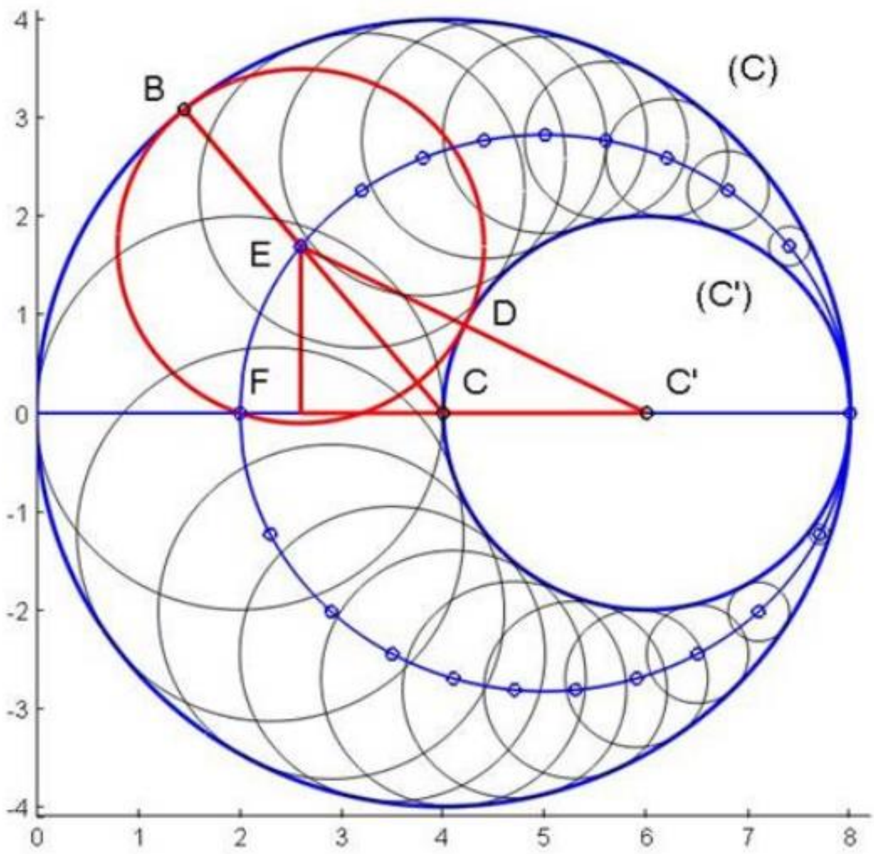
TD / TP n°3 :

Géométrie Analytique

Guillaume Duret et *Laurent Gouttesoulard* - *Groupe A*



Exercice 1 :

On donne 3 points P_i de coordonnées (xi , yi) dans le plan ainsi que 3 droites (Dj) (supposées non parallèles) d'équation : $uj + vj + wj = 0$

a) On cherche à établir l'équivalence :

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2) \text{ et } M_3(x_3, y_3) \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad det(P) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pour cela on établira 2 méthodes :

<u>- méthode 1 :</u>

on calcule le déterminant de P :

Det(P) = $\left| \begin{pmatrix} x1 & x2 - x1 & x3 - x1 \\ y1 & y2 - y1 & y3 - y1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|$ = (x2 - x1) (y3 - y1) - (y2 – y1) (x3 – x1)

Produit vectoriel de deux vecteurs. Donc si ce produit vectoriel est nul si et seulement si les points M1($x1$,$y1$), M2($x2$,$y2$) et M3($x3$,$y3$) sont bien alignés.

<u>- méthode 2 :</u>

Si les points M1($x1$,$y1$), M2($x2$,$y2$) et M3($x3$,$y3$) sont alignés, on écrit :

$$P^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $Ker \begin{pmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ ainsi P^T n'est pas inversible

ainsi Det(P^T)=0 et donc Det(P)=0

b) On dispose de trois droites D_j d'équations respectives $u_jx+v_jy+w_j=0$ (j=1,2,3)
Elles se coupent en les points (x_i , y_i)

On souhaite montrer que la matrice produit suivante peut être rendue diagonale :

$$D.P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue le produit matriciel :

$$D.P = \begin{pmatrix} x_1u_1 + y_1v_1 + w_1 & x_2u_1 + y_2v_1 + w_1 & x_3u_1 + y_3v_1 + w_1 \\ x_1u_2 + y_1v_2 + w_2 & x_2u_2 + y_2v_2 + w_2 & x_3u_2 + y_3v_2 + w_2 \\ x_1u_3 + y_1v_3 + w_3 & x_2u_3 + y_2v_3 + w_3 & x_3u_3 + y_3v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

Or (x_n , y_n , z_n) appartenant à une droite D_k , les : $x_nu_j + y_nv_j + w_j = 0$ lorsque $n\neq j$
Donc :

$$D.P = \begin{pmatrix} x_1u_1 + y_1v_1 + w_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2u_2 + y_2v_2 + w_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3u_3 + y_3v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

On a donc montré que la matrice produit précédente est diagonalisable.

