OASIS
Quiz note du 20/05/2020 pour l'eleve

Q1 : Soient les suites sur $\mathbb{Z}$ $u_0 = 2,\ u_1 = -1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 1,\ u_4 = -2$ et $v_0 = -2,\ v_1 = 2$. On note $w = u \star v$. que vaut w ?

A) $w_0 = -4,\ w_1 = 4,\ w_2 = -8,\ w_3 = 4,\ w_4 = 6,\ w_5 = -4$

B) $w_0 = 4,\ w_1 = 6,\ w_2 = -8,\ w_3 = 4,\ w_4 = 6,\ w_5 = -4$

C) $w_0 = -4,\ w_1 = 6,\ w_2 = -8,\ w_3 = 4,\ w_4 = 6,\ w_5 = -4$

D) $w_0 = -4,\ w_1 = 6,\ w_2 = -8,\ w_3 = 4,\ w_4 = -4,\ w_5 = -4$

Q2 : Soient les suites sur $\{0, \dots, 4\}$

$$u_0 = -1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 3,\ u_4 = -1$$

et

$$v_0 = 2,\ v_1 = -2,\ v_2 = 2,\ v_3 = 3,\ v_4 = 3$$

On note $w = u \star v$ (convolution **circulaire** de taille 5). Que vaut w ?

A) $w_0 = 18,\ w_1 = 20,\ w_2 = 8,\ w_3 = 1,\ w_4 = -2$

B) $w_0 = 18,\ w_1 = 20,\ w_2 = 8,\ w_3 = -4,\ w_4 = -2$

C) $w_0 = -5,\ w_1 = 2,\ w_2 = 5,\ w_3 = 3,\ w_4 = -2$

D) $w_0 = 15,\ w_1 = 20,\ w_2 = 4,\ w_3 = -4,\ w_4 = -2$

Q3 : Soit une suite u nulle hors de l'intervalle entier $[\![-2, 15]\!]$ et de formule $n \mapsto e^{2i\pi(-0.26)n}$ sur cet intervalle. Quelle est sa TFtD ?

A) $e^{-i\pi 13(\nu+0.26)} \frac{\sin(18\pi(\nu+0.26))}{\sin(\pi(\nu+0.26))}$

B) $e^{-i\pi 21(\nu+0.26)} \frac{\sin(18\pi(\nu+0.26))}{\sin(\pi(\nu+0.26))}$

C) $e^{-i\pi 31(\nu+0.26)} \frac{\sin(36\pi(\nu+0.26))}{\sin(\pi(\nu+0.26))}$

D) $e^{-i\pi 13(\nu-0.26)} \frac{\sin(18\pi(\nu-0.26))}{\sin(\pi(\nu-0.26))}$

Q4 : Une suite u inconnue entre dans un SLI dont la réponse impulsionnelle est

$$h_0 = -3,\ h_1 = 1$$

. La sortie est une suite v qui vaut

$$v_0 = -6,\ v_1 = 2,\ v_2 = 0$$

Que vaut la suite u ?

A) $u_0 = 0.0,\ u_1 = 0.0$

B) $u_0 = 2.0,\ u_1 = 0.0$

C) $u_0 = 0.0,\ u_1 = 0.0$

D) $u_0 = 0.0,\ u_1 = 0.0$

Q5 : Une suite sur $\mathbb{Z}$ a pour formule $n \mapsto e^{2i\pi(-0.5554)n}$. On en extrait les 200 échantillons entre la position 0 et la position 199. On calcule la TFD de taille 200 de ces échantillons. Pour quelle position k le maximum du module de la TFD sera-t-il atteint ?

A) $k = 0$

B) $k = 89$

C) $k = 111$

D) $k = 289$

Q6 : On dispose d'un signal obtenu par la formule $\sin(2\pi(0.07)\text{np.arange}(0, 10000, 1))$ où on rappelle que $(np.arange)(a, b, c)$ renvoie les nombres entre a et b (exclu) par pas de c.
On joue ce signal avec à une fréquence de 2000Hz. Quelle fréquence est entendu à l'oreille ?

A) 0Hz

B) 140.0Hz

C) 320.0Hz

D) 0.07Hz

Q7 : Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont la transformée de Fourier vaut

$$\hat{f}(\xi) = 1\xi$$

pour $\xi \in [-20000, 20000]$Hz. Cette fonction passe dans un filtre passe bas parfait laisse passer dans l'intervalle $[-9500, 9500]$. Ensuite elle est échantillonnée à la fréquence $Fe = 13000$Hz en une suite u. Que vaut $\hat{u}$ (c'est une fonction affine par morceaux) ?

