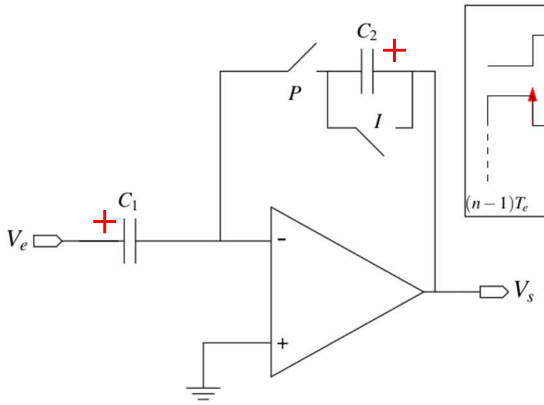
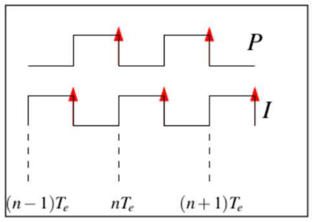
ELEC101 – Corrigés exos LG5 Capacité commutées

Ex. 1 : 1re fonction simple





1. *Déterminer la fonction de transfert en $\mathcal{Z}$ du circuit.*

   Pour déterminer la fonction de transfert du montage, commençons d'abord par choisir les armatures positives des capacités C_1 et C_2. On rappelle que ce choix est complètement arbitraire mais bien évidement doit rester inchangé pour toute l'analyse.

   Mon conseil : choisir les « signes + » (resp. –) « du même côté des capacités ». Nous ferons le choix de prendre les armatures positives à l'opposé de la masse virtuelle, c'est-à-dire à gauche pour C_1 et à droite pour C_2.

   Ensuite calculons les charges de C_1 et C_2 aux instants pairs nT_e et impairs $(n–1/2)T_e$.

   - *Aux instant Pairs*, l'armature positive de C_1 est connectée à V_e et son armature négative est connectée à l'entrée négative de l'amplificateur opérationnel qui a le même potentiel que l'entrée positive et donc de la masse, soit :

   $$Q_1^{\mathrm{P}}(nT_e) = C_1[V_e(nT_e) - 0] = C_1V_e(nT_e)$$

     Même raisonnement pour C_2 dont l'armature positive est connectée à V_s et l'armature négative connectée à l'entrée négative de l'amplificateur opérationnel, soit :

   $$Q_2^{\mathrm{P}}(nT_e) = C_2V_s(nT_e)$$

   - *Aux instant Impairs*, pour C_1 les connections ne changent pas donc :

   $$Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = C_1V_e\{(n-1/2)T_e\}$$

     En revanche C_2 est court-circuitée, la tension entre ses 2 armatures est donc nulle, soit :

   $$Q_2^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = 0$$

   - Passons à présent à *la conservation de la charge* pendant la *phase paire*, donc entre $(n-1/2)T_e$ *et* nT_e ; les armatures négatives de C_1 et C_2 forment un contour fermé et sont donc isolées. En d'autres termes, toute charge sortant de l'armature négative de C_1 sera forcément recueillie par C_2 et vice versa car l'amplificateur opérationnel a une impédance d'entrée infinie. Ainsi leur charge globale se conserve sur cette phase, ceci se traduit par :

   $$-Q_1^{\mathrm{P}}(nT_e) - Q_2^{\mathrm{P}}(nT_e) = -Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} - Q_2^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\}$$

   - Pendant la *phase impaire* comprise entre $(n-1)T_e$ et $(n-1/2)T_e$, C_1 est isolée car son armature négative n'est connectée qu'à des impédances infinies (entrée amplificateur opérationnel et interrupteur P ouvert) et donc ceci se traduit par :

   $$Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = Q_1^{\mathrm{P}}\{(n-1)T_e\}$$

   - Finalement, en remplaçant par les charges obtenues précédemment, la conservation pendant la phase paire nous donne :

   $$C_1V_e(nT_e) + C_2V_s(nT_e) = C_1V_e\{(n-1/2)T_e\}$$

Celle de la phase impaire nous donne : $C_1 V_e\{(n-1/2)T_e\} = C_1 V_e\{(n-1)T_e\}$

