Meteyer Paul GR A

Dumont Maxime 3ETI

**CPE LYON – 3ETI**

**PROBA : TP 4**



**2017/2018**

**Exercice 1 :**

Dans cet exercice, nous mettons en pratique la méthode d’inversion permettant d’étudier une variable aléatoire à l’aide d’une seconde variable aléatoire correspondant à la fonction de répartition de cette première variable. Pour cela on étudie la densité de probabilité suivante :

Nous vérifierons dans un premier temps pour quelle valeur de a la fonction représente une densité de probabilité, puis nous la comparerons à la simulation faite de la loi.

1. a)

\_Pour calculer la valeur de a, nous allons effectuer le calcul suivant sachant que est une densité de probabilité :

Donc ici on a = a= 1

On obtient donc:

|  |
| --- |
| a = |

\_De plus on obtient la fonction de répartition de f de la manière suivante :

FX(x) =

Pour x ∈[-3 ;2], FX() = =

|  |
| --- |
| FX() =a |

b)

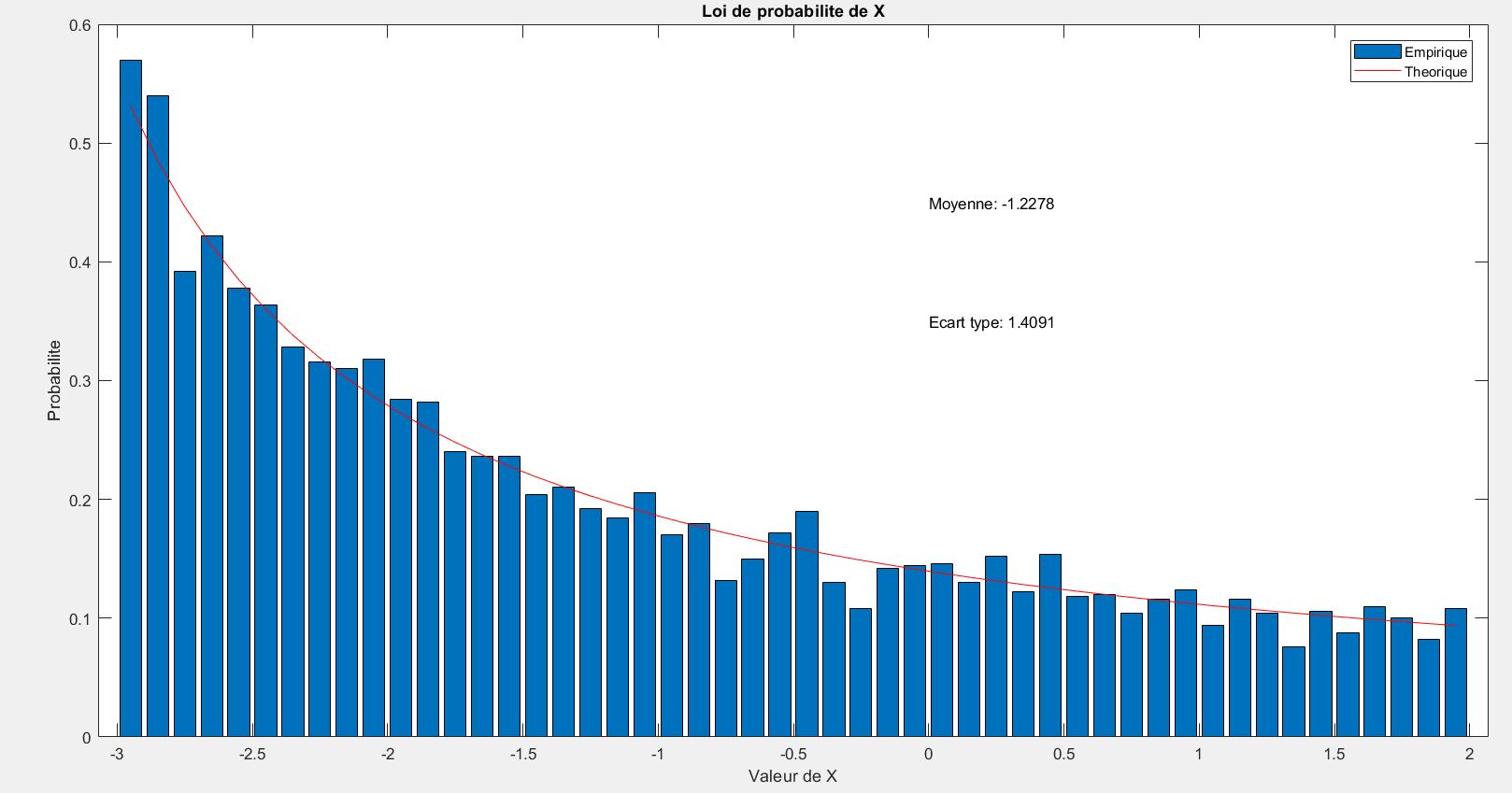
Pour pouvoir comparer la simulation au cas théorique, il faut alors calculer maintenant la fonction inverse de FX.

