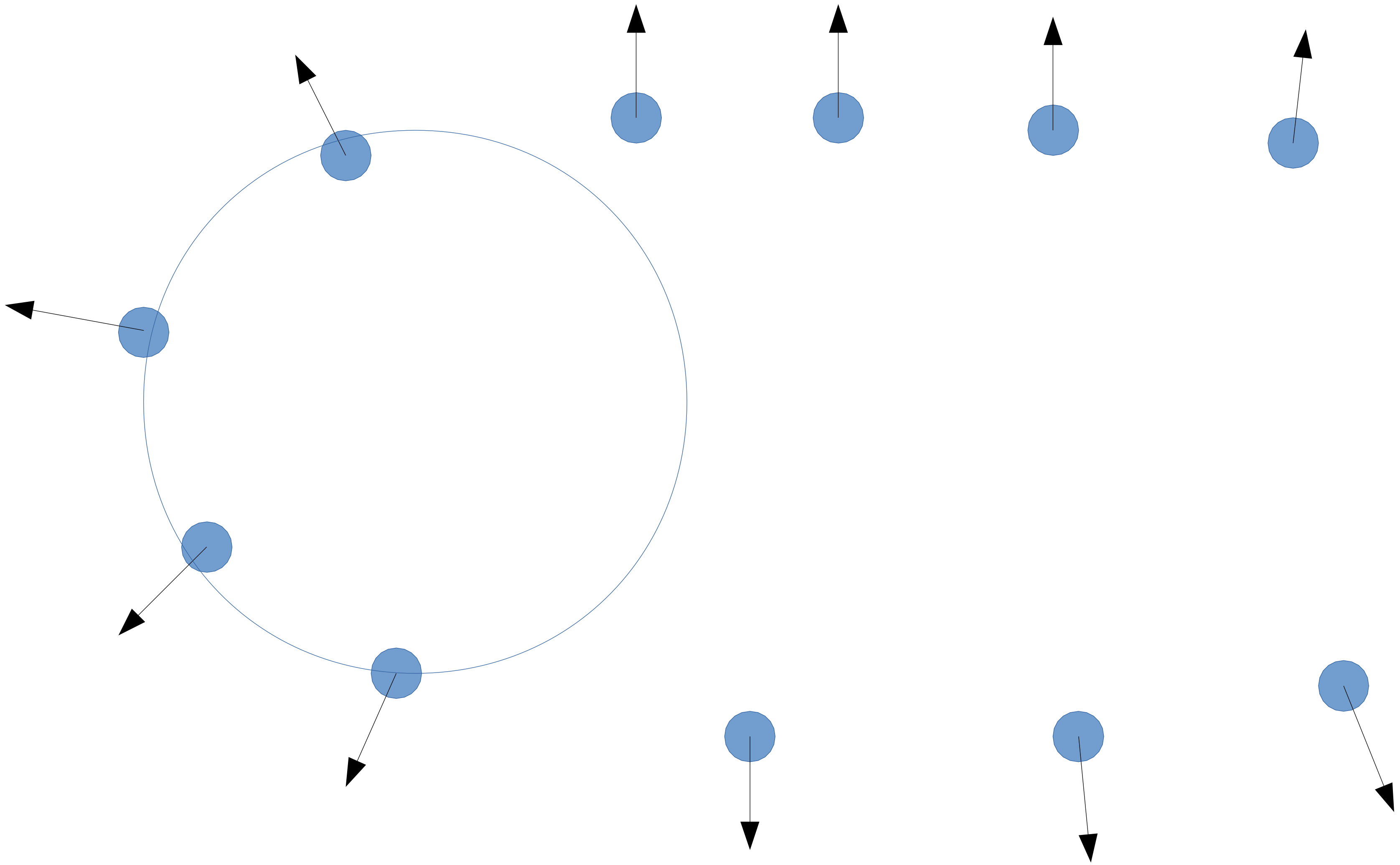
Point Processing & Modeling

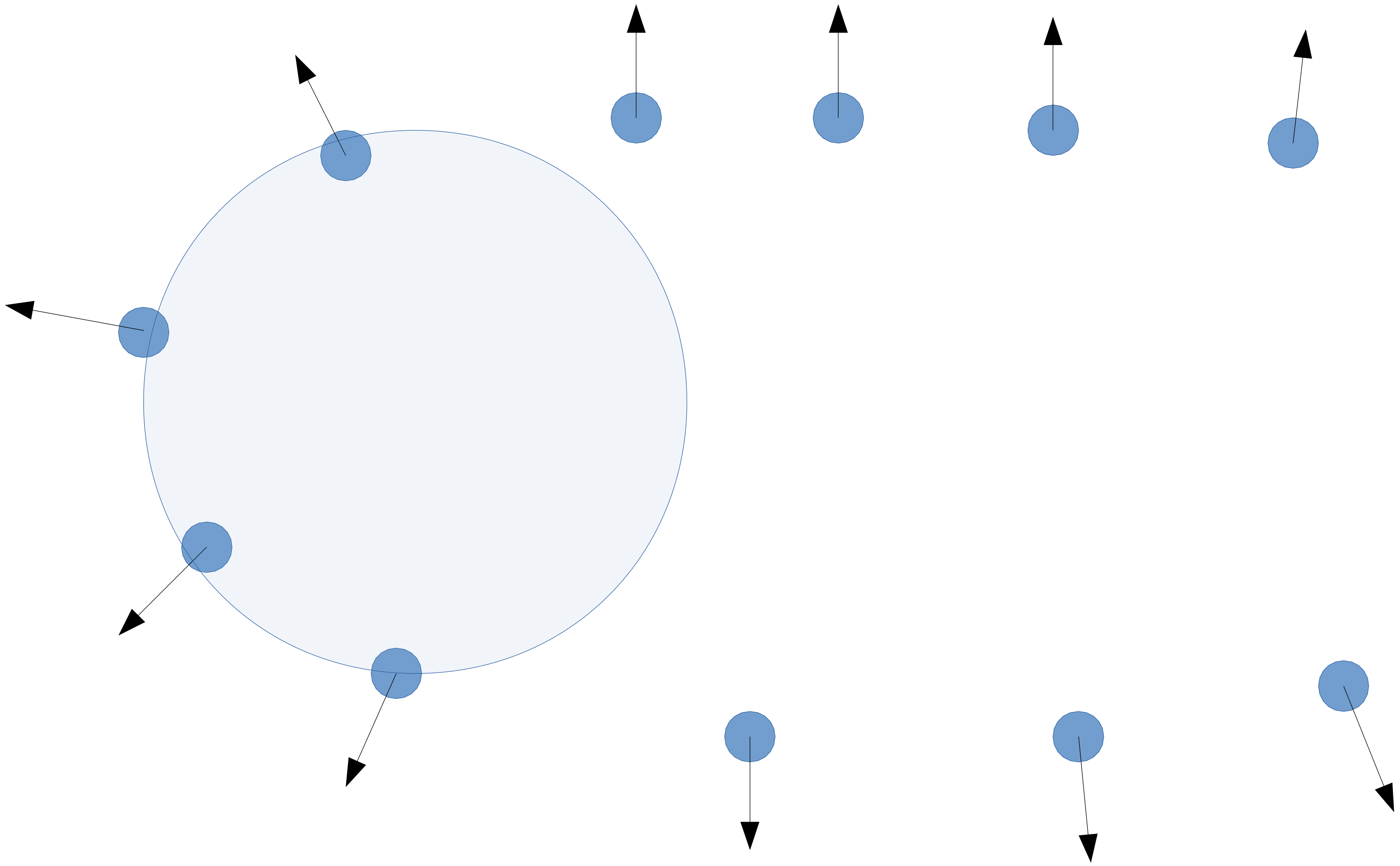
Source cours de Jean-Marc Thiery
https://perso.telecom-paristech.fr/jthiery/

Surface de points algébrique



Surface de points algébrique

- Idée principale : projeter sur des sphères plutôt que des plans
- « Algebrique », car une sphère dégénère mal vers un plan (le centre est a l’infini…), mais **son équation algébrique dégénère continûment vers celle du plan**...



Surface de points algébrique

- Idée principale : projeter sur des sphères plutôt que des plans
- « Algebrique », car une sphère dégénère mal vers un plan (le centre est a l'infini…), mais **son équation algébrique dégénère continûment vers celle du plan**...

$$\|X - c\|^2 - r^2 = 0$$

Eq standard d'une sphère

$$(1, X^T, \|X\|^2).(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)^T = 0$$

Eq générale d'une sphère algébrique

$$1 + \frac{n^T}{d}.X = 0$$

Eq standard d'un plan

Surface de points algébrique

$(1, X^T, \|X\|^2).\,(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)^T = f(X)$ Eq générale d'une sphère algébrique

$f(X) = 0$ Points sur la sphère

$\nabla f(X)$ Normale sur la sphère

Surface de points algébrique

$(1, X^T, \|X\|^2).(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)^T = f(X)$ Eq générale d'une sphère algébrique

$f(X)=0$ Points sur la sphère

$\nabla f(X)$ Normale sur la sphère

Fitting en deux temps d'une sphère a un ensemble de points : $\{w_i, p_i, n_i\}$

1) Minimiser $\sum_i w_i \|\nabla f(p_i) - n_i\|^2$ (cela définit u_0, u_1, u_2)

2) Minimiser $\sum_i w_i (f(p_i))^2$ (cela définit u_0)

Stratégie adoptée par :
[Guennebaud et al. 2008] *Dynamic Sampling and Rendering of APSS*

Minimiser l'équation normale

1) Minimiser $\sum_i w_i \|\nabla f(p_i) - n_i\|^2$ (cela définit u_1, u_2, u_3, u_4)

$$f(X) = (1, X^T, \|X\|^2).(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)^T \longrightarrow \nabla f(X) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + 2u_4 X = (I_3|2X).\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Or $$\sum_i w_i \|\nabla f(p_i) - n_i\|^2 = \sum_i w_i \nabla f(p_i)^T.\nabla f(p_i) - 2\sum_i w_i \nabla f(p_i)^T.n_i + const$$

$\longrightarrow$ Minimiser $$\sum_i w_i \nabla f(p_i)^T.\nabla f(p_i) - 2\sum_i w_i \nabla f(p_i)^T.n_i$$

qui vaut $$U^T.\left(\sum_i w_i (I_3, 2p_i)^T.(I_3, 2p_i)\right).U - 2\left(\sum_i w_i (I_3, 2p_i)^T.n_i\right)^T.U$$

Minimiser l’équation de position

1) Minimiser $\sum_i w_i\left(f(p_i)\right)^2$ (cela définit u_0)

$$f(X) = (1, X^T, \|X\|^2).(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)^T$$

$$f(p_i) = u_0 - \left(p_i^T, \|p_i\|^2\right).(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$$

$\longrightarrow$ Simple moyennage barycentrique

Solution exacte

$$
\begin{cases}
\tilde{w}_i = w_i \Big/ \sum_j w_j & \text{Poids normalisés} \\[2em]
u_4 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\sum w_i\, \mathbf{p}_i^T \mathbf{n}_i - \sum \tilde{w}_i\, \mathbf{p}_i^T \sum w_i\, \mathbf{n}_i}{\sum w_i\, \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i - \sum \tilde{w}_i\, \mathbf{p}_i^T \sum w_i\, \mathbf{p}_i} \\[1em]
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum \tilde{w}_i\, \mathbf{n}_i - 2u_4 \sum \tilde{w}_i\, \mathbf{p}_i \\[1em]
u_0 = -[u_1 u_2 u_3] \sum \tilde{w}_i\, \mathbf{p}_i - u_4 \sum \tilde{w}_i\, \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i
\end{cases}
$$

