Capacité numérique n°2 – Mise en œuvre de la méthode d'Euler, pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation

La plupart des phénomènes observables fait intervenir une évolution au cours du temps des grandeurs physiques. En conséquence, la modélisation des problèmes physiques et des systèmes industriels amène très souvent à l'établissement d'équations différentielles. De façon à pouvoir ensuite simuler ces comportements, il faut être en mesure de résoudre ces équations différentielles, c'est-à-dire de les intégrer.

Dans le cas de problèmes simples, l'intégration des équations différentielles peut être faite de manière analytique (cf FM n°3). Mais dans la plupart des problèmes complexes, il faut avoir recours à l'outil numérique pour approximer les solutions de ces équations.

Nous nous intéresserons ici aux équations différentielles du 1er ordre pour comprendre le principe de résolution numérique sur un exemple simple. On utilisera plus particulièrement dans la suite du chapitre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt}+\frac{y}{\tau}=0$$

Avec comme condition initiale : $y(0)=y_0$

Table des matières

I. Principe de la méthode d'Euler explicite

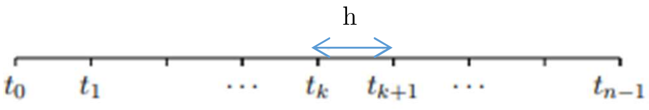
1. Détaillons la méthode

Prenons notre exemple d'équation différentielle. $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = 0$. On pose la fonction F telle que $F(y(t),t) = y'(t)$.
Le problème (dit de Cauchy) associé est :

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t),t) = -\frac{y(t)}{\tau} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Pour pouvoir résoudre numériquement ce problème, il faut :

- **<u>discrétiser le temps</u>** : dans tout ce chapitre la subdivision associée à l'échelle de temps se fera à pas h constant :



- **<u>puis déterminer à chaque instant t_k, la valeur de y_{k+1} à partir des valeurs de y_k et de la fonction F. On parle de méthode pas à pas.</u>**

  Le principe des différents schémas numériques d'intégration repose sur l'évaluation de $F(y(t),t)$ pour calculer y_{k+1}. En effet :

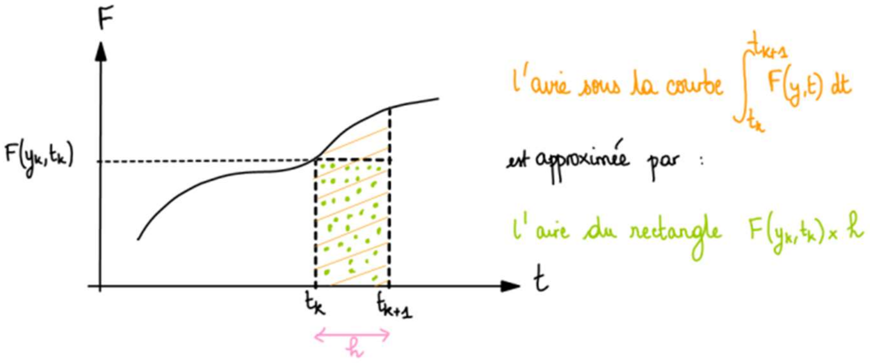
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt = [y(t)]_{t_k}^{t_{k+1}} = y_{k+1} - y_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(y(t),t)\,dt$$

  En renversant la dernière égalité ci-dessus, on comprend que construire y(t) revient à construire une suite $(y_k)_{k\in N}$ de proche en proche, telle que :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(y(t),t)\,dt \qquad \text{(relation 1)} \end{cases}$$

  Il existe différentes méthodes d'intégration qui reposent sur des choix différents d'approximation de l'intégrale $\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(y(t),t)\,dt$. Nous détaillons ici la méthode d'Euler explicite.

