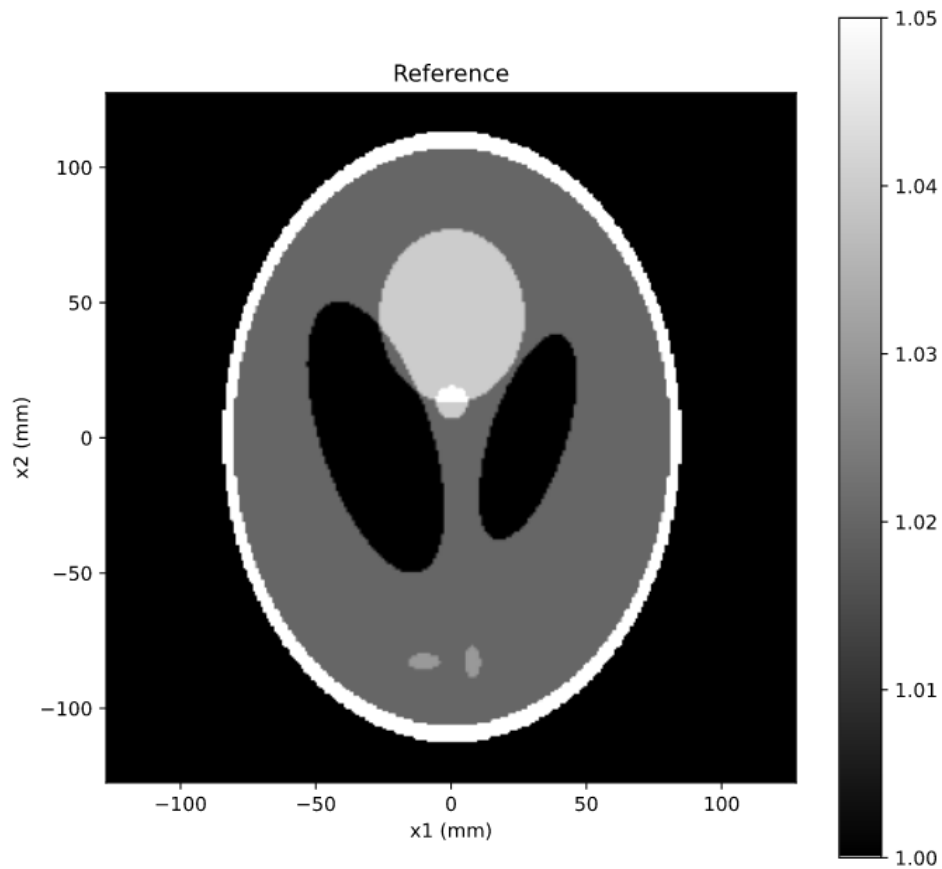


# Rapport du TP1 de Tomographie

Rétroprojection filtrée et MLEM pour la reconstruction tomographique

Antoine BRALET et Guillaume DURET



17 Novembre 2020

# 1 Introduction

Ce rapport vise à rapporter, expliquer et détailler l'ensemble des expériences menées au cours du TP de Tomographie du 10 Novembre 2020. Ce TP avait pour objectif principal de reconstruire une image du fantôme de Shepp Logan visible sur la gauche de la Figure 1 à partir de projections reçues lors de l'acquisition tomographique de ce volume et regroupées dans un sinogramme visible sur l'image de droite de la Figure 1. Nous nous focaliserons ici uniquement sur la coupe visible sur la Figure mentionnée plus haut.

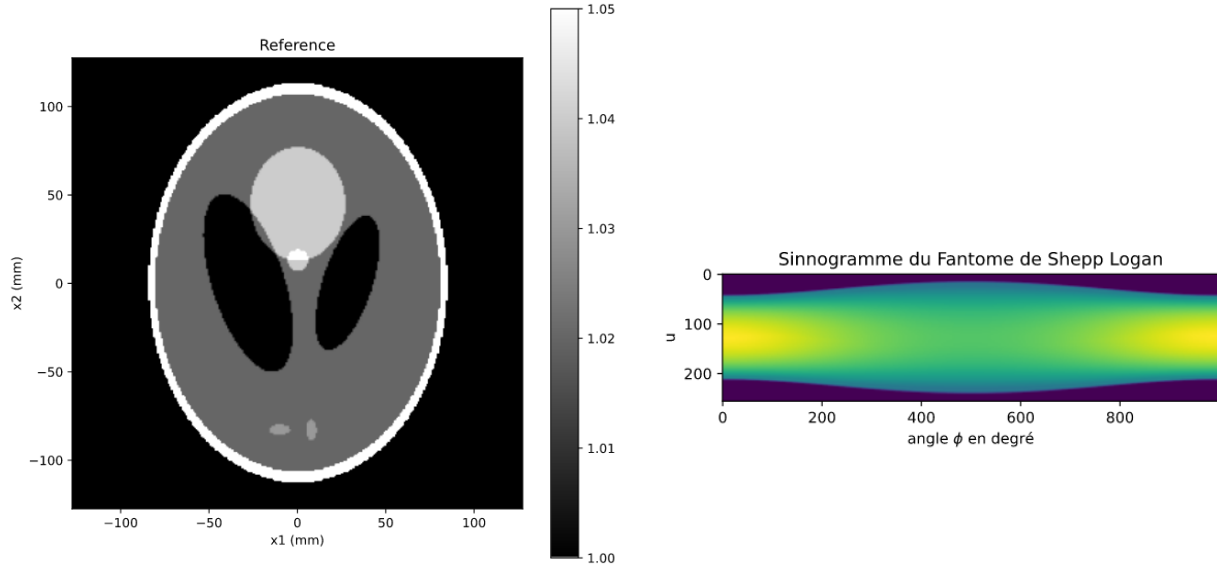


Figure 1: À gauche, la coupe du volume du fantôme de Shepp Logan que nous chercherons à reconstruire à partir de ses  $N$  projections dont un exemple du sinogramme résultant pour  $N = 1000$  est visible à droite. Cette image fait donc référence durant tout le TP.

Il est important de noter ici que pour avoir une reconstruction la plus fiable possible, nous devrions utiliser une infinité de projections. Cependant, pour des raisons pratiques et sanitaires, il est impossible d'obtenir une infinité de projections, c'est la raison pour laquelle nous allons dans ce TP mettre en oeuvre deux algorithmes permettant de reconstruire le fantôme de Shepp Logan à partir d'un nombre limité de projections. En effet un trop grand nombre de projections risquerait d'irradier le patient et d'être nocif pour sa santé.

Deux algorithmes en particulier sont détaillés ici : la rétroprojection filtrée ainsi que la reconstruction par maximisation du maximum de vraisemblance (MLEM : *Maximum Likelihood Expectation Maximization*). En préface à ces méthodes nous détaillerons également la vérification du théorème coupe-projection ainsi que l'algorithme de rétroprojection simple qui sont à la base même des deux méthodes implémentées.

## 2 Avant-propos

### 2.1 Théorème coupe-projection

Cette section ne vise pas à démontrer le théorème coupe-projection de l'équation (1) mais à vérifier que celui-ci s'applique bien dans notre cas et ainsi d'en déduire son utilité ici.

$$\hat{p}(\theta, s) = \hat{f}(s \cdot \cos(\theta), s \cdot \sin(\theta)) \quad (1)$$

avec  $\hat{g}$  la transformée de Fourier de la fonction  $g$ ,  $p(\theta, s)$  le vecteur projection sur l'angle  $\theta$  du fantôme de Shepp Logan et  $f(x, y)$  l'image du fantôme de Shepp Logan.

