Travaux Pratiques
Inférence Bayesienne et MCMC

5 ETI , majeure IMAGE– CPE Lyon

2020-2021

On se propose de générer par l'algorithme de **Metropolis-Hastings** une série $(x^{(t)})_{t=1,\dots,T}$ de variables aléatoires identiquement distribuées selon une loi cible $f(x)$. On utilisera comme loi de proposition la marche aléatoire suivante :

$$x^{(\text{cand})} \sim x^{(t)} + \sigma_q \mathcal{N}(0,1),$$

où σ_q est l'amplitude du saut de la marche aléatoire et $\mathcal{N}(0,1)$ désigne une loi normale centrée réduite.

On choisira comme loi cible, la densité de probabilité BETA :

$$f(x;a,b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{I}_{]0,1[}(x), \text{ avec } a = 0.5, \text{ et } b = 0.5$$

1. Programmer l'algorithme de Metropolis-Hastings correspondant, sous forme d'une fonction Matlab prenant comme paramètres d'entrée :

   - la taille T de l'échantillon à générer
   - la valeur μ du paramètre de la loi exponentielle cible
   - la valeur du saut σ_q.

   La fonction effectuera les opérations suivantes :

   — génération de la série $(x^{(t)})_{t=1,\dots,T}$
   — calcul du taux d'acceptation / rejet des propositions $x^{(\text{cand})}$
   — l'estimation de la densité de probabilité empirique $\widehat{f}(x)$ via l'histogramme (normalisé) de la série $(x^{(t)})_{t=1,\dots,T}$. Afficher superposées les lois cible estimée et théorique
   — l'estimation et l'affichage de la fonction d'auto-corrélation (normalisée) $\gamma_x(\tau)$ de la série $(x^{(t)})_{t=1,\dots,T}$.

2. Observer expérimentalement l'influence du saut σ_q sur la densité estimée $\widehat{f}(x)$ ainsi que sur la fonction d'auto-corrélation $\gamma_x(\tau)$. Ces observations illustrent-elles les résultats vus en cours ?

3. Généraliser la routine programmée à la question 1 à n'importe quelles expressions de loi cible et de marche aléatoire.