MACS201a
Contrôle du 4 octobre 2021

**Documents autorisés : polycopié et notes de cours et TD.**

**Durée : 2 heures.**

**Préambule.** On note, pour tout $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, $\mathbf{Ga}(\alpha, \lambda)$ la loi sur $\mathbb{R}$ admettant la densité

$$x \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) ,$$

où $\Gamma$ désigne la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \quad x > 0 .$$

On rappelle que la loi $\mathbf{Ga}(\alpha, \lambda)$ admet pour fonction caractéristique

$$\xi \mapsto (1 - \mathrm{i}\xi/\lambda)^{-\alpha} .$$

**Exercice 1.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X$ une v.a. réelle définie sur cet espace. On note

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \ : \ \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}\} .$$

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu.
2. Donner un exemple d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour lequel $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ (tribu grossière) et un exemple pour lequel $\mathcal{G}$ est strictement plus grand que $\{\emptyset, \Omega\}$. On pourra prendre $\Omega = \{0, 1\}$ pour le premier exemple et $\Omega = \mathbb{R}$ pour le second.
3. Déterminer $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X) | \mathcal{G}]$ pour $A$ borélien de $\mathbb{R}$.
4. En déduire une version régulière $(\omega, A) \mapsto K(\omega, A)$ sur $\Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{P}^{X|\mathcal{G}}$.

Soient maintenant $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \vee \mathcal{G}$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{C} = \{B \cap C \ : \ B \in \mathcal{H}, C \in \mathcal{G}\}$. On suppose dorénavant que $X$ est $L^1$.

5. Soit $A \in \mathcal{C}$. Exprimer $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]$ à l'aide de $\hat{X} := \mathbb{E}[X | \mathcal{H}]$.
6. Montrer que $\mathbb{E}[X | \mathcal{H}'] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}]$. [Indication : utiliser que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{H}'$.]

**Exercice 2.** Soient $X, Y$ et $Z$ trois v.a. à valeurs réelles définies sur le même espace de probabilité. Soit $K$ un noyau de $\mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}^{Y|X} = K$.

7. Soient $A$ et $B$ deux boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \times B}(X, Y) | X] = \mathbb{1}_A(X) K(X, B)$. En déduire que $\mathbb{P}^{(X,Y)|X} = \tilde{K}$, où $\tilde{K}$ est le noyau défini par

$$\tilde{K}(x, C) = \int \mathbb{1}_C(x, y) \ K(x, \mathrm{d}y) , \qquad x \in \mathbb{R} , A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) .$$

On suppose dorénavant que :

a) $X$ suit la loi $\mathbf{Ga}(2,1)$, de densité $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) x \mathrm{e}^{-x}$, cf. ci-dessus.
b) pour tout $x > 0$, $K(x, \cdot)$ est la loi uniforme sur l'intervalle $[0, x]$, notée $\mathbf{U}([0, x])$.
c) On pose $Z = X - Y$.

8. Déterminer la densité jointe $f^{(X,Y)}$ du vecteur aléatoire $(X, Y)$.
9. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$ pour tout $t \geq 0$.
10. Déterminer la loi conditionnelle de $Z$ sachant $X$. On pourra utiliser la question 7.
11. Que dire des lois $\mathbb{P}^Y$ et $\mathbb{P}^Z$ (non-conditionnelles) de $Y$ et $Z$ ?
12. Déterminer la loi (non-conditionnelle) de $(Y, Z)$.
13. Retrouver la loi de $X$ à partir de celle du couple $(Y, Z)$. On pourra calculer la fonction caractéristique de $X$.
14. Calculer $\mathrm{Cov}(Y, Z | X) = \mathbb{E}[YZ | X] - \mathbb{E}[Y | X] \mathbb{E}[Z | X]$, quelle différence immédiate voit-on entre la loi conditionnelle de $(Y, Z)$ sachant $X$ et la loi non-conditionnelle ?