Notons que la spécificité de cette équation tient en ce que l'on a relié une transformée de Fourier 1D à gauche de l'équation à une transformée de Fourier 2D à gauche. Avant de poursuivre sur l'utilisation que l'on peut faire de cette équation, vérifions que celle ci se vérifie dans notre cas de figure, notamment en utilisant  $\theta = 0$ . Ce faisant nous cherchons à obtenir l'égalité (2).

$$\hat{p}(0, s) = \hat{f}(0, s) \quad (2)$$

La vérification de cette équation se fait par l'intermédiaire des Figures 2 et 3. On peut effectivement visualiser sur la première Figure, sur la colonne de gauche la projection sur l'angle  $0^\circ$  et la transformée de Fourier 2D du fantôme de Shepp Logan et sur la colonne de droite les deux signaux que nous cherchons à comparer pour vérifier l'équation (2). On peut alors constater que les tendances des deux signaux obtenus sont particulièrement similaires, si bien qu'en faisant la différence entre ces deux signaux, l'on retrouve les résultats de la Figure 3 où l'on peut constater que les valeurs sont négligeables comparées aux ordres de grandeur des signaux. Ces légères différences peuvent être attribuées à des erreurs d'approximation numériques lors du calcul des transformées de Fourier et de leur module. Nous pouvons donc bien statuer ici sur l'applicabilité du théorème coupe-projection.

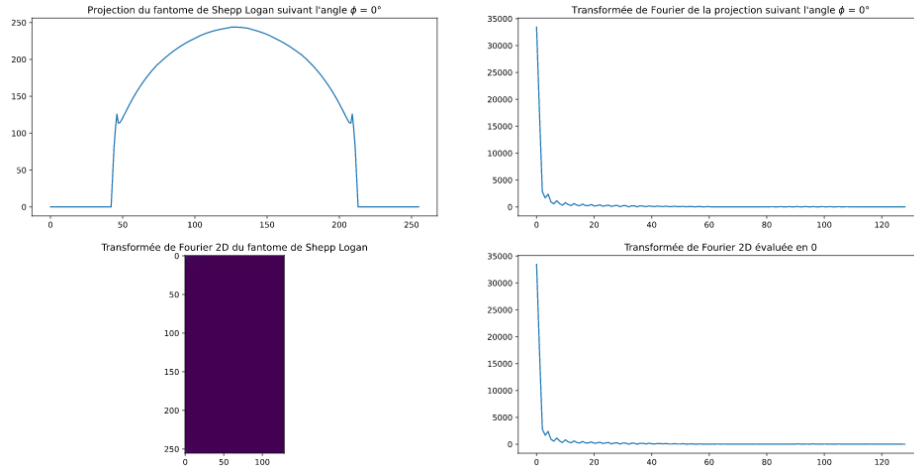


Figure 2: Comparaison entre la transformée de Fourier 1D (en haut à droite) de la projection sur de l'angle  $0^\circ$  (en haut à gauche) et le vecteur résultant de la transformée de Fourier 2D (en bas à gauche) évalué en 0 sur la première composante (en bas à droite). On peut alors aisément constater une similarité forte entre les deux vecteurs résultants.

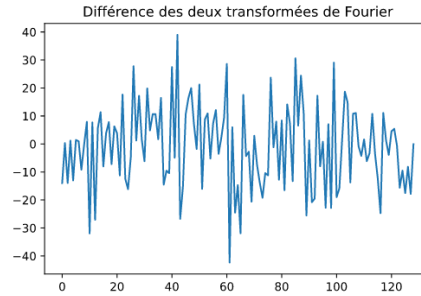


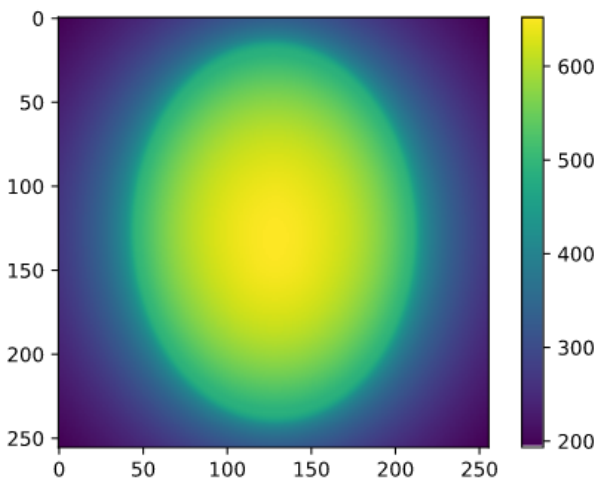
Figure 3: Différence des deux vecteurs de transformation de Fourier obtenus comme précisé dans l'équation 2. On peut alors constater ici que la différence est négligeable en comparaison avec l'ordre de grandeur des valeurs initiales des vecteurs (voir Figures ?? droites)

Or, en sachant que notre donnée initiale est le sinogramme, cela signifie donc que l'on doit pouvoir récupérer le fantôme de Shepp Logan en appliquant successivement une transformée de Fourier 1D sur le sinogramme puis une transformée de Fourier inverse 2D. Ce qui explique l'importance de ce théorème dans cet avant-propos.

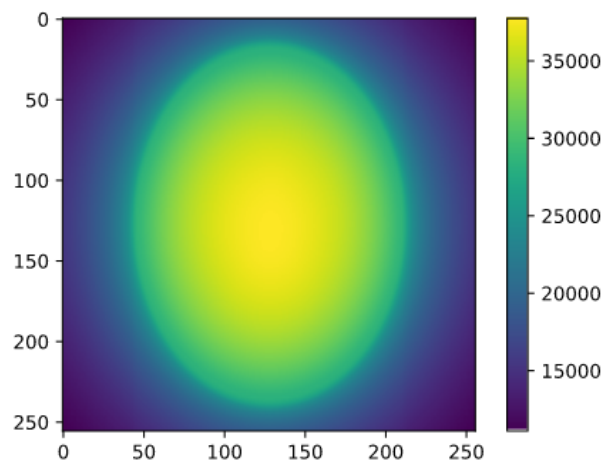
## 2.2 Rétroprojection simple

Cette section vise avant tout à mettre en place la rétroprojection comme le suggère la méthode décrite ci-avant et donc basée sur le théorème coupe-projection. Ainsi donc pour chaque projection obtenue, soit pour chaque vecteur colonne du sinogramme obtenu, nous allons reconstruire l'image du fantôme de Shepp Logan selon sa visibilité suivant l'angle en question. Aussi, pour ce faire, il suffit de projeter l'ensemble des pixels de l'image sur la projection courrante puis de déterminer leur valeur sur cette projection. Notons que nos valeurs de projection sont discrétisées, aussi, il est nécessaire d'interpoler les valeurs en fonction des coordonnées obtenues après projection des pixels sur la projection à reconstruire. Ceci ayant permis de donner une valeur à chacun des pixels il est possible de récupérer une image dont la projection serait la projection à reconstruire. Cependant, un grand nombre d'objets peuvent avoir la même projection suivant un angle donné : passer d'une image à une projection fait perdre une dimension et par conséquent fait perdre beaucoup d'informations à nos images ce qui implique donc la non-unicité de la reconstruction. C'est d'ailleurs pour cette raison que plusieurs projections sont utilisées pour former un sinogramme. Aussi, en itérant sur l'ensemble des projections et en sommant les images résultantes, ceci devrait nous permettre d'obtenir la reconstruction finale.

