

ELEC101 – Corrigés exos LG6 Filtrage

Ex. 1 : Temps de groupe

On désire filtrer un signal $x(t)$ à bande étroite à l'aide d'un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_0 . Au voisinage de cette pulsation, le module du filtre peut être considéré comme constant et de valeur T_0 . La phase est approchée par un développement limité au premier ordre, soit :

$$|T(j\omega)| = T_0 + \mathcal{O}(\omega - \omega_0), \quad \phi(\omega) = \phi_0 + (\omega - \omega_0) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} + o(\omega - \omega_0) \approx \phi_0 - (\omega - \omega_0) \tau_g(\omega_0)$$

1. Déterminer la forme du signal de sortie $s(t)$ lorsque $x(t)$ est un signal modulé en amplitude centré en ω_0 (porteuse) : $x(t) = a(t) e^{j\omega_0 t}$. Quel retard subit l'enveloppe $a(t)$?

Au voisinage de ω_0 , $T(j\omega) \approx |T(j\omega_0)| e^{j\phi(\omega)} \approx T_0 e^{j[\phi_0 - (\omega - \omega_0) \tau_g(\omega_0)]}$

On en déduit (pour chaque pulsation ω) : $S(j\omega) = T(j\omega) \cdot X(j\omega) \approx \{T_0 e^{j[\phi_0 + \omega_0 \tau_g(\omega_0)]}\} \cdot \{e^{-j\omega \tau_g(\omega_0)} X(j\omega)\}$

Or, on reconnaît dans le dernier terme la TF d'un signal retardé de $\tau_g(\omega_0)$, plus précisément : $x[t - \tau_g(\omega_0)]$.

D'où par TF inverse :

$$s(t) \approx T_0 e^{j[\phi_0 + \omega_0 \tau_g(\omega_0)]} a[t - \tau_g(\omega_0)] e^{j\omega_0 [t - \tau_g(\omega_0)]} = T_0 a[t - \tau_g(\omega_0)] e^{j[\phi_0 + \omega_0 t]}$$

$$\Rightarrow s(t) \approx T_0 a[t - \tau_g(\omega_0)] e^{j\omega_0 (t - \tau_{\phi 0})}$$

Avec : $\tau_{\phi 0} = -\frac{\phi_0}{\omega_0}$ (parfois un peu abusivement appelé *retard de phase*), correspondant au *déphasage* de la porteuse à la pulsation ω_0 . τ_g est appelé *temps de propagation* (ou de *retard*) de *groupe* : c'est un vrai retard du « paquet d'onde », c'est-à-dire du signal *modulant* $a(t)$ (informatif). Lorsque τ_g est constant dans la bande utile, il n'y a pas de distorsion (de phase) du signal ; τ_g est un vrai retard. Inversement, la *distorsion de phase* (dispersion) est parfois quantifiée par le *temps de groupe différentiel* : $\Delta \tau_g = \max_{f \in B} \tau_g - \min_{f \in B} \tau_g$.

Cette distorsion appartient à la catégorie des *distorsions linéaires*, qui affectent les signaux (non sinusoïdaux) occupant une certaine bande spectrale.