On obtient alors F-1X() = avec y une valeur issue de la loi Y.

Sachant que Y suit une loi uniforme (d’après le théorème donné dans l’énoncé puisque Y = FX(X)), on simule N fois une loi uniforme et on ajuste ensuite en évaluant X par F-1X(). On dénombre ensuite à l’aide de la fonction hist et on affiche l’histogramme obtenu en superposition de la courbe théorique de . Le code nécessaire à cette réalisation est le suivant :

|  |
| --- |
| % Exercice 1  clear all; close all;  N=5000; a=1/log(6);  Y=rand(1,N); %Création d'une loi uniforme  X=exp(Y/a)-4; %Création de la fonction de répartition inverse  [h,xout]=hist(X,50); %Création de l'histogramme de la densité correspondant à la loi simulée  pas=xout(2)-xout(1);  S=sum(h)\*pas; %sum(h) = N S=> air sous l'integrale  figure(1)  bar(xout,h/S); %Affichage de l'histogramme de la densité correspondant à la loi simulée  hold on;  y=a./(xout+4); %Densité théorique f  plot(xout,y,'r') %Affichage de cette densité théorique  Moyenne\_Empirique = mean(X);  EcartType\_Empirique=std(X);  text(0,0.45,['Moyenne: ' num2str(Moyenne\_Empirique)]);  text(0,0.35,['Ecart type: ' num2str(EcartType\_Empirique)]);  legend('Empirique','Theorique');  xlabel('Valeur de X');ylabel('Probabilite');title('Loi de probabilite de X'); |

L’exécution du programme donne alors :



On observe donc que l’histogramme de la densité correspondant à la loi simulée et la courbe représentative de la densité de probabilité théorique se superposent d’autant plus que N (le nombre d’expériences) est élevé, ce qui démontre bien par la pratique le théorème donné.

2)

Pour simuler une loi exponentielle de paramètre λ = 3 on procède une nouvelle fois à une méthode d’inversion. Cette fois ci on obtient alors la fonction de répartition inverse suivante :