Aussi, en implémentant cette rétroprojection sur le sinogramme à 100 projections issu du fantôme de Shepp Logan, il est possible d'obtenir le résultat de gauche de la Figure 4a. En comparaison avec la Figure 1, il semblerait alors que notre reconstruction soit complètement défectueuse. Aussi deux possibilités se dessinent ici : la première, une erreur dans notre algorithme nous donne un résultat complètement aberrant, la seconde, la méthode de rétroprojection simple n'est pas suffisante afin de reconstruire l'image initiale. Pour trancher quant à l'une ou l'autre possibilité, il est possible d'utiliser RTK afin de visualiser le résultat que nous devrions théoriquement obtenir. Ce résultat est affiché sur l'image de droite de la Figure 4b. Ceci nous permet de vérifier que notre code est bien fonctionnel puisque nous retrouvons les mêmes résultats que ceux obtenus à l'aide de RTK et par conséquent un problème survient lors de la rétroprojection simple. Notons que la gamme de valeurs est différente parce que nous avons fait tous nos calculs en radians quand RTK a fait ses calculs en degrés (en effet, une simple conversion de radian à degré dans le code nous permet de retrouver exactement les résultats obtenus avec RTK).



(a) Volume obtenu après rétroprojection simple implémentée par nos soins.



(b) Volume obtenu après rétroprojection simple implémentée par RTK.

Ce problème est dû au système de coordonnées. En effet les projections ont été récupérées à l'aide de coordonnées polaires. Or en projetant les pixels sur les projections, nous avons conservé la grille cartésienne et interpolé suivant une grille cartésienne ce qui donne des résultats complètement différents d'une interpolation en coordonnées polaires. C'est pour cette raison que la rétroprojection simple n'est pas suffisante et qu'il est donc nécessaire de modifier cette méthode.

Deux approches sont développées dans les deux prochaines sections : la rétroprojection filtrée qui est une méthode analytique et une reconstruction par MLEM qui est une approche itérative.

## 3 Rétroprojection filtrée

### 3.1 Le principe de la méthode

Nous allons ici modifier la méthode précédente afin de retrouver un résultat correct, mais pour cela, il nous faut remonter dans le rapport. En effet, il semble bon ici de rappeler que d'après le théorème coupe-projection l'idée principale serait de faire une transformée de Fourier 2D inverse des transformées de Fourier 1D des projections. Or d'après la Figure 2, la colonne de droite nous donne ces transformées de Fourier que nous cherchons à inverser. Il semble alors ici notable que les basses fréquences (sur la gauche de l'axe des abscisses) sont particulièrement fortes. Ce phénomène est valable pour l'ensemble des projections et est en particulier dû au fait que nous traversons tout un corps et que les variations de valeurs à l'intérieur du fantôme de Shepp Logan sont très faibles (entre 1 et 1.05 sur l'image de référence en Figure 1). Ainsi il semble naturel que les variations soient complètement "oubliées" lors de la reconstruction telle qu'elle a été pensée jusqu'à maintenant puisque l'ensemble du spectre a été utilisé pour la reconstruction.

Or ces variations très faibles et internes au volume sont tout de même présentes dans la projection ainsi que dans sa transformée de Fourier. En effet ce type de variations de faible amplitude agit comme un bruit sur la projection. En effet, d'une valeur de  $s$  donnée à la suivante, la valeur de la projection sera légèrement modifiée et très certainement causée par le comportement des photons dans le corps. Ainsi ce que nous cherchons ici à reconstruire en réalité est localisé dans les hautes fréquences de notre transformée de Fourier et la reconstruction est ici perturbée par les basses fréquences trop présentes et de très forte amplitude.

C'est pour cette raison que la méthode dite de Rétroprojection Filtrée consiste à filtrer la transformée de Fourier des projections à l'aide d'un filtre de type rampe afin de pouvoir réduire l'influence des basses fréquences et de conserver au maximum l'effet des hautes fréquences. Il semble important également de rappeler ici que la notion de filtrage dans l'espace de Fourier revient à multiplier terme à terme la transformée de Fourier et la transformée de Fourier du filtre que l'on veut appliquer à la projection.

### 3.2 Les résultats obtenus

Ainsi donc, en appliquant ce filtre rampe sur les transformée de Fourier 1D des projections avant rétroprojection - qui donnait auparavant les résultats de gauche de la Figure 4a sans le filtre - permet d'obtenir le résultat en haut à gauche de la Figure 5. Afin de comparer la reconstruction obtenue avec la référence située en haut à droite de la figure en question, nous avons choisi de visualiser un profil horizontal de la coupe symbolisée sur les figures par le trait rouge. Ces profils sont alors reportés dans la figure du bas que nous avons choisi de visualiser sur  $[1, 1.05]$  afin de capter les différences présentes à l'intérieur du volume.

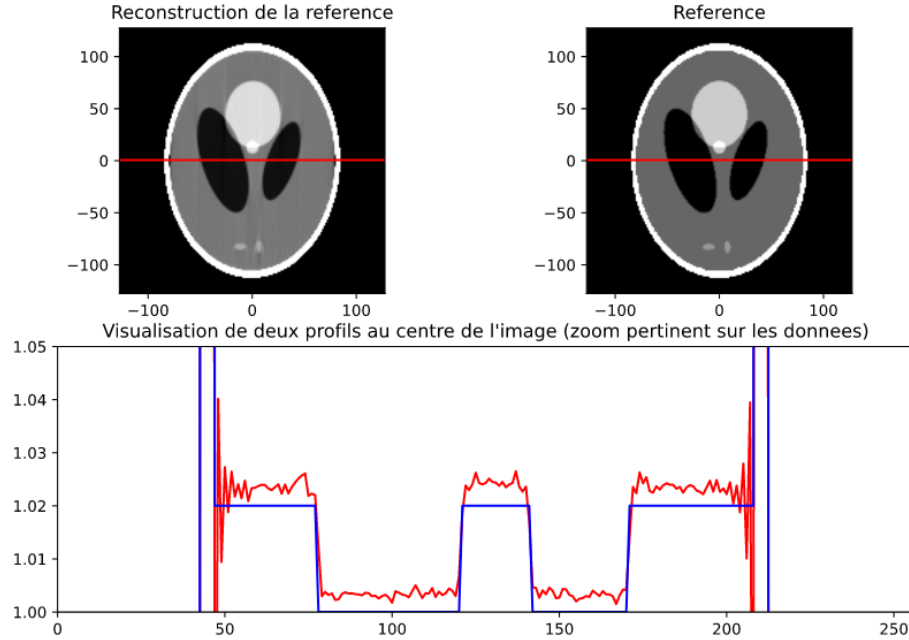


Figure 5: Comparaison visuelle ainsi que d'un profil particulier (en bas) de la reconstruction issue de la rétroprojection filtrée du fantôme de Shepp Logan (en haut à gauche) et la référence (en haut à droite).

On peut tout d'abord notifier que d'un point de vue visuel, le résultat semble particulièrement satisfaisant et bien meilleur que celui obtenu précédemment, on peut en effet très facilement reconnaître le fantôme de Shepp Logan sur la reconstruction. Cependant, en comparant les profils des images il est possible de visualiser quelques dissimilarités en particulier au niveau des zones de discontinuité forte des valeurs (aux frontières entre deux zones distinctes du volume) où le basculement d'une valeur à l'autre devrait se faire strictement comme sur la référence mais où l'on peut distinguer des oscillations (semblables à celles produites par un phénomène de Gibbs) dans ces zones de discontinuité marquées. Malgré tout le phénomène reste presque imperceptible à l'oeil nu sur l'image reconstruite.

