Département COMELEC

UE COM105

Corrigé du TD 3

1. Pour un filtre en racine de cosinus surélevé (voir en bas de la page 29 du polycopié) :

$$B = \frac{1+\rho}{2T_s} \tag{1}$$

et donc

$$T_s = \frac{1+\rho}{2B}. \tag{2}$$

2. Comme $m = \log_2(\mathcal{M})$, où $\mathcal{M}$ désigne une constellation 2^m-PAM, par la formule (2.4) dans le polycopié :

$$D_b = \frac{m}{T_s} \tag{3}$$

Avec la réponse à la question **1.**), cela implique

$$B = \frac{(1+\rho)D_b}{2m}. \tag{4}$$

Puisque m est un nombre entier et le débit binaire doit être au moins égal à D_b, cela nous amène à choisir

$$m = \left\lceil \frac{D_b}{2B}(1+\rho) \right\rceil \tag{5}$$

avec $\lceil . \rceil$ la partie entière supérieure. (Par exemple, $\lceil 3.4 \rceil = 4$; $\lceil 18.01 \rceil = 19$ et $\lceil 7.00 \rceil = 7$.)

3. Le temps d'émission d'un bit est équivalent au *temps-bit* T_b introduit dans l'équation (2.3) du polycopié. Donc, selon l'équation (2.4) du polycopié :

$$T_b = \frac{1}{D_b}. \tag{6}$$

Le temps de réception d'un bit est identique à son temps d'émission, donc toujours $T_b = 1/D_b$. Ceci implique que la puissance reçue est égale au ratio entre l'énergie reçue par bit $E_{b,\text{reçue}}$ et le temps-bit T_b, ce qui donne que

$$P_{\text{reçue}} = \frac{E_{b,\text{reçue}}}{T_b} = E_{b,\text{reçue}} \cdot D_b. \tag{7}$$

Par conséquent, avec la première équation de l'énoncé :

$$E_{b,\text{reçue}} = \frac{P_{\text{reçue}}}{D_b} = \frac{P_{\text{émise}}}{d^2 D_b}. \tag{8}$$

4. Comme décrit dans l'énoncé, la définition du RSB est bien

$$\text{RSB} = \frac{E_{b,\text{reçue}}}{N_0}. \tag{9}$$

Pour un ordre de modulation m fixe, nous devons avoir un RSB égal à $\text{RSB}_t(m)$ afin de vérifier le TEB cible de 10^{-3}. Nous avons donc besoin d'une énergie par bit reçue de

$$E_{b,\text{reçue}} = \text{RSB}_t(m) \cdot N_0 \tag{10}$$

et, en utilisant l'équation (8), d'une puissance émise de

$$P_{\text{émise}} = E_{b,\text{reçue}} \cdot d^2 D_b = \text{RSB}_t(m) \cdot N_0 d^2 D_b. \tag{11}$$

Toutes ces considérations supposent un ordre de modulation m fixe. D'après la question **2.**, m doit être au moins égal à $\left\lceil \frac{D_b}{2B}(1+\rho) \right\rceil$. On verra dans les cours suivants que la fonction $\text{RSB}_t(m)$ est croissante en m, par exemple voir la figure 2.8 dans le poly. Intuitivement cela vient du fait que le TEB d'une modulation PAM sur un canal Gaussien dépend surtout de la distance entre deux symboles de la constellation. Donc pour garder un même TEB il faut assurer la même distance entre deux points de la constellation. L'énergie et la puissance moyenne du signal augmentent donc avec l'ordre de la constellation.

Pour minimiser la puissance émise, on choisit l'ordre le plus petit qui garantit toujours le taux binaire D_b cible, donc on choisit m comme dans (5). En injectant cette valeur dans l'équation (11) nous arrivons au résultat voulu :

$$P_{\text{émise}} = \text{RSB}_t\left(\left\lceil \frac{D_b}{2B}(1+\rho) \right\rceil \right) \cdot N_0 d^2 D_b. \tag{12}$$

5. Nous allons faire le corrigé pour la première case du tableau ($D_b = 4$Mbits/s, $d = 100$m, $B = 500$kHz). Toutes les autres cases se remplissent de manière similaire.

   Etant donné les valeurs considérées, on a $m = 4$. On devra donc utiliser une 16-PAM. On sait qu'il faut $\text{RSB}_t(4) = 20\text{dB} = 100$. Comme $N_0 = 10^{-14}\text{mW/Hz} = 10^{-17}\text{J}$, on a, d'après l'équation obtenue en **4.**, $P_{\text{émise}} = 100 \times 10^{-17} \times (100)^2 \times 4.10^6\text{W} = 4.10^{-5}\text{W}$. Donc $P_{\text{émise}} = 40\mu\text{W} = 0.04\text{mW}$.