A)

$$\hat{u}(\nu)/Fe = \begin{cases} 26000\nu + 13000 \text{ sur } [\frac{-1}{2}, \frac{-7}{26}] \\ 13000\nu + 0 \text{ sur } [\frac{-7}{26}, 0] \\ 13000\nu + 0 \text{ sur } [0, \frac{7}{26}] \\ 26000\nu + -13000 \text{ sur } [\frac{7}{26}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

B)

$$\hat{u}(\nu)/Fe = \begin{cases} 0\nu + -13000 \text{ sur } [\frac{-1}{2}, \frac{-3}{13}] \\ 13000\nu + -26000 \text{ sur } [\frac{-3}{13}, 0] \\ -13000\nu + -26000 \text{ sur } [0, \frac{3}{13}] \\ 0\nu + -13000 \text{ sur } [\frac{3}{13}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

C)

$$\hat{u}(\nu)/Fe = \begin{cases} 26000\nu + 13000 \text{ sur } [\frac{-1}{2}, \frac{-4}{13}] \\ 13000\nu + 0 \text{ sur } [\frac{-4}{13}, 0] \\ 13000\nu + 0 \text{ sur } [0, \frac{4}{13}] \\ 26000\nu + -13000 \text{ sur } [\frac{4}{13}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

D)

$$\hat{u}(\nu)/Fe = \begin{cases} 26000\nu + 13000 \text{ sur } [\frac{-1}{2}, \frac{-5}{26}] \\ 13000\nu + 0 \text{ sur } [\frac{-5}{26}, 0] \\ 13000\nu + 0 \text{ sur } [0, \frac{5}{26}] \\ 26000\nu + -13000 \text{ sur } [\frac{5}{26}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

Q8 : On se donne un filre récurssif dont l'équation de récurrence est

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = x_n - 12x_{n-1} + 36x_{n-2}$$

(entrée x et sortie y). Dire si cette équation détermine un filtre causal, anti-causal ou ni l'un ni l'autre.

A) Causal

B) Anti causal

C) Ni l'un ni l'autre

Q9 : On se donne un filre récurssif dont l'équation de récurrence est

$$4y_n - 8y_{n-1} - 5y_{n-2} = 2x_n + 9x_{n-1} - 18x_{n-2}$$

(entrée x et sortie y). Dire si cette équation détermine un filtre dont **l'inverse** est causal, anti-causal ou ni l'un ni l'autre.

A) Causal

B) Anti causal

C) Ni l'un ni l'autre

Q10 : On se donne un filre récurssif dont les pôles sont $0.9e^{i\frac{5}{6}\pi}0.9e^{-i\frac{5}{6}\pi}$ et les zéros $0.9e^{i\frac{1}{6}\pi}0.9e^{-i\frac{1}{6}\pi}$. est-il :

A) passe bas ?

B) passe bande ?

C) passe haut ?

indications :

Q1 : On rappelle la formule de la convolution

$$w_n = \sum_k u_k v_{n-k}$$

On rappelle également que pour de petites suites numériques on peut s'inspirer de l'algorithme du produit d'entiers. Ce n'est pas un hasard si la convolution de la suite $1, 1$ avec la suite $1, 2, 3$ vaut $1, 3, 5, 3$ alors que le produit de 11 par 321 est 3531.

Q2 : On rappelle la formule de la convolution circulaire de taille N

$$w_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k}$$

où le $n-k$ s'interprète modulo N ($-1 = N-1, -2 = N-2, -N+1 = 1$). On peut utiliser l'algorithme de la multiplication des entiers comme ci-dessus à condition d'ajouter les chiffres qui sont à distance N les uns des autres. Par exemple la convolution circulaire (taille 3) de $1, 1, 0$ avec $1, 2, 3$ vaut $4, 3, 5$. On part de la convolution normale (sur $\mathbb{Z}$) qui donne $1, 3, 5, 3$ et on ajoute le 1 avec le dernier 3 car ils sont à distance $N = 3$ l'un de l'autre.