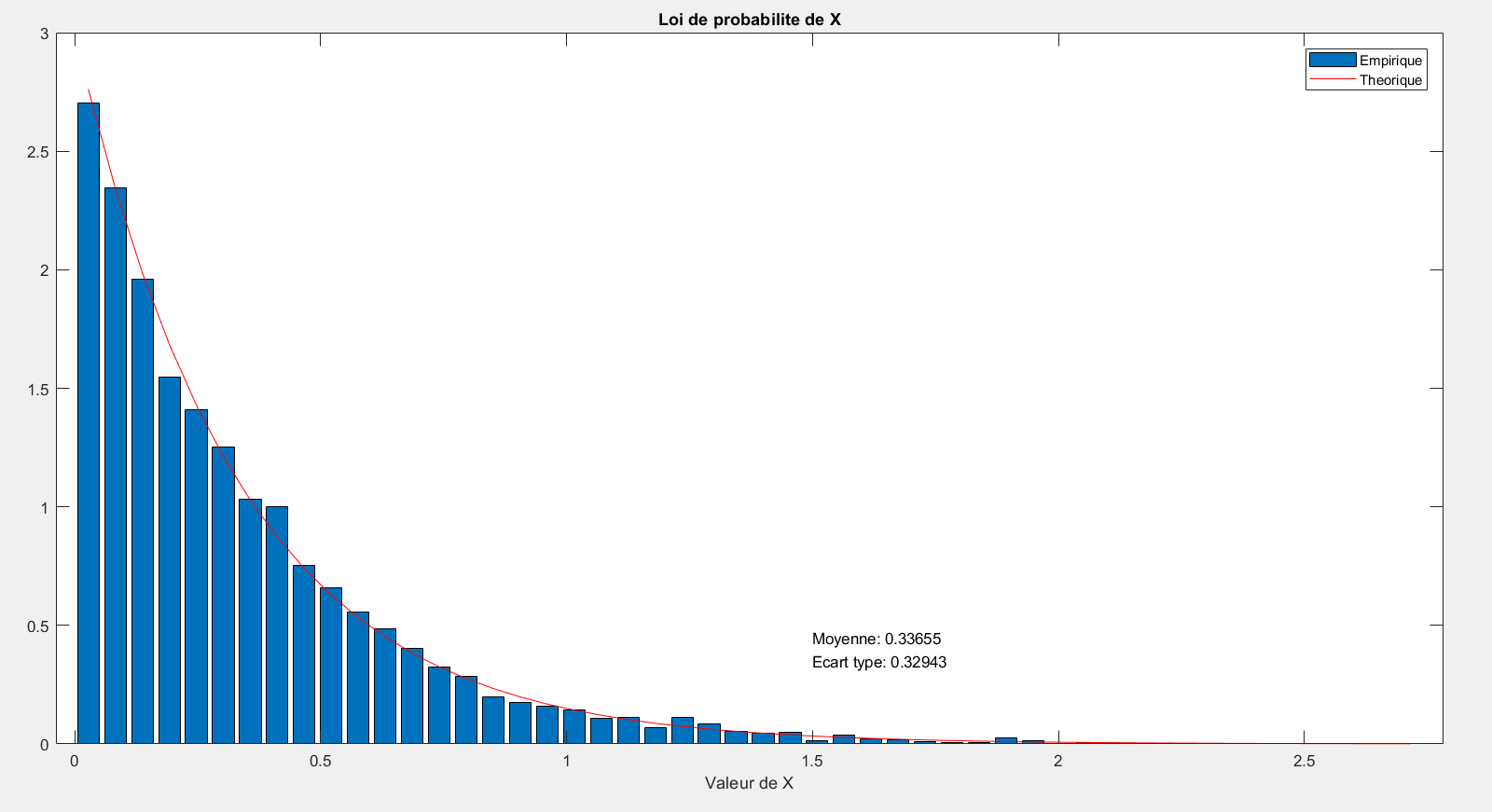
|  |
| --- |
| F-1X( = |

On simule encore une loi uniforme N fois et on évalue grâce à la fonction ci-dessus. On dénombre par le biais de la commande hist et on affiche l’histogramme obtenu et la densité de probabilité d’une loi exponentielle : .

Le code nécessaire à cette réalisation est le suivant :

|  |
| --- |
| %% Question 2  N=5000;lambda=3;  Y=rand(1,N); %Loi uniforme  X=-log(1-Y)/lambda; %Création de la fonction de répartition inverse pour l'exponentielle  [h,xout]=hist(X,50);  pas=xout(2)-xout(1);  S=sum(h)\*pas; %sum(h) = N S=> air sous l'integrale  figure(2)  bar(xout,h/S);  hold on;  y=lambda\*exp(-lambda.\*xout); %Densité théorique d'une exponentielle  plot(xout,y,'r')  Moyenne\_Empirique = mean(X);  EcartType\_Empirique=std(X);  text(1.5,0.45,['Moyenne: ' num2str(Moyenne\_Empirique)]);  text(1.5,0.35,['Ecart type: ' num2str(EcartType\_Empirique)]);  legend('Empirique','Theorique');  xlabel('Valeur de X');ylabel('Probabilite');title('Loi de probabilite de X'); |

L’exécution du programme donne alors :



Une nouvelle fois, la méthode d’inversion est efficace : les deux courbes se superposent aisément et cette dernière est d’autant plus flagrante que N est conséquent.

