

TD Interférences à un photon

Objectifs

- Appréhender une forme possible d'encodage d'un bit quantique (qubit) à travers l'exemple de 2 modes de propagation d'un photon
- Faire le lien entre transformations physiques appliquées à un qubit et matrices 2×2 , à partir de l'exemple de la lame semi-réfléchissante
- Appréhender la spécificité du formalisme quantique, et sa différence avec un formalisme classique probabiliste

I Photon unique dans deux modes de propagation

- On appelle Qubit (quantum bit), l'information (de type quantique donc) qui peut être encodée sur un système quantique dans un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension 2.
- On appelle communément base canonique notée $\mathcal{B}_C = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ une base **orthormale** de \mathcal{H} .

On considère un photon unique, incident suivant le mode d'entrée de vecteur d'onde \vec{k}_x (parallèle à l'axe des x) sur une lame semi-réfléchissante orientée à 45 degrés.

On identifie l'état quantique du photon en entrée : $|1 : \vec{k}_x\rangle$, “un photon dans le mode de vecteur d'onde \vec{k}_x ” au vecteur $|0\rangle$, et l'état quantique $|1 : \vec{k}_y\rangle$ au vecteur $|1\rangle$.

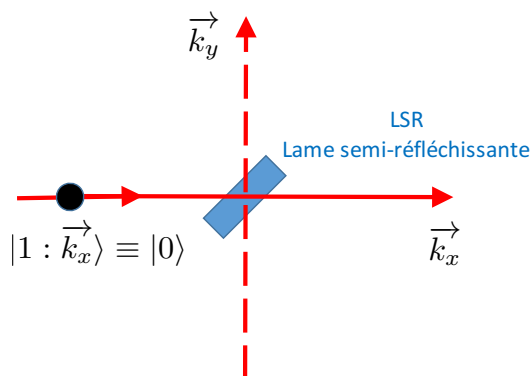


FIGURE 1 – Un photon unique est incident sur une lame semi-réfléchissante (*LSR* équilibrée).

Question 1 Quel est l'espace de Hilbert \mathcal{H} permettant de décrire l'état (d'entrée et de sortie) d'un photon ? Donnez-en une base dont on justifiera l'orthogonalité. Donnez enfin la forme générale d'un état quantique $|\psi\rangle$ de \mathcal{H} .

Réponse 1 Il s'agit de l'espace vectoriel généré par $|1 : \vec{k}_x\rangle$, et $|1 : \vec{k}_y\rangle$, i.e. par $|0\rangle$ et $|1\rangle$. $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ en constitue une base orthonormale. On peut justifier l'orthogonalité de $|0\rangle$ et $|1\rangle$ en considérant le produit scalaire $\langle 1 : \vec{k}_x | 1 : \vec{k}_y \rangle$ et en assimilant les modes de propagation à des ondes planes. Alors $\langle 1 : \vec{k}_x | 1 : \vec{k}_y \rangle = \iiint d^3r e^{-i\vec{k}_x \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k}_y \cdot \vec{r}} = \delta(\vec{k}_y - \vec{k}_x) = 0$

Question 2 Il existe des détecteurs sensibles à un photon unique (i.e. capables avec une bonne efficacité de discriminer le vide (pas de clic) et un photon unique (un clic)). Comment utiliser de tels détecteurs pour mesurer l'état du photon dans \mathcal{H} dans la base canonique ?

Réponse 2 Mesurer, dans la base canonique, l'état du qubit dans \mathcal{H} correspond à déterminer dans quelle direction se propage le photon unique, parmi les deux directions \vec{k}_x et \vec{k}_y .

La mesure est réalisée avec deux détecteurs de photons uniques D_0 ou D_1 et consiste à placer D_0 sur le trajet du mode de direction \vec{k}_x , D_1 sur celui du mode de direction \vec{k}_y , et à enregistrer lequel des deux détecteurs "clique".

L'action d'une lame semi-réfléchissante (*LSR*) sur l'amplitude du champ électrique est caractérisée par ses coefficients de transmission et réflexion $LSR = \begin{pmatrix} t_{xx} & r_{xy} \\ r_{yx} & t_{yy} \end{pmatrix}$.

On identifiera la transformation des composantes du champ électrique dans les modes \vec{k}_x et \vec{k}_y avec celles des amplitudes quantiques dans \mathcal{H} .

