TD intrication (leçon de groupe)

Objectifs

- Sensibiliser au caractère probabiliste de la physique quantique
- Expliquer la notion d'intrication, pour des états à deux particules
- Décrire la mesure de corrélations, la relier aux expériences sur des paires de photons polarisés

Rappels

Méthode / postulat de la mesure :
- Déterminer l'état avant mesure $|\psi\rangle$.
- Repérer une base orthonormée $\{|\varphi_i\rangle\}_{i\in\{1...n\}}$ de l'espace de Hilbert où la grandeur à mesurer est parfaitement définie. (Si on connaît l'opérateur $\hat{A}$ linéaire hermitien («observable») associé à la grandeur $\mathcal{A}$, ce sera la base de ses états propres.)
- La mesure projette le système quantique sur l'un des états propres $|\varphi_i\rangle$.
- La probabilité d'obtenir l'état propre $|\varphi_i\rangle$ à partir de l'état de départ $|\psi\rangle$ est égale à $p_i = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$.

Espérance des résultats de la mesure : $\langle\mathcal{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$.

Construction d'une observable à partir des états propres et de l'opérateur projecteur $|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ vu en TD1 :

$$\hat{A} = \sum_j a_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$$

(on vérifie bien que les $|\varphi_i\rangle$ sont états propres : $\hat{A}|\varphi_i\rangle = a_i|\varphi_i\rangle$.)

Introduction

Le formalisme de la physique quantique a suscité (et suscite toujours) des objections, notamment du fait de son caractère probabiliste. Parmi les théories alternatives, certaines reposent sur des variables cachées, afin de rétablir un caractère déterministe [1].

Historiquement ce débat a été particulièrement prégnant dans les années 30, opposant Niels Bohr, tenant de l'interprétation dite de Copenhague et Albert Einstein. Ce dernier percevait la théorie quantique comme incomplète, objectant que “Dieu ne joue pas aux dés”, et proposa, avec Podolsky et Rosen d'introduire des variables cachées, dans un célèbre article, dit EPR, datant de 1935 [2]. Dans les années 60, un mathématicien irlandais, John Bell, proposa un test explicite [3], permettant de trancher entre les prédictions de la physique quantique, et celles d'une théorie à variables cachées. L'expérience d'Aspect, Grangier, Roger, réalisée en 1981 [4], fut la première démonstration d'un test des inégalités de Bell, son résultat tranchant en faveur de la physique quantique.

Ce TD introduit les principaux éléments de ce débat scientifique, dont la notion centrale est **l'intrication**, qui constitue une ressource clé pour les technologies de la seconde révolution quantique, notamment pour les communications quantiques et le calcul quantique.

I Interprétation de la physique quantique (à 1 particule) par des variables cachées

Dans une théorie à variable cachées, on considère qu'une variable (généralement notée λ) est associée à chaque particule. Cette variable cachée λ, ainsi que sa distribution de probabilité, n'est pas accessible expérimentalement. En revanche, lorsque l'on procède à une mesure, connaissant λ et l'état quantique et la mesure effectuée, alors le résultat de la mesure est totalement déterministe.

On considère ici un photon unique dans l'état $|H\rangle$, i.e. polarisé horizontalement, dont on effectue la mesure de polarisation dans la base $B^\alpha = \{|H_\alpha\rangle, |H_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\} = \{\cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle, -\sin(\alpha)|H\rangle + \cos(\alpha)|V\rangle\}$.

Par analogie avec le spin $\frac{1}{2}$ (ou avec les paramètres de Stokes, permettant de caractériser la polarisation) , on notera $\hat{S}^\alpha$ l'observable associée à la mesure de la polarisation dans la base B^α, dont les états propres (états possibles après la mesure) sont les éléments de B^α, et les valeurs propres (les valeurs associées aux deux résultats de mesures possibles) sont $+1$ et -1 — qu'on peut écrire, en utilisant les projecteurs :

$$\hat{S}^\alpha = (+1)|H_\alpha\rangle\langle H_\alpha| + (-1)|H_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle H_{\alpha+\frac{\pi}{2}}|$$

Question 1 Écrire $\hat{S}^\alpha$ sous forme matricielle dans la base canonique B^0.

