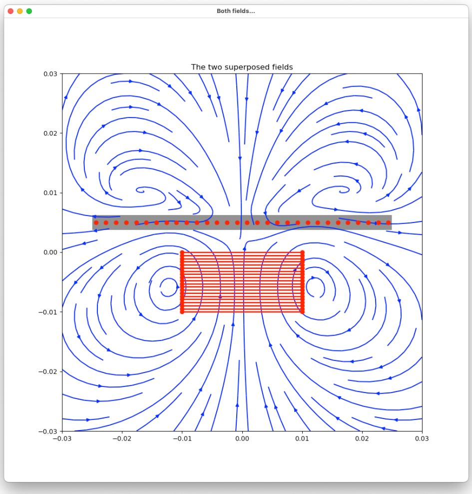
Python 20-21 for dummies : problème 5
Un modèle numérique
pour un détecteur de métal !

Nous allons créer un modèle numérique simple pour prédire l'influence sur l'inductance d'un bobine lorsqu'une plaque métallique circulaire est mise à proximité de la bobine

Nous avons une bobine de 200 spires avec un rayon $R_{coil} = 1$ et une épaisseur $H_{coil} = 1$. Au dessus de la bobine, un cylindre plein d'aluminium avec un rayon $R_{plate} = 0.5$ et une épaisseur $H_{plate} = 0.25$. Les axes de la bobine et du cylindre coïncident et la distance entre le centre de gravité de la bobine et du cylindre est $d = 1$. Toutes les données sont en centimètres. On définit l'origine du système d'axes au centre de la spire supérieure de la bobine. La bobine et le cylindre sont placés horizontalement avec un vecteur normal $[0, 0, 1]$.



Le problème est axisymétrique et le champ magnétique n'a qu'une composante radiale B_x et une composante verticale B_z. Si l'on fait circuler un courant électrique $I\cos(\omega t)$ avec une fréquence $f = \omega/2\pi f$, un champ oscillant va être induit par la bobine et créer une inductance sur le circuit qui alimente la bobine. Mais en outre comme vous l'a expliqué avec brio votre enseignant favori de physique, ce champ magnétique va également créer des courants de Foucault dans le cylindre en aluminium... Et ces courants induits vont eux-même créer un champ magnétique qui va s'opposer partiellement à l'effet du champ magnétique de la bobine : le résultat est que l'inductance effective du circuit sera modifée par la présence du cylindre en aluminium ! Ouppsss : c'est compliqué tout cela.

L'objectif du devoir est d'obtenir un petit programme `python` pour estimer l'impact du cylindre en aluminium sur l'inductance du circuit de la bobine où nous supposerons que le courant est imposé. Il sera dès lors possible en mesurant la tension autour de la bobine de pouvoir détecter la présence éventuellement d'un objet métallique. Nous supposons que la pièce métallique est cylindrique et partage le même axe que la bobine, afin d'avoir une symétrie axiale qui simplifie un peu nos calculs !

Bon : maintenant, nous allons expliquer, étape par étape, ce que nous allons faire dans ce devoir.

Champ magnétique généré par la bobine

Si un courant $I\cos(\omega t)$ circule dans la bobine, le champ magnétique généré s'écrit comme $\mathbf{B}(\mathbf{x})\cos(\omega t)$. Tout d'abord, nous allons calculer les composantes radiale et verticale de $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ pour des positions quelconques dans le plan $0xz$. Plus précisément, nous allons calculer le champ magnétique généré par une boucle de courant avec la loi de Biot-Savart et ensuite obtenir le champ généré par la bobine en superposant les champs générés par une dizaine de boucles superposées auxquelles on associera une partie de 200 spires.