Question 3 Écrire la relation entre $|\psi^{in}\rangle$ et $|\psi^{out}\rangle$ décrivant l'état d'un photon respectivement avant et après la lame semi-réfléchissante *LSR*.

- (1) Traduire en une équation générale portant sur les coefficients de la matrice *LSR*, la condition de conservation de l'énergie à la traversée de la lame.
- (2) Traduire le fait que la lame *LSR* est équilibrée

Montrez finalement que la matrice de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une solution possible aux équations (1) et (2), que l'on adoptera par la suite comme matrice représentant l'action d'une lame semi-réfléchissante (*LSR*).

Réponse 3 Dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, on peut écrire, pour un état $|\psi^{in}\rangle$ quelconque :

$$|\psi^{in}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\text{ainsi on aura } |\psi^{out}\rangle = \begin{pmatrix} t_{xx} & r_{xy} \\ r_{yx} & t_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

La conservation de l'énergie implique que la fonction d'onde reste normalisée à la traversée de la lame, i.e. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$|t_{xx}\alpha + r_{xy}\beta|^2 + |r_{yx}\alpha + t_{yy}\beta|^2 = 1 \quad (1)$$

En considérant cette équation (1) pour $\alpha = 1, (\beta = 0)$, et $\beta = 1, (\alpha = 0)$ on retrouve que les colonnes de *LSR* sont des vecteurs normés.

Le fait que la lame soit équilibrée, implique en outre que

$$|t_{xx}|^2 = |t_{yy}|^2 = |r_{xy}|^2 = |r_{yx}|^2 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

La matrice H vérifie clairement (2). En outre, si on injecte les coefficients de H dans (1), on obtient $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2$ ce qui est toujours vrai quand $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Ainsi H vérifie également la condition (1).

Remarque : on pourrait montrer que toutes les matrices LSR avec

$$t_{xx} = t_{yy} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ et } 2 r_{xy} r_{yx} = -1 \text{ sont aussi des solutions, et notamment } H' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

II Un photon unique peut-il être décrit classiquement ?

On va réaliser des expériences sur un photon unique et chercher à voir si les résultats obtenus, qui sont correctement décrits par le formalisme quantique, pourrait également l'être avec un formalisme classique, probabiliste.

- Le formalisme quantique fait intervenir la fonction d'onde $|\Psi\rangle$, vecteur de l'espace de l'espace de Hilbert \mathcal{H} (superposition cohérente, avec des amplitudes complexes, d'états propres) en amont du calcul de probabilités des résultats de mesure. Ainsi, pour un qubit, on a

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Ce que l'on va appeler "formalisme classique, probabiliste", consiste à décrire l'état du photon comme une variable aléatoire sur un espace d'états propres de la mesure (ici $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) muni d'une loi de probabilités (coefficients réels positifs). Ainsi, dans ce formalisme, on représente l'état d'un photon unique sur 2 modes, par

$$\Psi^{(c,p)} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \text{ avec } p_0 \text{ et } p_1 \in \mathbb{R}^+, p_0 + p_1 = 1$$

Première expérience : On envoie un photon unique, se propageant suivant le mode \vec{k}_x sur une lame semi-sémi-réfléchissante. On mesure l'état du photon en sortie de la lame à l'aide de deux détecteurs de photons uniques placés dans les modes de sortie de la lame semi-réfléchissante.

Question 4 En utilisant le formalisme quantique, évaluer la distribution de probabilité $P(0)$ (resp $P(1)$) d'obtenir un clic sur le détecteur D_0 (resp D_1) ? Saurait-on expliquer ces résultats à l'aide d'une description "classique, probabiliste" du photon unique ?

Réponse 4 En appliquant le formalisme quantique, on peut écrire que l'état du photon après la première LSR et avant la mesure est $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

On a ainsi $P(0) = |\langle 0|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} = |\langle 1|\Psi\rangle|^2 = P(1)$. Le résultat obtenu pour chaque mesure est donc un bit aléatoire.

Il est cependant tout à fait possible d'obtenir cette statistique de résultats dans le cadre d'un formalisme classique probabiliste. Par exemple un tirage à pile ou face réalisé avec une pièce de monnaie non biaisée donnerait le même résultat. Cette première expérience pourrait donc aussi s'expliquer à l'aide d'un formalisme classique probabiliste, pour décrire le photon unique.