Réponse 1

$$\begin{aligned} \hat{S}^\alpha &= \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix} \qquad \text{dans la base } B^0 \end{aligned}$$

Question 2 On réalise un grand nombre de mesures de l'observable $\hat{S}^\alpha$ sur des photons uniques dans l'état $|H\rangle$. Comment procède-t-on physiquement ? Quelle sera la distribution statistique des résultats de mesure ?

Réponse 2 Comme vu dans le TD1, la mesure de l'état de polarisation d'un photon unique dans la base B^α peut s'effectuer à l'aide un prisme séparateur de polarisation (PBS) dont les axes H_α et V_α sont orientés dans les directions de polarisation à mesurer. Il est suivi de deux détecteurs de photons uniques, placés sur le chemin des deux sorties du prisme. Un résultat de mesure $+1$ ou -1 correspond ainsi à un clic du détecteur de photon unique placé sur la voie H, respectivement V en sortie du PBS.

On aura donc $Pr(+1) = |\langle H| [\cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle]|^2 = \cos^2(\alpha)$, et $Pr(-1) = \sin^2(\alpha)$

Question 3 Dans une théorie à variables cachées, on va écrire l'état du photon $|H, \lambda\rangle$.
En supposant λ distribuée uniformément sur $[0, 1]$, expliquer comment on peut "fabriquer" une opération de mesure de la polarisation dans la base B^α qui soit déterministe, locale, et qui reproduise les statistiques de la mesure, telles que prédites par la théorie quantique.

Réponse 3 On peut construire une opération de "mesure à variables cachées" de $\hat{S}^\alpha$, dépendant de α et λ, (qui sont accessibles localement lorsque la particule arrive sur le détecteur), et fonctionnant suivant le principe suivant :

- le résultat $+1$ pour $0 \leq \lambda < \cos^2\alpha$
- le résultat -1 pour $\cos^2\alpha \leq \lambda \leq 1$

II Système quantique à 2 particules, produit tensoriel

On considère maintenant un système composé de 2 photons polarisés, notés respectivement A et B. L'état de polarisation de chaque photon est toujours décrit par un vecteur d'un espace de Hilbert de dimension 2 (comme étudié dans le TD1) , que l'on notera $\mathcal{H}_A$ pour le photon A et $\mathcal{H}_B$ pour le photon B.

Le formalisme quantique postule que l'état du système à 2 photons peut être décrit par un vecteur de l'espace vectoriel *produit tensoriel* $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. L'opération de produit tensoriel est linéaire sur $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$, induisant une opération de produit tensoriel sur les opérateurs de $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$. De plus elle est distributive par rapport au produit scalaire (hermitien), i.e. :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_A \otimes (\beta_1 |\psi_1\rangle_B + \beta_2 |\psi_2\rangle_B) &= \beta_1 |\psi\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_B + \beta_2 |\psi\rangle_A \otimes |\psi_2\rangle_B \\
(\hat{O}_A \otimes \hat{O}_B)(|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B) &= (\hat{O}_A |\psi\rangle_A) \otimes (\hat{O}_B |\psi\rangle_B) \\
((\langle\phi|_A \otimes \langle\phi|_B)(|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B) &= \langle\phi|\psi\rangle_A \cdot \langle\phi|\psi\rangle_B
\end{aligned}$$

En représentation matricielle, le produit tensoriel d'une matrice A $(m\times n)$ et B est $A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$

Par commodité, on note généralement $|X\rangle_A \otimes |Y\rangle_B$ sous la forme $|X;Y\rangle$ ou $|XY\rangle$.

Question 4 Quelle est la dimension de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$? En proposer une base orthonormée.