Projection

Pour X le point à projeter à l'itération courante

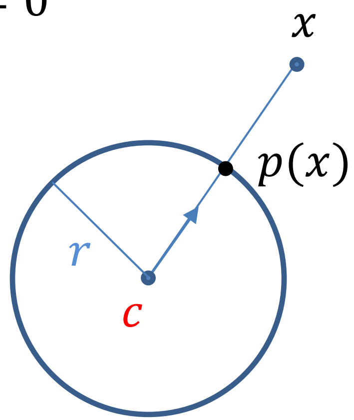
Sphère « classique »

$$\|X - c\|^2 - r^2 = 0$$

$$\|X\|^2 - 2cX + \|c\|^2 - r^2 = 0$$

Sphère algébrique

$$u_0 + X^T u_{123} + u_4 \|X\|^2 = 0$$



On calcul les coefficients ensuite la projection est calculée :

Si $u_4 = 0$, projection sur un plan :

$$u_0 + X^T u_{123} = 0 \qquad u_{123} \text{ : normale du plan}$$

sinon

$$\|X - c\|^2 - r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|X\|^2 - 2cX + \|c\|^2 - r^2 = 0$$

$$u_0 + X^T u_{123} + u_4 \|X\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|X\|^2 + X^T u_{123}/u_4 + u_0/u_4 = 0$$

