

UE UTC501 - Outils mathématiques pour l'informatique

Cours 0 - Outils mathématiques - Introduction

Alain Faye

Cnam

2024-2025

Plan du cours

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

Quelques éléments de logique

Proposition, relation unaire, relation binaire

- Proposition P prend la valeur Vrai = 1 ou Faux = 0
- Relation unaire : négation $:= \neg$

P	$\neg P$
1	0
0	1

- Relations binaires : et $:= \wedge$, ou $:= \vee$,

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Quelques éléments de logique

Implication

- Implication

- ▶ 2 propositions P et Q
- ▶ $P \Rightarrow Q$ est défini par la formule $(\neg P) \vee Q$

P	Q	$\neg P \vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- ▶ $P \Rightarrow Q = (\neg P) \vee Q = Q \vee (\neg P) = (\neg \neg Q) \vee (\neg P) = (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$

Quelques éléments de logique

Equivalence de 2 propositions

- Equivalence

- ▶ 2 propositions P et Q
- ▶ $P \Leftrightarrow Q$ est défini par $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Quelques éléments de logique

Quelques opérations

2 propositions P et Q

- $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$
- $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$

Exemple de calcul : la négation d'une implication

- $\neg(P \Rightarrow Q) = \neg((\neg P) \vee Q) = (\neg \neg P) \wedge (\neg Q) = P \wedge (\neg Q)$

Quantificateur

Quantificateur

- quelque soit, pour tout \forall
- il existe \exists
- il n'existe pas \nexists
- il existe un seul $\exists!$

Exemples :

- soit $E = \{2, 4, 6, 8\}$, $\forall x \in E$ x est pair
- soit $E = \{1, 3, 6, 8\}$, $\exists x \in E$ tel que x est pair
- soit $E = \{1, 3, 6, 7\}$, $\exists! x \in E$ tel que x est pair
- soit $E = \{1, 3, 5, 7\}$, $\nexists x \in E$ tel que x est pair

Démonstration

Par implication

- Hypothèses : P proposition de départ (supposée Vrai)
- Conclusion : Q proposition finale que l'on veut montrer Vrai
- Il faut montrer que $P \Rightarrow Q$ prend la valeur Vrai

Il est équivalent de montrer que $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ est Vrai. C'est la preuve par l'absurde. Parfois cette approche est plus simple.

Démonstration

Par l'absurde

Exemples :

- P = la somme des angles d'un triangle est 180°
- Q = dans un triangle il y a au plus un angle obtus (i.e. $>90^\circ$)

Montrons $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

- $\neg Q$ = dans un triangle il y a au moins 2 angles obtus
- On additionne les angles et on obtient une somme $> 180^\circ$. Donc P est Faux (i.e. $\neg P$ est Vrai).

Démonstration

Par récurrence

Soit une suite de propositions P_n qui dépendent d'un entier naturel n . On veut montrer que P_n prend la valeur Vrai $\forall n$.

Il est souvent plus simple de faire cette démonstration progressivement.

- 1 Montrer que P_0 est Vrai
- 2 Supposer P_n Vrai (Hypothèse de récurrence) et démontrer P_{n+1}
c'est-à-dire montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est Vrai.

Démonstration

Par récurrence

Exemple : Monter que la somme des n premiers entiers vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$. Ici P_n = la somme des n premiers entiers vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

- $n = 1$. La somme vaut 1 et $\frac{n(n+1)}{2}$ vaut 1 aussi. P_1 a bien pour valeur Vrai.
- Hypothèse de récurrence : P_n Vrai c'est-à-dire la somme des n premiers entiers vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Montrons P_{n+1} c'est-à-dire montrons que la somme des $n + 1$ premiers entiers vaut $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- Démonstration. La somme des $n + 1$ premiers entiers est égale à la somme des n premiers entiers plus $n + 1$. Ce qui donne en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres**
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique**
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse**
- 5 Suites et séries

Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries**