MACS201a
Contrôle du 30 septembre 2020

An English version can be found starting on Page 2.
Documents autorisés : polycopié et notes de cours et TD.

Durée : 2 heures.

Préambule. Tout au long de ce sujet, Γ désigne la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \quad x > 0 \ .$$

Exercice 1. Soient X, Y et Z trois v.a. à valeurs réelles définies sur le même espace de probabilité et telles que :

a) X suit la loi uniforme sur $[0,1]$,

b) la densité conditionnelle de Y sachant X vérifie, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f^{Y|X}(y|x) = (y-x)\mathrm{e}^{-(y-x)}\mathbb{1}_{\{y>x\}} \ ,$$

c) la densité conditionnelle de Z sachant (X,Y) vérifie, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$,

$$f^{Z|(X,Y)}(z \mid (x,y)) = (y-x)\mathrm{e}^{-(y-x)z}\mathbb{1}_{\{z>0\}} \ .$$

1. Donner la densité jointe $f^{(X,Y)}$ du vecteur aléatoire (X,Y) et calculer $\mathbb{E}[\sqrt{Y-X}]$.
2. Donner la densité jointe $f^{(X,Y,Z)}$ du vecteur aléatoire (X,Y,Z).
3. Donner la densité (inconditionnelle) de Z, notée f^Z.
4. Donner la densité conditionnelle du couple (X,Y) sachant Z, notée $f^{(X,Y)|Z}$.
5. En déduire $\mathbb{E}[\sqrt{Y-X} \mid Z]$.

Exercice 2. Soient X et Y 2 v.a. indépendantes de même loi, la loi uniforme sur $[0,1]$, que l'on notera $\mathrm{Unif}([0,1])$. On pose $U = X - Y$.

6. Montrer que U est L^1 et a même loi que $-U$ et en utilisant uniquement ces deux faits, montrer que $\mathbb{E}\left[U \,|\, U^2\right] = 0$.
7. Donner la densité jointe de (X,U).
8. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant U est donnée par

$$\mathbb{P}^{X|U}(U,\cdot) = \mathrm{Unif}([U_+, 1-U_-]) \ ,$$

   où $U_+ = \max(U,0)$ et $U_- = \max(-U,0)$ sont les parties positives et négatives de U.
9. Que vaut $\mathbb{E}[X|U]$?
10. Quelle est la loi conditionnelle de U sachant U^2 ?
11. En déduire pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, une expression de $\mathbb{P}(X \in A \,|\, U^2)$. [Indication : utiliser que $\sigma(U^2) \subset \sigma(U)$]
12. En déduire que $\mathbb{P}^{X|U^2}(U^2,\cdot)$ admet pour densité

$$x \mapsto \frac{1}{2(1-|U|)}\left(\mathbb{1}_{[0,1-|U|]}(x) + \mathbb{1}_{[|U|,1]}(x)\right) \ .$$

13. En déduire $\mathbb{E}[X|U^2]$.
14. Retrouver ce résultat à partir des questions 6 et 9.

Authorized documents : lecture notes and hand-written notes of lectures and working classes.

Duration : 2 hours.

Preliminaries. All along this examination paper, we denote by Γ the function defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \quad x > 0 .$$

Exercise 1. Let X, Y and Z be three real valued r.v.'s defined on the same probability space such that :

a) X has a uniform distribution on $[0, 1]$,

b) the conditional density of Y given X satisfies, for all $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f^{Y|X}(y|x) = (y - x)\mathrm{e}^{-(y-x)} \mathbb{1}_{\{y>x\}} ,$$

c) the conditional density of Z given (X, Y) satisfies, for all $x, y \in \mathbb{R}$ such that $x < y$,

$$f^{Z|(X,Y)}(z \mid (x, y)) = (y - x)\mathrm{e}^{-(y-x)z} \mathbb{1}_{\{z>0\}} .$$

1. Determine the joint density $f^{(X,Y)}$ of the random vector (X, Y) and compute $\mathbb{E}[\sqrt{Y - X}]$.
2. Determine the joint density $f^{(X,Y,Z)}$ of the random vector (X, Y, Z).
3. Determine the (unconditional) density of Z, denoted by f^Z.
4. Determine the conditional density of (X, Y) given Z, denoted by $f^{(X,Y)|Z}$.
5. Deduce $\mathbb{E}[\sqrt{Y - X} \mid Z]$.

Exercise 2. Let X and Y be independent r.v.'s, both distributed according to the uniform distribution on $[0, 1]$, denoted by $\mathrm{Unif}([0, 1])$. Set $U = X - Y$.

