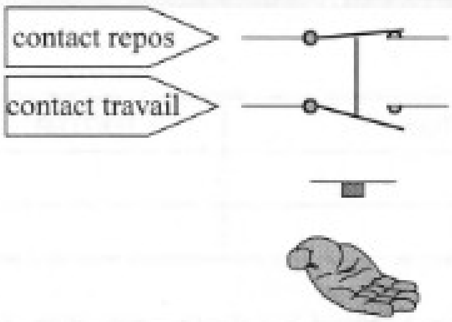
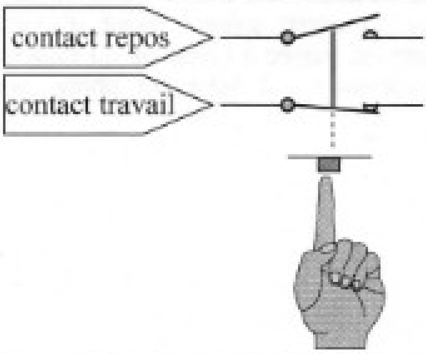
On désigne par «variable » dans l'algèbre de BOOLE[1], des quantités qui ne peuvent prendre strictement que deux valeurs. Par convention, ces deux valeurs seront notées 0 et 1.

Pour faciliter la manipulation des variables, on les désigne par des lettres (A, B par exemple).

A chaque variable est associée, dans l'utilisation en Automatismes, une grandeur ou un état d'un dispositif donné. C'est ainsi que :

- A=0 peut représenter l'absence de tension sur une entrée d'automate programmable,
- A=1 représentant la présence de tension sur cette même entrée.

On peut également associer une variable à l'état d'un contact ou d'un groupe de contacts commandés par un bouton poussoir.

	La notation B=0 signifie alors que l'on n'appuie pas sur le bouton poussoir correspondant (les contacts «travail » sont ouverts et les contacts «repos » sont fermés).
	La notation B=1 signifie que l'on appuie sur le poussoir, ce qui ouvre les contacts repos et ferme les contacts «travail ». Remarque : un schéma électrique est toujours représenté à l'état repos (pas d'alimentation électrique, pas d'action manuelle sur les boutons de commande).

[1] BOOLE George, mathématicien britannique (Lincoln 1815 - Ballintemple, près de Cork, 1864), créateur de la logique mathématique moderne.

Algèbre de BOOLE : structure algébrique appliquée à l'étude des relations logiques, et dans laquelle les opérations de réunion, d'intersection et de complémentation expriment respectivement la disjonction, la conjonction, la négation logiques.

Une variable peut également être associée à l'état d'un élément actif :

D=0 peut signifier :

- un certain transistor est bloqué,
- ou un moteur n'est pas alimenté,
- ou un voyant est éteint.

D=1 signifiant alors que :

- ce même transistor est saturé (passant),
- ou le moteur est alimenté,
- ou le voyant est allumé.

Cette liste des grandeurs ou événements que l'on peut associer à une variable binaire n'est pas exhaustive[2].

Conventions d'écriture

Réexaminons l'exemple du bouton poussoir auquel on avait associé la variable B :

- Si au moment de l'observation, B est faux (bouton non appuyé), on écrira B=0.
- Si par contre, B est vrai (bouton appuyé), on écrira B=1.

Plus généralement, si une variable, une grandeur ou un état associé à une variable binaire est,

- **VRAI, on lui attribue la valeur 1,**
- **FAUX, on lui attribue la valeur 0.**

Complément d'une variable binaire

On peut définir une variable binaire de deux façons différentes :

- le bouton poussoir est appuyé,
- le bouton poussoir n'est pas appuyé.

Un même organe peut donc faire l'objet de deux définitions. Pour simplifier l'écriture, on convient que si B signifie «le bouton poussoir est appuyé », alors $\overline{B}$ signifie «le bouton poussoir n'est pas appuyé ».

$\overline{B}$ se lit B barre, $\overline{B}$ est le complément de B.

Si au moment de l'observation, l'assertion «le bouton poussoir est appuyé » est fausse, alors l'assertion «le bouton poussoir n'est pas appuyé » est vraie[3], ce qu'on peut traduire par : $si\ \ B=0,\ alors\ \ \overline{B}=1$.

[2] EXHAUSTIF, IVE adj. (angl. *Exhaustive*, de *to exhaust*, épuiser). Qui épuise à fond un sujet. *Etude exhaustive*

On pouvait faire le même raisonnement pour le résultat inverse et l'on obtiendrait alors $si \quad B=1, \ alors \quad \overline{B}=0$.