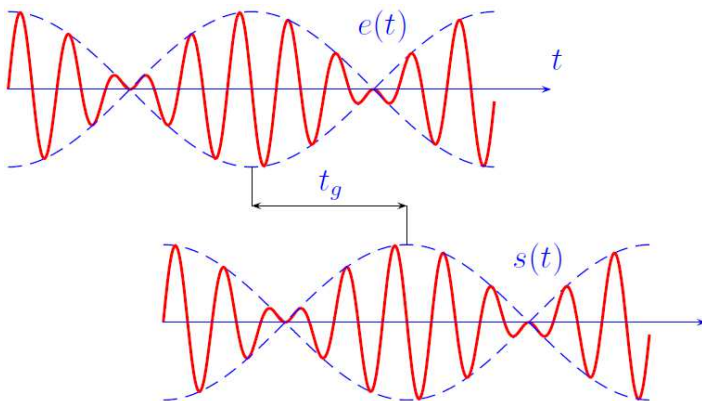
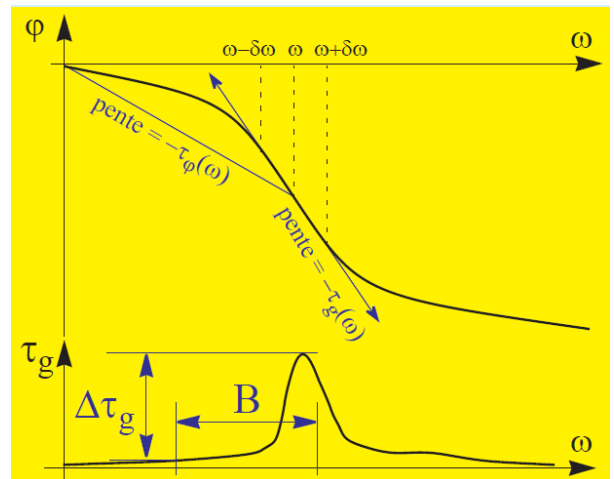
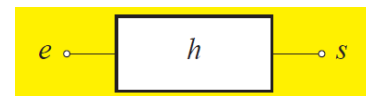
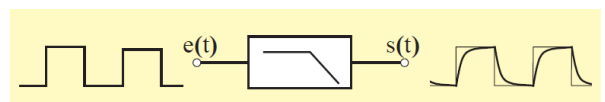


FIGURE 1.1 – Temps de propagation de groupe



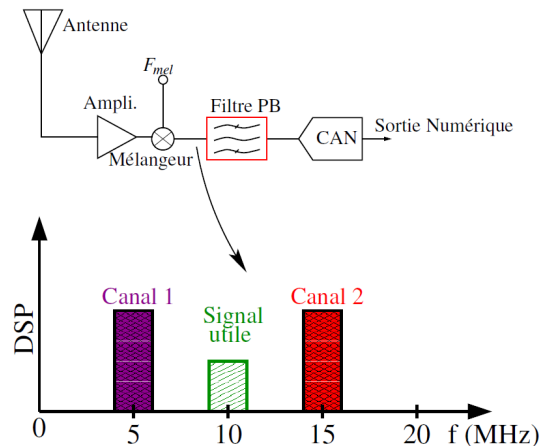
$$s = h * e$$



Ex. 2 : Filtre pour récepteur ZigBee (pour compteur communicant)

Standard ZigBee : protocole pour communications faibles débits à (très) faible consommation d'énergie → IoT...

- Trois bandes principales pour les communications ZigBee : bandes libres *ISM* centrées à 868 MHz et 2.4 GHz en Europe, et une bande à 915 MHz (continent américain et Australie).
- Canaux de transmission : bandes de 2 MHz, espacés de 5 MHz.
- Fréquence intermédiaire (FI) : 10 MHz.
- Spécification du filtre FI :
 - Approximation retenue : Butterworth (ou « hyper méplat »)
 - Réjection des canaux adjacents : atténuation supérieure à 20 dB
 - Ondulation dans la bande : inférieure à 0.5 dB



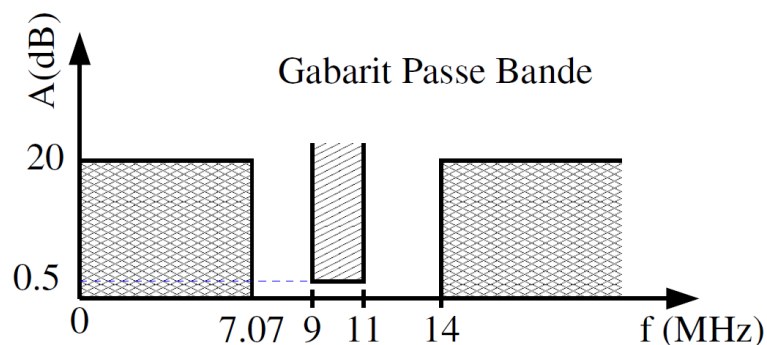
1. Parmi les canaux 1 et 2, quel serait le plus contraignant à filtrer ?