Réponse 4 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ est de dimension 4, ce qui est logique puisque la polarisation de 2 photons a 4 degrés de liberté. La base canonique est $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$. Elle est bien orthonormée :

$$\begin{aligned}
\langle HH|HH\rangle &= ((\langle H|_A \otimes \langle H|_B)(|H\rangle_A \otimes |H\rangle_B) = \langle H|H\rangle \langle H|H\rangle = 1 \times 1 = 1 \\
\langle HH|HV\rangle &= ((\langle H|_A \otimes \langle V|_B)(|H\rangle_A \otimes |V\rangle_B) = \langle H|H\rangle \langle H|V\rangle = 1 \times 0 = 0 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Question 5 Si l'on devait généraliser à N photons, quelle serait la dimension de l'espace de Hilbert ? Comparer la taille de l'espace des paramètres nécessaires pour décrire l'état d'un tel «registre quantique» de N qubits, et d'un registre de N bits classiques.

Réponse 5

Un photon unique polarisé est décrit par un espace de dimension 2, aussi appelé bit quantique (qubit). Chaque opération ajout d'un qubit multiplie la dimension de l'espace de Hilbert par 2. Ainsi, pour un registre de N qubits, la dimension sera de dimension 2^N. Spécifier un état quantique nécessite alors 2^N nombres complexes pour le décrire. En revanche, l'état d'un système de N bits classiques, est totalement spécifié par la donnée de N nombres binaires.

III Intrication

Afin d'essayer d'améliorer l'expérience étudiée en section I et tenter de distinguer la physique quantique d'une théorie à variables cachées, nous allons considérer des états à deux photons polarisés, et en particulier l'état :

$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A \otimes |H\rangle_B + |V\rangle_A \otimes |V\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$.

Question 6 Expliquer mathématiquement, et physiquement (par une expérience) qu'il y a une différence entre cet état $|\psi_+\rangle$ et un état du type $\frac{|H\rangle_A+|V\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|H\rangle_B+|V\rangle_B}{\sqrt{2}}$.

Réponse 6 Mathématiquement,

$$\frac{|H\rangle_A + |V\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|H\rangle_B + |V\rangle_B}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle) \neq |\psi_+\rangle \, .$$

On peut aussi écrire les vecteurs dans la base canonique de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Physiquement, on peut imaginer une expérience ou l'on fait passer les photons A et B dans deux polariseurs à 45 degrés : si l'état de polarisation des deux photons est $\frac{|H\rangle_A+|V\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|H\rangle_B+|V\rangle_B}{\sqrt{2}}$, alors les deux photons traverseront les polariseurs 100 % du temps. Inversement, si les photons sont dans l'état $|\psi_+\rangle$, alors chaque photon a 1 chance sur 2 de traverser le polariseur et au final 1 chance sur 4 qu'ils traversent tous les deux.

Question 7 Montrer qu'en fait on ne peut pas mettre $|\psi_+\rangle$ sous la forme d'un produit tensoriel $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$.

Réponse 7 Par l'absurde : supposons que $|\psi_+\rangle$ puisse s'écrire comme le produit tensoriel de deux qubits $|\psi_A\rangle = a_0\,|H\rangle + a_1\,|V\rangle$, $|\psi_B\rangle = b_0\,|H\rangle + b_1\,|V\rangle$. Le produit tensoriel $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ donne $a_0b_0\,|HH\rangle + a_0b_1\,|HV\rangle + a_1b_0\,|VH\rangle + a_1b_1\,|VV\rangle$. Pour que ce vecteur soit égal à $|\psi_+\rangle$ il faut : $a_0b_1 = a_1b_0 = 0$ et $a_0b_0 = a_1b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui est impossible.

On dit que $|\psi_+\rangle$ est un **état intriqué**, par opposition aux états de la forme $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ qui sont appelés **états séparables**.

Question 8 On mesure la polarisation du photon A uniquement, dans la base B^0, en faisant intervenir l'opérateur $(\hat{S}^0)_A \otimes \mathbb{I}_B$. Quelle est la valeur moyenne de cette observable dans l'état $|\psi_+\rangle$?