La relation qui les lie étant ainsi établie, on pourra utiliser indifféremment la variable binaire ou son complément.

Variable d'entrée, variable de sortie

Problème : vous désirez fumer. A quelles conditions est-ce possible ?

Vous devez avoir :

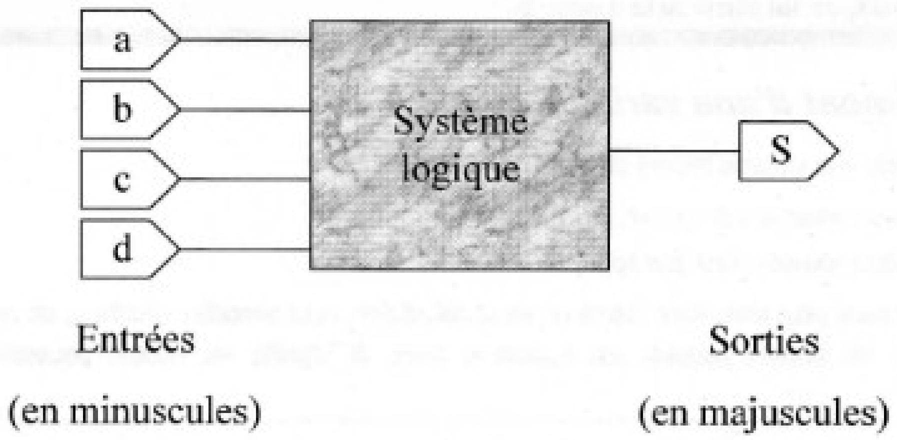
a) OU des cigarettes,
b) OU des cigares,
c) OU une pipe,
d) ET du tabac,
e) ET PAS d'interdiction de fumer[4] ,
f) ET des allumettes,
g) OU un briquet.

Donc pour pouvoir fumer, il faut que plusieurs conditions soient remplies :

- Pouvoir fumer est appelé VARIABLE DE SORTIE (ou effet),
- Toutes les conditions sont les variables d'entrée (ou causes).

Fonction logique

Dans l'exemple précédent, l'état 0 ou 1 de la variable de sortie (pouvoir fumer) est la FONCTON LOGIQUE de l'état 0 ou 1 des diverses variables d'entrée (a, b, c ....).



On écrira $S = f\ (a, b, c, ...)$.

---

[3] On pourra douter à cet instant précis des facultés intellectuelles du rédacteur dont le seul défenseur pourrait être Feu M. LA PALICE.

[4] Il apparaît ainsi clairement que vous ne pourrez pas fumer dans la section !

Equation logique

A une fonction logique correspond une EQUATION LOGIQUE que l'on peut traiter par les règles de l'algèbre de BOOLE.

Dans l'exemple ci-dessus, la solution décrite sous forme d'équation s'écrit :

$$\boxed{S = [a \text{ OU } b \text{ OU } (c \text{ ET } d)] \text{ ET PAS } e \text{ ET } (f \text{ OU } g)}$$

Représentons

OU par le signe +,

ET par le signe $\times$ *ou* •.

En se souvenant que $PAS\ e$ se représente $\bar{e}$, l'équation logique devient :

$$\boxed{S = [a + b + (c \cdot d)] \cdot \bar{e} \cdot (f + g)}$$

Table de vérité

Définition

Il s'agit d'une table permettant d'inventorier toutes les valeurs que peut prendre une EQUATION LOGIQUE suivant les combinaisons possibles de valeurs que prennent les VARIABLES contenues dans cette équation. Le nom de TABLE DE VERITE vient de celui d'une table semblable utilisée en logique symbolique, dans laquelle la « vérité » ou la « non vérité » d'une proposition est consignée dans tous les cas possibles.

La table de vérité comporte deux parties :

- le côté gauche contient toutes les combinaisons des valeurs prises par les variables,
- le côté droit contient la valeur prise par l'expression pour chaque combinaison des valeurs prises par les variables.

Exemple :

Partie 1		Partie 2
a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Mise en forme (recherche du nombre de lignes dans une table à *n* variables)

Pour	1	variable	2^1	valeurs possibles	= 2
Pour	2	variables	2^2	valeurs possibles	= 4 (voir exemple ci-dessus)
Pour	3	variables	2^3		= 8
Pour	n	variables	2^n	valeurs possibles	

Pour dresser la première partie de la table sans oubli possible, il est conseillé de suivre la méthode suivante :

1. Calculer le nombre de lignes,

   exemple : 3 variables → 2^3 = 8 lignes.