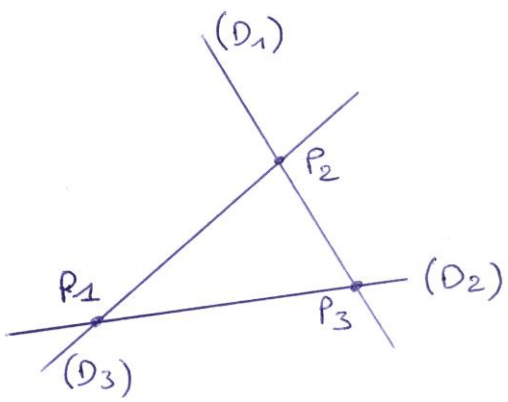
c) On cherche à déduire la relation suivante :

$$Det(D) = | \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} | = 0$$

En reprenant ce qui a été vu en question 2,

Det (D) = 0 => Det (D.P) = Det (D) . Det (P) = 0

Mais comme on a montré que D.P est diagonale, alors un de ces termes contenu sur la diagonale doit être nul :



Ainsi : $x_j u_j + y_j v_j + w_j = 0$ avec j =1 , 2 ou 3

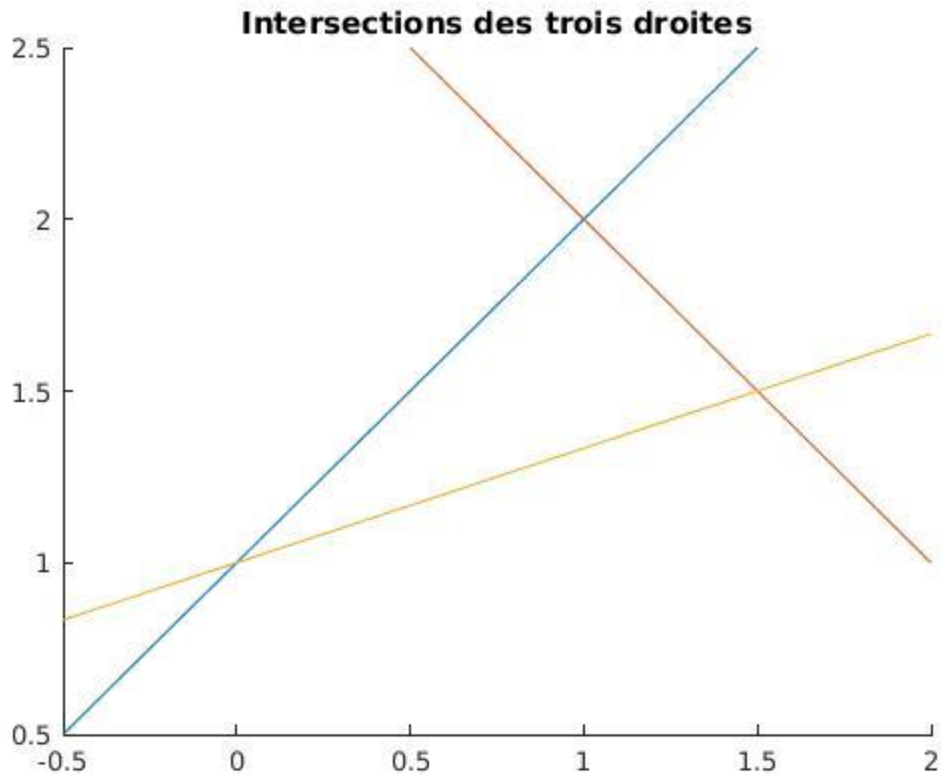
Or P1 est le point d'intersection de D2 et D3
P2 est le point d'intersection de D1 et D3
P3 est le point d'intersection de D1 et D2

Donc les points P1 , P2 , et P3 ne peuvent pas appartenir respectivement aux droites D1, D2, et D3.

Ainsi on en déduit que les points P1, P2, et P3 sont forcément alignés.

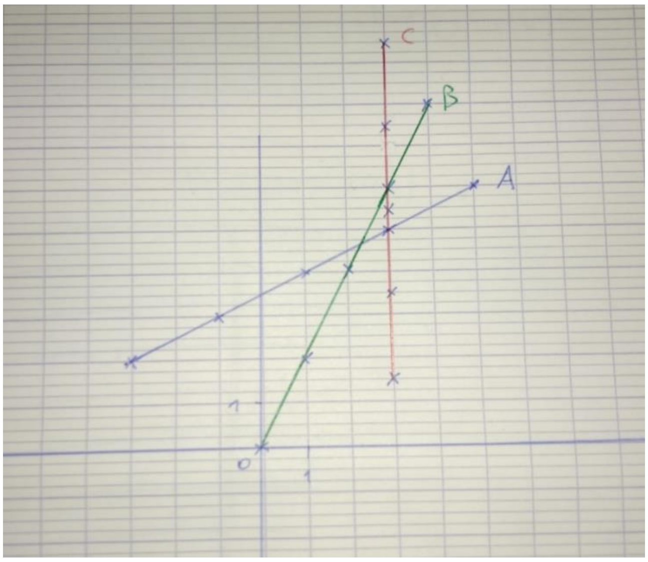
d) Sous Matlab :

On affiche les trois équations
$- x + y + 1 = 0$
$x + y - 3 = 0$
$- x + 3y - 3 = 0$

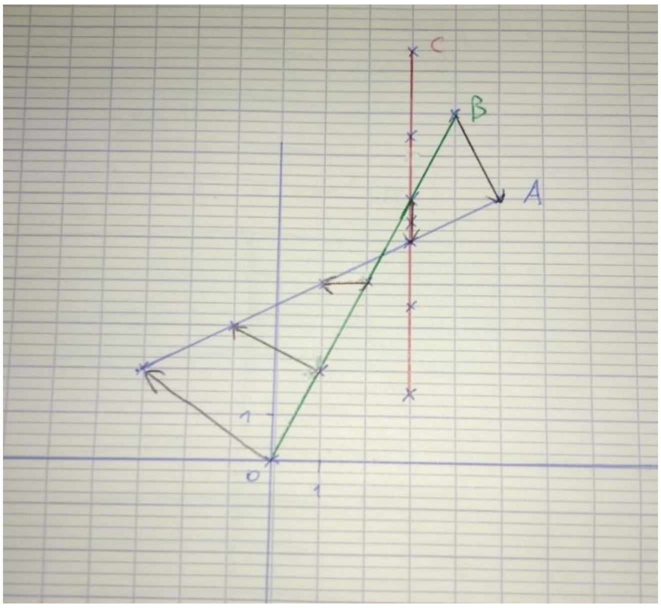


Exercice 2 :

a) Schéma des de la trajectoire de bateaux pour t ϵ [0,4] :



b) Schéma avec vecteur $\overrightarrow{BA}$:



On cherche à savoir si les bateaux A et B peuvent se heurter s'il s'agit de supertankers (qui ont une longueur de 500 m)

Pour cela on résout l'inéquation $\|\overrightarrow{BA}\| > 0,5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2)} \ > 0,5$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 13 - 0.5^2 \ > 0$$

On trouve Δ =-2, donc si les super tankers ne dépassent pas 500 mètres ils ne vont pas se toucher.

c)

On cherche maintenant à savoir si les point A, B, C sont aligné et si c'est le cas à quel instant t.

Or d'après la première question A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ det $\begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ yb & yb & yc \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = 0

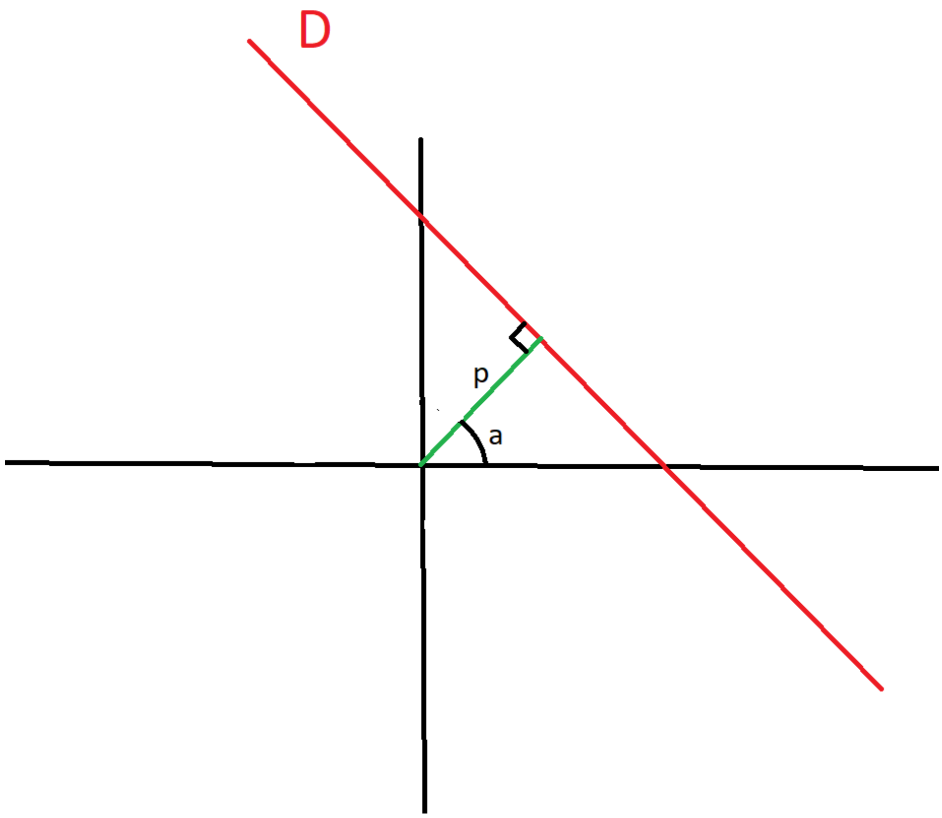
$$\Leftrightarrow t^2 - 6,5t + 10,5 = 0$$

On trouve Δ =1/4 et donc deux solutions qui sont t1 = 3,5 et t2 = 3

Exercice 3 :

a) A l'aide de la formule générale de la distance d'un point à une droite $D(Mo,(D)) = \frac{|ux0+vy0+w|}{\sqrt{a^2-b^2}}$,
On trouve dans le cas particulier d'un point Mo à l'origine et d'une droite d'équation
x cos(a) + y sin(a) − p = 0 une distance $D\big(Mo,(D)\big) = p$.

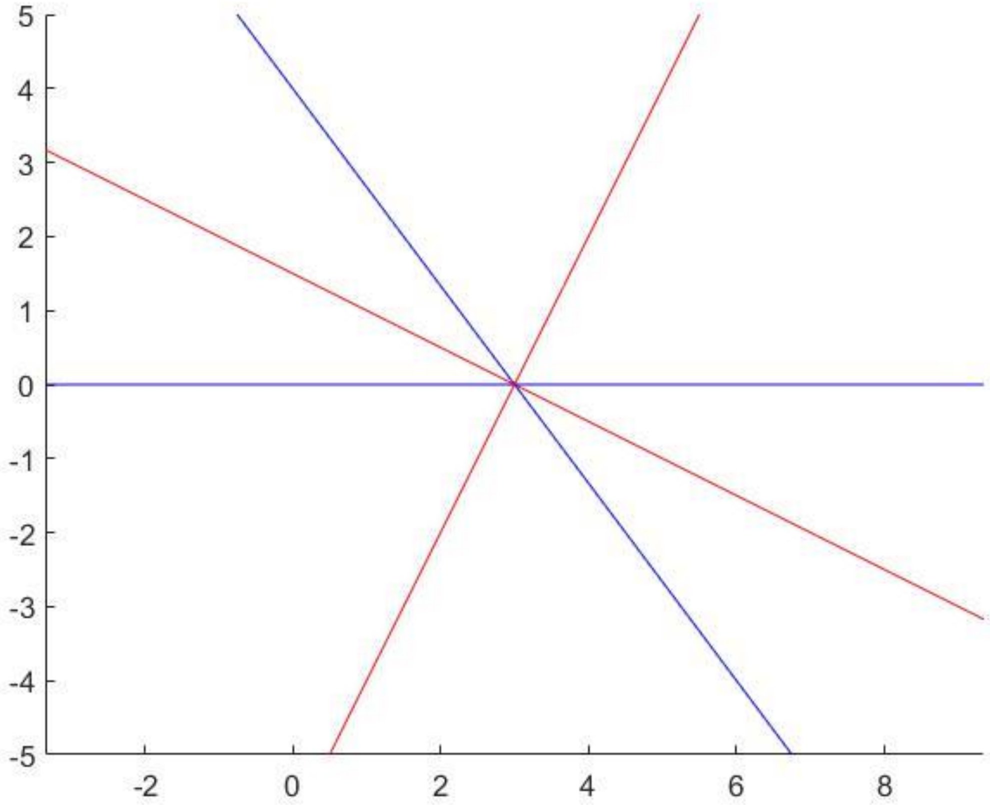
En effet toute droite peut être caractérisée par des coordonnées polaire[p,a] selon le schéma ci-dessous :



b) en écrivant $D\big(M,(D1)\big) = D(M,(D2)) \Leftrightarrow \frac{|u1x+v1y+w1|}{\sqrt{a1^2-b1^2}} = \frac{|u2x+v2y+w2|}{\sqrt{a2^2-b2^2}}$