En combinant les 2 équations, on obtient : $V_s(nT_e) = \frac{C_1}{C_2}[V_e\{(n-1)T_e\} - V_e(nT_e)]$

- En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$, il vient : $V_s(z) = \frac{C_1}{C_2}(1 - z^{-1})$

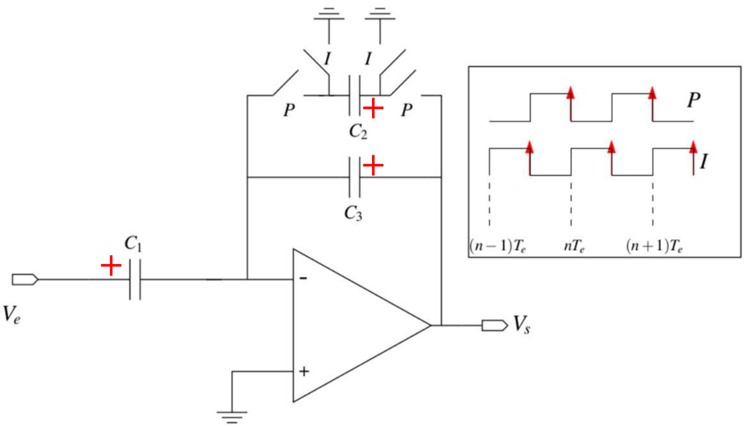
2. *Quelle est la fonction réalisée par le montage ?*

   La fonction réalisée par le montage est un dérivateur (cf. éq. temporelle ≡ taux d'accroissement).

3. *Proposer une implémentation temps continu équivalente à ce montage dans laquelle vous remplacerez les commutateurs et capacité(s) par des résistances dont vous déterminerez les expressions.*

   Les 2 commutateurs et la capacité C_2 émule le fonctionnement d'une résistance de valeur $\frac{T_e}{C_2}$

Ex. 2 : Filtrage



L'entrée est bloquée sur les instants pairs, ce qui se traduit par : $V_e\{(n-1/2)T_e\} = V_e\{(n-1)T_e\}$

1. *Déterminer la fonction de transfert du circuit* $H(z) = \frac{V_s(z)}{V_e(z)}$

   Choix des armatures positives : A l'opposé de la masse virtuelle de l'amplificateur.

   - Calcul des charges *aux instant Pairs* :

     $Q_1^{\mathrm{P}}(nT_e) = C_1 V_e(nT_e)$

     $Q_2^{\mathrm{P}}(nT_e) = C_2 V_s(nT_e)$

     $Q_3^{\mathrm{P}}(nT_e) = C_3 V_s(nT_e)$

   - *Aux instant Impairs* :

     $Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = C_1 V_e\{(n-1/2)T_e\}$, $\;Q_2^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = 0$, $\;Q_3^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = C_3 V_s\{(n-1/2)T_e\}$

   - Conservation des charges :
     Pendant la phase paire, les armatures négatives de C_1 et C_2 et C_3 sont isolées, donc :
     $-Q_1^{\mathrm{P}}(nT_e) - Q_2^{\mathrm{P}}(nT_e) - Q_3^{\mathrm{P}}(nT_e) = -Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} - Q_2^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} - Q_3^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\}$

     Pendant la phase impaire, est C_2 court-circuitée ; la conservation se fait sur les armatures négatives de C_1 et C_3, soit :
     $-Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} - Q_3^{\mathrm{I}}\{(n-1/2)T_e\} = -Q_1^{\mathrm{I}}\{(n-1)T_e\} - Q_3^{\mathrm{I}}\{(n-1)T_e\}$

   - On en déduit :
     Phase P : $C_1 V_e(nT_e) + C_2 V_s(nT_e) + C_3 V_s(nT_e) = C_1 V_e\{(n-1/2)T_e\} + C_3 V_s\{(n-1/2)T_e\}$

