Devoir 4 : Démonstrations en tout genre

Informations pratiques

- L'objectif principal de ce devoir est de s'exercer à la rédaction de démonstrations. La qualité de la rédaction sera donc prise en compte dans l'évaluation.
- Ce devoir est individuel. Nous vous encourageons à échanger vos idées entre étudiants sur la façon d'aborder le devoir. Toutefois, ne partagez pas votre production. De même, il vous est demandé de ne pas plagier. Si vous employez des sources externes, citez-les.
- La date limite de remise de votre rapport est vendredi 15 décembre à 23h59.

Exercices

1. **Application non probabiliste du théorème limite central**

   Utiliser le théorème limite central pour montrer que $A_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$.

   Indice : Une variable aléatoire de Poisson $P(n)$ a la même loi que la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1.

Solution: Soit $X_1, X_2 \dots X_n$ des variables aléatoires

Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$ la somme des proba que $X = k$ pour k allant de 0 à n

On sait grace à l'indice que $X = \sum^{n} P(1) = P(n)$. On a donc $P(X=k) = P(P(n)=k)$. Donc $A_n = P(P(n)=0) + \dots + P(P(n)=n)$

On sait que pour une somme cumulative de probabilité : $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = P(X \leq n)$. On a donc $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = P(P(n) \leq n)$

Afin d'appliquer le theoreme central limite (TCL) il nous faut centrer et réduire la variable aléatoire afin de faire une comparaison plus facile avec la loi normale. Soit la moyenne et la variance, $\mu = 1$ et $\sigma = 1$. Soit y_n la variable aléatoire centrée réduite

$y_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} X_k - n}{\sqrt{n}}$, on peut dire que $\sum X_k = P(n) \Rightarrow y_n = \frac{P(n) - n}{\sqrt{n}}$

Utilisons le TCL : $\lim_{n \to \infty} P(y_n \leq x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{P(n) - n}{\sqrt{n}} \leq x \right) = \int_{-\infty}^{x} f(x') dx' = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'$

Liens avec A_n ? $A_n = (P(n) \leq n) \Rightarrow P(P(n) - n \leq n - n) \Rightarrow P\left(\frac{P(n)-n}{\sqrt{n}} \leq \frac{0}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{P(n)-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \Rightarrow A_n = P(y_n \leq 0)$

Appliquons le TCL : $\lim_{n \to \infty} P(y_n \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' = \frac{1}{2}$ On a donc bien que $A_n = \frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$

$\Rightarrow$ Résolution de l'intégrale avec Wolfram Alpha

Created with Notewise

2. **Structures algébriques**

Soit A un anneau. Un élément u de A est dit inversible à droite lorsqu'il existe $v \in A$ tel que $uv = 1$; il est dit diviseur de 0 à gauche lorsqu'il existe w non nul tel que $uw = 0$.

Un élément de A peut être inversible à droite et diviseur de 0 à gauche. Soit u un tel un élément. Montrer qu'il existe une infinité d'éléments w de A tels que $uw = 0$.

Indice 1 : Considérer l'application $\varphi : w \mapsto wu$ et montrer son injectivité.

Indice 2 : Supposons l'ensemble des éléments w fini et notons-le E. Alors la fonction $\varphi : E \to E$ est bijective (car une fonction injective $f : X \to X$ est bijective quand X est fini).

Indice 3 : Etudier l'élément $vu - 1$. Montrer alors que si E est fini, il est réduit au singleton $\{0\}$. Conclure.

Solution:

Etape 1 : Montrer l'injectivité de $\varphi : w \to uw$

Soit w_1 et $w_2 \in A$ et $\neq 0$ tlq $w_1 u = w_2 u$. φ injective si $w_1 = w_2$ quand $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. On a donc $w_1 u = w_2 u$. On sait que il $\exists v$ tlq $uv = 1$

On a donc $w_1 u v = w_2 u v \Rightarrow w_1 = w_2$ φ est injective

Etape 2 : Soit E l'ensemble des elements w, $\varphi : E \to E$ est bijective car une fct $f : E \to E$ injective est bijective si E est fini

Etape 3 : Montrer que si E est fini $uv - 1$ est le singleton $\{0\}$

Soit E l'ensemble fini des w, on sait que $uv = 1$ et que $uw = 0$

Soit $vu - 1$, si on fait passer $vu - 1$ dan φ on a : $\varphi(vu - 1) = u(vu - 1) = u - u = 0$.

Si on pose $vu - 1 = \alpha$ on voit que $u\alpha = 0$ et donc $\alpha = w = vu - 1 \Rightarrow vu - 1 \in E$

Dans l'étape 2 on a montré que si E est fini, $\varphi : E \to E$ est bijective

Par la bijectivité de φ on a :

Soit $\varphi : E \to E$ bijective, $\forall x \in E$ (ensemble de depart), il $\exists w \in E$ (ensemble d'arrivée) tlq $x = \varphi(w)$

Prenons $x = vu - 1$ (Memo : $uw = 0$ et $uv = 1$), on a $vu - 1 = wu$

Isolons $w \Rightarrow (vu - 1)v = wuv \Leftrightarrow v - v = w \Rightarrow w = 0$

Conclusion :

On a que si E est fini $w = 0$

Pour que $w \neq 0$ E doit etre infini afin de "casser" la bijection

Si E est infini on aura donc une infinité de w tlq $uw = 0$ $\forall w \neq 0$

Created with Notewise