DURET Guillaume
GEDEON Benjamin

TRAITEMENT DU SIGNAL ALEATOIRE
Estimation de densités de probabilité

Il manque les codes de - synthese
- calc_histo

```
clear all, close all;

N=1000;% nombre de points
B=100;% frÃ©quence maximale
m3=2;%moyenne
sigma3=2;% Ã©cart-type
fs=1000;% frÃ©quence d'Ã©chantillonnage
M=20;% nombre d'intervalles imposÃ©s


[x1,x2,x3,Az,Bz]=synthese(N,B,m3, sigma3);% synthese des signaux ainsi que des coeffi-
cients pour calculer le gain complexe
[h,f]=freqz(Bz,Az,1024,fs);% gain complexe
```

affichage des signaux x1, x2 et x3 et de leur ddp ainsi que le module du gain complexe

---

```
figure (1)

subplot(2,4,1)

plot(x1)

title('signal x1')
xlabel('temps')

subplot(2,4,2)
plot(x2)
title('signal x2')
xlabel('temps')

subplot(2,4,3)
plot(x3)
title('signal x3')
xlabel('temps')

subplot(2,4,4)
plot(f,abs(h))
xlabel('freq')
ylabel('|H(f)|')
title('module du gain complexe du filtre')

subplot(2,4,5)
hold on;
[ddp1,centres1]=calc_histo(x1);% calcule et affiche l'histogramme de x1
```

```
plot(centres1,(1/(sqrt(2*pi)))*exp(-((centres1).^2)/2))% affiche la densitÃ© de probabi-
litÃ© thÃ©orique de x1


subplot(2,4,6)
hold on;
[ddp2,centres2]=calc_histo(x2);
plot(centres2,(1/(sqrt(2*pi)*std(x2)))*exp(-((centres2-mean(x2)).^2)/(2*(std(x2)).^2)))

subplot(2,4,7)
hold on;
[ddp3,centres3]=calc_histo(x3);
plot(centres3,(1/(sqrt(2*pi)*std(x3)))*exp(-((centres3-mean(x3)).^2)/(2*(std(x3)).^2)))

% estimation moyenne et Ã©cart-type avec la fonction mean ()
mean(x1);
mean(x2);
mean(x3);

s1=std(x1);
s2=std(x2);
s3=std(x3);
```

