Département COMELEC | UE COM105

Corrigé du TD 4

Exercice 1

1. Ce filtre est de Nyquist (voir la définition 2.2 à la page 35 du polycopié) puisque $g(nT_s) = 0$ pour tous les $n \neq 0$ et $g(0) \neq 0$.
2. Il faut calculer la transformée de Fourier. On peut décomposer l'intégrale de la transformée de Fourier sur les deux intervalles :

$$\begin{aligned}
G(f) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2i\pi ft}dt && (1)\\
&= \int_{t=0}^{T_s/2} \frac{1}{\sqrt{T_s}} e^{-2i\pi ft}dt - \int_{t=T_s/2}^{T_s} \frac{1}{\sqrt{T_s}} e^{-2i\pi ft}dt && (2)\\
&= -\frac{1}{2i\pi f\sqrt{T_s}} e^{-2i\pi ft}\Big|_{t=0}^{T_s/2} + \frac{1}{2i\pi f\sqrt{T_s}} e^{-2i\pi ft}\Big|_{t=T_s/2}^{T_s} && (3)\\
&= \frac{1}{2i\pi f\sqrt{T_s}}\left(1 - e^{-2i\pi fT_s/2}\right) + \frac{1}{2i\pi f\sqrt{T_s}}\left(e^{-2i\pi fT_s} - e^{-2i\pi fT_s/2}\right) && (4)\\
&= \frac{\sqrt{T_s}}{2} \cdot \frac{2}{\pi fT_s} \cdot e^{-i\pi fT_s/2} \cdot \underbrace{\frac{e^{i\pi fT_s/2} - e^{-i\pi fT_s/2}}{2i}}_{=\sin(\pi fT_s/2)} \\
&\quad + \frac{\sqrt{T_s}}{2} \cdot \frac{2}{\pi fT_s} \cdot e^{-3i\pi fT_s/2} \cdot \underbrace{\frac{e^{-i\pi fT_s/2} - e^{i\pi fT_s/2}}{2i}}_{=-\sin(\pi fT_s/2)} && (5)\\
& && (6)\\
&= \frac{\sqrt{T_s}}{2} \cdot \left(e^{-i\pi fT_s/2} - e^{-3i\pi fT_s/2}\right) \cdot \underbrace{\frac{2}{i\pi fT_s}\sin(\pi fT_s/2)}_{=\mathrm{sinc}(\pi fT_s/2)} && (7)\\
&= i\sqrt{T_s} \cdot e^{-i\pi fT_s} \cdot \underbrace{\frac{\left(e^{i\pi fT_s/2} - e^{-i\pi fT_s/2}\right)}{2i}}_{=\sin(\pi fT_s/2)} \cdot \mathrm{sinc}(\pi fT_s/2) && (8)\\
&= i\sqrt{T_s}e^{-i\pi fT_s}\sin(\pi fT_s/2)\mathrm{sinc}(\pi fT_s/2). && (9)
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient :

$$|G(f)| = \sqrt{T_s} \cdot |\sin(\pi fT_s/2)| \cdot |\mathrm{sinc}\,(\pi fT_s/2)\,|. \quad (10)$$

Si on ne prend en compte que le lobe principal, le sinus cardinal s'annule en $2/T_s$ ce qui induit une bande $B = 2/T_s$.

3. Oui, ce filtre est aussi en racine de Nyquist. Pour le montrer, nous allons calculer la convolution du filtre $g(\cdot)$ et de son filtre adpaté $g(-t)$ à toutes les instances de temps en dehors de l'intervale $]-T_s, T_s[$. Pour $|t| \geq T_s$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot g(-(t-\tau))\, d\tau &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) g(\tau - t)\, d\tau && (11)\\
&= \int_{\tau=0}^{T_s} g(\tau)\cdot g(\tau - t)\, d\tau && (12)\\
&= \int_{\tau=0}^{T_s} g(\tau)\cdot 0\, d\tau && (13)\\
&= 0, && (14)
\end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité nous avons utilisé que $g(\tau) = 0$ pour tous τ en dehors de l'intervale $[0, T_s[$, et dans la troisième égalité nous avons utilisé que $g(\tau - t) = 0$ pour tout $\tau \in [0, T_s]$ et t en dehors de l'intervale $]-T_s, T_s[$ car dans ce cas $\tau - t$ est en dehors de l'intervale $[0, T_s]$.
On note aussi que pour $t = 0$ la convolution $g(t) \star g(-t)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot g(-(0-\tau))\, d\tau &= \int_{\tau=0}^{T_s} g(\tau)\cdot g(\tau)\, d\tau && (15)\\
&= 1. && (16)
\end{aligned}$$