2. Respecter la disposition ci-après :

a	b	c
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

1 Pour c, débuter par 0, puis alterner avec 1, jusqu'à concurrence de huit lignes.

2 Pour b, débuter toujours par deux 0, puis alterner avec deux 1, jusqu'à concurrence de huit lignes.

3 Pour a, débuter toujours par quatre 0, puis terminer par quatre 1.

Exercice 1

Dresser la première partie d'une table de vérité comportant 4 variables a, b, c et d.

Exercice 2

Un ascenseur pourra monter si :

- ☑ toutes les portes sont fermées,
- ☑ on a enfoncé le bouton convenable de l'intérieur,
- ☑ OU il a été appelé d'un étage supérieur,
- ☑ la cabine n'est pas déjà au dernier étage.

Dresser la table de vérité de la fonction MONTER.

Ecriture de l'équation logique à partir de la table de vérité

Supposons que l'étude d'un dispositif ait conduit à la table de vérité suivante :

a	b	c	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Le dispositif Z peut fonctionner dans tous les cas où il est égal à 1. Pour chacun de ces cas, les variables ont simultanément quelles valeurs ?

	Ligne 1	Z = 1	a = 0	$\overline{a}$	On écrira :
			b = 0	$\overline{b}$	$Z = \overline{a}\ ET\ \overline{b}\ ET\ \overline{c}$
			c = 0	$\overline{c}$	$\Leftrightarrow Z = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

OU	Ligne 4	Z = 1	a = 0	$\overline{a}$	On écrira :
			b = 1	b	
			c = 1	c	$\Leftrightarrow Z = \overline{a} \cdot b \cdot c$

OU	Ligne 5	Z = 1	a = 1	a	On écrira :
			b = 0	$\overline{b}$	
			c = 0	$\overline{c}$	$\Leftrightarrow Z = a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

d'où l'équation logique :

$$Z=\left(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right)\ OU\ \left(\overline{a} \cdot b \cdot c\right)\ OU\ \left(a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right)$$

Remplaçons les OU par des signes + :

$$\boxed{Z=\left(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right) + \left(\overline{a} \cdot b \cdot c\right) + \left(a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right)}$$

Notez qu'il n'y a pas d'ambiguïtés dans l'écriture ci-dessus et que les parenthèses ne sont pas nécessaires.

Exercice 3

Reprenez l'exemple n°2 de la page **6** et établissez l'équation logique de la fonction MONTER.

M = ...

Ecriture de la table de vérité à partir d'une équation logique

Si l'on veut vérifier la cohérence d'une fonction logique, il faudra vérifier chaque cas et donc chaque ligne de la table de vérité.

Il arrive que l'on dispose de l'équation (à simplifier ou à vérifier). Le problème consiste alors à dresser la table de vérité à partir de cette équation.

Exemple : $S = ab + bc + a\bar{b}\,\bar{c}$,

Dans la table de vérité, on mettra S = 1 quand l'équation logique est vraie, 0 dans tous les autres cas.

a	b	c	S	
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1	1	bc
1	0	0	1	$a\bar{b}\,\bar{c}$
1	0	1		
1	1	0	1	ab
1	1	1	1	ab, bc

Exercice 4

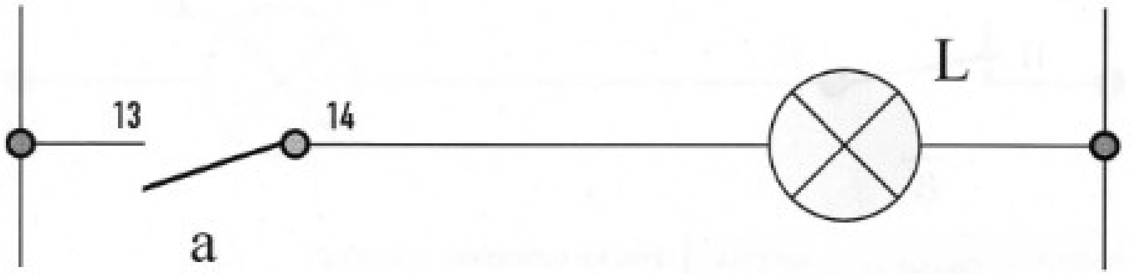
Dresser la table de vérité de la fonction $F = a + \bar{a}\,b + \bar{a}\,b\,\bar{c}$.

Fonctions de base

Fonction OUI

On désire qu'une lampe « L » soit allumée par le contact travail « a » d'un relais « A ». Quand le relais « A » est alimenté, il ferme son contact travail « a ».