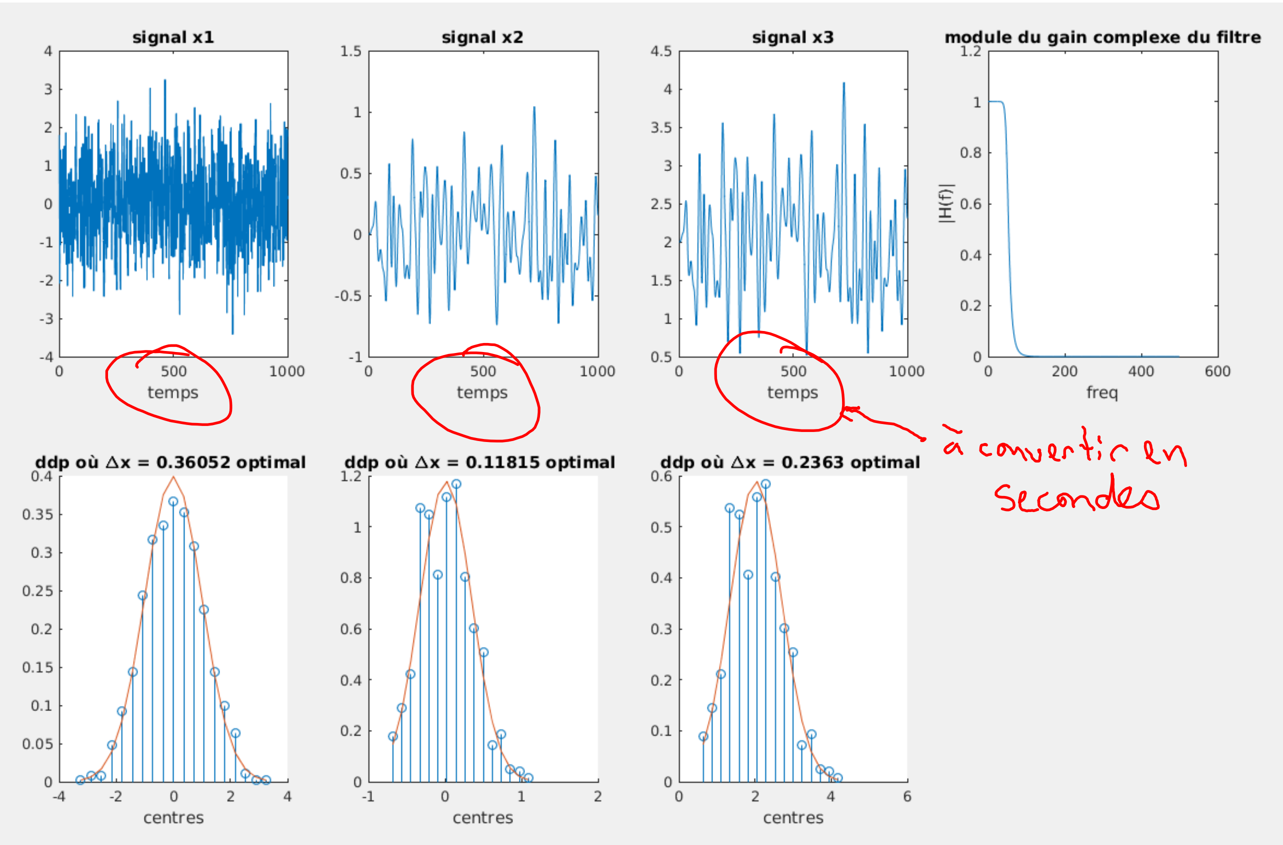


Figure 1: représentation des signaux ainsi que la ddp associée empirique et théorique

légende ?

influence de N

```
figure (2)

for i=4:11
   N2=2^i;
   subplot(2,4,i-3)
   hold on;
   [x1,x2,x3,Az,Bz]=synthese(N2,B,m3, sigma3);
   [ddp,centres] = calc_histo(x1,M);
   gauss=(1/(sqrt(2*pi)))*exp(-((centres).^2)/2);
   deltax=centres(2)-centres(1);
   plot(centres,gauss)
   intervallemin = gauss - sqrt(gauss.*((1/deltax)-gauss))/N2;%%% bornes pour l'inter-
valle de prÃ©cision
   intervallemax = gauss + sqrt(gauss.*((1/deltax)-gauss))/N2;
   plot(centres,intervallemin,'g')
   plot(centres,intervallemax,'y')
end
```