## Corrigé

**Solution de l'exercice 1**

1. $\mathcal{G}$ contient $\Omega$ car $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Si $A \in \mathcal{G}$, $A^c \in \mathcal{G}$ puisque $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Soit maintenant $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$. S'il existe $n$ tel que $\mathbb{P}(A_n) = 1$, alors, clairement, $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = 1$. Sinon alors $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = 0$. On a bien dans les 2 cas $\cup_i A_i \in \mathcal{G}$.
2. Cas où $\mathcal{G}$ est la tribu grossière : $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F}$ =parties de $\Omega$, $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/2$ pour $i = 0, 1$. Cas où $\mathcal{G}$ n'est pas la tribu grossière : $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, $\mathbb{P}$ = loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. Soit $B \in \mathcal{G}$. Si $\mathbb{P}(B) = 0$ alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B] = 0$ et si $\mathbb{P}(B) = 1$ alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B] = \mathbb{P}(X \in A)$. Dans tous les cas, on a
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{1}_B] \ .$$
On conclut donc
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)|\,\mathcal{G}] = \mathbb{P}(X \in A) \ .$$
4. On peut donc prendre $K(\omega, A) = \mathbb{P}^X(A)$.
5. Soit $A = B \cap C$ avec $B \in \mathcal{H}, C \in \mathcal{G}$. On a, si $\mathbb{P}(C) = 0$
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = 0 = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\,\mathcal{H}]\,\mathbb{1}_A] \ ,$$
et si $\mathbb{P}(C) = 1$,
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\,\mathcal{H}]\,\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\,\mathcal{H}]\,\mathbb{1}_A] \ .$$
6. La classe $\mathcal{C}$ est un $\pi$-système. L'ensemble des $A$ de $\mathcal{H}'$ qui vérifient
$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\,\mathcal{H}]\,\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\,\mathcal{H}]\,\mathbb{1}_A]$$
est un $\lambda$-système. On en déduit que c'est tout $\mathcal{H}'$. D'où le résultat.

**Solution de l'exercice 2**

7. On a
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\times B}(X, Y)|\,X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B(Y)|\,X] = \mathbb{1}_A(X)\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(Y)|\,X] = \mathbb{1}_A(X)K(X, B).$$
Or ce dernier correspond exactement à $\tilde{K}(X, A \times B)$. Les mesures de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$ sont caractérisées par leurs valeurs sur les ensembles produits $A \times B$ avec $A$ et $B$ boréliens. Donc $\tilde{K}(x, \cdot)$ est l'unique probabilité qui étend $A \times B \mapsto \mathbb{1}_A(x)K(x, B)$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'où le résultat.
8. La densité jointe de $(X, Y)$ s'écrit
$$(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-x}\mathbb{1}_{[0,x]}(y)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \ .$$
9. On a
$$\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y>t\}}\middle|\,X\right]\right] = \int_0^\infty ((x - t)_+/x)\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_t^\infty (x - t)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t} \ .$$
10. La loi conditionnelle de $(X, Y)$ sachant $X$ est $\tilde{K}$. On en déduit, pour tout borélien $B$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X - Y)|\,X] &= \int \mathbb{1}_B(x - y)\tilde{K}(X, \mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int \mathbb{1}_B(X - y)\,K(X, \mathrm{d}y)\\ &= \int_0^X \mathbb{1}_B(X - y)\,X^{-1}\,\mathrm{d}y = \int_0^X \mathbb{1}_B(z)X^{-1}\mathrm{d}z \ ,\end{aligned}$$
en posant $z = X - y$. D'où $\mathbb{P}^{Z|X} = K$.

11. Comme $\mathbb{P}^{Y|X} = \mathbb{P}^{Z|X}$ on en conclut que $\mathbb{P}^{Y} = \mathbb{P}^{Z}$.
12. On écrit pour des boréliens $A$ et $B$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\times B}(Y,Z)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A}(Y)\mathbb{1}_{B}(X-Y)\right]\\ &= \int \mathbb{1}_{A}(y)\mathbb{1}_{B}(x-y)\mathrm{e}^{-x}\mathbb{1}_{[0,x]}(y)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int \mathbb{1}_{A}(y)\mathbb{1}_{B}(z)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(z)\,\mathrm{e}^{-y-z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .\end{aligned}$$

   D'où $(Y,Z)$ a pour densité $(y,z)\mapsto \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(z)\mathrm{e}^{-y-z}$. et l'on conclut que $Y$ et $Z$ sont indépendants de même loi exponentiel de paramètre 1.
13. La fonction caractéristique de $Y$ et $Z$ est $\xi\mapsto(1-\mathrm{i}\xi)^{-1}$. La fonction caractéristique de $Y+Z$ est donc $\xi\mapsto(1-\mathrm{i}\xi)^{-2}$, qui est bien celle d'une $\mathbf{Ga}(2,1)$.
14. Comme $Y+Z=X$, on se doute que $Y$ et $Z$ ne sont pas indépendants conditionnellement à $X$. En effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[YZ|\,X\right]-\mathbb{E}\left[Y|\,X\right]\mathbb{E}\left[Z|\,X\right] &= \mathbb{E}\left[XY-Y^2\,\middle|\,X\right]-X^2/4\\ &= X^2/2-X^{-1}\int_0^X y^2\mathrm{d}y-X^2/4\\ &= -X^2/12.\end{aligned}$$