Réponse 8

$$\begin{aligned}
\langle\psi_+|\Big((\hat{S}^0)_A \otimes \mathbb{I}_B\Big)|\psi_+\rangle &= \frac{1}{2}\Big\{\langle HH|\Big((\hat{S}^0)_A \otimes \mathbb{I}_B\Big)|HH\rangle + \langle HH|\Big((\hat{S}^0)_A \otimes \mathbb{I}_B\Big)|VV\rangle \\
&\qquad + \langle VV|\Big((\hat{S}^0)_A \otimes \mathbb{I}_B\Big)|HH\rangle + \langle VV|\Big((\hat{S}^0)_A \otimes \mathbb{I}_B\Big)|VV\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\langle H|_A\,(\hat{S}^0)_A\,|H\rangle_A \cdot \cancel{\langle H|H\rangle_B} + \cancel{\langle H|_A\,(\hat{S}^0)_A\,|V\rangle_A \cdot \langle H|V\rangle_B} \\
&\qquad + \cancel{\langle V|_A\,(\hat{S}^0)_A\,|H\rangle_A \cdot \langle V|H\rangle_B} + \langle V|_A\,(\hat{S}^0)_A\,|V\rangle_A \cdot \cancel{\langle V|V\rangle_B}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\langle H|_A\Big[|H\rangle\,\langle H|_A - \cancel{|V\rangle\,\langle V|_A}\Big]|H\rangle_A + \langle V|_A\Big[\cancel{|H\rangle\,\langle H|_A} - |V\rangle\,\langle V|_A\Big]|V\rangle_A\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle H|H\rangle_A\,\langle H|H\rangle_A - \langle V|V\rangle_A\,\langle V|V\rangle_A\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Interprétation : on a autant de chances de trouver chaque état de polarisation, qu'on avait fait correspondre aux valeurs $+1$ et -1, donc la valeur moyenne est bien 0.

Question 9 On considère maintenant la mesure de l'état de polarisation du photon A et du photon B, dans la base B^0, à l'aide de l'observable $(\hat{S}^0)_A \otimes (\hat{S}^0)_B$. Calculer l'espérance de cette observable et analyser ce résultat, conjugué au précédent. En quoi peut-il paraître surprenant ?

(Indice : ne pas essayer de développer le calcul, raisonner sur les résultats de mesure.)

Réponse 9

$$\langle\psi_+|\left((\hat{S}^0)_A \otimes (\hat{S}^0)_B\right)|\psi_+\rangle = \langle\psi_+|\left([|H\rangle_A \langle H|_A - |V\rangle_A \langle V|_A] \otimes [|H\rangle_B \langle H|_B - |V\rangle_B \langle V|_B]\right)|\psi_+\rangle$$

Les résultats en A et B sont parfaitement corrélés : si la mesure en A donne $+1$ (projection sur $|H\rangle_A$), alors nécessairement la mesure en B donne aussi $+1$ (état $|H\rangle_B$, et réciproquement si la mesure en A donne -1 (projection sur $|V\rangle_A$).
Donc l'espérance du résultat est $+1$.

Les corrélations portées par ψ_+ sont très spéciales : localement (en A ou en B), les résultats de mesure sont aléatoires, tandis que les corrélations entre résultats en A et B sont parfaites, y compris si A et B sont à très grande distance.
$\Rightarrow$ Piste sérieuse pour "battre" les théories à variables cachées locales. Nous allons formaliser cette intuition à l'aide des inégalités de Bell, dans la section suivante.

IV Pour aller plus loin : Inégalité de Bell et expérience CHSH

Question 10 Montrer que l'état $|\psi_+\rangle$ est invariant par rotation, c'est-à -dire qu'il s'écrit, quel que soit l'angle α sous la forme :

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H_\alpha H_\alpha\rangle + |H_{\alpha+\frac{\pi}{2}} H_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\right)$$

avec $|H_\alpha\rangle = \cos\alpha\,|H\rangle + \sin\alpha\,|V\rangle)$.
En déduire que le résultat de la question 8 reste valable quelle que soit l'orientation du polariseur A.

Réponse 10

$$\begin{aligned}|H_\alpha H_\alpha\rangle + |H_{\alpha+\frac{\pi}{2}} H_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle &= \cos^2\alpha\,|HH\rangle + \sin\alpha\cos\alpha\,|VH\rangle + \cos\alpha\sin\alpha\,|HV\rangle + \sin^2\alpha\,|VV\rangle \\ &+ \sin^2\alpha\,|HH\rangle - \sin\alpha\cos\alpha\,|HV\rangle - \cos\alpha\sin\alpha\,|VH\rangle + \cos^2\alpha\,|VV\rangle \\ &= |HH\rangle + |VV\rangle\end{aligned}$$

$|\psi_+\rangle$ est donc bien invariant par rotation, et donc par changement de base de mesure.