En résumé, la convolution $g(t) \star g(-t)$ vaut 1 pour $t = 0$ et s'annule en dehors de l'intervale $]-T_s, T_s[$. Par conséquent :

$$g(t) \star g(-t)\big|_{t=\ell T_s} = \begin{cases} 1 & \ell = 0 \\ 0 & \ell \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \end{cases} \qquad (17)$$

ce qui induit bien que ce filtre composé de $g(t)$ et de son filtre adapté est de Nyquist et donc que $g(t)$ est en racine de Nyquist.

4. On peut vérifier que les étapes (11)–(14) utilisent seulement le fait que $g(t)$ est nul en dehors de l'intervale $[0, T_s[$. De ce fait, dès qu'un filtre $g(t)$ a pour support $[0, T_s[$, il est de Nyquist et en racine de Nyquist à la fois en appliquant la démarche de preuve des questions **1.** et **3.** .

Exercice 2

1. Selon le résultat 2.9 à la page 37 du polycopié, le récepteur optimal décide

$$\hat{s}_n = \begin{cases} s^{(1)} = -\theta A & z_n \leq t^{(0)} \\ s^{(0)} = A & z_n > t^{(0)} \end{cases} \qquad (18)$$

où le seuil $t^{(0)}$ vaut :

$$t^{(0)} = \frac{s^{(0)} + s^{(1)}}{2} = \frac{(1-\theta)A}{2}. \qquad (19)$$

La région de décision du symbole $s^{(0)}$ est donc la demi-droite $]t^{(0)}, \infty)$ et la région de décision du symbole $s^{(1)}$ est la demi-droite $(-\infty, t^{(0)}]$.

2. Comme on a un bit par symbole, on a $P_b = P_e$. De plus, par définition, la probabilité d'erreur est

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(\hat{s}_n = s^{(1)} | s_n = s^{(0)}) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(\hat{s}_n = s^{(0)} | s_n = s^{(1)}) && (20)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(z_n \leq t^{(0)} | s_n = s^{(0)}) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(z_n > t^{(0)} | s_n = s^{(1)}) && (21)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Prob}((s_n + w_n) \leq t^{(0)} | s_n = s^{(0)}) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}((s_n + w_n) > t^{(0)} | s_n = s^{(1)}) && (22)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Prob}((s^{(0)} + w_n) \leq t^{(0)} | s_n = s^{(0)}) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}((s^{(1)} + w_n) > t^{(0)} | s_n = s^{(1)}) && (23)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(w_n \leq (t^{(0)} - s^{(0)}) | s_n = s^{(0)}) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(w_n > (t^{(0)} - s^{(1)}) | s_n = s^{(1)}) && (24)
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(w_n \leq (t^{(0)} - s^{(0)})) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(w_n > (t^{(0)} - s^{(1)})) \tag{25}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(w_n \leq -(1+\theta)A/2) + \frac{1}{2}\mathrm{Prob}(w_n > (1+\theta)A/2). \tag{26}$$

$$= \quad \mathrm{Prob}(w_n \geq (1+\theta)A/2), \tag{27}$$

où pour arriver à (21) nous avons utilisé l'équation (18); pour arriver à (23) nous avons utilisé que dans la première probabilité $s_n = s^{(0)}$ et dans la deuxième probabilité $s_n = s^{(1)}$; pour arriver à (25 nous avons utilisé que la variable aléatoire décrivant le bruit w_n est indépendante de la variable aléatoire décrivant le symbole s_n ; pour arriver à (27) nous avons utilisé que w_n est gaussienne et a donc une densité de probabilité qui est symétrique autour de 0.