6. Show that U is L^1 and has the same distribution as $-U$ and, using only these two facts, show that $\mathbb{E}\left[U \middle| U^2\right] = 0$.
7. Determine the joint density of (X, U).
8. Show that the conditional distribution of X given U satisfies

$$\mathbb{P}^{X|U}(U, \cdot) = \mathrm{Unif}([U_+, 1 - U_-]) ,$$

   where $U_+ = \max(U, 0)$ and $U_- = \max(-U, 0)$ are the positive and negative parts of U.
9. Determine $\mathbb{E}[X|U]$.
10. What is the conditional distribution of U given U^2 ?
11. Deduce, for any Borel set $A \subset \mathbb{R}$, a formula for expressing $\mathbb{P}(X \in A \mid U^2)$. [Hint : use that $\sigma(U^2) \subset \sigma(U)$]
12. Deduce that $\mathbb{P}^{X|U^2}(U^2, \cdot)$ admits the density

$$x \mapsto \frac{1}{2(1 - |U|)} \left(\mathbb{1}_{[0,1-|U|]}(x) + \mathbb{1}_{[|U|,1]}(x)\right) .$$

13. Deduce $\mathbb{E}[X|U^2]$.
14. Get the same result using Questions 6 and 9.

Corrigé

Solution de l'exercice 1 1. La densité jointe de (X, Y) s'écrit

$$(x, y) \mapsto (y-x)\mathrm{e}^{-(y-x)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{y>x\}} \ .$$

On a, en posant $y = u + x$,

$$\mathbb{E}[\sqrt{Y-X}] = \int (y-x)^{3/2}\mathrm{e}^{-(y-x)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{y>x\}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty u^{3/2}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \Gamma(5/2) \ .$$

2. La densité jointe de (X, Y, Z) s'écrit

$$(x, y, z) \mapsto (y-x)^2\mathrm{e}^{-(y-x)(1+z)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{y>x\}}\mathbb{1}_{\{z>0\}}$$

3. D'où Z a pour densité

$$\begin{aligned} f^Z(z) &= \int (y-x)^2\mathrm{e}^{-(y-x)(1+z)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{y>x\}}\mathbb{1}_{\{z>0\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \mathbb{1}_{\{z>0\}}\int u^2\mathrm{e}^{-u(1+z)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{u>0\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}u \\ &= 2(1+z)^{-3}\mathbb{1}_{\{z>0\}} \ . \end{aligned}$$

4. On en déduit que la densité conditionnelle du couple (X, Y) sachant Z a pour forme

$$f^{(X,Y)|Z}((x,y)|z) = \frac{1}{2}(1+z)^3(y-x)^2\mathrm{e}^{-(y-x)(1+z)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{y>x\}}$$

5. On a vu que $\mathbb{E}[\sqrt{Y-X}]$ est bien fini donc cette espérance conditionnelle a un sens. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sqrt{Y-X} \mid Z] &= \int \sqrt{y-x}\, f^{(X,Y)|Z}((x,y)|Z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}(1+Z)^3\int u^{5/2}\mathrm{e}^{-u(1+Z)}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{\{u>0\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}(1+Z)^{-1/2}\int_0^\infty v^{5/2}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v \\ &= \frac{\Gamma(7/2)}{2}(1+Z)^{-1/2} \ . \end{aligned}$$

où l'on a posé $y = x + u$ puis $u = v/(1+Z)$.

Solution de l'exercice 2 6. U est L^1 comme somme de 2 v.a. L^1. De plus (X, Y) a même loi que (Y, X), donc U et $-U$ ont même loi. Du coup (U, U^2) et $(-U, U^2) = (-U, (-U)^2)$ ont même loi ce qui implique $\mathbb{E}\left[U|\,U^2\right] = \mathbb{E}\left[-U|\,U^2\right]$. Donc $\mathbb{E}\left[U|\,U^2\right] = -\mathbb{E}\left[U|\,U^2\right]$, donc c'est zéro.

7. On trouve que la densité jointe de (X, U) est

$$(x, u) \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x-u) \ .$$

8. On en déduit que la densité conditionnelle de X sachant U est constante sur $[0,1]\cap[U, U+1]$ et nulle en dehors de cet intervalle. Or $U_+ = \max(U, 0)$ et $1 - U_- = \min(U+1, 1)$. D'où le résultat.

9. On a donc $\mathbb{E}[X|U] = (1 - U_- + U_+)/2 = (1+U)/2$.

10. Comme U a même loi que $-U$, on trouve facilement que (cf. exo sur la loi de X sachant $|X|$ pour X de densité symétrique) la loi conditionnelle de U sachant U^2 est donnée par

$$\mathbb{P}^{U|U^2}(U^2, \cdot) = \frac{1}{2}\delta_{-|U|} + \frac{1}{2}\delta_{|U|} ,$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x.

11. On a pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in A \,|\, U^2) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X) \,|\, U] \,|\, U^2]$$

Or d'après la question 8, on trouve

$$\mathbb{P}(X \in A \,|\, U) = \int_A \mathbb{1}_{[U_+, 1-U_-]}(x) \frac{1}{1-|U|} \mathrm{d}x .$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(X \in A \,|\, U^2) = \int_A \left(\mathbb{1}_{[0,1-|U|]}(x) + \mathbb{1}_{[|U|,1]}(x)\right) \frac{1}{2(1-|U|)} \mathrm{d}x .$$

12. Comme le résultat précédent est vrai pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, on obitent bien le résultat demandé.

13. On en déduit

$$\mathbb{E}[X|U^2] = \frac{1}{2}\left((1-|U|)/2 + (1+|U|)/2\right) = \frac{1}{2} .$$

14. Ou directement avec la question 9,

$$\mathbb{E}[X|U^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|U]|U^2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}[U|U^2] = \frac{1}{2} .$$