La loi de Biot-Savart nécessite de calculer une intégrale de contour le long de la boucle. Pour une boucle de rayon R située à une hauteur Z, le champ magnétique est évalué en utilisant une méthode des rectangles pour un cercle discrétisé avec des points correspondant aux angles :

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{n}$$

avec $i = 1 \dots n$. Pour chaque point discret, nous avons un arc de cercle $Rd\theta = 2\pi R/n$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

$$\Big\downarrow \quad \text{En discrétisant le cercle en } n \text{ arcs } d\theta = 2\pi/n \text{ :-)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{l}_i \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|^3}$$

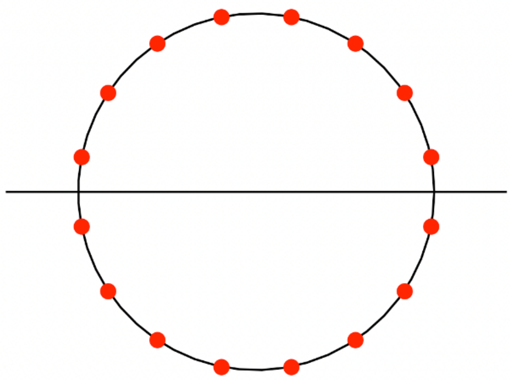
Comme dans le plan (x, z), il n'y a qu'une composante radiale en x et une composante en z en raison de la symétrie du problème, l'expression se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned} B_x(x,z) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_{i=1}^{n} \frac{(z-Z)dy_i}{R_i^3(x,z)} \\ B_z(x,z) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_{i=1}^{n} \frac{-Y_i dx_i - (x-X_i)dy_i}{R_i^3(x,z)} \end{aligned}$$

avec

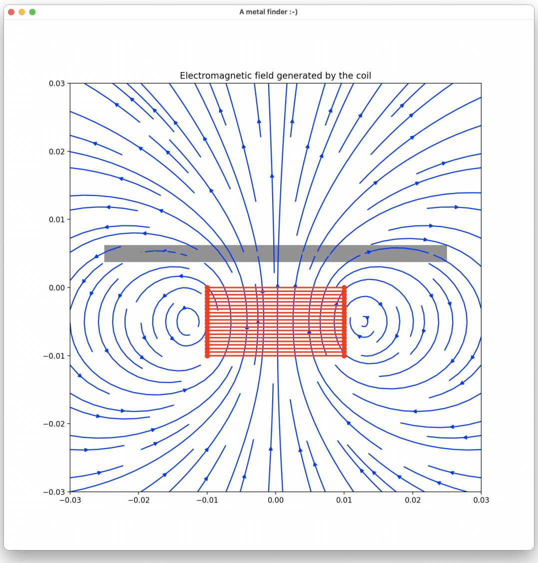
$$\begin{aligned} X_i &= R\cos\theta_i \\ Y_i &= R\sin\theta_i \\ \\ dx_i &= -d\theta R \sin\theta_i \\ dy_i &= d\theta R \cos\theta_i \end{aligned}$$

$$R_i(x,z) = \sqrt{(x-X_i)^2 + (-Y_i) + (z-Z)^2}$$



Les plus futés d'entre vous observeront que nous avons délibérément évité de placer des points dans le plan Oxz pour éviter d'avoir un souci lorsqu'on calculerait le champ magnétique à un point qui coïnciderait ou serait vraiment très proche de la boucle de courant ! C'est la première partie du devoir qu'il faudra faire : implémenter le calcul du champs magnétique.

On obtient ainsi le champ magnétique généré par le passage du courant dans la bobine, en superposant le champ généré par une série de boucles de courant placées à diverses hauteurs dans l'intervalles $[-H_{coil}, 0]$. On pourrait être tenté de mettre 200 boucles de courant, mais c'est nettement excessif : on se contentera de placer une dizaine de boucles comportant chacune une vingtaine de spires :-)



Et c'est ici qu'il est vachement intéressant d'observer que le flux de ce champ magnétique est loin d'être identique pour toutes les spires de la bobine : le flux est plus important pour la spire centrale pour que celles des extrémités et nous allons donc en tenir compte pour le calcul du flux afin d'obtenir l'inductance de la bobine.