Il est cependant à noter que le résultat obtenu sur la Figure 5 a été obtenu à partir d'un sinogramme composé de 100 angles différents soit approximativement une projection tous les  $2^\circ$ . Néanmoins, il est possible que ceci soit considéré comme un grand nombre de projections dans le sens où certaines personnes sont très sensibles aux rayons. Pour cette raison il est intéressant de voir l'évolution du PSNR de la reconstruction par rapport à la référence ainsi que le temps de calcul en fonction du nombre de projections acquises. Ces résultats ont été obtenus en utilisant 10 à 500 projections afin de pouvoir avoir une conclusion sur une large gamme de valeurs. On peut alors constater à partir de ces résultats que plus le nombre de projections augmente et plus le temps de calcul est important ce qui était particulièrement attendu, la particularité intéressante de cette augmentation de temps de calcul est qu'elle est linéaire, par conséquent, l'algorithme de rétroprojection filtrée a une complexité en  $O(n)$ . L'avantage de ce constat est son application pratique : il est possible de passer un scanner et d'obtenir après quelques minutes la reconstruction complète. De plus en se focalisant sur l'évolution du PSNR (figure du bas), il est possible de voir que celui ci va en s'améliorant plus le nombre de projections est grand mais également qu'il tend à se stabiliser après l'utilisation de 80 projections environ. Ceci signifie donc que l'on peut avoir un résultat de qualité très rapidement et avec un nombre de projections limité.

Enfin en pratique il est très rare d'avoir des sinogrammes aussi propres et nets que ceux utilisés jusqu'à présent. Aussi il pourrait être intéressant ici de visualiser l'effet du bruit sur la reconstruction obtenue. Ainsi en perturbant le sinogramme initial avec un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type variable,

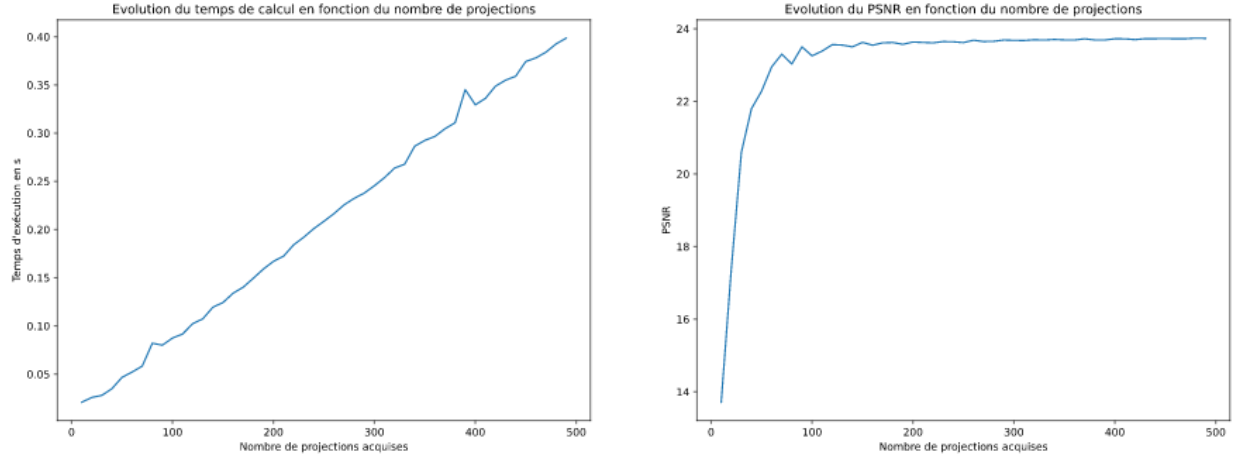


Figure 6: Évolution du temps de calcul (en haut) et du PSNR (en bas) de la reconstruction par rétroprojection filtrée en fonction du nombre de projections acquises

il est possible de visualiser l'évolution du PSNR afin de voir à quel point nos données sont résistantes au bruit. Ces résultats sont visualisables sur la Figure 7 pour des écart-types raisonnables et probables (entre 0 et 5) mais également pour des bruits particulièrement élevés (jusqu'à 50). Notons que si une telle donnée arrive en sortie des capteurs d'acquisition, il semble nécessaire de les changer d'urgence car un tel bruit masque complètement la donnée initiale. Malgré tout, il est possible de voir qu'en utilisant une centaine de projections, plus le bruit est fort et plus la reconstruction est de mauvaise qualité à en juger par son PSNR. Et ce constat est également valable avec des écart-types de bruit faible où la pente est d'autant plus importante, soit la qualité de l'image décroît très vite dès l'ajout du moindre bruit. Ceci montre très nettement que cette méthode est très peu robuste au bruit et qu'un traitement supplémentaire avant ou après reconstruction par rétroprojection filtrée est nécessaire afin de lisser l'image obtenue.

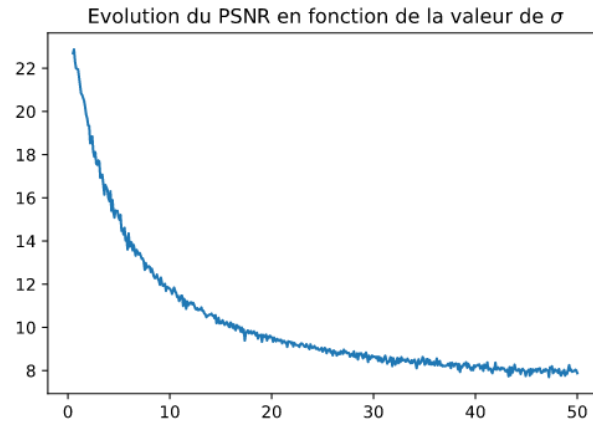


Figure 7: Évolution de la qualité de la reconstruction par rétroprojection filtrée évaluée à l'aide du PSNR en fonction de l'écart type du bruit utilisé.

Une amélioration de l'algorithme est tout de même possible afin de rendre la reconstruction plus robuste au bruit. Comme mentionné précédemment, l'utilisation du filtre rampe permet de donner plus d'importance aux hautes fréquences et donc par conséquent à amplifier le bruit présent initialement dans le sinogramme.

Or le bruit peut être considéré comme de très hautes fréquences. Ainsi nous souhaiterions reconstruire l'image en filtrant les très hautes fréquences pour éliminer le bruit et en réduisant significativement les basses fréquences afin qu'elles ne viennent pas perturber la reconstruction. Ceci correspond plus ou moins à la définition d'un filtre passe-bande. Mais pour le bon fonctionnement de la reconstruction, nous n'allons pas filtrer totalement les basses fréquences comme ce peut être le cas dans les filtres passe-bande. Aussi, il est possible de créer un filtre plus "laxiste" sur les basses fréquences car il aura l'effet d'un filtre rampe et beaucoup plus stricts sur les très hautes fréquences pour atténuer le bruit, donc un filtre passe-bas de type Hann ou Butterworth par exemple. Ainsi la reconstruction par rétroprojection filtrée (et modifiée) devrait être moins sensible au bruit.

## 4 MLEM

### 4.1 Principe de l'algorithme

Le deuxième algorithme utilisé pour inverser la transformé de radon est un algorithme statistique et itératif appelé MLEM : *Maximum Likelihood Expectation Maximization*). Cet algorithme part du principe que les photons traversant le patient suivent une loi de Poisson :

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (3)$$

Il est possible d'exprimer la probabilité que la projection de l'image reconstruite  $x = (x_i, \dots, x_n)^t$  ai pu réaliser la projection  $y = (y_1, \dots, y_m)^t$  mesurée en calculant la fonction de Vraisemblance :

$$P_L(y/x) = \prod_{i=1}^m p\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i\right) = \prod_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j)^{y_i}}{y_i!} \exp\left(-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) \quad (4)$$

L'objectif est de trouver  $x$  qui maximise cette fonction de Vraisemblance et qui par conséquent maximisera la probabilité que cette image soit l'image recherché. La solution au problème est équivalente à maximiser la fonction de Log- Vraisemblance, plus facile à calculer d'un point de vue algorithmique :

$$\max_{x \geq 0} L(x) = \max_{x \geq 0} \log(P_L(y/x)) = \sum_{i=1}^m (y_i \ln(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \quad (5)$$

Pour ce faire, l'idée est de considérer une image initiale unitaire puis de la mettre à jour à partir de l'erreur créée par la différence entre le sinogramme réel et le sinogramme de l'image initiale. L'idée ici est de faire en sorte que l'image initiale se rapproche petit à petit de l'image de référence par l'intermédiaire de la similarité des sinogrammes. L'équation de mise à jour est donné par et l'algorithme est illustré par la Figure 8:

$$x_j^{next} = \frac{x_j^{current}}{\sum_i a_{ij}} \sum_i a_{ij} \frac{y_i}{\sum_j a_{ij}x_j^{current}} \quad (6)$$

où  $\sum_i a_{ij}$  représente l'opérateur de rétroprojection et  $\sum_j a_{ij}$  l'opérateur de projection.