Comme w_n est un bruit gaussien, on peut exprimer $\mathrm{Prob}(w_n \geq (1+\theta)A/2)$ en utilisant la fonction $Q(\cdot)$. On rappelle que $Q(x)$ indique la probabilité qu'une variable gaussienne de moyenne 0 et variance 1 soit plus grande que x. (Voir la définition dans l'équation (2.37) à la page 39 du polycopié.) De plus, comme w_n est gaussienne de moyenne nulle et variance $N_0/2$, la variable aléatoire $v_n := \frac{w_n}{\sqrt{N_0/2}}$ est à nouveau gaussienne de moyenne nulle et variance 1. Donc :

$$\begin{aligned} P_e &= \mathrm{Prob}(w_n \geq (1+\theta)A/2) && (28)\\ &= \mathrm{Prob}\left(\frac{w_n}{\sqrt{N_0/2}} \geq \frac{(1+\theta)A}{\sqrt{2N_0}}\right) && (29)\\ &= Q\left(\frac{(1+\theta)A}{\sqrt{2N_0}}\right). && (30) \end{aligned}$$

On trouve aussi l'énergie par symbole en appliquant la formule (2.6) à la page 29 du polycopié :

$$E_s = (|s^{(0)}|^2 + |s^{(1)}|^2)/2 = (1+\theta^2)A^2/2. \tag{31}$$

Comme il y a un bit par symbole, l'énergie par bit E_b vaut l'énergie par symbole E_s et

$$E_b = (1+\theta^2)A^2/2. \tag{32}$$

Par conséquent en réunissant les équations (30) et (32), on obtient

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{(1+\theta)^2}{1+\theta^2}\frac{E_b}{N_0}}\right). \tag{33}$$

3. et 4. C'est la valeur de θ qui maximise le terme

$$T(\theta) = \frac{(1+\theta)^2}{1+\theta^2} = 1 + \frac{2\theta}{1+\theta^2} \tag{34}$$

La dérivée de T par rapport à θ est

$$\frac{d\,T(\theta)}{d\,\theta} = 2\frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}. \tag{35}$$

Comme les valeurs extrêmes de la fonction $T(\theta)$ doivent être soit au bord du domaine soit aux endroits où la dérivée s'annule, le minimum est soit $T(0)$ soit $T(1)$. Comme $T(0) = 1$ et $T(1) = 2$, on trouve que la réponse à la question est

$$\theta_{\max} = 1 \tag{36}$$

et

$$\theta_{\min} = 0. \tag{37}$$

On note que $\theta = 1$ correspond à une 2-PAM et $\theta = 0$ à une constellation 2-*On-Off Keying (OOK)*.

La perte en RSB entre les deux constellation est

$$\frac{\frac{(1+\theta_{\min})^2}{1+\theta_{\min}^2}}{\frac{(1+\theta_{\max})^2}{1+\theta_{\max}^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{38}$$

En dB cela correspond à une perte de 3dB. En fait, on se rappelle que $10\log_{10}(1/2) = -10 \cdot 0.301 \approx -3$.

5. Evidemment en posant $A' = 2A$, on obtient la 2-OOK avec amplitude A' et non pas A. La probabilité d'erreur sera donc

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{(1+\theta_{\min})^2}{1+\theta_{\min}^2}\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right), \tag{39}$$

comme pour la 2-OOK trouvée à la partie **4.**.

Pour passer de cette 2-OOK avec amplitude $A' = 2A$ à la 2-PAM avec amplitude A il suffit de faire une translation de $-A$. Comme on l'a observé à la réponse de la partie **4.**, cette transformation induit une réduction du RSB de 3dB. La raison étant qu'une 2-OOK avec amplitude $A' = 2A$ consomme deux fois plus d'énergie par bit qu'une 2-PAM avec amplitude A.