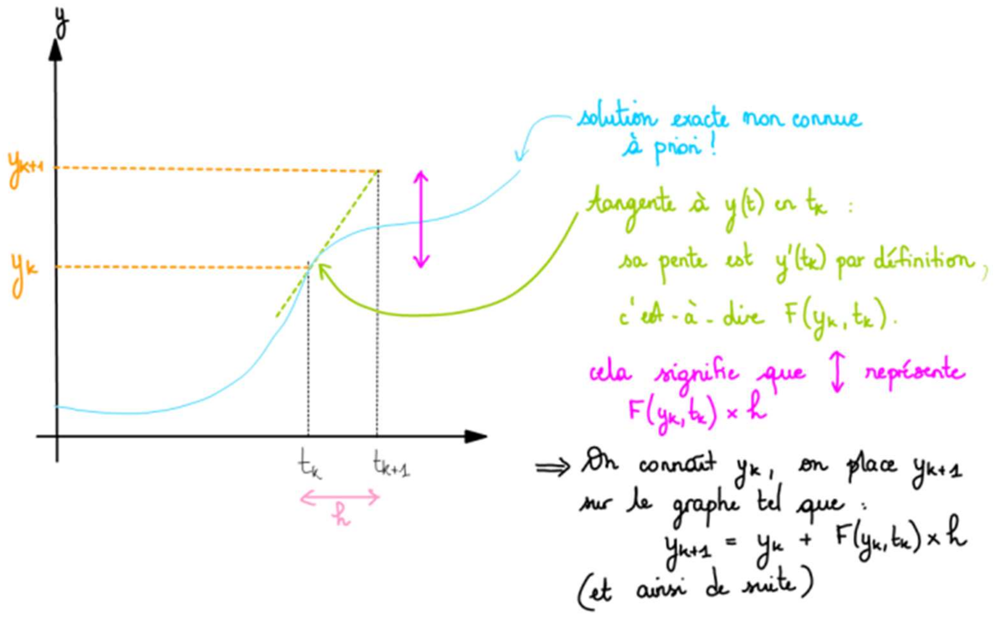
  a) Dans cette méthode, l'intégrale est approchée par la méthode du rectangle gauche. En effet, rappelons que le calcul de l'intégrale revient à effectuer le calcul de l'aire sous la courbe. Attention, dans le dessin ci-dessous, c'est bien $F(y(t),t)$ qui est tracée :



  On approxime l'aire sous la courbe de F entre les dates t_k et t_{k+1}, à l'aire du rectangle hachuré, c'est-à-dire à sa longueur multipliée par sa largeur : $F(y_k,t_k)*h$.

  D'où la relation 1 devient : $y_{k+1} = y_k + F(y_k, t_k) \times h$

b) Cela revient à effectuer l'approximation suivante :



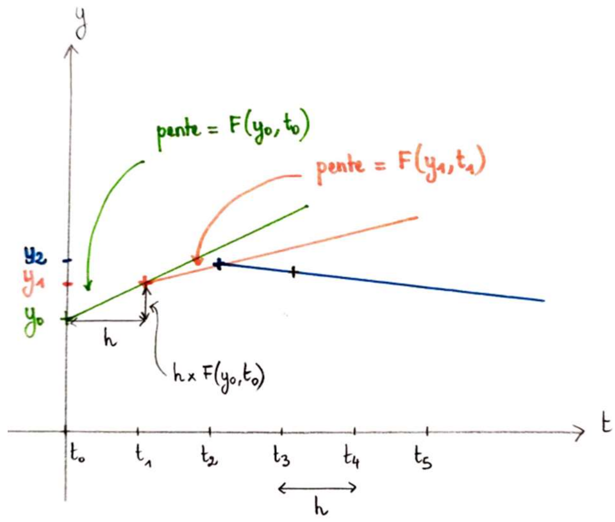
2. Résumons

La méthode d'Euler explicite est une méthode itérative qui permet de déterminer numériquement une solution *approchée* de l'équation différentielle $y'(t) = F(y(t),t)$, sur l'intervalle $[t_0, t_f]$, avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. (problème de Cauchy).