Inductance générée dans la bobine

Pour obtenir l'inductance de la bobine, il faut calculer le flux de ce champ magnétique à travers la boucle de courant en souvenant du cours de notre ami Claude.

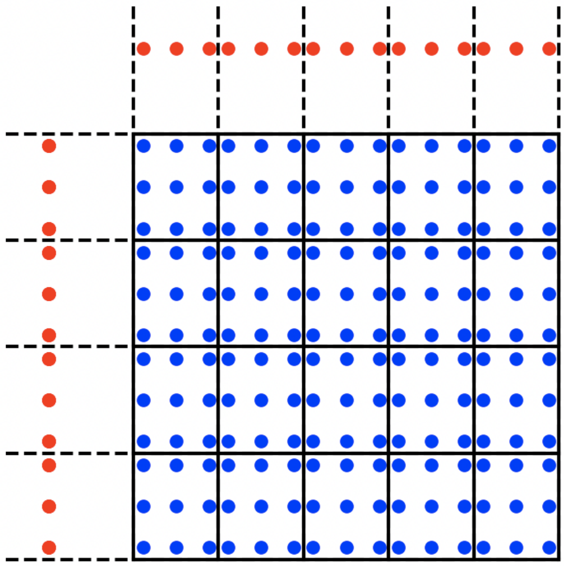
$$\phi = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_z \; d\mathbf{x} \quad = \quad 2\pi \int_0^R B_z(x,z) \; x dx$$

En utilisant une quadrature composite de Gauss-Legendre:-)

$$\approx \quad \sum_{i=0}^{n} B_z(X_i, Z_i) \; w_i$$

Ce calcul sera effectué avec une règle composite de Gauss-Legendre où nous allons choisir des points d'intégration dans tout l'espace intérieur de la bobine. En d'autres mots, nous allons calculer une moyenne des flux pour toutes les valeurs possibles de hauteurs. Plus précisément, nous utiliserons une règle de Gauss-Legendre avec n_{GL} abscisses et poids et nous subdiviserons l'intervalle radial $[0, R_{coil}]$ en n sous-intervalles et l'intervalle vertical $[-H_{coil}, 0]$ en m sous-intervalles

C'est ici qu'interviendra la seconde partie du devoir : il faudra générer des tableaux unidimensionnels qui contiendra l'entièreté des abscisses et des poids d'intégrations. Il y aura $n_{GL}^2 nm$ coordonnées X_i, Z_i, W_i à obtenir, comme nous l'avons illustré ici pour $n_{GL} = 3$, $n = 5$ ntet $m = 4$. Ici, certains petits futés pourraient me dire que le champ magnétique est également symétrique par rapport à la hateur et qu'on pourrait donc effectuer la moyenne uniquement sur l'intervalle vertical $[-H_{coil}/2, 0]$ et gagner ainsi pas mal d'efforts dans le calcul... C'est pourquoi, nous l'avons fait dans notre code :-)



Les points rouges sont les abscisses pour les règles d'intégration unidimensionnelle en x et en z et les points bleus sont les points d'intégrations pour la règle d'intégration bidimensionnelle sur le disque avec le calcul de moyenne sur la hauteur.

Pour obtenir le résultat voulu, c'est-à-dire une moyenne sur les intégrales de flux sur un des disques définis pour la bobine, il faut obtenir le poids de chaque point bleu $X_{i,j}$ comme le produit du poids de l'intégration d'un disque le long du rayon x et du calcul de la moyenne le long de la coordonnée z !

$$W_{ij} = \frac{2\pi X_i h_x w_i}{2} \; \frac{w_j}{2m}$$

où w_i et w_j sont les poids de Gauss-Legendre pour l'intervalle standard $]-1, 1[$ et les indices i et j correspondent aux abscisses X_i et Z_j distinctes pour les règles d'intégration unidimensionnelles. On note h_x et h_z les longueurs respectives des sous-intervalles en x et en z.