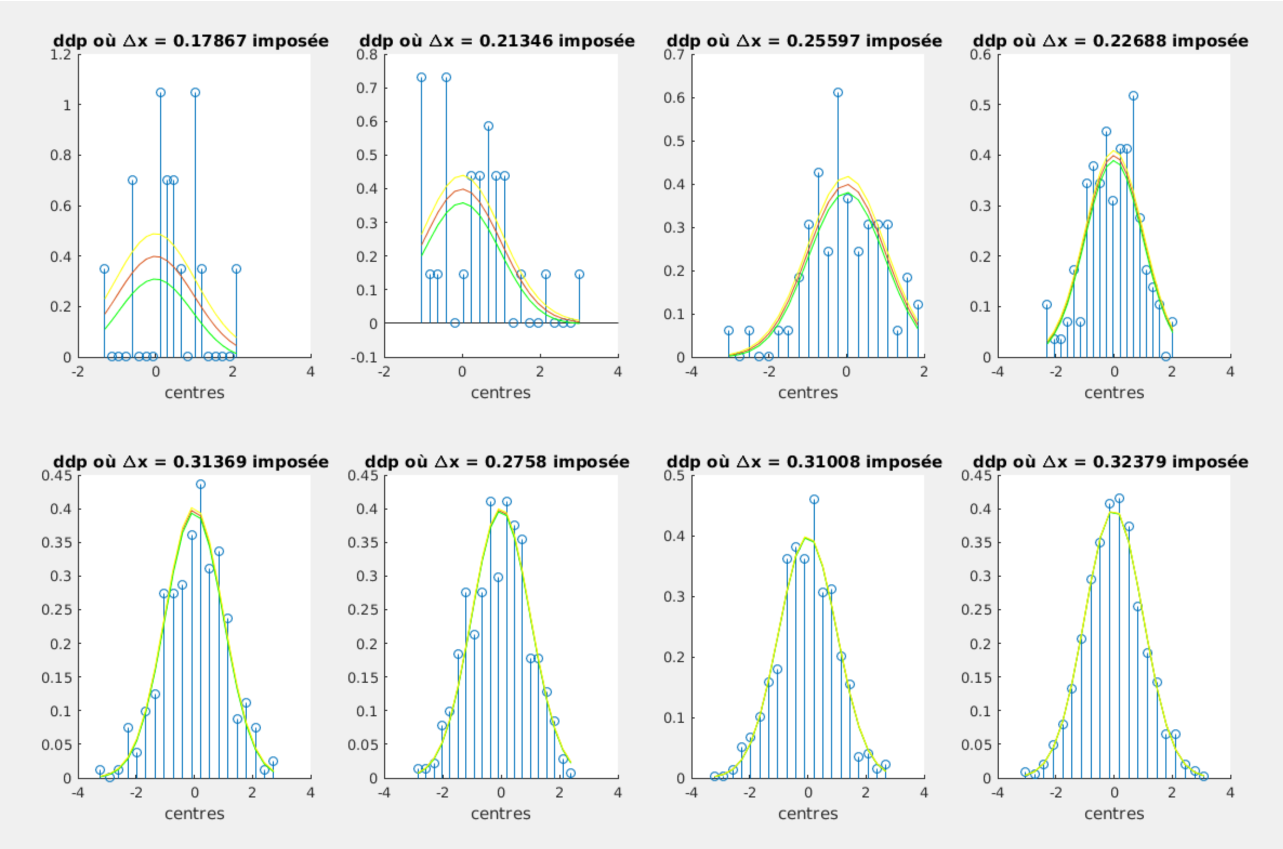
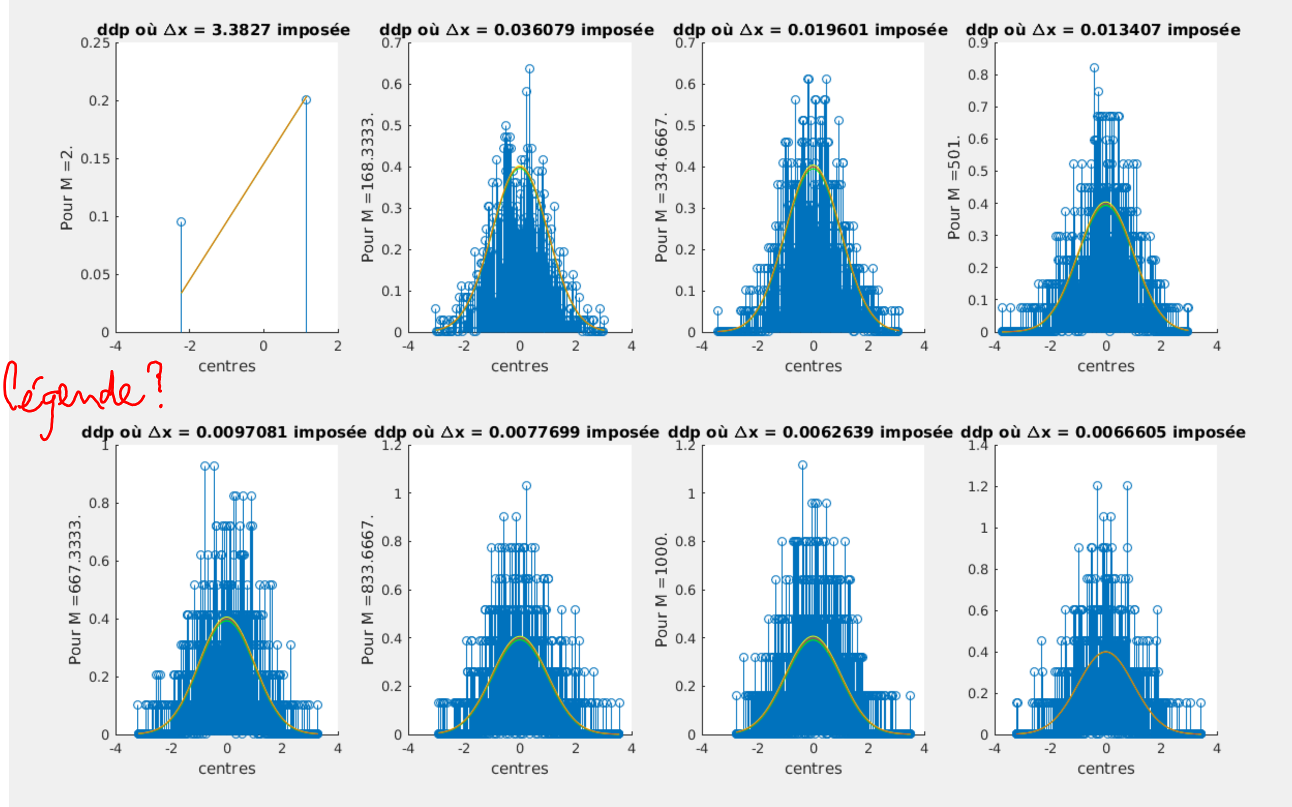