On trouve $\begin{cases} y = 0.5x + 2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$ comme équation des bissectrices que l'on trace sur Matlab :

```
figure(1)

hold on;
x=-5:0.01:10;
y1=(-3/4)*x+3;
y2=0*x;
plot(y1,x,'b')
axis([-5,5,-5,5])
axis 'equal'

plot(x,y2,'b')

D1=-2*x+3;
D2=(1/2)*x+3;

plot(D1,x,'r',D2,x,'r')
```



c)

On détermine l'équation de la bissectrice intérieure d'une autre méthode, On détermine le rapport $\frac{aire(OBC)}{aire(CBA)}$ de 2 manière différente.

À l'aide de la formule (1) : aire(ABC) $= \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||sin(\alpha)$, on trouve $\frac{aire(OBC)}{aire(CBA)} = \frac{3}{5}$

Avec la formule (2) : aire(ABC) $= \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| h$, on obtient $\frac{aire(OBC)}{aire(CBA)} = \frac{a}{4-a}$.

Par identification des deux résultats on obtient a = $\frac{3}{2}$

On obtient donc C ($\frac{3}{2}, 0$) et donc l'équation de la bissectrice intérieure est $y = -2x + 3$ tout comme la question précédente.

d)

On veut trouver le point M tel que : $MF^2=MH^2 \Leftrightarrow\ 0.75x^2 + 1$

Donc le lieu des points M(x,y) équidistants du point F(0,2) et le l'axe Ox à une équation du second degrés ; il s'agit donc d'une conique qui est une parabole.

e)

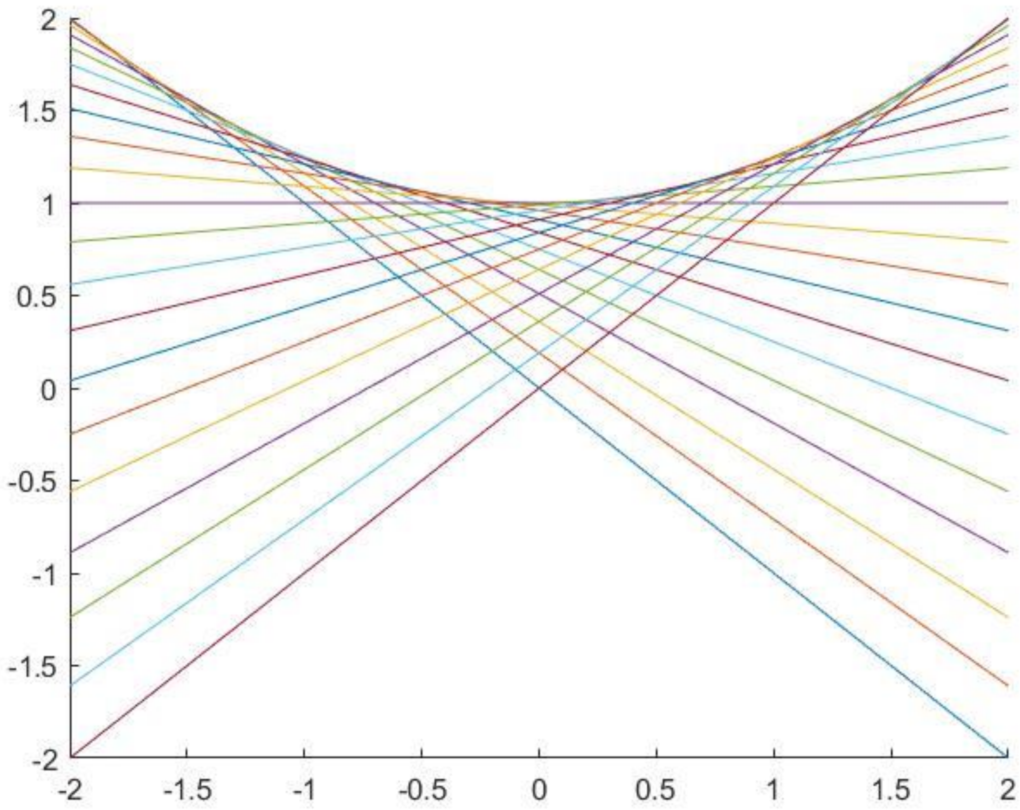
La formule det $\begin{pmatrix} x & m & m-2 \\ y & m & 2-m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ est équivalent d'après la question 1 de l'exo 2 que les point M(x,y) Pm(m,m) et Qm(m-2,m-2) sont alignés