Si $A=1,\ a=1,\ L=1$



Action A	Contact a	Lampe L
0	0	0
1	1	1

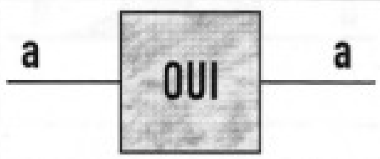
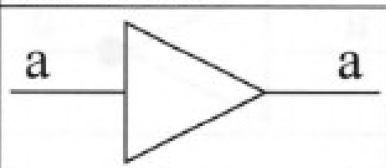
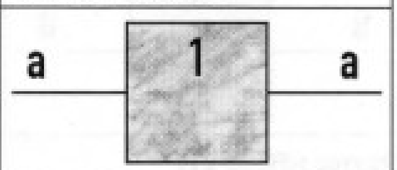
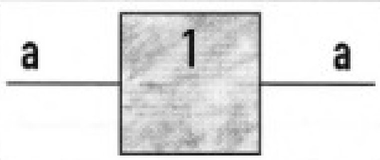
avec les conventions suivantes :

- action A : 1 → alimenté,
- contact a : 1 → fermé,
- lampe L : 1 → allumée.

La fonction OUI est donc la fonction où la sortie égale l'entrée :

$$\boxed{L = a}$$

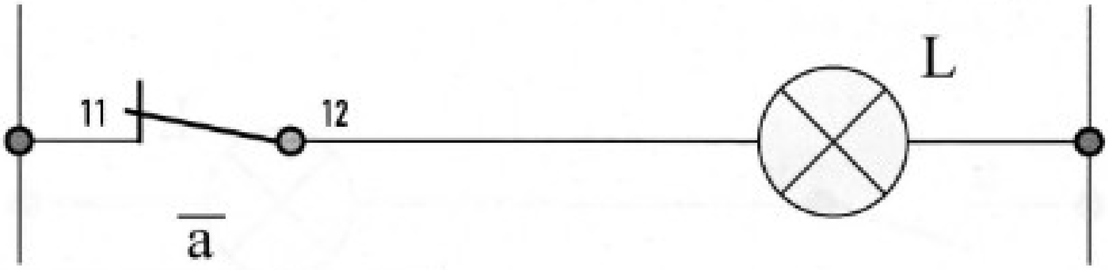
Symboles de la fonction OUI :

<table>
<tr><td>Sans norme</td><td>Norme américaine</td><td>Norme NFC 03-212</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Norme CEI 617-12</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonction PAS ou fonction NON

On désire qu'une lampe « L » soit allumée par le contact repos « $\overline{a}$ » d'un relais A. Quand le relais « A » est alimenté, il ouvre son contact repos « $\overline{a}$ ».

$Si \;\; A=1, \; \overline{a}=0, \; L=0$



Action A	Contact $\overline{a}$	Lampe L
0	1	1
1	0	0

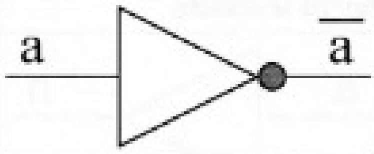
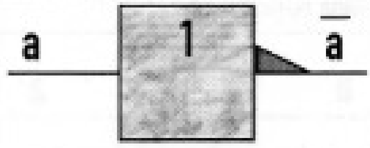
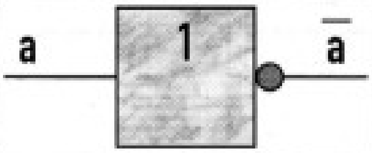
avec les conventions suivantes :

- action A : 1 → alimenté,
- contact $\overline{a}$: 1 → fermé,
- lampe L : 1 → allumée.

La fonction NON est donc la fonction où la sortie égale le complément de l'entrée :

$$\boxed{L = \overline{a}}$$

Symboles de la fonction NON :

Sans norme	Norme américaine	Norme CEI 617-12
		
Norme NFC 03-212		
		

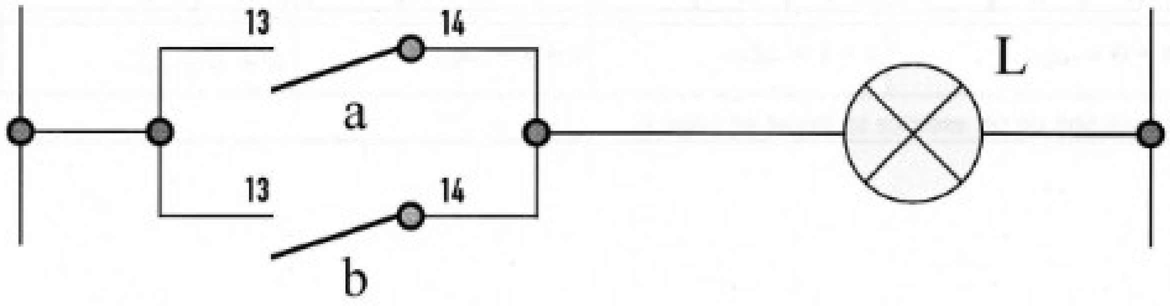
Remarques :