D'où $-2c = u_{123}/u_4$ $\qquad \|c\|^2 - r^2 = u_0/u_4$

$$\boxed{c = -u_{123}/2u_4 \qquad r = \sqrt{\|c\|^2 - u_0/u_4}}$$

A utiliser pour calculer la projection

$$n = \nabla f(X) = u_{123} + 2u_4 X$$

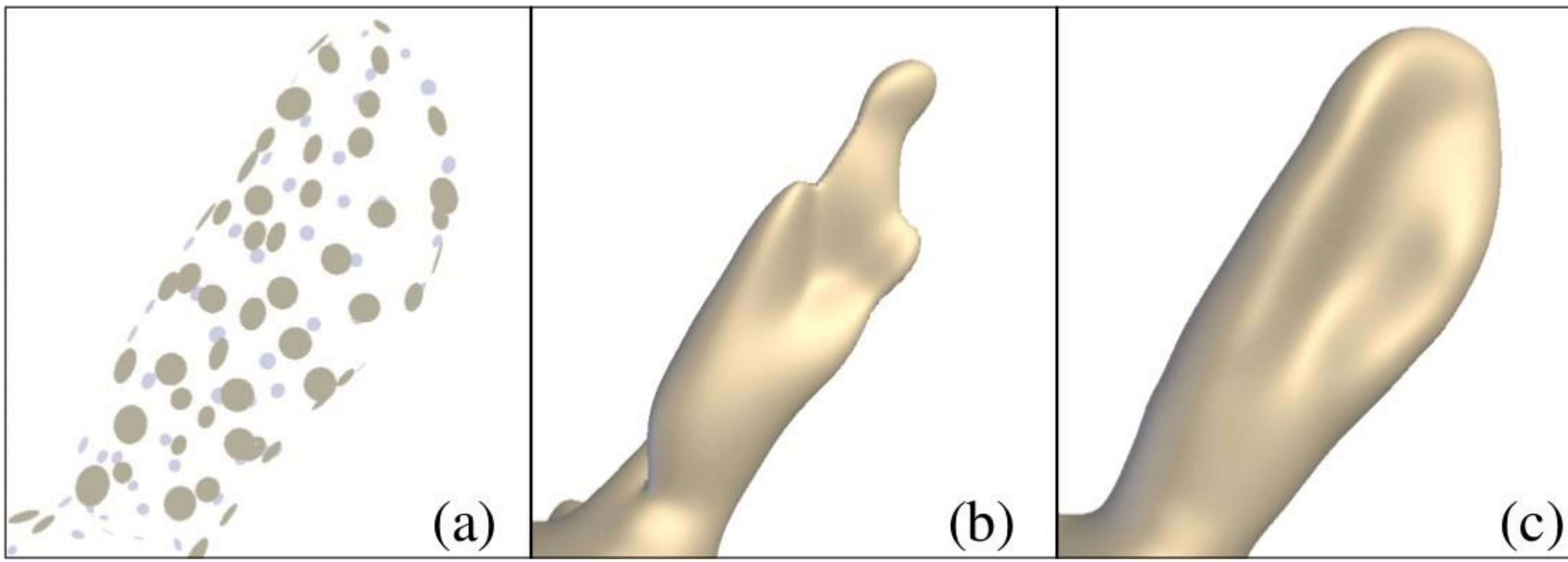
A normaliser

Surface de points algébrique

Note :

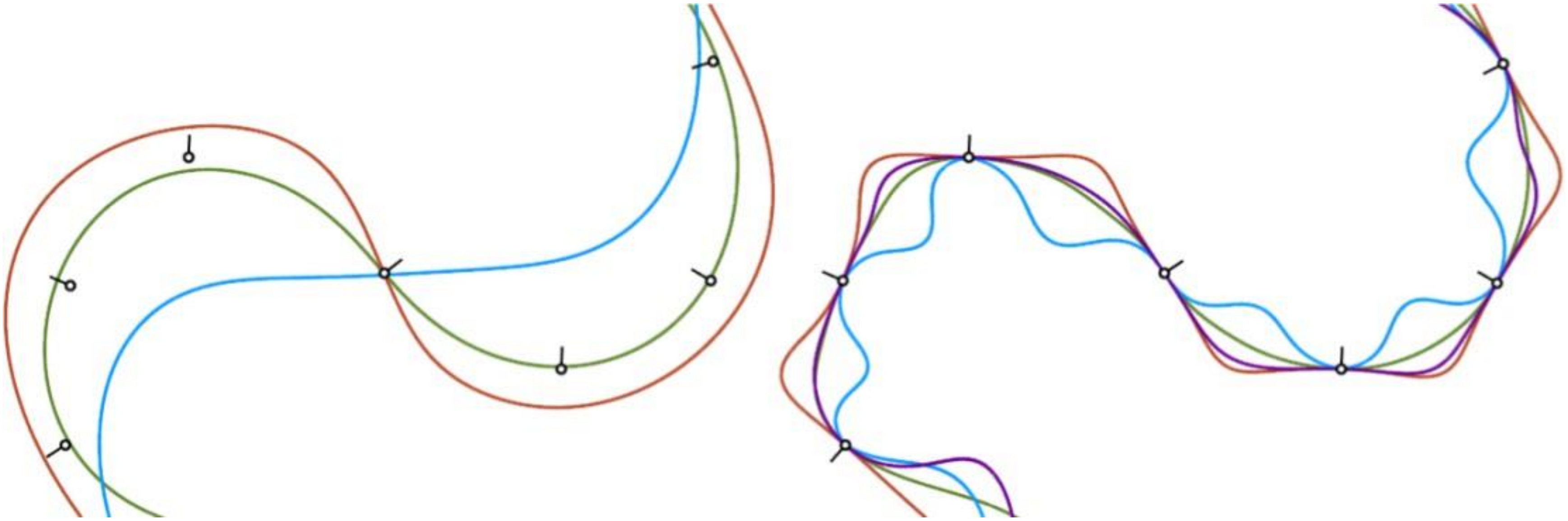
- Si on force $u_4 = 0$, on cherche le meilleur plan défini par les points les plus proches de x, avant de projeter x dessus.
- On retrouve dans ce cas la le modèle SPSS (qui est moins bon que HPSS…)
- $\rightarrow$ APSS étend le modèle SPSS (d'une autre manière que HPSS)