Q3 : La formule de la TFtD est

$$\hat{u}(u) = \sum_n u_n e^{-2i\pi un}$$

On peut aussi noter que lorsqu'on multiplie par une onde de fréquence u_0, la TFtD est translatée : $\hat{u}(u)$ devient $\hat{u}(u - u_0)$.

Q4 : Il est clair que u est causal sinon v aurait des valeurs non nulles avant 0. On résout le système

$$h_0 u_0 = v_0$$

$$h_0 u_1 + h_1 u_0 = v_1$$

$$\dots$$

Q5 : La TFD est un échantillonnage de la TFtD de la partie de signal considérée aux points de la forme k/N. La TFtD d'un morceau d'onde est un sinus cardinal autour de la fréquence réduite de l'onde. Il faut trouver le k tel que $k/N - u$ soit le plus petit, mais comme tous les $u + n$ ($n \in \mathbb{Z}$) sont équivalents et que notre k est un entier entre 0 et $N-1$, il faut trouver n tel que $u + n$ rentre dans $[0, 1]$.

Q6 : Il faut d'abord trouver la fréquence réduite de la sinusoïde. Or si l'intervalle entier est pris de p en p, il faut intégrer le p dans la fréquence $2\pi(0, p, 2p, 3p \dots)\nu$ donne $\sin(2\pi 0\nu), \sin(2\pi p\nu), \sin(2\pi 2p\nu)$ si bien tout se passe comme si la fréquence est $p\nu$. Ensuite il faut revenir entre $-1/2$ et $1/2$.

Q7 : D'abord comme f passe par un filtre passe bas parfait on peut oublier tout ce qui se passe hors de la bande passante de ce filtre. On respire profondément. On dessine la fonction $\hat{f}$ et on applique la formule de Poisson.

$$\hat{u}(u) = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left((\nu + k)F_e\right)$$

Cette formule signifie, à part la mise à l'échelle par F_e que $\hat{u}$ est la somme de l'accumulation dans l'intervalle $[-Fe/2, F_e/2]$ de toutes les translatées de $\hat{f}$ d'un multiple entier de F_e.

Q8 : Un filtre récursif donné par une équation

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots$$

a pour fonction de transfert (le rapport entre $Y(z)$ et $X(z)$)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}$$

et on reconnait les filtres causaux au fait que tous les pôles (zéros du dénominateur) sont de module strictement plus petit que 1. Pour être anti-causal il faut et il suffit que ces modules soient strictement plus grand que 1. Enfin, si aucune des conditions n'est réalisée alors le filtre est "ni l'un ni l'autre", on dit aussi bilatère.

Il suffit donc de calculer les zéros de

$$a_0 + a_1 z^{-1} + a_1 z^{-2} + \dots$$

qui revient au même que les zéros de

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2$$

(dans le cas où il n'y a que 3 coefficients a non nuls, sinon le degré du polynôme ci-dessus augmente...)

Q9 : Un filtre récursif donné par une équation

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots$$

son filtre inverse est donné par

$$b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \dots = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots$$

(entrée x et sortie y) a pour fonction de transfert (le rapport entre $Y(z)$ et $X(z)$)

$$Hinv(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}$$

et on reconnait les filtres causaux au fait que tous les pôles (zéros du dénominateur) sont de module strictement plus petit que 1. Pour être anti-causal il faut et il suffit que ces modules soient strictement plus grand que 1. Enfin, si aucune des conditions n'est réalisée alors le filtre est "ni l'un ni l'autre", on dit aussi bilatère.

Il suffit donc de calculer les zéros de

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots$$

qui revient au même que les zéros de

$$b_0 z^2 + b_1 z + b_2$$

(dans le cas où il n'y a que 3 coefficients b non nuls, sinon le degré du polynôme ci-dessus augmente...)

Q10 : On trace les pôles et les zéros sur un graphique comprenant le cercle unité. Le cercle unité est paramétré par $e^{2i\pi u}$. Par exemple le complexe 1 correspond à la fréquence $u = 0$ et le complexe i correspond à $u = 1/4$. Si les pôles sont proches des basses fréquences alors c'est un passe bas. Encore plus fort s'il y a des zéros près des hautes fréquences. De même pour le passe haut. quand la bande passante est quelconque on parle de passe bande. Un passe bas est un passe bande dont la bande passante est autour de la fréquence $u = 0$.

Réponses : Q1(C) Q2(B) Q3(A) Q4(B) Q5(B) Q6(B) Q7(A) Q8(B) Q9(B) Q10(C)