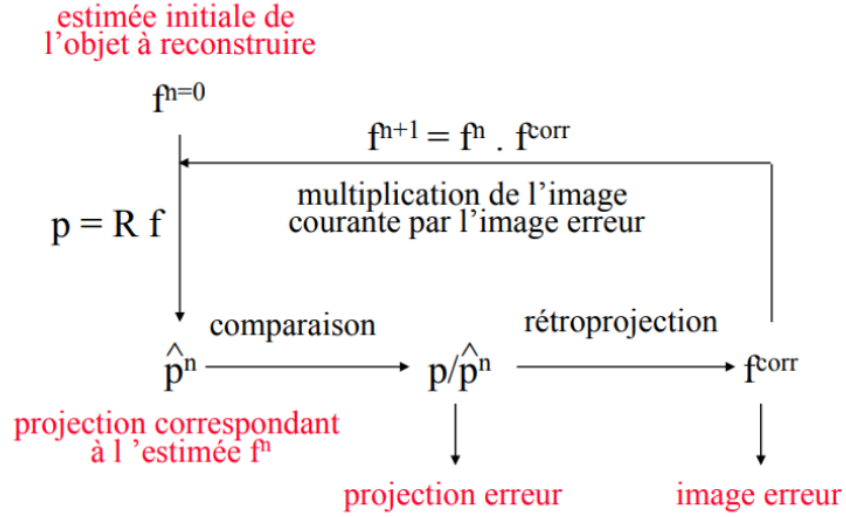


Figure 8: Principe itératif de la reconstruction MLEM : 1. on calcule les projections de l'image initiale, 2. on compare le sinogramme obtenu avec le sinogramme de référence, 3. on retroprojette l'erreur (à partir de la rétroprojection simple), 4. on actualise l'image. Cette figure est extraite du cours de A. ROBERT.

## 4.2 Influence du nombre d'itération en fonction du nombre de projection

Afin d'étudier l'influence du nombre d'itération sur le résultat de l'algorithme pour un nombre de projection  $N$  donné, plusieurs résultats intermédiaire sont calculés.

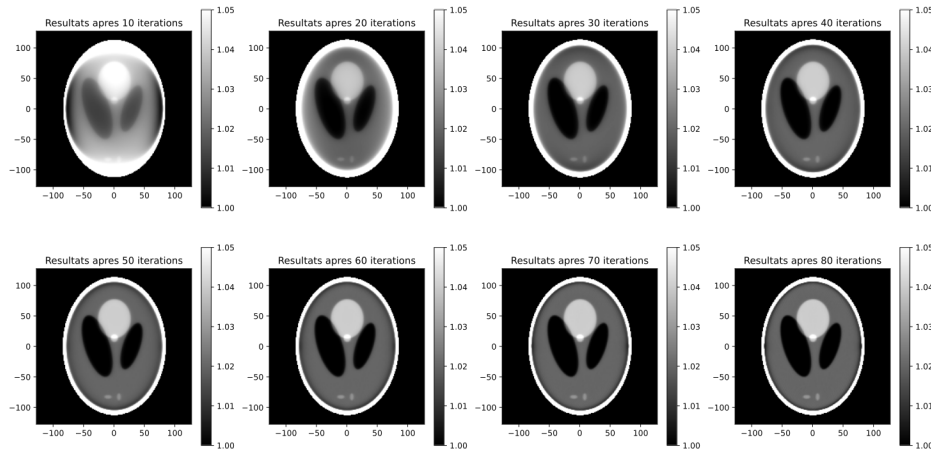


Figure 9: Affichage des différents resultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itération pour un nombre de projection de 1000

Pour un nombre de projections égal à 1000 la reconstruction de l'image par l'algorithme MLEM fonctionne bien et permet d'avoir des résultats proches de l'image de référence cf figure 9.

Une première conclusion pourrait dire que plus le nombre d'itérations augmente plus la reconstruction tend vers l'image voulue, cependant en pratique si on augmente encore le nombre d'itérations, la méthode

va commencer à créer du bruit qui est dû au fait que le sinogramme de référence n'est pas idéal à cause du nombre de projections fini.

En augmentant le nombre d'itérations à 400 avec 1000 projections, des effets de lignes apparaissent sur l'image qui est caractéristique de l'apparition du bruit cf figure 10

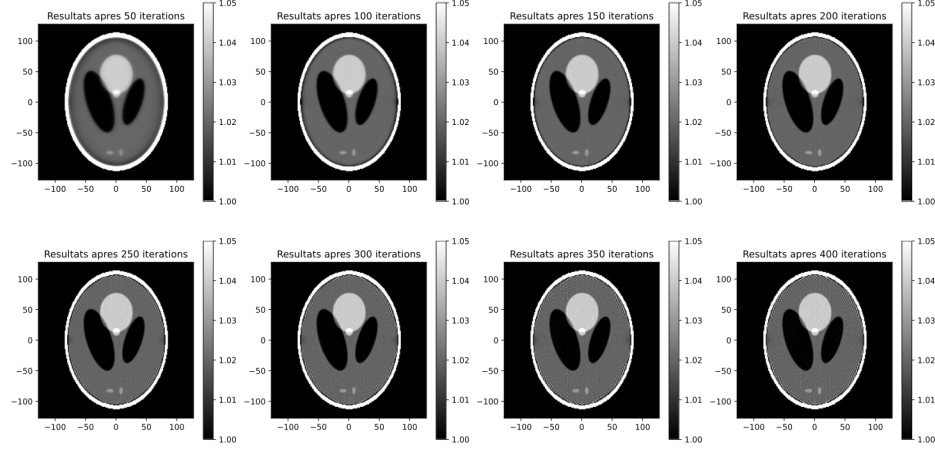


Figure 10: Affichage des différents resultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itération pour un nombre de projection de 1000

En terme de nombre de projections, si celui-ci est réduit à 100 (figure 11) ou même à 50 (figure 12) le résultat évolue progressivement jusqu'à un bon résultat mais il commence à se bruite de plus en plus rapidement plus le nombre de projections se réduit.

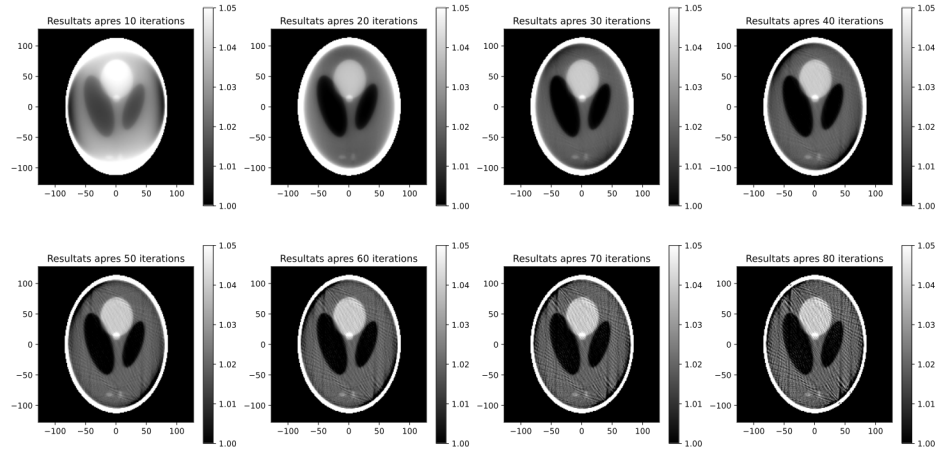


Figure 11: Affichage des différents résultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itérations pour un nombre de projections de 100