La norme NFC 03-212 a repris les termes de la norme CEI 617-12. Le symbole CEI montré ci-dessus ne figure pas dans la norme NFC alors que le symbole NFC montré ci-dessus figure dans la norme CEI. Tous ces symboles sont à connaître car on les rencontre dans les ouvrages.

Fonction OU (Somme logique)

On désigne sous le nom de « Somme logique » de plusieurs variables binaires une grandeur qui vaut 1 si au moins une quelconque des variables d'entrée vaut 1.

Cette opération de somme logique doit être associée à l'idée de contacts placés en parallèle, au signe + et au mot OU.



La fonction OU est donc la fonction où la sortie égale la somme logique des entrées :

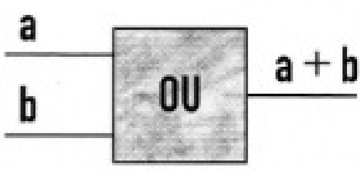
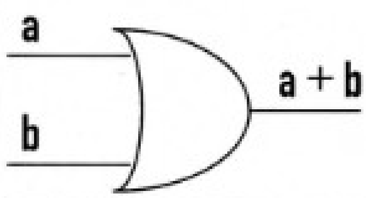
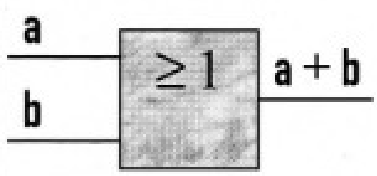
$\boxed{L = a + b}$, (lire a ou b).

Avec la table de vérité suivante :

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

avec les conventions adoptées dans les paragraphes précédents.

Symboles de la fonction OU :

Sans norme	Norme américaine	Norme CEI 617-12 Norme NFC 03-212
		

Exercice 5

Complétez les tables de vérité suivantes. Ecrire l'équation correspondante et traduisez pour chacun des cas le schéma électrique correspondant :

a	Ø	S
Ø	Ø	
1	Ø	

a + 0 = ……

a	1	S
Ø	1	
1	1	

a + 1 = ……

a	a	S
Ø	Ø	
1	1	

a + a = ……

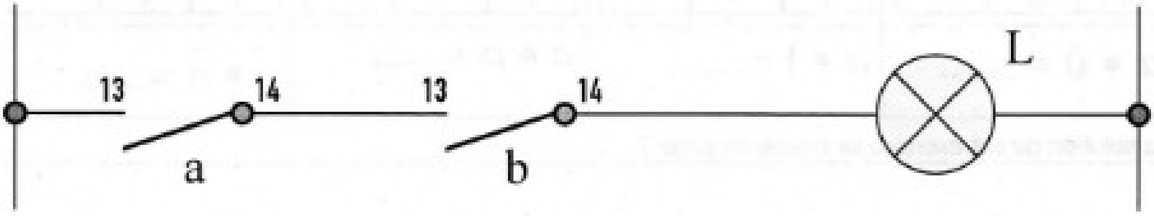
a	$\overline{a}$	S
Ø	1	
1	Ø	

$a + \overline{a} = \cdots\cdots$

Fonction ET (Produit logique)

On désigne par « produit logique » de plusieurs variables binaires une grandeur qui ne vaut 1 que lorsque toutes les variables valent simultanément 1.

Cette opération de produit logique doit être associée à l'idée de contacts placés en série, au mot ET, au signe $\times$ *ou* $\bullet$ (le signe peut être omis).



La fonction ET est donc la fonction où la sortie égale le produit logique des entrées :

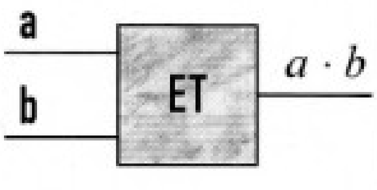
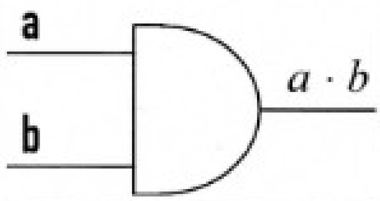
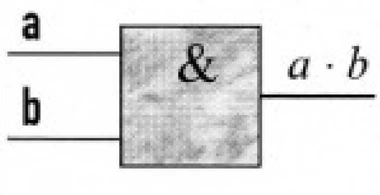
$\boxed{L = a \bullet b}$, (lire a et b).