Figure 2: représentation des ddp empirique et théoriques du signal x1 en variant N

légende ?

influence de delta x

```
figure (3)



for i=0:6
   N=1000;
   M2=2+i*998/6;
   [x1,x2,x3,Az,Bz]=synthese(N,B,m3, sigma3);
   subplot(2,4,i+1)
   hold on;
   [ddp,centresM] = calc_histo(x1,M2);
   ylabel(['Pour M =',num2str(M2),'.'])
   deltax=centresM(2)-centresM(1);
   gauss=(1/(sqrt(2*pi)))*exp(-((centresM).^2)/2);
   intervallemin = gauss - sqrt(gauss.*((1/deltax)-gauss))/N;
   intervallemax = gauss + sqrt(gauss.*((1/deltax)-gauss))/N;
   plot(centresM,intervallemin,'g')
   plot(centresM,intervallemax,'y')
   plot(centresM,gauss)




end

subplot(2,4,8)
hold on;
[x1,x2,x3,Az,Bz]=synthese(N,B,m3, sigma3);
[ddp,centresM] = calc_histo(x1,M2);
deltax=3.49 * std(x1)* N^(-1/3);
gauss=(1/(sqrt(2*pi)))*exp(-((centresM).^2)/2);
intervallemin = gauss - sqrt(gauss.*((1/deltax)-gauss))/N;
intervallemax = gauss + sqrt(gauss.*((1/deltax)-gauss))/N;
plot(centresM,intervallemin,'g')
plot(centresM,intervallemax,'y')
plot(centresM,gauss)
```



Légende ?