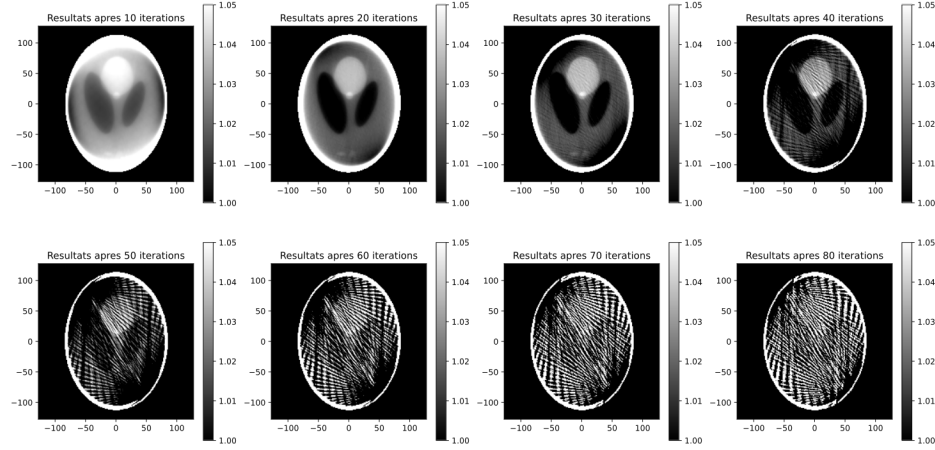


Figure 12: Affichage des différents résultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itérations pour un nombre de projections de 50

Afin d'étudier le problème plus précisément, nous avons calculé la fonction de coût qui n'est autre que la fonction de log-vraisemblance vue précédemment, ce qui permet de pouvoir vérifier que celle-ci augmente bien au cours des itérations. Complémentairement le calcul de la MSE (*Mean Squarre Error*) entre le sinogramme reconstruit et celui d'origine et la MSE entre l'image reconstruite et l'image d'origine permet de comparer les erreurs entre les estimations de l'algorithme et les données que l'on veut atteindre. Il est attendu par construction de l'algorithme que ces erreurs tendent vers zéros lorsque le nombre d'itérations augmente. Cependant comme évoqué précédemment en pratique ce n'est pas forcément le cas.

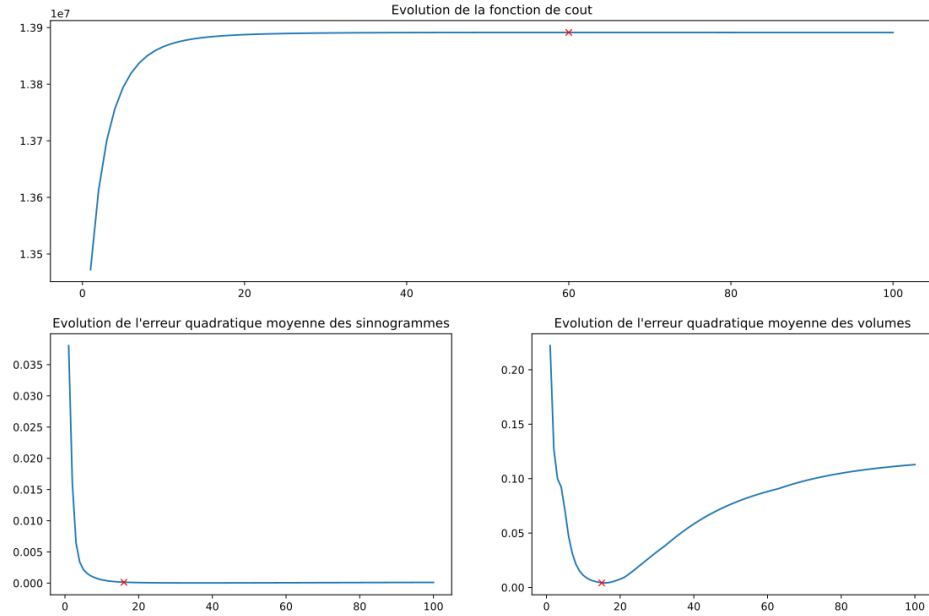


Figure 13: Affichage des différents résultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itération pour un nombre de projection de 100. La figure du haut représente la fonction de cout, la figure en bas à gauche représente la MSE des sinogrammes et la figure en bas à droite représente la MSE des images

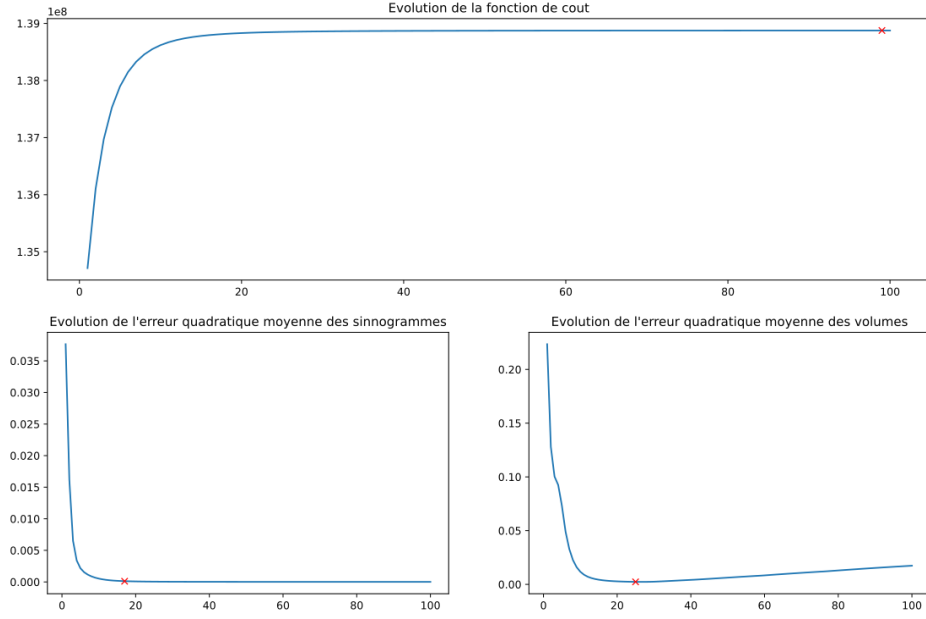


Figure 14: Affichage des différents résultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itération pour un nombre de projection de 1000. La figure du haut représente la fonction de cout, la figure en bas à gauche représente la MSE des sinnogrammes et la figure en bas à droite représente la MSE des images

Indépendamment du nombre de projections, la fonction de vraisemblance augmente bien au fur et à mesure des itérations ce qui est cohérent avec le but du problème de l'algorithme MLEM. Cependant il est important de noter que contrairement à la théorie les MSE peuvent se mettre à augmenter au bout d'un nombre d'itérations important. Cela est dû à la création d'un bruit.

En comparant les MSE des images reconstruites pour les nombres de projections de 100 (figure 13) et 1000 (figure 14), il est notable que les images commencent à diverger à une vitesse différente. Par exemple pour un nombre d'itérations à 80 on a une erreur d'environ 0,10 pour 100 projections contre une erreur inférieure à 0,025 pour 1000 projections.