Deuxième expérience : On envoie un photon unique, se propageant suivant le mode \vec{k}_x sur un interféromètre de Mach-Zehnder, cf figure 2. En sortie de l'interféromètre, on réalise une mesure dans la base canonique à l'aide de deux détecteurs de photons uniques, D_0 et D_1 .

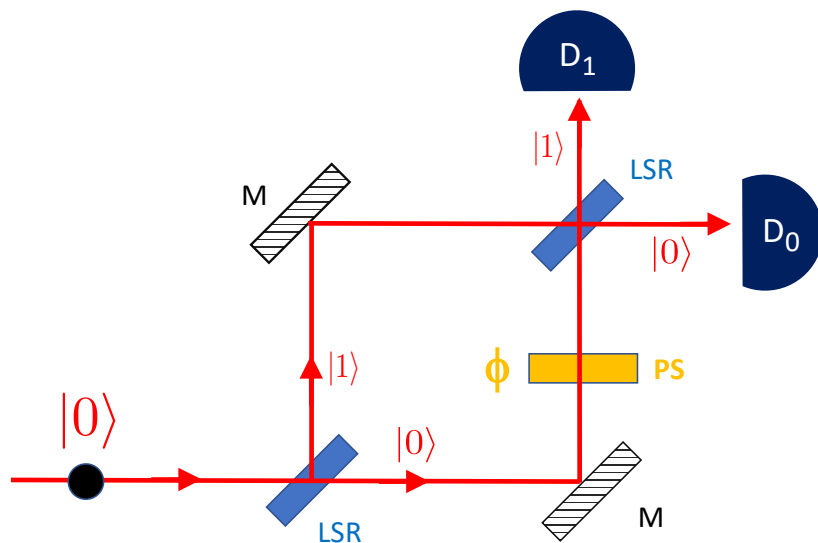


FIGURE 2 – On réalise un interféromètre de Mach-Zehnder à l'aide de deux lames semi-réfléchissantes (LSR), deux miroirs (M) parfaitement réfléchissants. une lame de phase (PS) qui entraîne un déphasage ϕ entre $|1\rangle$ et $|0\rangle$.

Question 5 On va appliquer dans cette question, le formalisme “classique, probabiliste”. Ecrire tout d’abord la matrice associée à l’action d’une lame semi-réfléchissante sur l’état $\Psi^{(c,p)}$ (en considérant un photon unique incident suivant \vec{k}_x ou \vec{k}_y). En déduire le résultat attendu pour la deuxième expérience, avec un interféromètre de Mach-Zehnder”.

Réponse 5 Dans le formalisme “classique, probabiliste”, l’état du photon est décrit par un vecteur de probabilité, à coefficients réels de la forme $\Psi^{(c,p)} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ avec $p_0 + p_1 = 1$.

L’état “1 photon dans le mode \vec{k}_x ” s’écrit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l’état “1 photon dans le mode \vec{k}_y ” s’écrit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L’action de la lame semi-réfléchissante transforme ces distributions de probabilité déterministes, en une distribution de probabilité maximale aléatoire, i.e. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. La matrice

associée à la lame semi-réfléchissante est donc $L^{(c,p)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Dans ce formalisme “classique, probabiliste” l’expérience avec l’interféromètre de Mach-Zehnder, correspond à la mise en série de deux lames semi-réfléchissantes (la lame de phase n’a pas d’effet dans ce formalisme puisque l’on considère uniquement les probabilités p_0 et p_1 sur les deux chemins).

La matrice de transition correspondante sera ainsi $L^{(c,p)} \times L^{(c,p)} = L^{(c,p)}$.

Ainsi, pour un photon initialement dans l’état $\Psi_{in}^{(c,p)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, le formalisme “classique, probabiliste” prévoit donc que l’état de sortie sera $\Psi_{out}^{(c,p)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, i.e. que le photon sort par l’un ou l’autre des deux bras de l’interféromètre, avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Question 6 On va maintenant appliquer le formalisme quantique à la deuxième expérience où un photon unique dans l’état $|0\rangle$ est incident sur l’interféromètre de Mach-Zehnder. Quelle est cette fois la distribution de probabilité $P(0)$ (resp $P(1)$) de détecter le photon avec le détecteur D_0 (resp D_1) en fonction du déphasage ϕ ?