Avec la table de vérité suivante :

a	b	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

avec les conventions adoptées dans les paragraphes précédents.

Symboles de la fonction ET :

<table>
<tr><td>Sans norme</td><td>Norme américaine</td><td>Norme CEI 617-12
Norme NFC 03-212</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Exercice 6

Complétez les tables de vérité suivantes. Ecrire l'équation correspondante et traduisez pour chacun des cas le schéma électrique correspondant.

a	0	S
0	0	
1	0	

$a \bullet 0 =$......

a	1	S
0	1	
1	1	

$a \bullet 1 =$......

a	a	S
0	0	
1	1	

$a \bullet a =$......

a	$\overline{a}$	S
0	1	
1	0	

$a \bullet \overline{a} =$......

Exercice 7

Il s'agit d'un exercice récapitulatif. Rechercher les différentes valeurs de A à T dans leurs équations respectives :

Equation	Réponse
$A = a + a + 0$	A = ...
$B = a + \overline{a} + 0$	B = ...
$C = a + \overline{a} + 1$	C = ...
$D = a + 0 + 1 + \overline{a}$	D = ...
$E = a + \overline{a} + 0 + b + c$	E = ...
$F = a \cdot \overline{a} \cdot 0$	F = ...
$G = a \cdot \overline{a} \cdot 1$	G = ...
$H = a \cdot \overline{b} \cdot 1$	H = ...
$I = a \cdot 0 \cdot 1 \cdot b$	I = ...
$J = (a \cdot \overline{a}) + 0$	J = ...
$K = (a \cdot \overline{a}) + 1$	K = ...
$L = (a \cdot 1) + (b \cdot 0)$	L = ...
$M = (a \cdot a) + 1 + 0$	M = ...
$N = (a \cdot \overline{a}) + a + (0 \cdot a)$	N = ...
$O = (a \cdot a) + a + \overline{a} + (a \cdot \overline{a})$	O = ...
$P = a + (b + \overline{b}) + \overline{c} + a$	P = ...
$Q = a \cdot b + \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$	Q = ...
$R = a + a \cdot b$	R = ...
$S = a + \overline{a} \cdot b$	S = ...
$T = a \cdot (a + b)$	T = ...

Résumé

OU	ET
$S = a + b$	$S = a \cdot b$
$a + 0 = a$ $a + 1 = 1$ $a + a = a$ $a + \overline{a} = 1$	$a \cdot 0 = 0$ $a \cdot 1 = a$ $a \cdot a = a$ $a \cdot \overline{a} = 0$

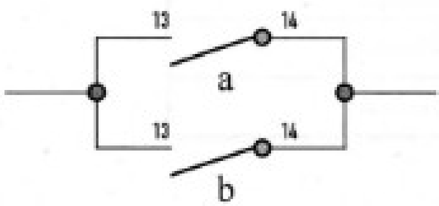
a	b	c	a + b + c
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a	b	c	$a \bullet b \bullet c$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

OU	ET
Il suffit d'une entrée à l'état 1 pour que la sortie soit à l'état 1.	Toutes les entrées doivent être simultanément à 1 pour que la sortie le soit.

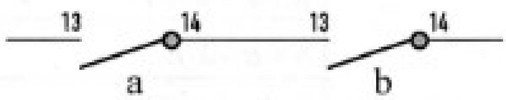
Circuit électrique :

contacts en PARALLELE



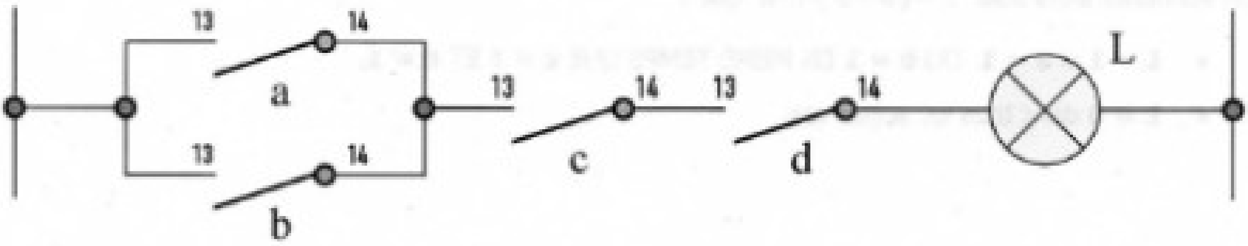
Circuit électrique :