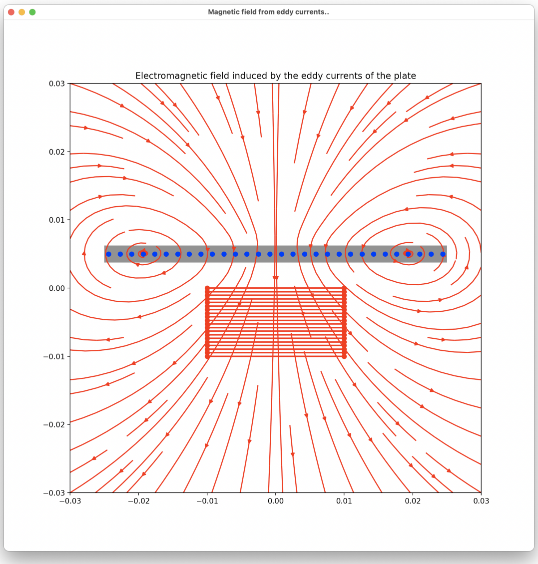
Calcul du champ magnétique généré par les courants de Foucault dans la plaque d'aluminium

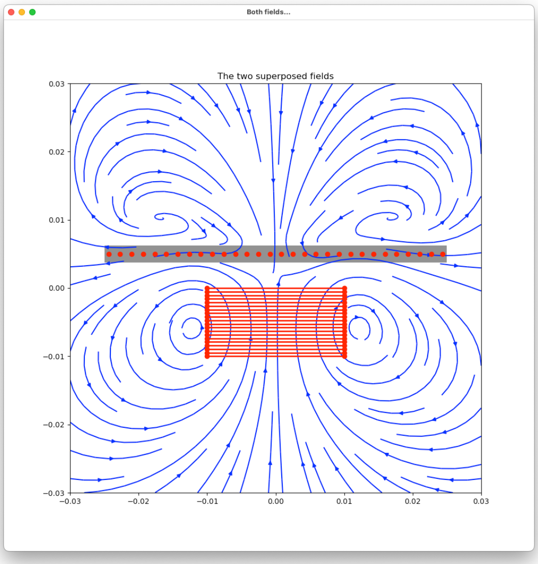
Décomposons la plaque circulaire en une série d'anneaux concentriques avec des rayons $r \in [0, R_{plate}]$. Pour chaque anneau qui forme une boucle, on obtient une force électromotrice en calculant le flux du champ magnétique qui traverse l'intérieur de l'anneau. En négligeant les effets résistifs et en ne tenant compte que de l'effet inductif, on peut en déduire le courant qui parcourt chaque anneau.
C'est la loi de Lenz-Faraday : on obtient finalement pour tout $r \in [0, R_{plate}]$.

$$I_{plate}(r) = -\frac{H_{plate}}{\pi r^2 \mu_0 \mu_r} 2\pi \int_0^r B_z(s, Z_{plate}) \; s ds$$

Bien noter le signe négatif qui exprime que les courants concentriques dans la plaque d'aluminium vont tourner dans un sens opposé au courant dans la bobine[1] !

Et puis, l'histoire est faite, il suffira de calculer le champ magnétique induit par ces courants de Foucault et nous utiliserons la fonction que nous avons déjà écrite dans la première partie du devoir. Il s'agit maintenant d'une série de boucles de courant, dont les hauteurs sont identiques, mais les rayons et les courants sont différents pour chaque boucle par contre. Heureusement, la fonction écrite permet de gérer également cette situation !