En somme cet exercice a permis une application concrète de la méthode d’inversion. Cette dernière se trouve très efficace en fonction du nombre N d’expériences.

**Exercice 2**

**Introduction :** L’objectif de cet exercice est de trouver une solution de remplacement de la méthode d’inversion dans le cas d’une loi normale. La méthode employée est la méthode de Box-Muller. Dans un premier temps, on va calculer le Jacobien de la transformation et on va en déduire la densité conjointe du couple (R, θ). Ensuite, on va déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire R² afin de déduire sa loi et on va lui appliquer la méthode d’inversion que l’on a vu dans l’exercice précédent en exprimant R² et θ en fonction de lois uniforme. Tout ceci fait, on peut donner les expressions des variables aléatoires X et Y et on vérifie à l’aide d’un programme Matlab si ces deux variables aléatoires sont des lois normales centrées réduites.

1. Le définition du Jacobien étant la suivante : , on peut alors écrire que **J(r, θ) = = r.**

Pour calculer la densité conjointe du couple (R,, on utilise la formule :

X,Y = X(x)fY(y) car les variables X et Y sont indépendantes entre elles et comme elles sont de distribution normale centrée réduite, on a :

fX(x) \* et pareil pour fY(y).

Ainsi **R,θ = .**

On constate alors que est le produit de deux densités, en effet :

* θ = avec Il est évident que suit une loi uniforme.
* R = pour r qui varie entre 0 et l’infini. En effectuant le calcul, on observe que = 1 et donc que c’est bien une densité.

1. On veut à présent la fonction de répartition de la variable R². On effectue le changement de variables et on calcule :

FR²(p)**,** ce qui correspond à la fonction de répartition d’une loi exponentielle de paramètre donc **.**

1. On souhaite maintenant simuler la loi de R² par la méthode d’inversion. D’après l’exercice précédent, on a

FR² 1 avec U1 la variable aléatoire uniformément distribuée sur [0,1]. Ainsi U1 et donc **1.**

1. On fait la même chose avec la loi de

θ 2 avec U2 la variable aléatoire de loi uniforme sur [0,1]. Ainsi, **2 .**

1. D’après l’énoncé, on a la transformation donc **2** et
2. On veut vérifier que les variables X et Y suivent des lois normales centrées réduites. Pour ce faire, on écrit le programme suivant :

%%Exercice 2%%

clear all; close all;

N=5000;lambda=1/2;

U1=rand(1,N); %Loi uniforme

U2=rand(1,N); %Loi uniforme

Rcarre=-log(1-U1)/lambda; %Loi de R²

[h,xout]=hist(Rcarre,50);

pas=xout(2)-xout(1);

S=sum(h)\*pas; %sum(h) = N S=> air sous l'integrale

figure(2)

bar(xout,h/S); %Affichage de l'histogramme

hold on;

y=lambda\*exp(-lambda.\*xout); %Densité d'une loi exponentielle

plot(xout,y,'r')