     Phase I : $C_1 V_e\{(n-1/2)T_e\} + C_3 V_s\{(n-1/2)T_e\} = C_1 V_e\{(n-1)T_e\} + C_3 V_s\{(n-1)T_e\}$

   - Finalement, en tenant compte de $V_e\{(n-1/2)T_e\} = V_e\{(n-1)T_e\}$ (blocage de l'entrée sur les instants P), il vient :

     $$V_s(nT_e) = \frac{C_1}{C_2 + C_3}[V_e\{(n-1)T_e\} - V_e(nT_e)] + \frac{C_3}{C_2 + C_3} V_s\{(n-1)T_e\}$$

   - En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$, il vient : $H(z) = -C_1 \frac{1 - z^{-1}}{C_2 + C_3 - C_3 z^{-1}}$

2. *Démontrer que la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel peut s'exprimer sous la forme ci-dessous pour* $C_1 = C_3$ *et* $\omega \ll \frac{1}{T_e}$. *Déterminer l'expression de* ω_c.

$$H(j\omega) \cong -\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

La réponse en fréquence s'obtient en parcourant le cercle unité, soit en posant $z = e^{j\omega T_e}$, d'où pour $\omega T_e \ll 1$:

$$H(j\omega) = -C_1 \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{C_2 + C_3 - C_3 e^{-j\omega T_e}} \approx -C_1 \frac{j\omega T_e}{C_2 + j\omega C_1 T_e} = -\frac{j\omega\left(\frac{C_1}{C_2}T_e\right)}{1 + j\omega\left(\frac{C_1}{C_2}T_e\right)}$$

Par identification : $\omega_c = \frac{C_2}{C_1}T_e$

3. *Tracer le diagramme de Bode du module et de la phase de* $H(j\omega)$. *Quelle est la fonction réalisée par le circuit?*

La fonction a un zéro à $\omega = 0$ et un pôle à $\omega = \omega_c$. La fonction réalisée est donc un filtre passe haut de diagramme de Bode asymptotique ci-dessous (pente initiale « +1 » (20 dB/dec), puis cassure à ω_c, et pente « $+1 - 1 = 0$ »). Rappel : $|H|_{dB} = 20\log|H|$ (car H est ici un gain en tension, et non en puissance !).
Remarque : la phase initiale est de $-\frac{\pi}{2}$ car $H(j\omega) \approx -j\frac{\omega}{\omega_c}$ quand $\omega \to 0$.

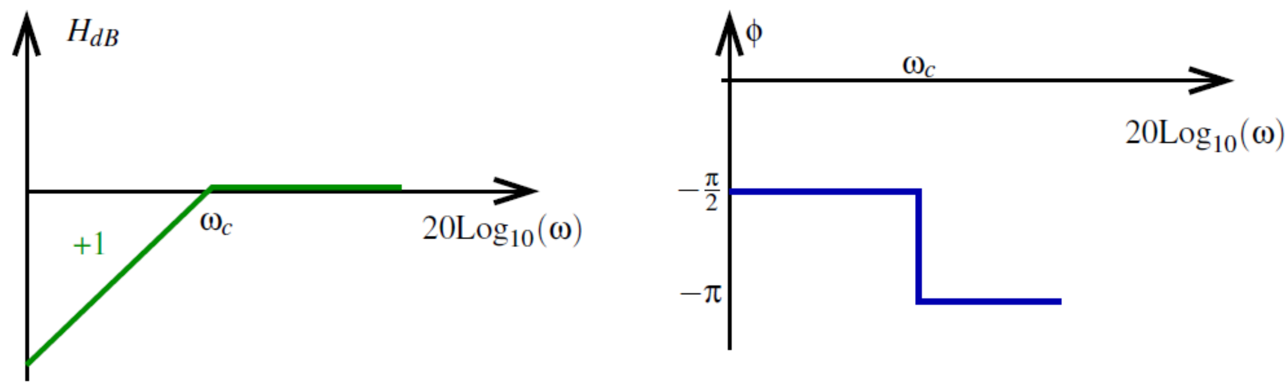


FIGURE 8.7 – Diagramme de Bode de $H(j\omega)$