En développent la formule on trouve une équation de la forme : $y = (m-1)x + m(2-m)$

f)

On trace les segment PmQm

```
figure(2)

hold on
x=-2:0.01:2;
y1= 0.25*x.^2 +1;
plot(x,y1,'r')
for m=0:0.1:2
    y2=(x*(m-1)+m*(2-m));
    plot(x,y2)
end
```



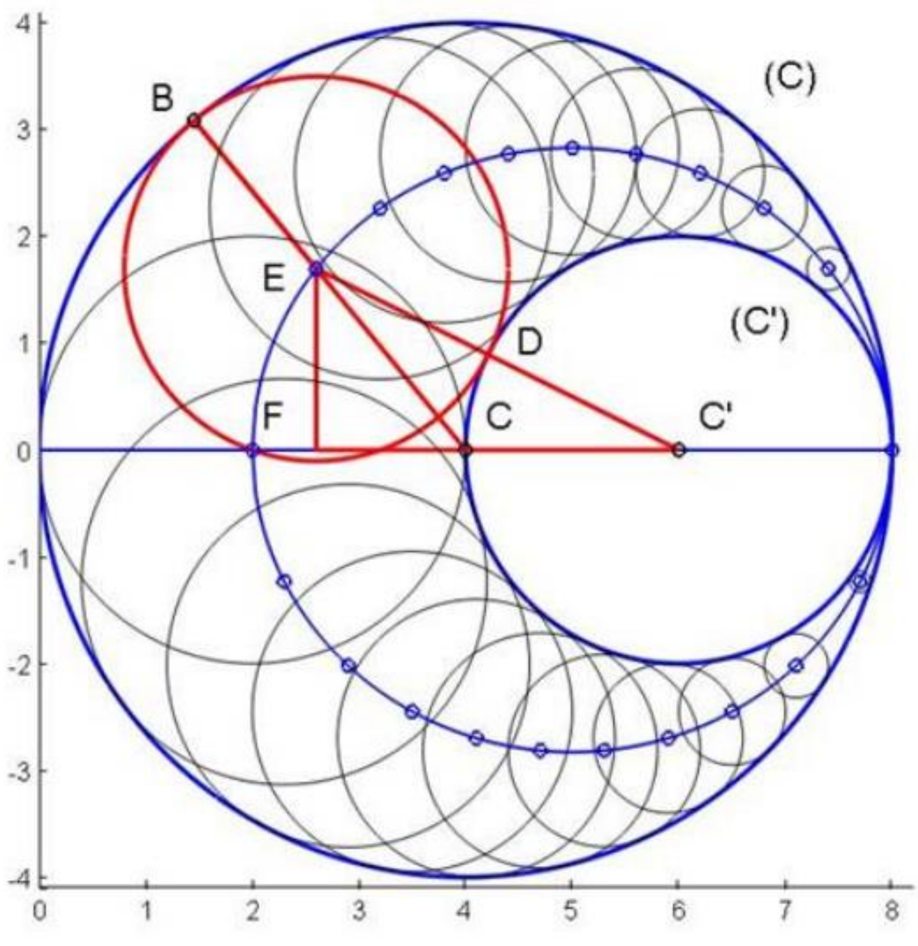
On remarque que les segments PmQm représentent une bonne approximation de la parabole P(x).

Exercice 4 :

Le but de cet exercice est de générer des formes géométriques circulaires en étudiant leur représentation paramétrique.

On considère les deux cercles suivants : (C) centré en C(4, 0), de rayon 4 et (C'), centré en C'(6, 0), de rayon 2.
On note (Cr) “le” cercle de rayon r et de centre (x, y) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C').

La figure suivante représente ce que l'on souhaite observer :



Le théorème de Pythagore nous permet de donner une représentation paramétrique des coordonnées du centre de Cr :

On établi le théorème de Pythagore dans le triangle EFC', puis dans le triangle EFC.