contacts en SERIE



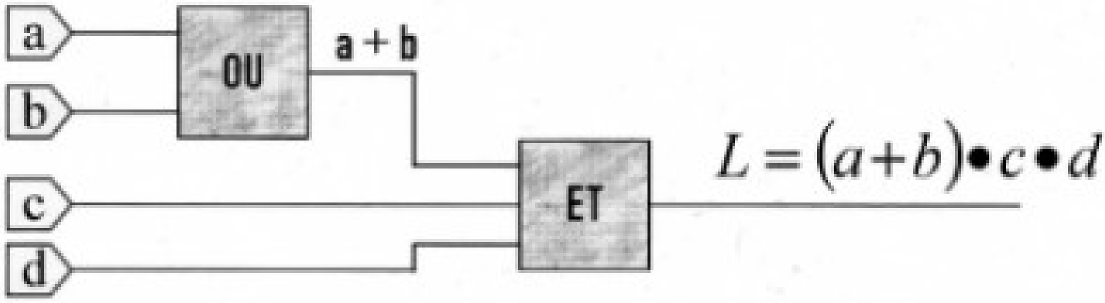
Schémas logiques (Logigrammes)

Soit le circuit électrique :



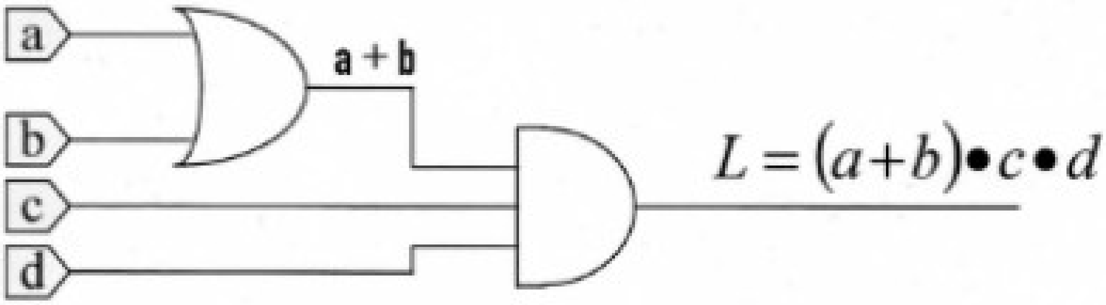
L'équation logique de ce circuit est $L=(a+b)\cdot c\cdot d$.

A partir de cette équation, on peut établir le schéma logique ou logigramme :

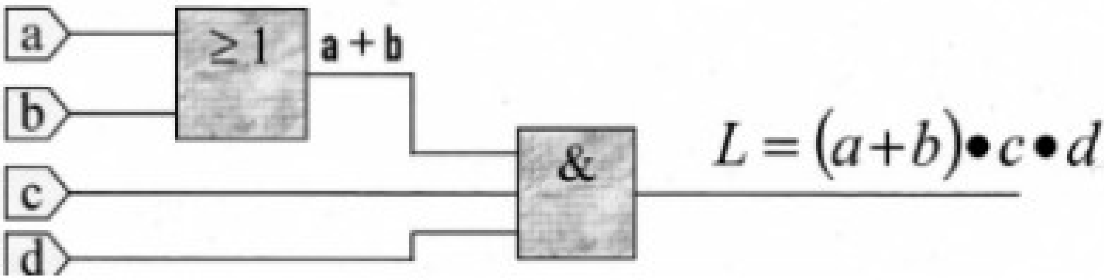


Le logigramme est donc une traduction plus visuelle donc plus "parlante" d'une équation logique. Le logigramme représente l'équation logique indépendamment de toute considération de technologie.

Les symboles proposés pages 9 à13 sont destinés à l'établissement de ces schémas. Ainsi le schéma logique ci-dessus traduit dans la norme américaine devient :