Surface de points algébrique



SPSS APSS

Surface de points algébrique

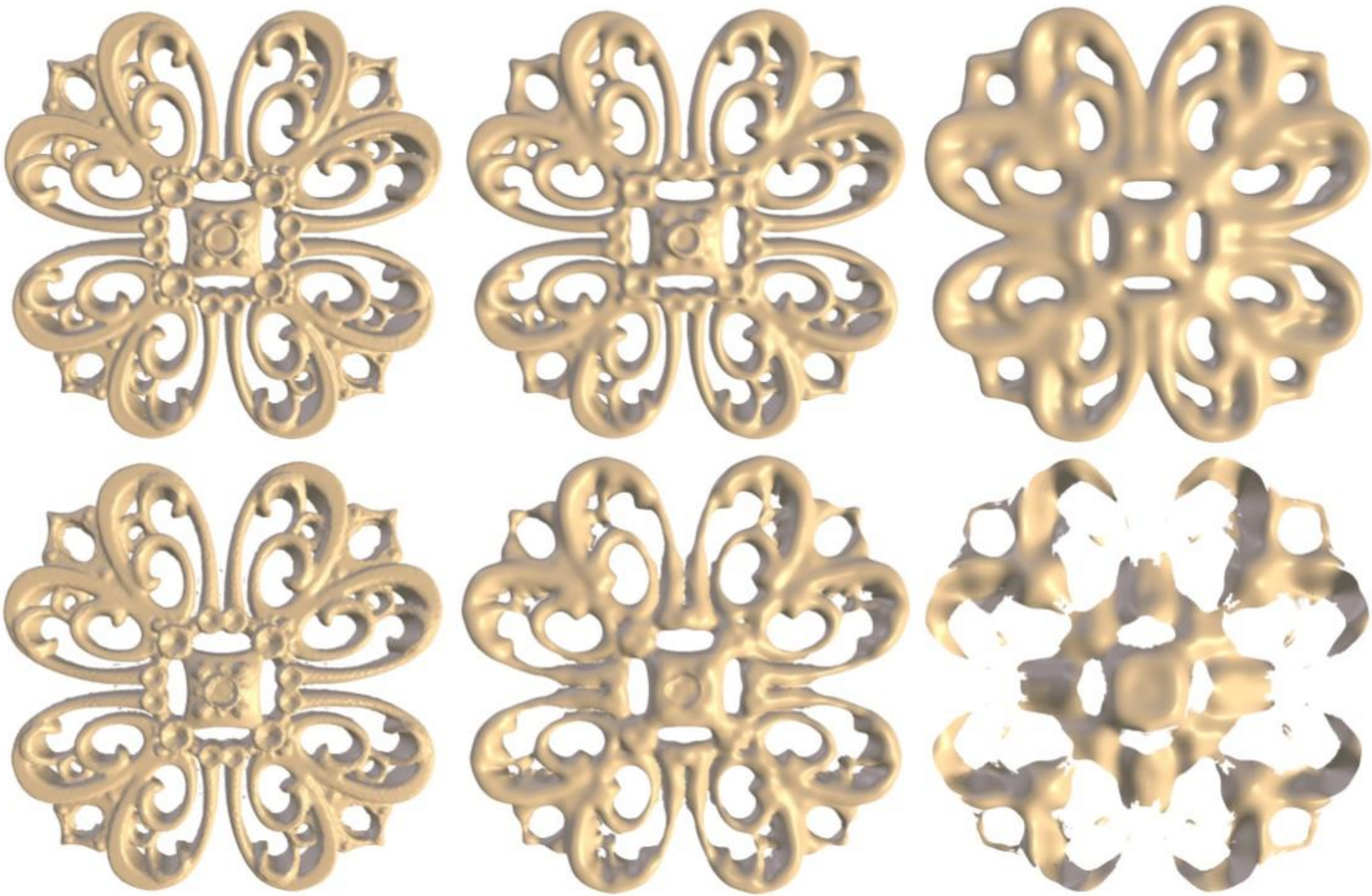


SPSS IMLS HPSS APSS

Taille du noyau approximant variant

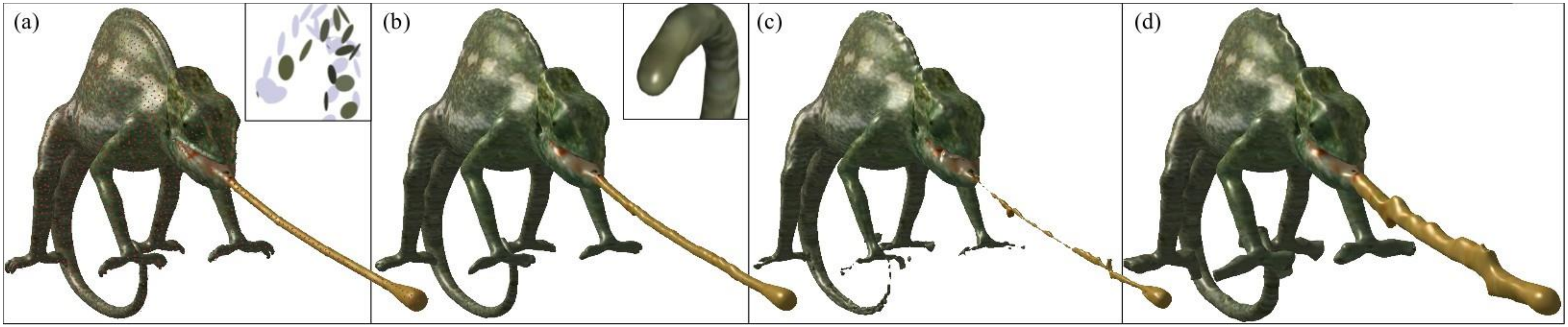
APSS

SPSS



Comparaison

Downsampling **_APSS_** **_SPSS_** **_IMLS_**



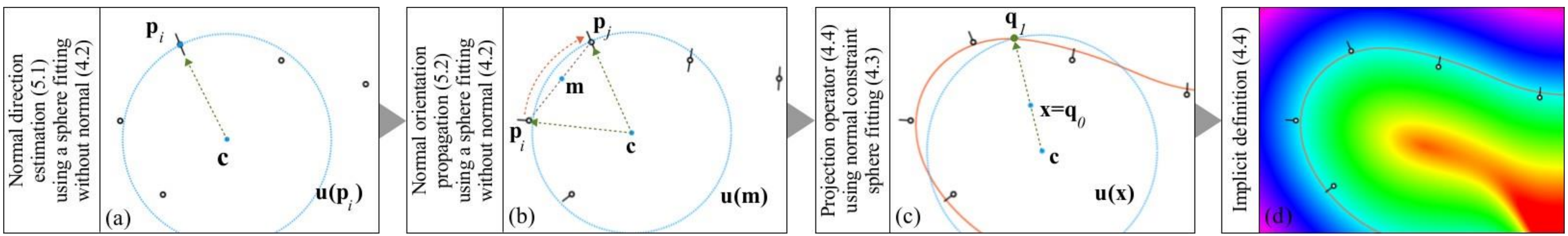
Édition de courbure

$$\begin{cases} u_4 = \beta \dfrac{1}{2} \dfrac{\sum w_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{n}_i - \sum \widetilde{w}_i \mathbf{p}_i^T \sum w_i \mathbf{n}_i}{\sum w_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i - \sum \widetilde{w}_i \mathbf{p}_i^T \sum w_i \mathbf{p}_i} \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum \widetilde{w}_i \mathbf{n}_i - 2u_4 \sum \widetilde{w}_i \mathbf{p}_i \\ u_0 = -[u_1 u_2 u_3] \sum \widetilde{w}_i \mathbf{p}_i - u_4 \sum \widetilde{w}_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i \end{cases}$$

β=8 β=1 β=1 β=−4.5

Estimation des normales et fonction implicite

$$f(X) = (1, X^T, \|X\|^2) . U(X)$$



Pour les nuages non-orientes, les auteurs proposent de fitter des spheres aux points sans les normales, de definir la normale ainsi, et de propager l’orientation (distinction des zones convexes et concaves)

Questions ?

?