Question 11 On mesure maintenant la fonction de corrélation entre la mesure de la polarisation des deux photons A et B, respectivement dans les bases B^α et B^β. On fait donc en intervenir l'observable $(\hat{S}^\alpha)_A \otimes (\hat{S}^\beta)_B$.
Calculer l'espérance du résultat de la mesure de l'observable $(\hat{S}^\alpha)_A \otimes (\hat{S}^\beta)_B$ dans l'état $|\psi_+\rangle$ (montrer qu'on peut se ramener sans perte de généralité aux angles $\alpha' = 0$ et $\beta' = \beta - \alpha$.)

Réponse 11

On veut évaluer $\langle\psi_+|\,(\hat{S}^\alpha)_A \otimes (\hat{S}^\beta)_B\,|\psi_+\rangle$

On a montré question 10 que l'état $|\psi_+\rangle$ était invariant par rotation. On peut donc faire tourner tous les axes d'un angle $-\alpha$:
$\langle\psi_+|\,(\hat{S}^\alpha)_A \otimes (\hat{S}^\beta)_B\,|\psi_+\rangle = \langle\psi_+|\,(\hat{S}^0)_A \otimes (\hat{S}^{\beta-\alpha})_B\,|\psi_+\rangle = \langle\psi_+|\,(\hat{S}^0)_A \otimes (\hat{S}^{\beta'})_B\,|\psi_+\rangle$

Les états propres de l'opérateur $(\hat{S}^0)_A \otimes (\hat{S}^{\beta'})_B$ sont :
- $|H; H_{\beta'}\rangle$, valeur propre correspondante $(+1) \times (+1) = +1$,
- $|H; H_{\beta'+\frac{\pi}{2}}\rangle$, valeur propre correspondante $(+1) \times (-1) = -1$,
- $|V; H_{\beta'}\rangle$, valeur propre correspondante $(-1) \times (+1) = -1$,
- et $|V; H_{\beta'+\frac{\pi}{2}}\rangle$, valeur propre correspondante $(-1) \times (-1) = +1$,

Les composantes de $|\psi_+\rangle$ dans cette base se calculent en effectuant le produit hermitien :

$$\begin{aligned}\langle H; H_{\beta'}|\psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle H; e_{\beta'}|H; H\rangle + \cancel{\langle H; e_{\beta'}|V; V\rangle}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\langle H|H\rangle}\langle H_{\beta'}|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta'\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\langle H; H_{\beta'+\frac{\pi}{2}}|\psi_+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta'\\ \langle V; H_{\beta'}|\psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta'\\ \langle V; H_{\beta'+\frac{\pi}{2}}|\psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta'\end{aligned}$$

Au final on peut calculer l'espérance de l'observable "corrélation" $(\hat{S}^{\alpha})_A \otimes (\hat{S}^{\beta})_B$: $+1(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta')^2 + 1(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta')^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta')^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta')^2 = \cos^2(\beta') - \sin^2(\beta') \equiv \cos(2(\beta-\alpha))$.

On observe que pour $\alpha = \beta$, l'espérance est de $+1$: A et B obtiennent toujours le même résultat. Pour $\alpha - \beta = \pi/2$ l'espérance est de -1 : A et B obtiennent toujours un résultat anticorrélé.

Question 12 Inégalité de Bell. On considère deux observables, a, a', mesurables par Alice (A) sur un photon, et deux autres b, b' mesurables par Bob, B, sur le deuxième photon. On suppose de plus que ces quatre observables sont à valeurs ± 1 et *explicables par des variables cachées locales*.