On peut donc écrire pour le premier triangle : $(EC')^2 = (EF)^2 + (FC')^2$ soit

$$(r + r_{C'})^2 = y^2 + (6 - x)^2$$

On peut aussi écrire pour le deuxième triangle : $(EC)^2 = (EF)^2 + (FC)^2$ soit

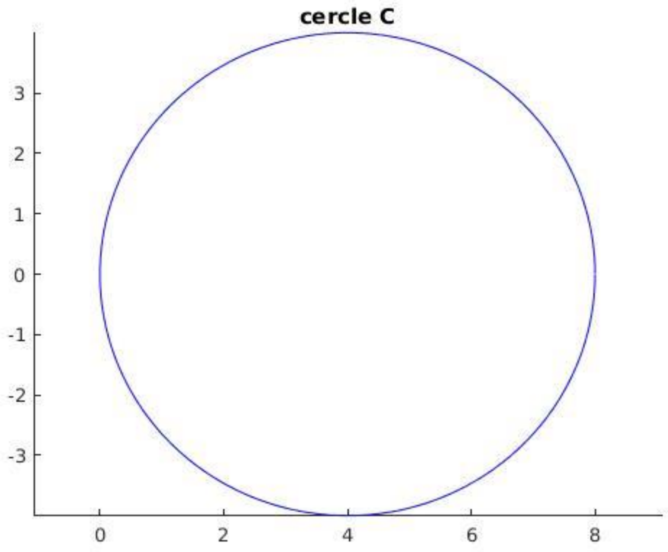
$$(\frac{r_C}{2})^2 = y^2 + (4 - x)^2$$

Ainsi, on obtient un système de deux équations à deux inconnus, qu'on sait donc résoudre. On obtient finalement :

$$x = 8 - 3 * r$$
$$\mathrm{y} = \sqrt{(-8) * r^2 + 16 * r}$$

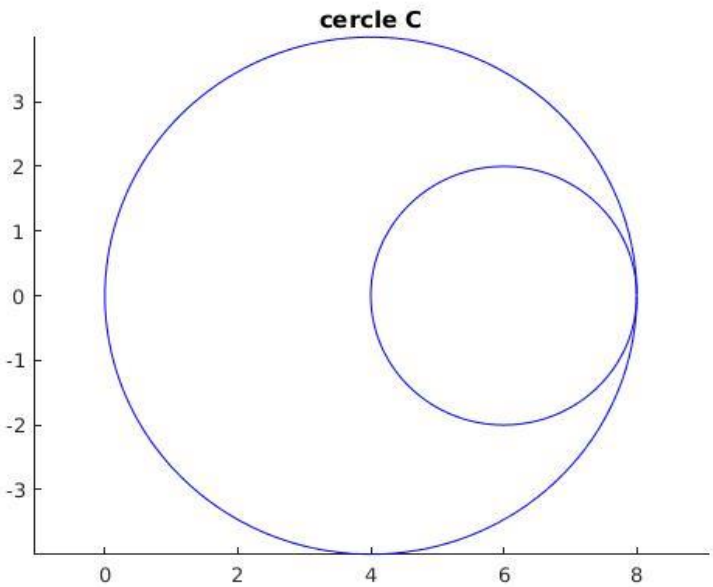
On rédige donc le code Matlab suivant afin de générer tous les cercles en question :

```
% === Exercice 4 ===
clear all; close all;

t=0:0.01:2*pi;

% cerlce C centré en C(4,0) de rayon 4
x1=4*cos(t)+4;
y1=4*sin(t);

figure (1);
hold on;
plot(x1,y1,'b');
title ('cercle C');
axis 'equal';
```



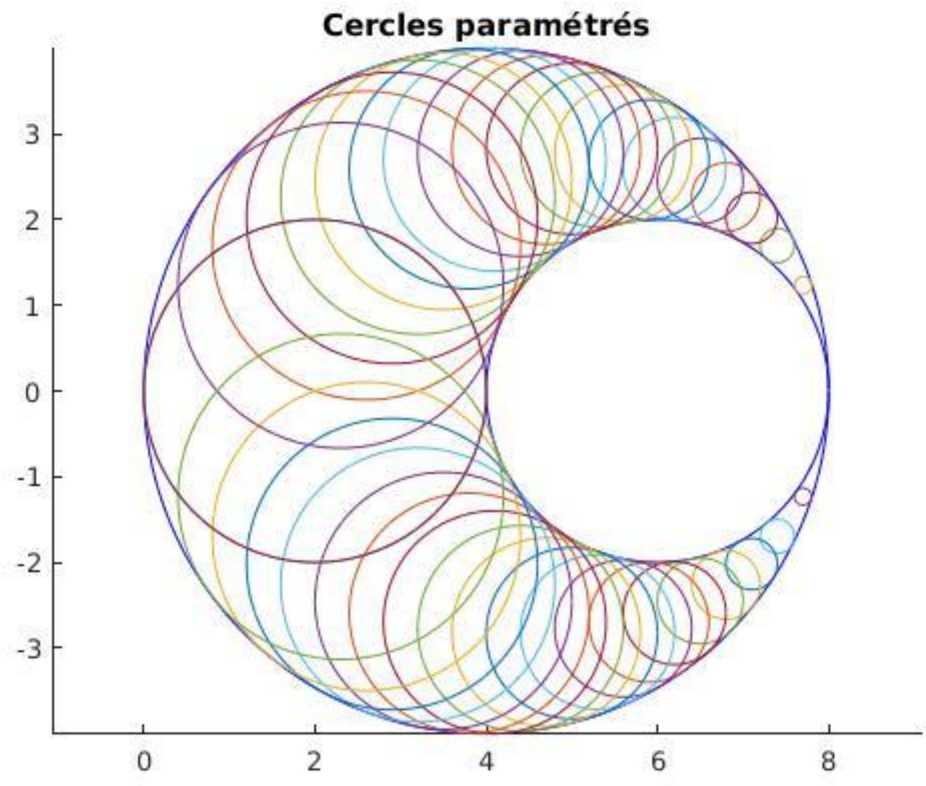
On génère le cercle C' :

```
% cercle C' centré en C'(6,0) de rayon 2
x2=2*cos(t)+6;
y2=2*sin(t);

figure(1);
plot(x2,y2,'b');
```