Réponse 6 L’état du photon après la deuxième LSR et avant la mesure est

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\phi} \\ 1 - e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

On a ainsi $P(0) = |\langle 0|\Psi\rangle|^2 = \cos^2(\phi/2)$ et $P(1) = |\langle 1|\Psi\rangle|^2 = \sin^2(\phi/2)$

Le calcul fait intervenir une interférence entre les *amplitudes de probabilité* associées aux deux chemins possibles pour le photon. La distribution de probabilité des résultats de mesure dépend du déphasage ϕ , ce qui est caractéristique d’un caractère ondulatoire.

Ce résultat, obtenu à l’aide du formalisme quantique correspond bien à ce qui est observé expérimentalement. Il s’agit donc d’un comportement totalement différent de la prédiction associée au formalisme classique, probabiliste.

Question 7 A la lumière de ces deux expériences, expliquer pourquoi l’on ne peut pas décrire le photon unique à l’aide d’un formalisme classique, probabiliste.

Réponse 7 Le formalisme quantique, basé sur des amplitudes complexes de probabilité peut donner lieu à des interférences au niveau des amplitudes de probabilité et permet de rendre compte à la fois du caractère corpusculaire (expérience 1) et ondulatoire (expérience 2) du photon. On parle du phénomène de complémentarité onde - corpuscule pour les particules quantiques (vraie pour les photons, mais aussi les électrons) Ce phénomène n’a pas d’analogue classiquement. En particulier, on ne peut pas rendre compte du résultat des deux expériences en considérant que l’état du photon unique est décrit uniquement par une distribution de probabilité (à coefficients réels positifs ou nuls) sur les deux modes.

III Pour aller plus loin : Illustration expérimentale des interférences à un photon

On considère maintenant que les modes de propagation des photons uniques ont une extension spatiale Δ_y et l'on remplace la lame de phase par une série de prismes induisant un déphasage qui dépend de la position transverse y du rayon, cf figure 3 Enfin, on place une caméra C_0 , dont chaque pixel agit comme un détecteur de photon unique en lieu et place de D_0 .

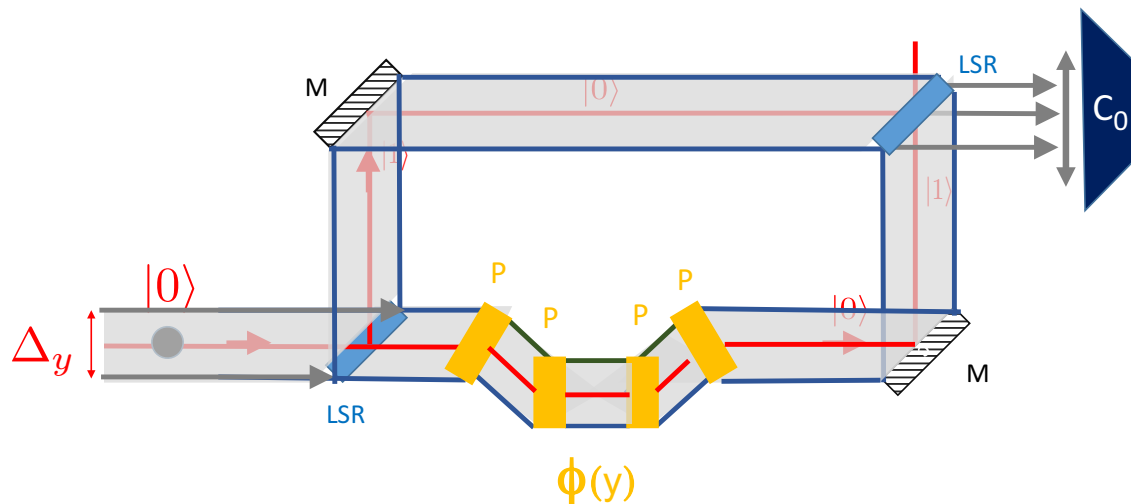


FIGURE 3 – Interféromètre de Mach-Zehnder, avec extension spatiale Δ_y des modes de propagation. On remplace la lame de phase PS de la figure 2 par une ligne à retard avec une série de prismes, induisant un déphasage $\phi(y)$ qui dépend de la position transverse y du rayon. On place de plus une caméra en lieu et place du détecteur de photon unique D_0 , une caméra CCD C_0 , dont chaque pixel fait office de détecteur de photon unique.