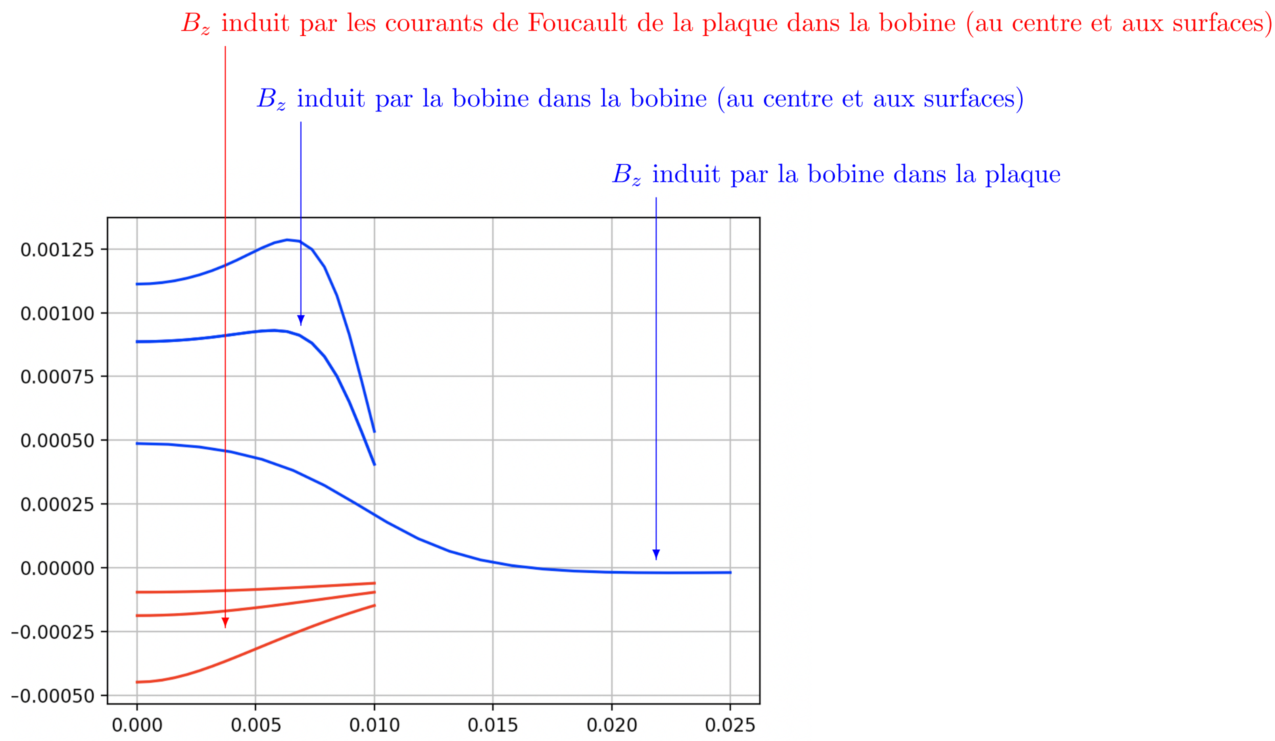


On observe maintenant que ce champs magnétique s'oppose à celui créer par la bobine et va créer une inductance induite négative pour la bobine.

L'inductance effective observée par le circuit de la bobine sera obtenue comme la somme de l'inductance des deux champs magnétique !

Si vous avez bien programmé les deux fonctions du devoir, vous devriez obtenir quelque chose proche de la figure ci-dessus : observer bien ce qui se passe dans le cylindre en aluminium ! Et au passage, vous voyez que la simulation numérique, le langage `python` permettent de visualiser beaucoup de choses que la résolution analytique en physique ne permet pas toujours de voir. Notez aussi que l'approximation usuelle d'un flux magnétique constant sur toute la hauteur de la bobine est une approximation qui s'avère vraiment assez grossière.