Moyenne\_Empirique = mean(Rcarre); %Calcul de la moyenne

EcartType\_Empirique=std(Rcarre); %Calcul de l'écart type

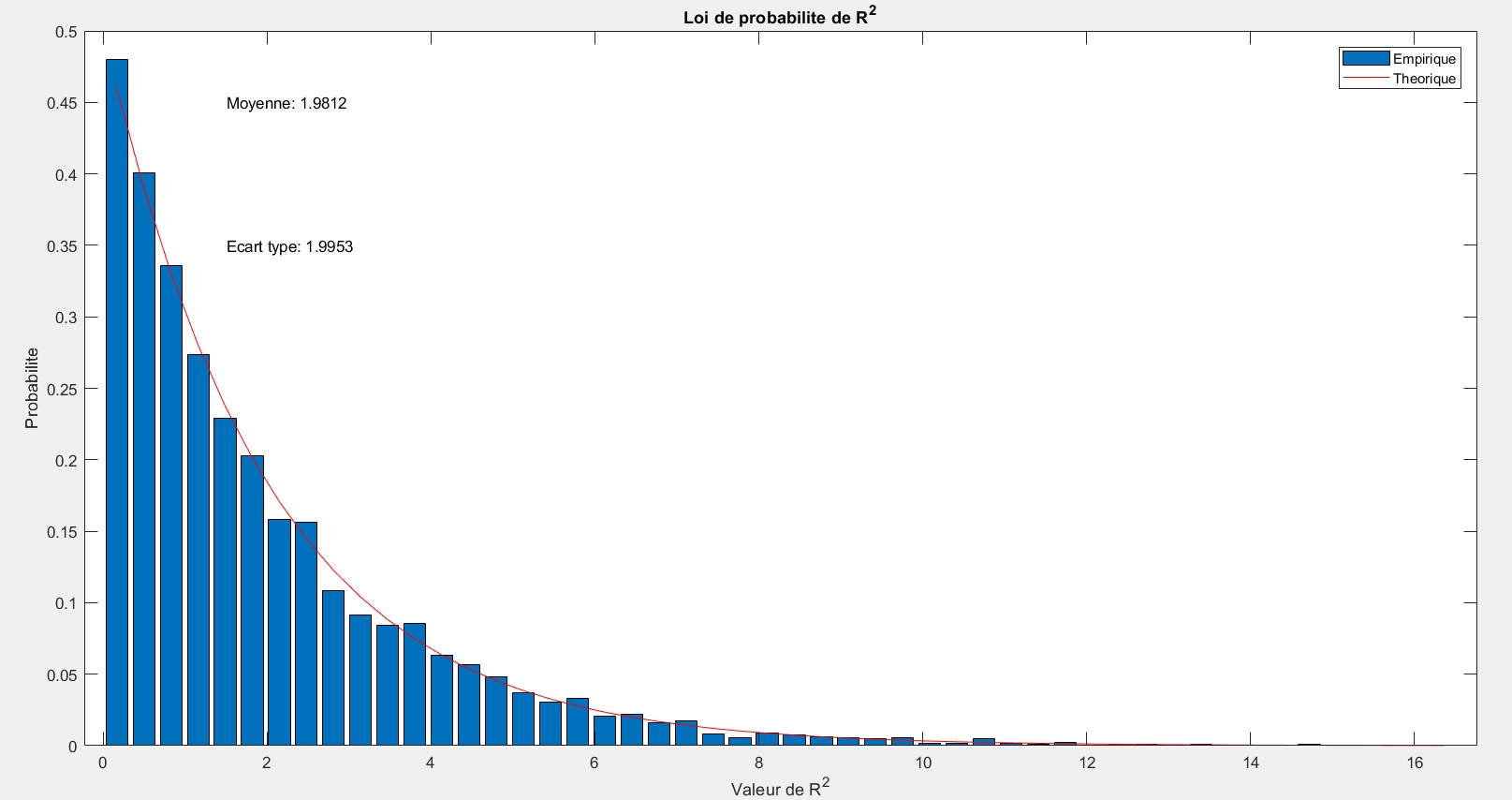
text(1.5,0.45,['Moyenne: ' num2str(Moyenne\_Empirique)]); %Affichage

text(1.5,0.35,['Ecart type: ' num2str(EcartType\_Empirique)]);

legend('Empirique','Theorique');

xlabel('Valeur de R^2');ylabel('Probabilite');title('Loi de probabilite de R^2');

On crée les deux lois uniformes qui correspondent à U1 et U2 avec la commande rand de Matlab et on crée la loi de R². On affiche l’histogramme de la variable correspondant à la loi de R², on vérifie qu’elle suit bien une loi exponentielle de paramètre en superposant à l’histogramme la courbe représentative à une loi exponentiellen obtient alors la figure suivante :



On observe que la courbe théorique et celle de la simulation se superposent entre elles donc R² suit bien une loi exponentielle. On sait également que la moyenne et l’écart-type d’une loi exponentielle vaut 1/soit 2 et en les calculant, on trouve des valeurs proches des valeurs théoriques (affichées sur la figure).