Question 8 Expliquez géométriquement pourquoi l'on s'attend à une modulation spatiale (avec y) de la figure d'interférences détectée sur C_0 .

Réponse 8 Les chemins optiques connaissent un déphasage qui dépend de leur position transverse y , comme illustre par les différences de chemin optique entre les rayons vert, rouge et bleu. Ainsi, en fonction de la coordonnée y sur la caméra CCD, on va avoir un déphasage qui va varier comme linéairement avec y . On va donc observer des franges d'interférences similaires à celles observées dans une expérience de type "Trous d'Young".

Question 9 Observez le film d'illustration d'une figure d'interférence construite photon par photon `fentes-young-photons.mp4` (1 minute), issue de l'expérience réalisée en 2007 [1]. A quelle condition les franges d'interférences vont-elles être suffisamment espacées pour être observables ?

Réponse 9 Les franges sont espacées de δ_y , où δ_y correspond à la variation de y nécessaire pour avoir une variation de la phase de 2π . On devra avoir $\delta_y \gg \delta_{\text{pixel}}$, où δ_{pixel} correspond à la taille d'un pixel de la caméra CCD. En pratique, on peut utiliser un montage optique, avec des lentilles, pour agrandir les dimensions transverses du faisceau avant de faire la mesure avec la caméra CCD.

IV Pour aller plus loin : Quantum Eraser (Gomme Quantique)

On considère comme point de départ une expérience d'interférences à un photon identique à celle de la Figure 2, avec une extension spatiale des modes de propagation comme aux deux questions précédentes. On suppose de plus que les photons uniques incidents sont **polarisés** suivant la direction 45 degrés.

Question 10 On place un **polariseur horizontal dans le bras x** et un **polariseur vertical dans le bras y** de l'interféromètre. On regarde la figure d'interférence sur la caméra C_0 . Que va-t-on alors observer ?

Réponse 10 On raisonne pour une valeur de y (dimension transverse du faisceau).

On a besoin de décrire l'état du photon aussi bien en terme de mode de propagation \vec{k}_x, \vec{k}_y , que d'état de polarisation, que l'on va décomposer sur la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$

En entrée de de l'interféromètre, l'état du photon est : $|\vec{k}_x, \frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}\rangle$

Après la première LSR de l'interféromètre, l'état du photon est : $\frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_x, \frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_y, \frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}\rangle$

Du fait des polariseurs, le photon est absorbé avec probabilité $\frac{1}{2}$, sur chaque bras. Quand le photon est transmis, l'état du photon (renormalisé) après les polariseurs est donc $\frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_x, |H\rangle\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_y, |V\rangle\rangle$

Il s'agit d'une superposition de deux états discernables (en polarisation), et donc qui n'interfèrent pas sur la deuxième lame. \Rightarrow Disparition des interférences.

Question 11 On place maintenant un polariseur devant C_0 que l'oriente suivant la direction 45 degrés. Que va-t-on observer sur la caméra C_0 ?

Réponse 11 On va observer une réapparition des interférences. Le photon incident sur la deuxième lame de l'interféromètre est dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_x, |H\rangle\rangle e^{i\phi(y)} + \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_y, |V\rangle\rangle$

Après la deuxième lame de l'interféromètre, la projection de l'état du photon dans le mode \vec{k}_x est $\frac{1}{2} |\vec{k}_x, |H\rangle\rangle e^{i\phi(y)} + \frac{1}{2} |\vec{k}_x, |V\rangle\rangle$

Si on place un polariseur à 45 degrés devant C_0 , le photon est absorbé avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Quand il est transmis, l'état du photon après le polariseur est donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_x, \frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}\rangle e^{i\phi(y)} + \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{k}_x, \frac{|H\rangle+|V\rangle}{\sqrt{2}}\rangle$$

On va retrouver un phénomène d'interférence avec une probabilité de clic sur la caméra (à position y fixée) en $\cos^2(\phi(y)/2)$. En revanche, la probabilité de transmission du photon (et donc le nombre de clics), est diminuée d'un facteur $2^3 = 8$ par rapport à l'interféromètre de Mach-Zehnder de la figure 3.

Références

- [1] Jacques, V., Wu, E., Grosshans, F., Treussart, F., Grangier, P., Aspect, A., Roch, J. F. (2007). Experimental realization of Wheeler's delayed-choice gedanken experiment. Science, 315(5814), 966-968.