La procédure algorithmique de la méthode d'Euler explicite est la suivante :

- On commence par réaliser une subdivision régulière de l'intervalle $[t_0, t_f]$ en sous-intervalles de largeur h (h est le pas de résolution)
- On cherche ensuite une valeur numérique approchée de $y(t_k)$; cette valeur approchée est notée y_k. y_0 étant connu grâce à la condition initiale, on détermine les valeurs y_k en procédant de proche en proche grâce à la relation de récurrence (ou schéma numérique) :

$$y_{k+1} = y_k + F(y_k, t_k) \times h$$



3. En pratique via Python

La fonction « euler » définie dans le script ci-dessous est une implémentation possible de la méthode d'Euler explicite. Le choix a été fait ici de travailler avec des structures de données de type liste, mais peut tout à fait se faire avec des structures de type tableaux.

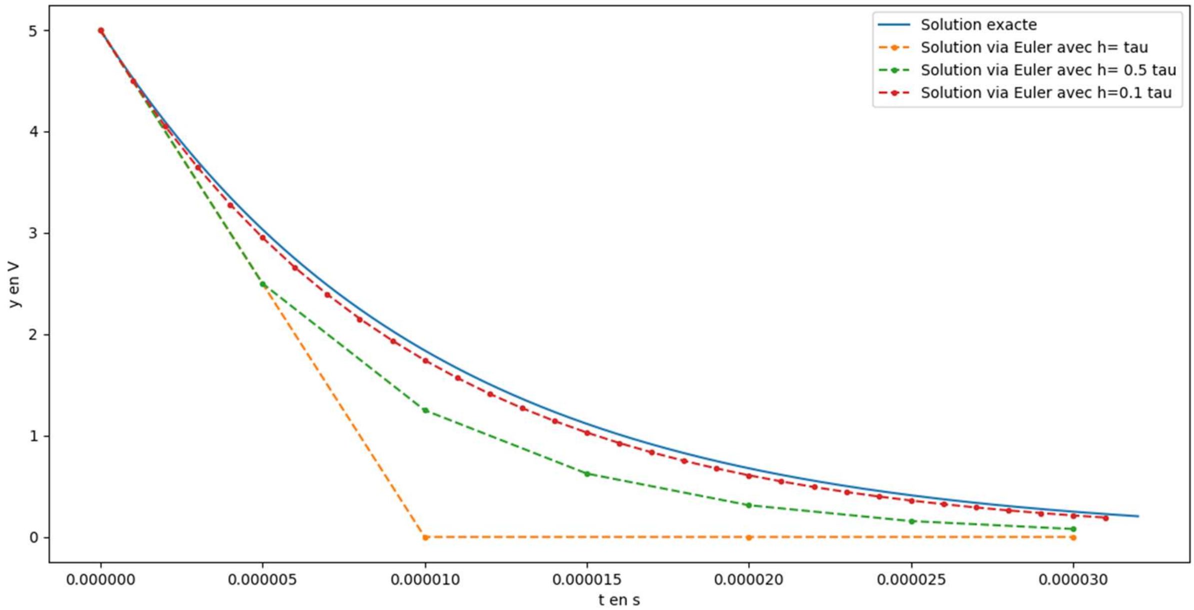
```python
#Définition des paramètres
tau=0.00001
u0=5
E=5
t0,tf=0,0.000032

#Définition de la fonction Euler
def euler(F,y0,t0,tf,h):
    '''
Arguments d'entrée :
- F : fonction donnant y' (fonction de deux variables y et t)
- y0 : condition initiale sur y (flottant)
- t0 et tf : bornes de l'intervalle de résolution (flottants)
- h : pas de résolution utilisé pour la résolution (flottant)
Variables de sortie :
- lt : liste contenant l'ensemble des instants tk
- ly : liste contenant l'ensemble des valeurs approchées yk
'''
    t=t0
    y=y0
    lt=[t0] #initialisation de la liste lt
    ly=[y0] #initialisation de la liste ly
    while t<tf:
        y+=h*F(t,y)
        t+=h
        lt.append(t)
        ly.append(y)
    return lt,ly

#Définition de la fonction F=dy/dt en fonction de y et t
def F(t,y):
    return -y/tau
```

