# Contrôle de connaissances de MDI 210

*Durée : 3 h.*
*Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ;*
*dictionnaire autorisé pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.*
*Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits,*
*ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.*
*L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.*
*Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.*
*On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.*
*Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.*

**Exercice 1** (13 points)
On considère la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.** (7,5 points) Déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $A$ à l'aide de la méthode vue en cours et que l'on identifiera ; on détaillera les calculs et on indiquera clairement, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

**Indication.** Dans les calculs, les racines carrées se simplifient sauf $\sqrt{2}$ .

**2.** (1,5 points) Comment pourrait-on en déduire la matrice inverse de $A$, si $A$ est inversible (si tel est le cas, il n'est pas demandé de calculer la matrice inverse).

**3.** (1 point) On pose $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$. Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels. On considère la forme quadratique $Q$ définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q(X) = \frac{1}{2}\left(-x_2^2 + 7x_3^2 - x_4^2\right) + 12x_1x_3 + 2x_2x_4 + ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 .$$

Quels sont les quadruplets $(a, b, c, d)$ pour lesquels $Q$ est convexe ?

**4.** (1 point) Un élève de Télécom Paris envisage d'appliquer la méthode de Newton en partant de $X = 0$ afin de déterminer un extremum (minimum ou maximum) local de $Q(X)$ sur $\mathbf{R}^4$. Pour quels quadruplets $(a, b, c, d)$ peut-on l'encourager dans ce projet (on justifiera la réponse) ?

**5.** (2 points) Un autre élève de Télécom Paris veut annuler le gradient de $Q$.

a. Quel système linéaire doit-il résoudre pour cela (il n'est pas demandé de résoudre ce système) ?

b. Que vaut le conditionnement pour la norme 2 du système linéaire de la question précédente ?

c. Cet élève peut-il utiliser la méthode de Cholesky pour résoudre ce système linéaire (on justifiera la réponse ; si celle-ci est positive, il n'est pas demandé d'appliquer cette méthode) ?

**Exercice 2** (11 points)
On considère le problème ($P$) d'optimisation linéaire suivant :

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} x_1 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

**1.** (5 points) Résoudre ($P$) à l'aide de l'algorithme du simplexe, en appliquant le premier critère de Dantzig.
**Rappel** : le premier critère de Dantzig consiste à choisir comme variable entrante la variable hors-base pourvue du plus grand coefficient (strictement positif) dans $z$.
**2.** (2 points) Donner l'expression du problème dual de ($P$) et, à l'aide de la question 1, en donner une solution optimale ; on précisera comment on obtient cette solution optimale.
**3.** (1,5 points) Les contraintes de ($P$) sont associées à l'utilisation de ressources dont les quantités disponibles sont actuellement égales à 4, 7 et 5 respectivement. Le propriétaire de ces ressources envisage de les vendre, au moins partiellement, à un prix unitaire égal à 2 pour chaque ressource. Quelle(s) ressource(s) pourrait-on conseiller de vendre, au moins en partie ? On justifiera la réponse ; si on conseille de vendre certaines de ces ressources, il n'est pas demandé d'indiquer quelle quantité il est conseillé de vendre.
**4**. (2,5 points) La fonction objectif de ($P$) est en fait égale à $z(a) = ax_1 + 5x_2 - 4x_3$, où $a$ est un paramètre réel. À l'aide du théorème des écarts complémentaires, déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles la solution déterminée à la question 1 reste optimale.

**Exercice 3** (16 points)
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 3\exp(2y) + y - 4x\exp(y) = 2x^2 + 3e^{2y} + y - 4xe^y,$$

où e est la base des logarithmes népériens et exp la fonction exponentielle de base e.
1. (1 point) Donner l'expression du gradient et de la matrice hessienne de $f$.
2. (1,5 points) S'il en existe, donner tous les points de $\mathbf{R}^2$ constituant des minima de $f$ (on précisera pour chacun de ces points s'il s'agit d'un minimum local ou global).
3. (3,5 points) Que donne l'application de la méthode de plus grande descente à pas optimal vue en cours à partir du point (1, 0) ? Que peut-on en déduire pour le minimum de $f$ sur $\mathbf{R}^2$ ?

**Dans la suite, on se restreint au domaine réalisable $D$ défini par $-1 \leq x \leq 1{,}5$ et $y \geq 0$.**
4. (1 point) Indiquer en quels points de $D$ les contraintes sont qualifiées.
5. (2,5 points) Que donne l'application des conditions de Karush, Kuhn et Tucker au point (–1, 0) (on détaillera l'application) ?
6. (3,5 points) Appliquer la méthode de plus grande descente (admissible) à pas optimal vue en cours à partir du point (0, 0) (on détaillera les calculs ; on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions à suivre, en justifiant cependant les choix qui seront faits).
7. (3 points) On admet que la fonction $f$ est strictement convexe sur un ouvert contenant $D$ et on considère que le domaine de définition de $f$ est cet ouvert. Le point obtenu à la question précédente est-il un minimum de $f$ sur $D$ ? Si oui, on précisera s'il est local ou global et s'il est l'unique minimum (local ou global) sur $D$.