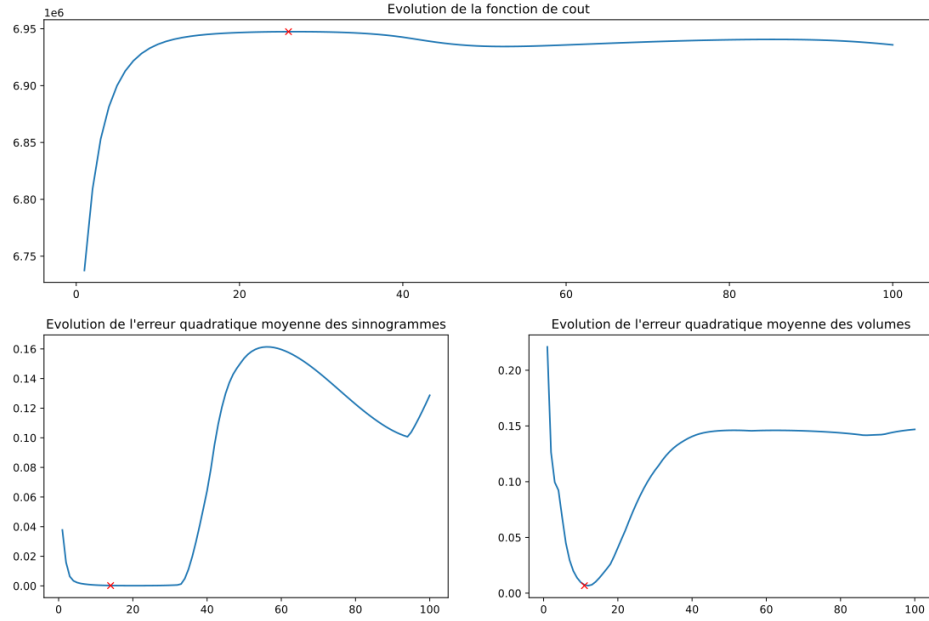


Figure 15: Affichage des différents résultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itérations pour un nombre de projection de 50. La figure du haut représente la fonction de coût, la figure en bas à gauche représente la MSE des sinogrammes et la figure en bas à droite représente la MSE des images

Pour un nombre de projections plutôt faible l'algorithme permet de converger vers un résultat cohérent (cf figure 12 pour environ 20 itérations) cependant comme le montre les courbes d'erreur quadratique ( ou la figure 12 pour un nombre élevé d'itérations) le résultat diverge très rapidement jusqu'à parfois des résultats aberrants.

De plus la création du bruit dépend du nombre d'itérations mais elle semble aussi très liée au nombre de projections comme les figures 15 13 14 le montrent. Une hypothèse voudrait qu'une partie du bruit vient du fait que le sinogramme d'origine n'est pas parfait à cause du nombre d'angles fini.

Afin de vérifier ou au moins la consolider on peut mettre un nombre de projections très élevé tel que 100000.

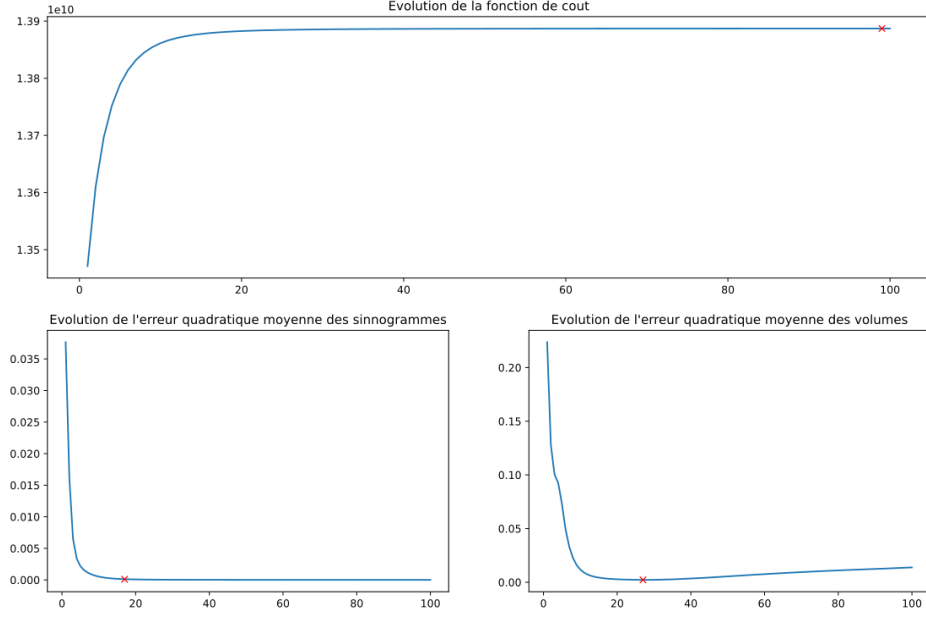


Figure 16: Affichage des différents résultats de l'algorithme MLEM en fonction du nombre d'itérations pour un nombre de projections de 100000. La figure du haut représente la fonction de coût, la figure en bas à gauche représente la MSE des sinnogrammes et la figure en bas à droite représente la MSE des images

Le résultat de la figure 16 montre bien que plus on augmente le nombre de projections moins la reconstruction créera de bruit. Cette petite expérience n'est en réalité seulement intéressante que d'un point de vue théorique car utiliser un si grand nombre d'itération améliorera à peine le résultat (cf comparaison figure 14 et 16) pour des temps de calculs très largement augmentés. De plus utiliser un tel nombre de projection serait dangereux pour le patient .

Ces figures montrent bien l'importance de s'arrêter à un certain point et de ne pas continuer les itérations. De plus le point de divergence varie en fonction du nombre de projections. Cependant une valeur est commune approximativement à chaque figure : le taux d'erreur minimal du sinogramme ou des images reconstruites. En effet ce seuil peut donc être un critère d'arrêt tout à fait cohérent car il ne varie que de très peu selon le nombre de projection et peut empêcher l'algorithme de créer du bruit. Ce critère de convergence possède un défaut qui est que si le seuil choisi est trop faible la MSE risque de ne pas à l'atteindre à cause de la divergence

Pour palier à ce problème, un autre critère de convergence est de comparer les MSE entre deux itérations et de pouvoir arrêter les itérations dès que la MSE commence à stagner et avant qu'elle n'augmente. De plus en pratique il n'est pas possible d'avoir l'image de référence donc le critère de convergence sur l'erreur quadratique des sinogrammes est privilégié pour la suite du TP.

## 5 Comparaison des méthodes

Maintenant que les deux méthodes sont implémentées, Il est intéressant de comparer ces méthodes pour un nombre de projections fixé par exemple à 500.

Le calcul du PSNR permet de comparer les résultats des reconstructions et de quantifier l'erreur de celles ci par rapport à l'image d'origine.

$$PSNR = 10 * \log_{10}(MSE_{image}) \quad (7)$$

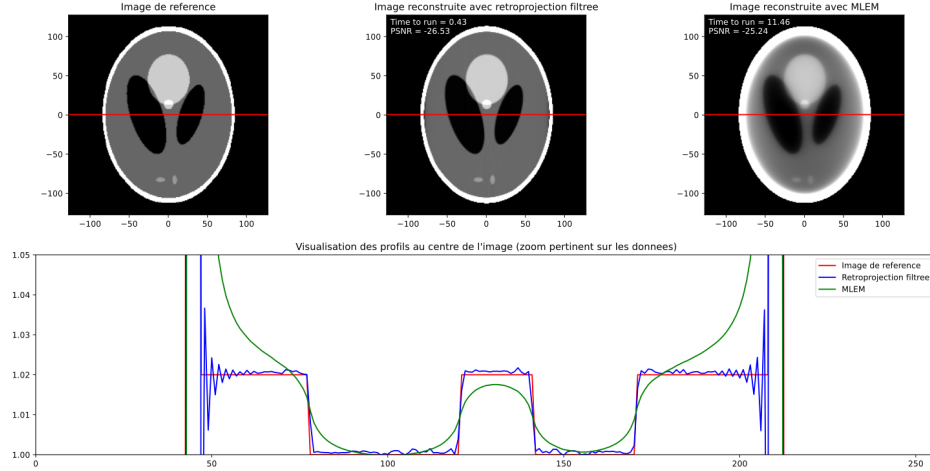


Figure 17: Comparaison des résultats de la rétroprojection filtrée et de l'algorithme MLEM par rapport à la référence sans bruit. Il est affiché sur la figure du bas les profils des valeurs de la ligne rouge présente sur les images reconstruites au dessus pour les trois images

Du point de vue complexité et temps de calculs il est évident que la rétroprojection filtrée est beaucoup plus rapide que l'algorithme MLEM. Ceci vient du fait que MLEM est une méthode itérative alors que la rétroprojection filtrée ne réalise qu'une seule fois le calcul. Dans la figure 17 la rétroprojection filtrée est calculée en 0,46s et l'image de l'algorithme MLEM est obtenue en 11,46s.