Ensuite, on crée les variables X et Y avec les expressions de la question 5, on affiche les histogrammes qui correspondent aux lois de X et de Y et on affiche en superposition de ces histogrammes la densité théorique d’une loi normale centrée réduite afin de vérifier que X et Y suivent bien cette loi.

%Question 6

tetha=2\*pi\*U2;

X=sqrt(Rcarre).\*cos(tetha);

Y=sqrt(Rcarre).\*sin(tetha);

[H,Xout]=hist(X,50);

[H1,Yout]=hist(Y,50);

Pas=Xout(2)-Xout(1);

Pas1=Yout(2)-Yout(1);

Sx=sum(H)\*Pas; %sum(h) = N S=> air sous l'integrale

Sy=sum(H1)\*Pas1;

figure(3)

hold on;

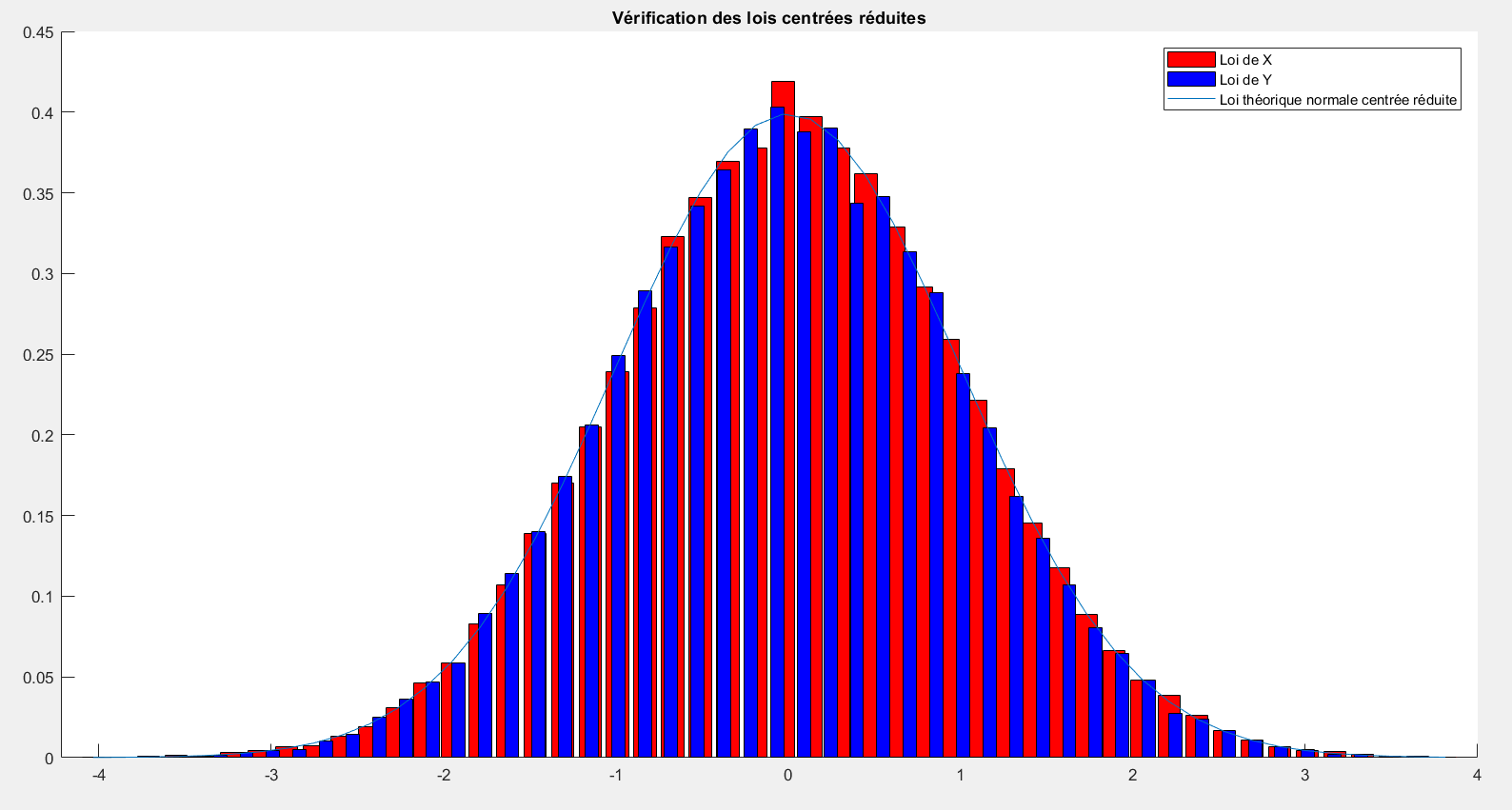
bar(Xout,H/Sx,'r');