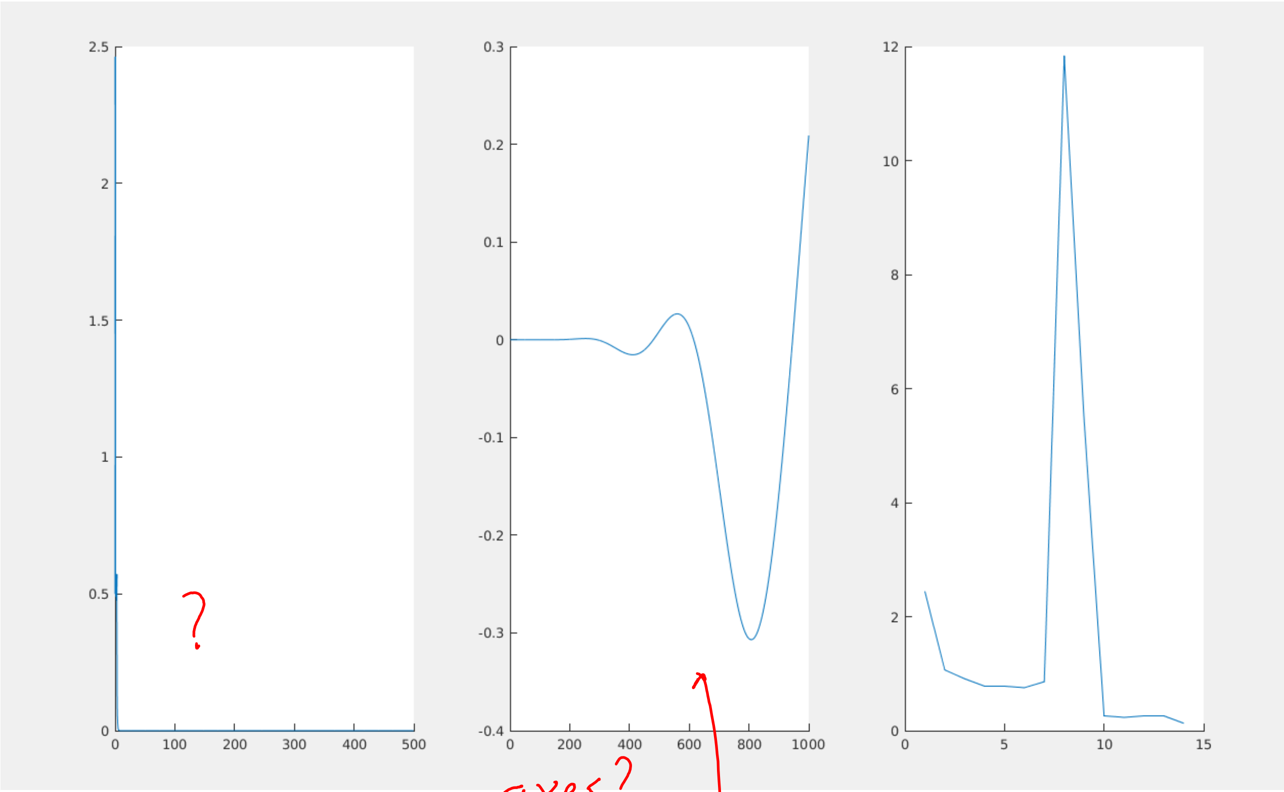
Figure 3 : représentation des ddp empirique et théoriques du signal x1 en variant M

On ne voit pas la valeur de M.

influence de B

```
figure(4)

N=1000;

B=5000;

[x1,x2,x3,Az,Bz]=synthese(N,B,m3, sigma3);

[H,freq]=freqz(Bz,Az,1024,fs);

hold off;
[ddp2,centresB]=calc_histo(x2);
gaussB=1/(sqrt(2*pi)*std(x2))*exp(-((centresB-mean(x2)).^2)/(2*(std(x2)).^2));
deltax=3.49 * std(x1)* N^(-1/3);

subplot(1,3,1)
hold on
plot(freq,abs(H))


subplot(1,3,2)
hold on
plot(x2)
```

```
subplot(1,3,3)
hold on
plot(ddp2)
```



axes ?
explication ?
titres ?

Figure 4 : Influence de B

Forte corrélation
Il faut plus d'échantillons pour respecter la propriété d'ergodicité

Traitement des Signaux Aléatoires
Estimation de densités de probabilité 4 ETI – CPE Lyon

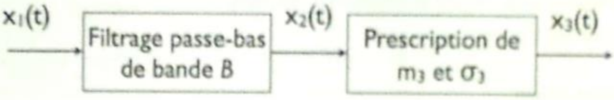
Travaux Pratiques TSA

2018-2019

Noms, Prénoms : GÉDEON Benjamin, DURET Guillaume
Groupe : D
Date : 8/10/2018

2 Bruit gaussien filtré, échantillonné

On souhaite générer un bruit gaussien $x_3(t)$ blanc dans la bande $[-B, B]$, de moyenne m_3 non nulle et d'écart-type $\sigma_3 > 1$. Pour cela, on applique la procédure décrite dans la préparation (Question 3) et schématisée ci-dessous :



où $x_1(t)$ est un bruit blanc gaussien, centré, d'écart-type $\sigma_1 = 1$.

2.1 Programmation

Programmer deux fonctions Matlab distinctes dont vous reproduirez les codes en annexe.