Il est intéressant de noter que d'un point de vue visuel la rétroprojection filtrée semble de meilleure qualité que l'algorithme MLEM cependant si on regarde la valeur de PSNR deux algorithmes celui-ci donne une valeur relativement équivalente. De plus en observant le profil des reconstructions il est possible d'observer que les deux méthodes reconstruisent l'image de référence de façon différente. En effet alors que le PSNR est environ égal, il est observable que la rétroprojection filtrée a tendance à bien pouvoir suivre le modèle de référence notamment dans les changements brusques de valeurs, cependant celle-ci reproduit l'image de référence de façon bruitée et discontinue. À l'inverse l'algorithme MLEM va être moins proche de la référence dans les changements discontinus des pixels du fait d'une reconstruction continue des valeurs de pixel. Par contre la courbe reconstruite est donc parfaitement lisse et stable. Cette différence de reconstruction permet d'expliquer que les PSNR sont semblables mais ont des images visuellement très différentes. Notre préférence visuelle pour la rétroprojection filtrée peut aussi venir du fait que l'œil humain est moins sensible aux bruits que d'un changement continu des valeurs comme pour MLEM.

Il est aussi important de noter que si on applique du bruit au sinogramme mesuré, les deux méthodes ne se comportent pas de la même façon.

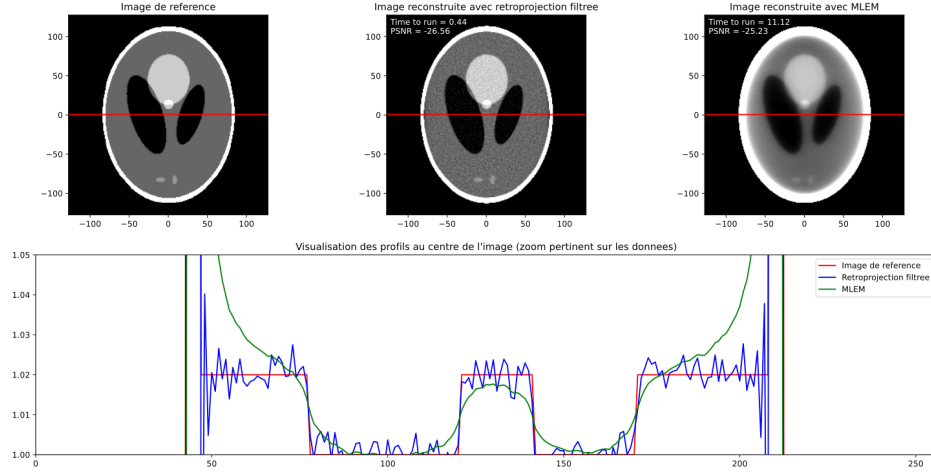


Figure 18: Comparaison des résultats de la rétroprojection filtrée et de l'algorithme MLEM par rapport à la référence avec un bruit représenté par  $\sigma=0.1$ . Il est affiché sur la figure du bas les profils des valeurs de la ligne rouge présente sur les images reconstruites au dessus pour les trois images

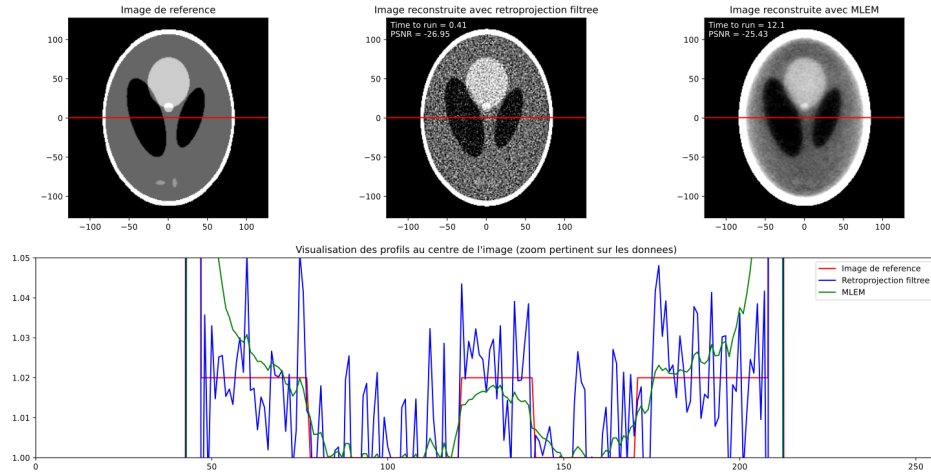


Figure 19: Comparaison des résultats de la rétroprojection filtrée et de l'algorithme MLEM par rapport à la référence avec un bruit représenté par  $\sigma=0.5$ . Il est affiché sur la figure du bas les profils des valeurs de la ligne rouge présente sur les images reconstruites au dessus pour les trois images

Comme l'affichage des profils le montre dans les figures 18 et 19, la rétroprojection filtrée a tendance à reconstruire une image très bruitée alors que l'algorithme MLEM va privilégier un changement de valeurs continues. Ainsi l'approche statistique du problème réalisé par l'algorithme MLEM est plutôt robuste aux bruits alors que la rétroprojection filtrée ne l'est pas du tout.

De plus on peut noter que si nous voulons interpréter les valeurs finales il sera plus facile de les interpréter avec le résultat statistique qui est stable et continue, pour pouvoir interpréter les résultats de la rétroprojection filtrée, il faudrait potentiellement réaliser un débruitage supplémentaire.



## 6 Conclusion

Ce TP a permis de mettre en œuvre deux des principales méthodes pour inverser une transformée de radon: la rétroprojection filtrée et la reconstruction basée sur la MLEM.

Ces deux méthodes permettent d'obtenir des résultats équivalents en terme de PSNR cependant les deux méthodes ont leurs avantages et inconvénients.

La rétroprojection filtrée a pour large avantage d'être beaucoup plus rapide que l'approche statistique et itérative proposé par la reconstruction par MLEM. Cependant l'algorithme MLEM va être beaucoup plus robuste aux bruits d'acquisition présents dans le sinogramme que la rétroprojection filtrée, les résultats de l'algorithme MLEM sont continus et beaucoup plus stables que les résultats donnés par la rétroprojection filtrée et ils seront plus faciles à interpréter.

C'est pour toutes ces raisons qu'en pratique les deux méthodes sont encore très largement utilisées et aucune des deux n'est vraiment prépondérante sur l'autre, ça dépendra du temps de calcul et de la qualité voulue.

En effet il est possible de citer notamment que la rétroprojection filtrée est majoritairement utilisée en scanner X du fait que c'est une opération rapide et que des résultats rapides sont privilégiés. Au contraire pour de la Tomographie d'émission comme TEMP qui est une acquisition longue une approche statistique et itérative du problème sera préférée.