Contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4, manuscrites ou dactylographiées.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits, ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste ; un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
Sauf mention contraire, on détaillera les calculs effectués.
Le barème (sur 40) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (15 points)

Soient α_1 et α_2 deux réels quelconques et β_1 et β_2 deux réels non nuls avec $|\beta_1| \geq |\beta_2|$. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

1. (5 points) Déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de A à l'aide de la méthode de Jacobi ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a) et on indiquera clairement, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

2. (1 point) On pose $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$. Soient a, b, c et d quatre réels. On considère la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q(X) = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_1 x_4^2\right) + \beta_1 x_1 x_4 + \beta_2 x_2 x_3 + a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4\,.$$

À quelle condition Q est-elle convexe ? strictement convexe ?

3. (4 points) On suppose que l'on a, pour $1 \leq i \leq 2$, $|\alpha_i| > |\beta_i|$ et $\alpha_i \neq 0$. Déterminer la décomposition LU de la matrice A en appliquant, à chaque itération, la stratégie du pivot partiel ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a).

4. (2 points) On considère le cas pour lequel on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Soit $X \in \mathbf{R}^4$. Résoudre le système linéaire $A.X = (0\ \ 4\ \ 5\ \ {-3})^t$ en utilisant la décomposition LU de A.

5. (3 points) On souhaite minimiser la forme quadratique Q_0 définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q_0(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4\,.$$

a. Appliquer la méthode de Newton à Q_0 en partant du point $(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^t$.

b. Le point déterminé par la méthode de Newton est-il un minimum global ? Existe-t-il d'autres points qui soient des minima (locaux ou globaux) ?

Exercice 2 (13 points)

Soient a et b deux réels. On considère le problème $(P_{a,b})$ d'optimisation linéaire suivant :

$$(P_{a,b}) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = 2x_1 - x_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} -x_2 \le -2 + a \\ x_1 \le 1 + b \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

1. (5 points) Résoudre $(P_{0,0})$ à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires (plus précisément, à l'aide de ce qui est appelé dans le polycopié la méthode à deux phases).

2. (2 points) Donner l'expression du problème dual de $(P_{0,0})$ et, à l'aide de la question 1, en donner une solution optimale.

3. (2 points) On suppose dans cette question que a et b sont suffisamment petits pour que la base optimale de $(P_{0,0})$ soit encore réalisable pour $(P_{a,b})$. Que vaut alors le maximum de $(P_{a,b})$?

4. (4 points) Soient (P) et (Π) deux problèmes mis sous forme standard :

(P) : Maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ avec, pour $1 \le i \le m$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ et, pour $1 \le j \le n$, $x_j \ge 0$.

(Π) : Maximiser $\sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j x_j$ avec, pour $1 \le i \le \mu$, $\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} x_j \le \beta_i$ et, pour $1 \le j \le \nu$, $x_j \ge 0$.

On dit que (P) et (Π) sont *de formulations identiques* si on a $n = \nu$, $m = \mu$ et, pour $1 \le j \le n$ et $1 \le i \le m$, $c_j = \gamma_j$, $a_{ij} = \alpha_{ij}$ et $b_i = \beta_i$.

Soit (P) un problème d'optimisation linéaire mis sous forme standard comme ci-dessus.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n, m, les c_j, les a_{ij} et les b_i pour que (P) soit de formulation identique à celle de son problème dual mis sous forme standard.

b. Montrer qu'alors (P) est non réalisable ou de valeur maximum nulle.

Exercice 3 (12 points)

Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \le 0 \\ 1 - x - 2y \le 0 \\ -x \le 0 \end{cases}$.

On souhaite minimiser la fonction f définie pour $(x, y) \in D$ par : $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

1. (2 points) Pour quels points de D les contraintes sont-elles qualifiées ?

2. (6 points) Appliquer au problème la méthode de plus grande descente admissible en partant du point de coordonnées (1, 1). On détaillera les calculs.

Indication : on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions suivies, mais on expliquera les choix qui seront faits.

3. (2 points) Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont-elles satisfaites par le point obtenu à la question précédente ?

4. (2 points) Le point trouvé à la question 2 est-il un minimum du problème ? Si oui, on précisera s'il s'agit d'un minimum global ou seulement local et on indiquera s'il peut en exister d'autres.