4. Influence du pas et complexité

a. Le pas h influence la précision de la solution trouvée. Plus le pas diminue, plus notre approximation est proche de la solution réelle.
Ci-dessous, comparaison à la solution exacte des solutions approchées par la méthode d'Euler explicite pour différents pas de résolution :



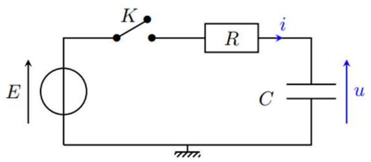
On pourrait montrer que, pour h suffisamment petit, l'erreur commise évolue proportionnellement à h : la méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1.

b. Le temps de calcul est inversement proportionnel au pas h. En effet, toutes choses égales par ailleurs, le temps de calcul est d'autant plus long que le pas h est petit.

À la lumière des deux points discutés précédemment, il apparaît que le choix du pas de discrétisation h doit résulter d'un compromis entre précision et rapidité d'obtention de la solution numérique. En Physique-Chimie, la modélisation du problème considéré fait généralement apparaître au moins un temps caractéristique d'évolution τ (ou une distance caractéristique l) et il est judicieux de choisir le pas de discrétisation h relativement à ce paramètre caractéristique : une valeur du pas comprise entre $10^{-4}\ \tau$ et $10^{-2}\ \tau$ s'avère souvent adaptée.

II. Mise en application sur la charge du circuit RC

1. Description de la situation



On considère la situation classique de la figure ci-contre : le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0.

Pour $t \geq 0$, l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur est régie par l'équation différentielle : $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec τ=RC et la condition initiale u(0)=0.

On choisira R=10 kΩ , C=1,0 nF soit $\tau=RC=10^{-5}$ s, et E=5,0 V.
On commencera l'étude à $t_0=0$ et on la terminera à $t_f=10\tau$.

2. Objectif

On n'utilisera dans ce TP que les listes et non les tableaux.

Affichage de la solution **analytique**

1. Sur le papier, retrouver la solution *analytique* de cette équation différentielle.
2. Tracer sur python la courbe représentant cette solution analytique sur l'intervalle demandé. On choisira 1000 points pour ce tracé. On rappelle que pour tracer une courbe, il faut commencer par définir la liste des abscisses et la liste des ordonnées, que l'on nommera ici respectivement *t_exacte* et *u_exacte*.