Débit	$D_b = 4$Mbits/s		$D_b = 1$Mbits/s
Distance	$d = 100$m	$d = 1000$m	$d = 1000$m
$B = 500$kHz	0.04	4	0.04
$B = 250$kHz	4	400	0.1

TABLE 1 – Valeurs de $P_{\text{émise}}$ (en mW) pour chaque configuration

6. On considère la puissance émise maximale de 2mW (c'est-à-dire, 3dBm). Cette puissance correspond à la puissance minimale émise par un téléphone mobile 2G.

Débit	$D_b = 4$Mbits/s		$D_b = 1$Mbits/s
Distance	$d = 100$m	$d = 1000$m	$d = 1000$m
$B = 500$kHz	**OUI**	**NON**	**OUI**
$B = 250$kHz	**NON**	**NON**	**OUI**

TABLE 2 – Choix admissibles : OUI/vert. Choix non-admissibles : NON/rouge

   On remarque que la puissance augmente quand la distance augmente (c'est logique), ou quand le débit requis augmente (c'est aussi logique car on a alors besoin d'une modulation à plus d'états ce qui exige un RSB plus élevé) ou quand la bande diminue (c'est encore logique mais moins directement car pour maintenir le débit, il faut augmenter le nombre de points de la constellation ce qui dégrade les performances et donc on compense en augmentant la puissance).

7. (i) Le code décrit a pour paramètres $n = 128$, $k = 64$ et $d_{\min} = 16$. Son rendement est alors

$$R = \frac{k}{n} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}. \tag{13}$$

   (ii) Avec un code correcteur d'erreur, l'équation (3) dans ce corrigé doit être modifiée comme suit :

$$D_b = \frac{m}{T_s} R, \tag{14}$$

   car le codage diminue le nombre de bits d'information par le facteur R. Par conséquent, l'équation (4) doit aussi être modifiée en :

$$B = \frac{(1+\rho) D_b}{2mR}. \tag{15}$$

Pour une largeur de bande B donnée et un taux binaire minimum requis D_b, cela implique qu'on doit choisir la taille de la constellation telle que

$$m = \left\lceil \frac{D_b}{2RB}(1+\rho) \right\rceil = \left\lceil \frac{D_b}{B}(1+\rho) \right\rceil. \tag{16}$$

(iii) On se rappelle qu'une réduction de 6 dB correspond à peu près à une division avec un facteur 4. En fait, on considère le quotient $Y = X/4$, pour un nombre réel et positif X et on l'exprime en dB :

$$10 \cdot \log_{10} Y = 10 \cdot \log_{10}(X/4) = 10 \cdot \log_{10}(X) - 10 \cdot \underbrace{\log_{10}(4)}_{\approx 0.60} \approx 10 \cdot \log_{10}(X) - 6. \tag{17}$$

Comme le codage permet de réduire le RSB requis pour atteindre une certaine probabilité d'erreur de 6 dB (donc d'un facteur 4), la puissance requise est égale à

$$P_{\text{émise}} = \frac{1}{4}\text{RSB}_t\left(\left\lceil \frac{D_b}{B}(1+\rho) \right\rceil\right) N_0 d^2 D_b, \tag{18}$$

où $\text{RSB}_t(m)$ indique toujours la même fonction que dans le cas sans codage.

(iv) Pour remplir le tableau, intéressons-nous à la case en haut à gauche. Pour atteindre le débit, il faut utiliser une 256-PAM ce qui implique une puissance émise de $1m\text{W}$ au lieu de 0.04mW dans le cas non codé. C'est donc une catastrophe ! ce code n'est pas adapté pour cette case. Intéressons-nous maintenant à la case en haut à droite. Si le code est utilisé, la constellation à employer est la 4-PAM ce qui implique en prenant en compte le gain de codage une puissance émise de 0.025mW au lieu de 0.04mW dans le cas non codé. On a alors bien un gain ! Ouf ! ! ! En fait cela est possible car le gain de codage est de 6dB alors que la perte induite par le changement de modulation (de 2-PAM à 4-PAM) est seulement de 4dB d'où un gain total de 2dB (qui correspond peu ou prou au facteur $0.04/0.025$ exprimé en décibel).

En résumé : à débit et bande de fréquence constants, introduire un code correcteur d'erreur demande d'augmenter la taille de la constellation à utiliser et cette seule modification engendre une augmentation de la puissance à l'émission. Cependant, cette augmentation de puissance est parfois contrebalancée par la réduction de puissance induite par le gain de codage. Ce gain de codage provient du fait que le codage de l'information permet, par rapport à la situation sans codage et pour une taille de constellation donnée, d'utiliser des symboles de moindre énergie (plus rapprochés de 0) sans augmenter la probabilité d'erreur.