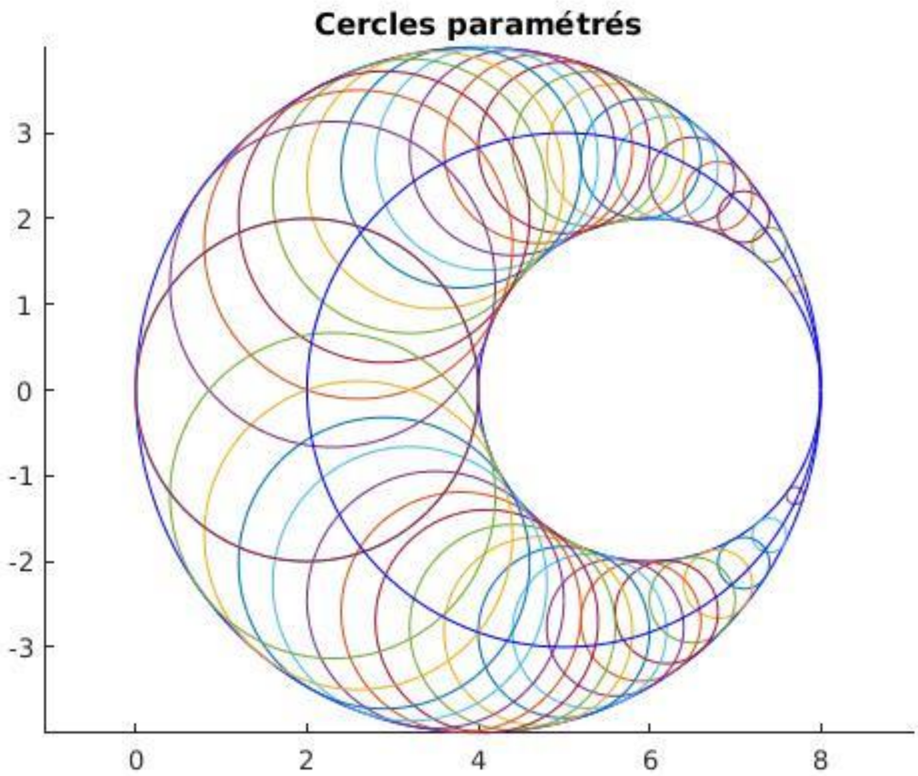
On génère les cercles Cr dont on a donné une représentation paramétrique des coordonnées des centres :

```
% cercle Cr de rayon r de centre (x,y) tangent int à C et ext à C'
for r=0:0.05:2
   xcentre=8-3*r;
   ycentre=sqrt((-8)*r*r+16*r);
   ycentre2=(-1)*sqrt((-8)*r*r+16*r);
   xr=xcentre+r*cos(t);
   yr=ycentre+r*sin(t);
   yr2=ycentre2+r*sin(t);
   figure(1);
   plot(xr,yr);
   plot(xr,yr2);
end
```



Afin d'afficher le cercle dont tous les centres des cercles Cr font partie, on rajoute dans notre script Matlab :

```
% cerlce Cint
xint=3*cos(t)+5;
yint=3*sin(t);

figure(1);
plot(xint,yint,'b');
```



Conclusion :

Ainsi à l'aide de l'outil informatique Matlab et de relation mathématique (Théorème de Pythagore) , nous avons pu appréhender la construction de cercles paramétrés, tangents aux cercles de base C et C' .