2.1.1 Fonction synthèse des signaux aléatoires

- Paramètres d'entrée :
  - le nombre N d'échantillons à générer
  - la largeur de bande B du filtre passe-bas
  - la moyenne m_3 et l'écart-type σ_3 du bruit $x_3(t)$.
- Traitements à effectuer dans la fonction :
  - génération d'une séquence $x_1(t)$ de bruit gaussien échantillonné (à la fréquence F_s), centré et d'écart-type $\sigma_1 = 1$
  - synthèse d'un filtre de *Butterworth* de type passe-bas, de fréquence de coupure f_c correspondant à la largeur de bande B et d'ordre $m = 8$
  - filtrage du bruit $x_1(t)$ par le filtre passe-bas pour obtenir le bruit filtré $x_2(t)$
  - transformation de $x_2(t)$ pour obtenir $x_3(t)$ de valeur moyenne m_3 et d'écart-type σ_3.
- Variables de sortie :
  - les vecteurs des échantillons de x_1, x_2 et x_3
  - les coefficients de la fonction de transfert du filtre passe-bas (coefficients des polynômes $A(z)$ et $B(z)$).

2.2 Expérimentation

2.2.1 Cas général

On supposera que le signal est échantillonné à la fréquence $F_s = 1\,KHz$. Ce choix est il important ? Pourquoi ?

Réponse:

Ce choix est important car il permet d'appliquer correctement le théorème de Shannon

où $2B \leq F_e$ $\quad B$: fréquence maximale

F_e : fréquence d'échantillonnage

Ceci permet d'éviter les éventuels recouvrements dus à l'échantillonnage.

Dans les conditions suivantes :

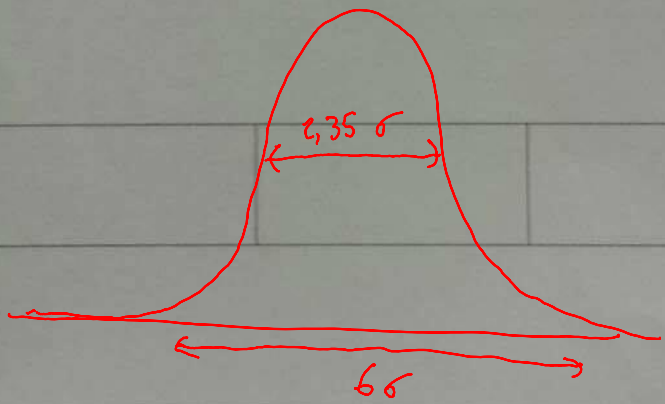
- $N = 1000$ échantillons de signal
- Filtre passe-bas avec $B = 100\,Hz$ (ordre $m = 8$)
- $\neq 0$ et $\sigma_2 > 1$ (choix libres que l'on précisera clairement

Dans l'absolu, le choix de F_s n'est pas important car en numérique, on travaille systématiquement en fréquence réduite $f \in [0,1]$.

a) la conformité entre moyennes mesurées et théoriques

	$\widehat{m_1}$	$\widehat{m_2}$	$\widehat{m_3}$
Décrire une 1ère méthode de mesure de la moyenne	On mesure la moyenne à l'aide de la fonction mean( ) de Matlab		
Mesure de la moyenne par la méthode 1	-0,0151	-0,0191	1,9613
Décrire une 2ème méthode de mesure de la moyenne	On mesure la moyenne en cherchant le maximum de la gaussienne. On prend l'abscisse du max.		
Mesure de la moyenne par la méthode 2	-0,1117	-0,03806	0,662

b) idem pour les écart-type (avec au moins deux méthodes de mesure distinctes que l'on détaillera)

	$\widehat{\sigma_1}$	$\widehat{\sigma_2}$	$\widehat{\sigma_3}$
Décrire une 1ère méthode de mesure de l'écart-type	Avec la fonction std ( ) de MatLab ✓		
Mesure de l'ecart-type par la méthode 1	0,9823	0,3080	0,6159
Décrire une 2ème méthode de mesure de l'écart-type	On remplace les c_i ~~la moyenne~~ centres ? $\Rightarrow P_X(c_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ $\Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, P_X(c_i)}$		
Mesure de l'écart-type par la méthode 2	1,02	0,315	0,62
Décrire une 3ème méthode de mesure de l'écart-type			
Mesure de l'écart-type par la méthode 3			
Décrire une 4ème méthode de mesure de l'écart-type			
Mesure de l'écart-type par la méthode 4			

Lesquelles de ces méthodes vous paraissent les plus précises ? Pourquoi ?

Réponse: Les méthodes mean et std est la plus précis car on prend en compte plus de valeur. → on prend en compte directement les données, sans passer par l'estimation de la ddp.