On s'intéresse à la fonction de corrélation C_{CHSH} (d'après Clauser, Horne, Shimony et Holt).

$$C_{CHSH} = a.b - a.b' + a'.b + a'.b'$$

Montrer que

$$|\langle C_{CHSH}\rangle| \leq 2$$

Il s'agit de l'inégalité CHSH, qui est une forme possible d'inégalité de Bell.

Réponse 12 Tout d'abord, puisqu'on a ici des observables que l'on peut expliquer par des variables cachées locales, cela a un sens d'écrire simultanément a et a' (b et b'), puisque ces deux valeurs sont déterminées par la variable cachée (et le choix de la mesure qui peut être fait indépendamment de l'inscription la variable cachées), quand bien même on ne peut mesurer que l'un ou l'autre des observables à la fois.
On remarque de plus que $C_{CHSH} = a.(b-b') + a'.(b+b')$
Comme b et B' sont à valeurs dans ± 1, soit $b - b' = 0$, soit $b + b' = 0$
Donc $|C_{CHSH}| = 2$.
Finalement $|\langle C_{CHSH}\rangle| \leq \langle |C_{CHSH}|\rangle = 2$.
Ce résultat s'applique à toutes observables, à valeurs dans ± 1, qui dépendent d'une loi de probabilité jointe s'expliquent par des variables cachées locales.

On va maintenant étudier une expérience pour laquelle les prédictions de la physique quantique violent l'inégalité de Bell CHSH. Une telle expérience permet donc de trancher entre théorie à variables cachées locales et théorie quantique.

Expérience CHSH

- Une source S produit des paires de photons intriqués en polarisation, dans l'état $|\psi_+\rangle$
- En A, Alice mesure la polarisation d'un photon suivant la direction $a = 0$ ou $a' = \pi/4$
- En B Bob mesure la polarisation de l'autre photon suivant la direction $b = \pi/8$ ou $b' = 3\pi/8$

Question 13 On associe $\langle a.b\rangle$ à la corrélation des résultats de mesure de polarisation : $\langle\psi_+|(\hat{S}^a)_A \otimes (\hat{S}^b)_B|\psi_+\rangle$ (et similairement pour $\langle a.b'\rangle$, $\langle a'.b\rangle$, $\langle a'.b'\rangle$). Calculer le paramètre $|\langle C_{CHSH}\rangle|$ pour l'expérience CHSH.

Réponse 13 D'après la question 11, $\langle\psi_+|\,(\hat{S}^a)_A(\hat{S}^b)_B\,|\psi_+\rangle = \cos(2(b-a))$.
Ainsi on a
$\langle a.b\rangle = \cos(\pi/4)) = \sqrt{2}/2$
$\langle a.b'\rangle = \cos(3\pi/4)) = -\sqrt{2}/2$
$\langle a'.b\rangle = \cos(-\pi/4)) = \sqrt{2}/2$
$\langle a'.b'\rangle = \cos(\pi/4)) = \sqrt{2}/2$
Et donc $\langle a.b - a.b' + a'.b + a'.b'\rangle = 2\sqrt{2}$

On a ainsi démontré le théorème de Bell : les prédictions de la physique quantique sont incompatibles avec celles d'une théorie à variables cachées locales. Qui plus est, on peut faire le test expérimentalement [4], et obtenir des résultats tranchant en faveur de la physique quantique (avec un bémol cependant : notamment la possibilité d'exploiter des possibles failles expérimentales (loophole), si la condition de no-signaling entre A et S, (resp. B et S) n'est pas vérifiée, ou si il y a des pertes. Ce n'est qu'assez récemment que deux expériences de violation des inégalités de Bell, fermant ces deux loopholes, ont pu être réalisées [5, 6]

Références

[1] M. Genovese, "Research on hidden variable theories : A review of recent progresses." Physics Reports 413.6 (2005) : 319-396.

[2] A . Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?." Physical review 47.10 (1935) : 777.

[3] J.S. Bell, "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", Physics, 1, 195-200, (1964).

[4] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger. "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : a new violation of Bell's inequalities." Physical review letters 49.2 (1982) : 91.

[5] B. Hensen, et al. "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres." Nature 526.7575 (2015) : 682-686.

[6] M. Giustina, et al. "Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons." Physical review letters 115.25 (2015) : 250401.