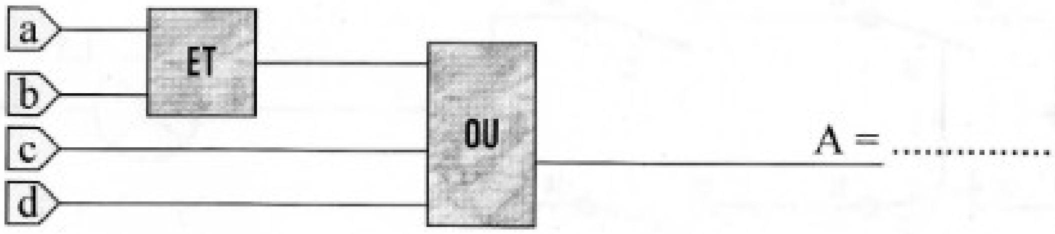


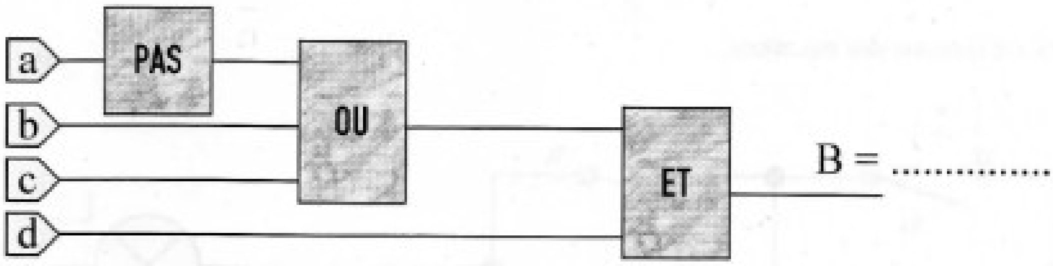
De même dans la norme CEI,

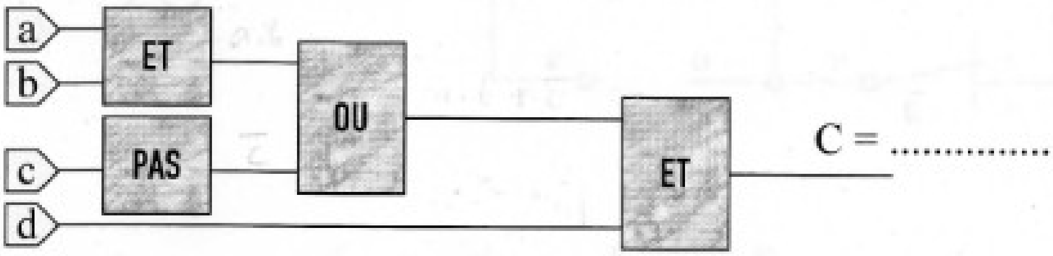


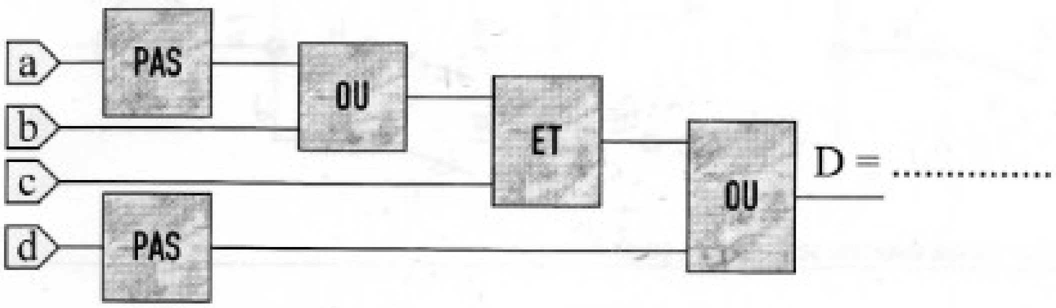
Exercice 8

Exprimer l'équation correspondante aux logigrammes suivants. Pour chaque équation, établir le schéma électrique équivalent.



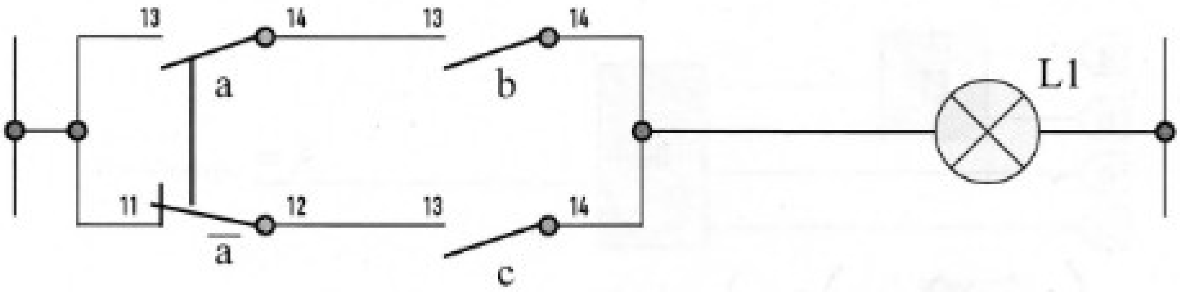






Exercice 9

Etablir l'équation logique ainsi que le logigramme des schémas électriques suivants. Dresser la table



de vérité de chacune des équations.