[1] De manière très surprenante, la fréquence du courant n'apparaît pas dans cette relation, mais il faut pourtant bien une variation temporelle du courant pour avoir des courants de Foucault : en pratique, le fréquence apparaît à la fois dans l'impédance et dans la force électromotrice et se simplifie quand on calcule le courant, mais elle ne peut évidemment pas être nulle si la division pour obtenir le courant n'aurait aucun sens :-)



Plus précisément, on vous demande de :

1. Ecrire tout d'abord une fonction

   ```
   [Bx,Bz] = inductanceMegneticField(X,Z,Rsource,Zsource,Isource,data)
   ```

   qui calcule les composantes radiales et verticales du champ magnétique généré par une série de boucles circulaires de courants dont les axes coïncident avec l'axe oz pour des points du plan oxz. Les tableaux `X` et `Z` de même taille contiennent les coordonnées des points. Les tableaux unidimensionnels `Rsource`, `Zsource`, `Isource`, contiennent les rayons, les hauteurs et les courants qui passent dans les boucles de courant. L'argument `data` contient un élément de la classe `MetalDetectorProject` qui contient tous les paramètres matériels du problème, ainsi que la discrétisation du cercle à utiliser pour le calcul des intégrales sur les boucles de courant.

   Il faut ensuite renvoyer des tableaux de même taille et de même dimension que `X` et `Z` : cela peut être des tableaux undimensionnels, bidimensionnels ou même tridimensionnels.... En tous cas, pour faire fonctionner le programme test, il faudra pouvoir gérer des tableaux bidimensionnels.

2. Ecrire ensuite une fonction

   ```
   [X,Z,W] = inductanceGaussLegendre(X0,Xf,Z0,Zf,n,m,nGaussLegendre)
   ```

   qui calcule toutes les abscisses et les poids d'intégration d'une règle composite de Gauss-Legendre afin de calculer les flux magnétique à travers les boucles de courant. Les intervalles d'intégration en x et en y sont définis par `X0`, `Xf` et `Z0`, `Zf`. Le nombre de sous-intervalles en x et z est spécifié par `n` et `m`, tandis que la règle de Gauss-Legendre à utiliser est caractérisée par `nGaussLegendre`.

   La fonction renvoie une liste `[X,Z,W]`contenant les abscisses et les poids. Ce seront des tableaux unidimensionnels de taille `n*nGL*m*nGL` Si n ou m est nul, on fera une intégration unidimensionnelle et les tableaux auront une taille `m*nGL` ou `n*nGL` respectivement.

   Attention : il faut vraiment que la fonction accepte des argument nuls pour n et m afin de réussir tous les tests !

3. Comme d'habitude, pour tester votre programme, on vous a fourni un tout petit programme simple `inductanceTest.py` pour tester votre programme. On y effectue tous les calculs requis à partir des deux fonctions que vous devez écrire !

   Le programme fait aussi plein de jolis dessins et d'animations qui seront très utiles pour faire un super joli rapport pour votre projet :-)

4. Ce devoir n'est pas particulièrement compliqué.
Mais il faut essayer d'implémenter ce calcul de manière efficace et surtout d'avoir la bonne réponse !

5. Votre fonction (avec les éventuelles sous-fonctions que vous auriez créées) sera soumise sur `zouLab` sans y adjoindre le programme de test fourni ! Cette fonction devra être soumise via le web : ce travail est individuel et sera évalué. Pour rappel, toutes vos soumissions seront systématiquement analysées par un logiciel anti-plagiat. Faites vraiment votre programme seul... :-)

6. A la fin du devoir, il vous suffira de changer les paramètres de la bobine et la pièce métallique pour faire correspondre votre prédiction à votre prototype du projet. Et alors, vous verrez le sourire de notre coordinateur de quadrimestre[2] s'illuminer de bonheur ! Et oui, la modélisation physique et les méthodes numériques sont les clés qui permettent de comprendre ce qu'on observe dans le laboratoire !

[2] Oui, ce fameux enseignant de physique dont personne ne prononce correctement le nom...