2.2.2 Influence de N

On ne considère ici que le signal aléatoire $x_1(t)$, le nombre d'intervalles pour le calcul des histogrammes restant constant et égal à $M = 20$.

a) Sur une même figure, afficher dans différents sous-graphes (pour une meilleure lisibilité des courbes, on pourra utiliser la commande `stem.m` en lieu et place de la commande `bar.m`), les densités de probabilité de $x_1(t)$ estimées pour plusieurs valeurs du nombre d'échantillons : pour cela faire varier dans une boucle `for...end`, le nombre N de 2^4 à 2^{11}. Superposer systématiquement les densités théoriques ainsi que les intervalles de précision théoriques $\mathbb{E}\{\widehat{p_x}(x)\} \pm \mathrm{std}(\widehat{p_x}(x))$ calculés en TD. **Donner en annexe le code Matlab de calcul de ces intervalles de confiance.** Veiller à commenter précisément chaque figure (légendes, labels,...)

b) Qualitativement, expliquez à partir de ces tracés, l'évolution de la variance (ou de l'écart-type) d'estimation.

Réponse:

D'après les tracés, on remarque que plus N augmente, plus l'~~écart-type~~ est petit.

Soyez plus précis.

- N petit → variance d'estimation importante
- Quand N augmente, les probabilités estimées se stabilisent autour de la courbe théorique
- Comportements en accord avec les intervalles de confiance théoriques

c) Peut on conclure sur le biais d'estimation à partir de cette seule expérience ? Expliquez.

Vous vous contredisez !

Réponse:

Graphiquement, la moyenne estimée ne change pas donc N n'influe pas sur le biais. On ne peut donc pas conclure sur le biais d'estimation à partir de cette seule expérience ✓

d) Quelle expérience faudrait il mener pour caractériser empiriquement et précisément le biais et la variance d'estimation ?

Réponse:

~~Il faudrait faire varier Δx ou bien B~~

Reproduire plusieurs fois l'expérience avec des réalisations différentes.

2.2.3 Influence de Δx

a) En faisant varier M, le nombre d'intervalles de l'histogramme, sur une plage incluant les 2 situations extrêmes **(que l'on indiquera et justifiera dans le compte-rendu)**, calculer et afficher (sur une même figure partagée en sous-graphes) les densités de probabilité estimées. Superposer les densités théoriques ainsi que les intervalles de précision.

b) Dans un dernier sous-graphe de la même figure, représenter la densité de probabilité estimée avec un choix optimal de Δx.

c) Comme pour la question précédente, décrivez qualitativement en l'expliquant, l'évolution de la variance et du biais d'estimation en fonction de Δx.

Réponse:

Si M augmente on a logiquement Δx qui diminue. (On peut faire varier M de 2 ~~[illegible]~~ à 1000 car c'est le nombre d'échantillon de $x_1(t)$)

~~À l'allure de mes courbes, il semblerait que Δx n'influe pas sur le biais~~

- Pour M petit : estimation de $p_x(x)$ peu fiable mais les probabilités estimées sont très proches des valeurs théoriques, conformément à une variance d'estimation théorique très faible.

- Quand M devient grand, la variance d'estimation augmente car peu de coefficients tombent dans chaque intervalle. Les estimations sont très irrégulières.

- Δx optimal fournit un bon compromis entre ces deux valeurs extrêmes.

2.2.4 Influence de B

On se place dans les conditions suivantes :

- $N = 1000$ échantillons
- $m_3 \neq 0$ et $\sigma_3 > 1$ (garder les mêmes valeurs que celles choisies pour la première expérience)
- choix empirique optimal des largeurs d'intervalles Δx
- Filtre de Butterworth passe-bas, d'ordre $m = 8$ et de **bande** $B = 5\,Hz$.

a) Afficher sur une même figure dans différents sous-graphes, le gabarit (gain complexe) du filtre passe-bas correspondant, le processus filtré $z_3(t)$ et la densité de probabilité estimé sur le processus filtré $z_3(t)$. **Superposer la densité théorique.**

b) Le signal $z_3(t)$ est il gaussien ? Justifiez votre réponse (on pourra par exemple calculer le Kurtosis

Et la suite ?