Rappel. Structure de base pour le tracé d'un graphe à partir de deux listes Lx (abscisses) et Ly (ordonnées) :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(Lx,Ly,"+-",color="red",label="Ly en fonction de Lx")
plt.xlabel("Lx")
plt.ylabel("Ly")
plt.legend()
plt.show()
```

Affichage de la solution **numérique**

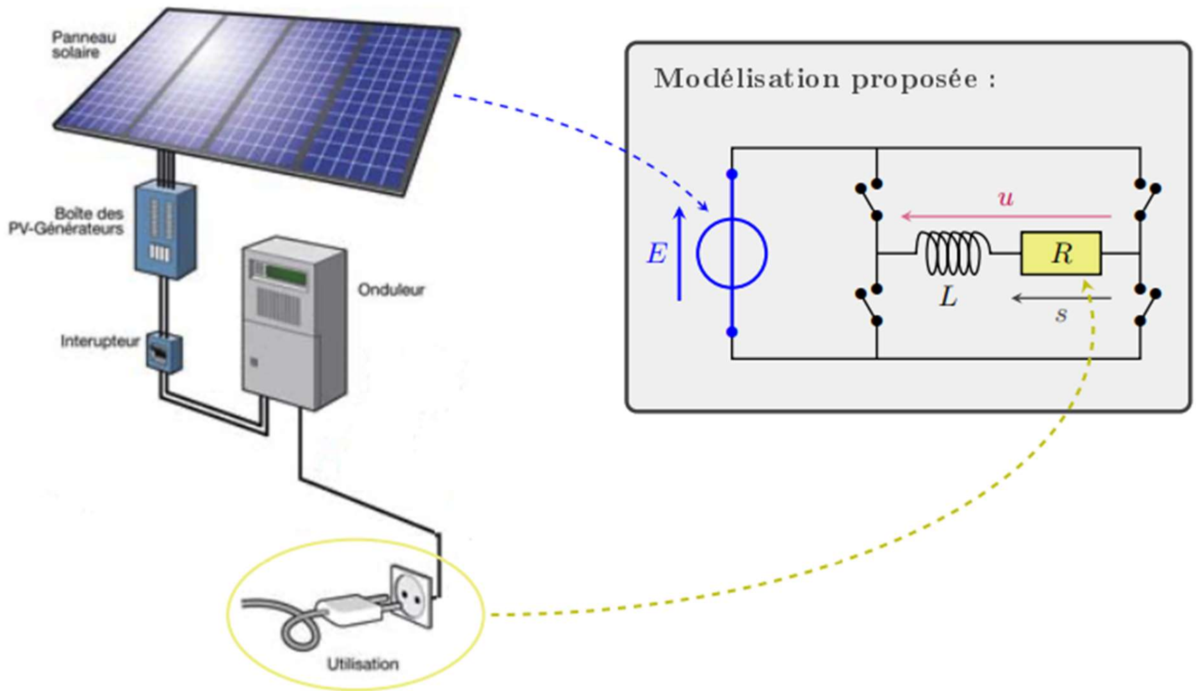
3. Définir la fonction F d'arguments (t,u) représentative du problème de Cauchy associé à cette équation différentielle.
4. Définir la fonction « euler » prenant en arguments (F,y_0,t_0,t_f,h) (voir définitions des arguments dans le script page 3) permettant de résoudre le problème par la méthode d'Euler explicite.
5. Faire afficher la solution approchée par la méthode d'Euler sur le même graphe que la solution analytique avec un pas h=0,1τ. Soigner le graphe (légende, noms des axes et unités, représentation via des points reliés...)

3. Influence du choix du pas

1. Modifier le script pour superposer les courbes représentatives pour 3 pas de temps différents : h=τ, h=0,1τ , h= 0,01τ.
2. Conclure.

III. Mise en application sur l'étude d'un onduleur

Afin d'alimenter une installation électrique, la puissance continue délivrée par un panneau photovoltaïque doit être convertie en puissance alternative. Cette conversion est réalisée au moyen d'un onduleur, comme schématisé sur la figure ci-dessous. On cherche à modéliser le signal de sortie s fourni par cet onduleur à l'installation, assimilée à une charge résistive R, ainsi qu'à observer l'influence de la séquence de commande des interrupteurs sur la forme du signal s.



Vous pourrez vous aider pour répondre à l'exercice, de l'ébauche de script proposée et envoyée par mail.

1. Montrer que les tensions u(t) et s(t) sont liées par l'équation $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{u}{\tau}$. Préciser l'expression du paramètre τ. Donner une interprétation physique à cette équation (qui est le signal de commande ? de sortie ? Quel rôle joue R ?...)

2. On suppose dans un premier temps que la séquence de commande des interrupteurs donne un signal u(t) en forme de créneau, symétrique, d'amplitude E et de période T. On souhaite déterminer le signal s(t) correspondant en résolvant numériquement l'équation différentielle établie dans la question précédente.

   (a) Compléter le script de façon à définir une fonction « euler » qui implémente la méthode d'Euler explicite de résolution d'une équation différentielle.

   (b) On impose $f = 1/T = 50$ Hz et on admet qu'on choisit L et R de sorte à avoir $\tau = T/2\pi$. Proposer une valeur du pas de discrétisation adaptée a priori à la résolution numérique du problème.

   (c) Résoudre numériquement l'équation différentielle donnant l'évolution de la tension s(t) sur l'intervalle [0, 4 T], avec la condition initiale s(0) = 0. Tracer, sur un même graphe, les courbes représentatives des tensions u et s. Commenter l'allure de la tension s ainsi déterminée.