bar(Yout,H1/Sy,0.5,'b');

hold on;

plot(Xout, 1/(sqrt(2\*pi)).\*exp(-Xout.^2/2))

Avec le code ci-dessus, on obtient :



On observe alors que les courbes représentant la loi de X et la loi de Y ont la même allure que la loi théorique normale centrée réduite donc on peut dire que les variables X et Y sont deux variables aléatoires normales centrées réduites.

1. Pour simuler une variable aléatoire normale de paramètres quelconques, on prend la variable X, on la multiplie par l’écart-type et on additionne la moyenne : on fait donc l’opération inverse de centrage-réduction (qui consiste à prendre une variable aléatoire normale X de paramètres quelconques, on soustrait par la moyenne et on divise par l’écart-type pour avoir une loi normale centrée réduite). Ainsi, on écrit le même code que précédemment mais en créant deux nouvelles variables qui sera l’écart-type et la moyenne (paramètres d’une loi normale), on multiplie X et Y par l’écart-type et on y ajoute la moyenne. On affiche également la courbe représentative d’une loi normale de paramètres et quelconques :

tetha=2\*pi\*U2;

Ecart\_T=3; Moy=50;

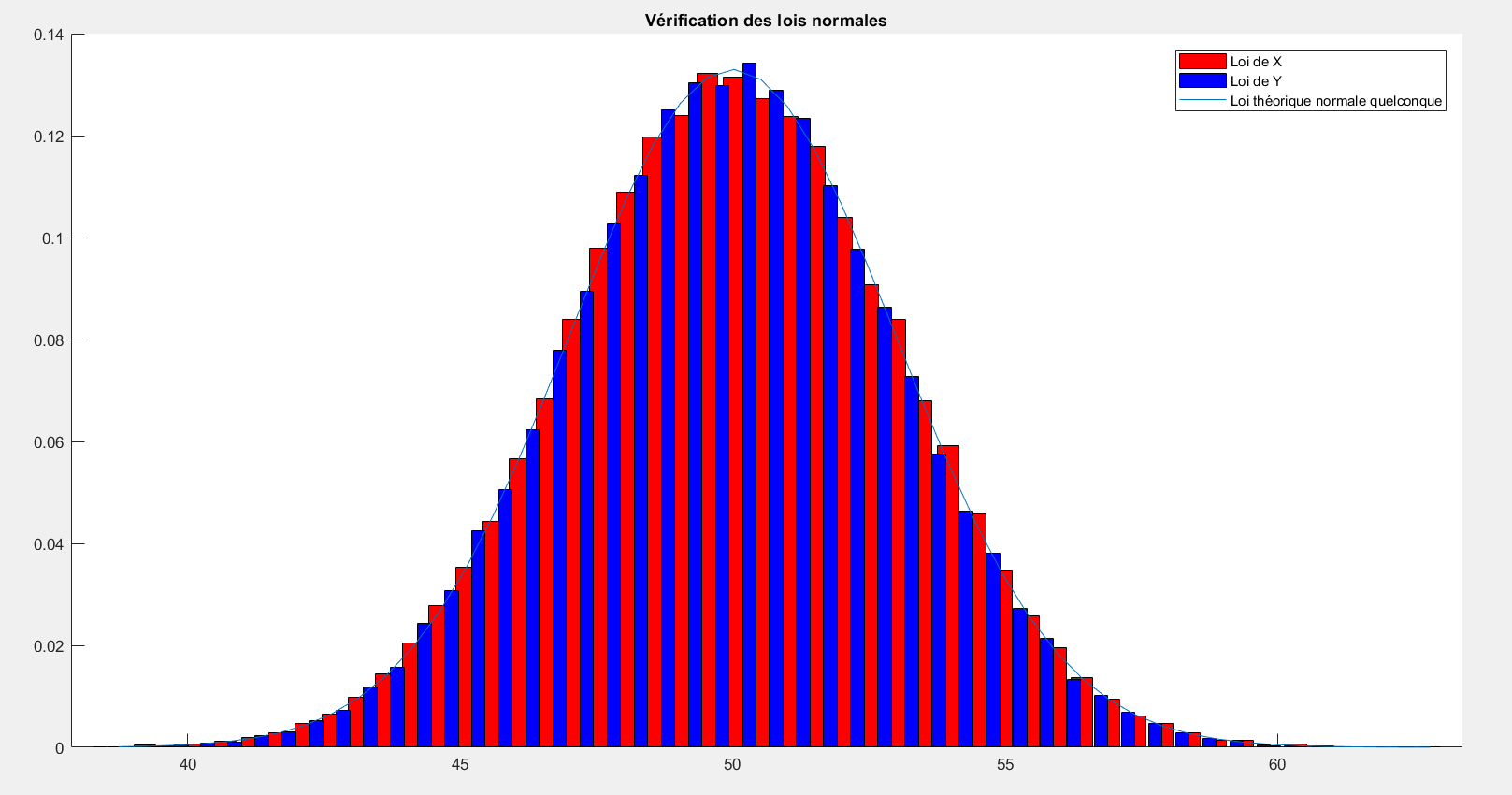
X=sqrt(Rcarre).\*cos(tetha)\*Ecart\_T+Moy;

Y=sqrt(Rcarre).\*sin(tetha)\*Ecart\_T+Moy ;

…

plot(Xout, 1/(Ecart\_T\*sqrt(2\*pi)).\*exp(-((Xout-Moy)/(Ecart\_T)).^2/2))

Pour les paramètres que l’on a choisi dans le code ci-dessus, on remarque la courbe suivante :



Les lois de X et de Y suivent parfaitement la courbe théorique de la loi normale de paramètres quelconques.

**Conclusion :**  Le but de cet exercice était de simuler un autre type de méthode d’inversion (Box-Muller) dans le cas de 2 variables aléatoires normales centrées réduites. Pour cela, nous devions calculer le Jacobien des coordonnées polaires classiques pour pouvoir déterminer la densité conjointe du couple (R,. Cela permettait d’obtenir la loi de R² en calculant la fonction de répartition de cette variable et également de séparer la fonction de répartition de et celle de R². Ensuite, on pouvait appliquer la méthode d’inversion pour les deux fonctions de répartition afin d’écrire R² et en fonction de lois uniforme. Le fait d’avoir R et nous permettait d’avoir les variables X et Y que l’on cherchait et on a vérifié qu’elles étaient bien des variables aléatoires normales centrées réduites. On a également étendu la méthode de Box-Muller aux lois normales de paramètres quelconques en effectuant l’opération inverse de centrage-réduction.