Il faut considérer les 2 cas : pour rappel, les *filtres symétriques* vérifient $f_1 \cdot f_4 = f_2 \cdot f_3$ (symétrie géométrique)

- Cas 1 : $f_1 = 6 \text{ MHz} \Rightarrow f_4 = \frac{f_2 f_3}{f_1} = \frac{9 \times 11}{6} \cong 16.5 > 15 \text{ MHz} \rightarrow \text{PAS OK}$ (insuffisant pour filtrer le canal 2)
- Cas 2 : $f_1 = 14 \text{ MHz} \Rightarrow f_1 = \frac{f_2 f_3}{f_4} = \frac{9 \times 11}{14} \cong 7.07 > 6 \text{ MHz} \rightarrow \text{OK}$ (suffisant pour filtrer le canal 1)

2. En vous basant sur la réponse de la question précédente, déterminer le gabarit du filtre passe-bande à symétrie géométrique permettant de sélectionner le canal utile.

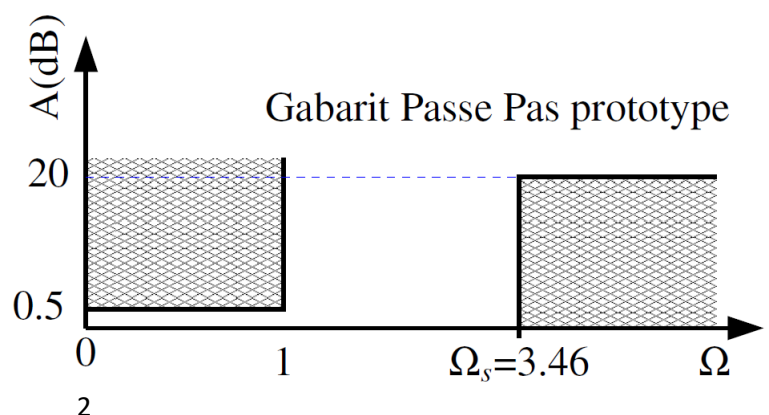
$f_1 \cong 7.07, f_2 = 9, f_3 = 11, f_4 = 14 \text{ MHz}, A_{\min} = 20 \text{ dB}$ et $A_{\max} = 0.5 \text{ dB}$, soit, graphiquement :



Rappelons qu'il est d'usage de tracer les **gabarits en atténuation** (inverse du gain, ou opposé en dB).

3. Déterminer le paramètre de sélectivité Ω_s et le gabarit prototype passe-bas.

$$\Omega_s = \frac{f_4 - f_1}{f_3 - f_2} \cong 3.465$$



4. Calculer l'ordre du filtre prototype pour une approximation (polynomiale) de Butterworth.

Pour l'approximation de Butterworth, $|T_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^{2n}} \Rightarrow \Psi_n(\Omega_s) = \Omega_s^n \geq D = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}}$, soit :

$$n \geq \frac{\log \left\{ \frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1} \right\}}{2 \log \Omega_s} \approx \frac{A_{min} - 10 \log \left(10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1 \right)}{20 \log \Omega_s} \quad (\text{si } 10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1 \gg 1)$$

A.N.: $n \geq 2.695 \Rightarrow n = 3$

Nous disposons de cellules de Butterworth de second ordre passe-bas (PL), passe-bande (PB) et passe-haut (PH).

5. Proposer un circuit d'implantation du filtre.

Le PL prototype est d'ordre 3, donc le PB correspondant est d'ordre 6. On peut donc cascader soit 3 cellules PB, soit une cellule PL, une cellule PB et une cellule PH (un PB peut être réalisé en cascade d'un PL et un PH).