Devoir 4 : Démonstrations en tout genre

Informations pratiques

- L'objectif principal de ce devoir est de s'exercer à la rédaction de démonstrations. La qualité de la rédaction sera donc prise en compte dans l'évaluation.
- Ce devoir est individuel. Nous vous encourageons à échanger vos idées entre étudiants sur la façon d'aborder le devoir. Toutefois, ne partagez pas votre production. De même, il vous est demandé de ne pas plagier. Si vous employez des sources externes, citez-les.
- La date limite de remise de votre rapport est vendredi 15 décembre à 23h59.

Exercices

1. **Application non probabiliste du théorème limite central**
   Utiliser le théorème limite central pour montrer que $A_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$.

   Indice : Une variable aléatoire de Poisson $P(n)$ a la même loi que la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1.

   Solution:

2. **Structures algébriques**

Soit A un anneau. Un élément u de A est dit inversible à droite lorsqu'il existe $v \in A$ tel que $uv = 1$; il est dit diviseur de 0 à gauche lorsqu'il existe w non nul tel que $uw = 0$.

Un élément de A peut être inversible à droite et diviseur de 0 à gauche. Soit u un tel un élément. Montrer qu'il existe une infinité d'éléments w de A tels que $uw = 0$.

Indice 1 : Considérer l'application $\varphi : w \mapsto wu$ et montrer son injectivité.

Indice 2 : Supposons l'ensemble des éléments w fini et notons-le E. Alors la fonction $\varphi : E \to E$ est bijective (car une fonction injective $f : X \to X$ est bijective quand X est fini).

Indice 3 : Etudier l'élément $vu - 1$. Montrer alors que si E est fini, il est réduit au singleton $\{0\}$. Conclure.

Solution: