TP TSIA

CAPITAN

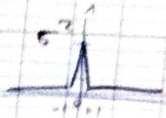
Guillaume

Exercise 1 :

① White noise Z_t with variance σ^2 ?

Theoretically, $\gamma_Z(t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{if } t=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Graphically, it converges towards that same dirac :



Proof: by definition (of a WN)

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \begin{cases} 0 & \text{for } s \neq t \\ \gamma_X(0) = \sigma^2 & \text{for } s = t \end{cases}$$

② AR(1) process with coefficient $\phi \in]-1;1[$.

Theoretically : pour $s < t$, (dans $\mathbb{Z}$) $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{Cov}(X_s, \varphi X_{t-1} + Z_t)$

$$= \varphi\, \mathrm{Cov}(X_s, X_{t-1}) + \underbrace{\cancel{\mathrm{Cov}(X_s, Z_t)}}_{0 \text{ par indépendance}}$$

$$= \dots$$

$$= \varphi^{t-s}\, \mathrm{Cov}(X_s, X_s) \Rightarrow \text{pour } h>0, \ \boxed{\gamma_X(h) = \varphi^h \gamma_X(0)}$$

de même, en raisonnant sur $t > s$, on trouve pour $h < 0$: $\boxed{\gamma_X(-h) = \varphi^{-h}\gamma_X(0)}$

Ce qui peut être réécrit, $\forall h$, $\gamma_X(h) = \varphi^{|h|}\gamma_X(0)$

Maintenant pour $\gamma_X(0)$: $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \gamma_X(0)$

$$\mathbb{E}[(\varphi X_0)^2 + 2\varphi X_0 Z_1 + Z_1^2] = \varphi^2\mathbb{E}[X_0^2] + 0 + 1$$

$\varphi^2\mathbb{E}[X_0^2] \to \varphi^2\gamma_X(0)$; 0 : par indépendance ; 1 : $= \sigma_Z^2$ in general, par déf de (Z_t) (cf cadre)

donc $\gamma_X(0) = \dfrac{1}{1-\varphi^2}$ et donc $\forall h$ $\boxed{\gamma_X(h) = \dfrac{\varphi^{|h|}}{1-\varphi^2}}$

Graphically, we get the symmetric geometric descent just like we expected:

(3) $X_t = A_0 \cos(\lambda_0 t + \phi_0) + Z_t$ where $\lambda \in [0, \pi[$
and $\phi_0 \sim \mathcal{U}[0, 2\pi] \perp\!\!\!\perp Z_t$

Theoretically : $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}(A_0 \cos(\lambda_0 t + \phi_0) + Z_t \,,\, A_0 \cos(\lambda_0 s + \phi_0) + Z_s)$
(s, t dans $\mathbb{Z}$)

they are $\perp\!\!\!\perp$ (=0)

$$= A_0^2 \mathrm{cov}(\cos(\lambda_0 t + \phi_0), \cos(\lambda_0 s + \phi_0)) + \cancel{\mathrm{cov}(Z_t, A_0 \cos(\lambda_0 s + \phi_0))}$$
$$+ \underbrace{\cancel{\mathrm{cov}(A_0 \cos(\lambda_0 t + \phi_0), Z_s)}}_{0 \text{ bcs } \phi_0 \perp\!\!\!\perp Z_s} + \mathrm{cov}(Z_t, Z_s)$$

$(\sigma_Z^2 = 1)$

$$= A_0^2 \mathrm{cov}(\cos(\lambda_0 t + \phi_0), \cos(\lambda_0 s + \phi_0)) + \delta_{\{t=s\}}$$

or $\mathrm{Cov}(\cos(\lambda_0 t + \phi_0), \cos(\lambda_0 s + \phi_0))$
$$= \mathbb{E}[\cos(\lambda_0 t + \phi_0) \cos(\lambda_0 s + \phi_0)]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{\cos(\lambda_0(t+s) + 2\phi_0) + \cos(\lambda_0(t-s))}{2}\right] = \frac{\cancelto{0}{\mathbb{E}[\cos(\lambda_0(t+s) + 2\phi_0)]}}{2} + \frac{\cos(\lambda_0(t-s))}{2}$$

formule trigo
sur $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

plus de variable aléatoire, constant / $\mathbb{E}$.

La moyenne d'un cosinus est nulle sur $[0; 2\pi]$,
le $\phi_0 \sim \mathcal{U}[0; 2\pi]$ annule ce terme.
(même avec le déphasage en $\lambda_0(t+s)$)

d'où $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \dfrac{A_0^2}{2} \cos(\lambda_0(t-s)) + \delta_{\{t=s\}}$

ie $$\boxed{\gamma_X(h) = \frac{A_0^2 \cos(\lambda_0 h)}{2} + \delta_0}$$

Graphically : We see the cosine with the coeff A_0 set to 1, as well as a spike at $h=0$ caused by the δ_0 term.

Exercise 2 :

$\boxed{Q1}$ $$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-n+1}^{n-1} \hat{\gamma}_n(h) e^{-i\lambda h}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}_n(|h|) e^{-i\lambda h}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1-|h|} (X_t - \hat{\mu}_n)(X_{t+|h|} - \hat{\mu}_n) \right] e^{-i\lambda h}$$

Sommes finies $\rightarrow$ $$= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{h=-(n-1)+t}^{(n-1)-t} (X_t - \hat{\mu}_n)(X_{t+|h|} - \hat{\mu}_n) e^{-i\lambda h}$$

on divise :
$k = t + |h|$
si $h \geq 0$ d'un côté
si $h < 0$ de l'autre

$$= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \hat{\mu}_n) \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (X_k - \hat{\mu}_n) e^{-i(k-t)\lambda}}_{h \geq 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (X_k - \hat{\mu}_n) e^{-i(t-k)\lambda}}_{h<0} \right]$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (X_k - \hat{\mu}_n) e^{-ik\lambda} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \hat{\mu}_n) e^{it\lambda} + \sum_{k=1}^{n-1} (X_k - \hat{\mu}_n) e^{ki\lambda} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \hat{\mu}_n) e^{-it\lambda} \right]$$

not sure $$\left(= \frac{1}{2\pi n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (X_k - \hat{\mu}_n) e^{-ik\lambda} \sum_{t=-(n-1)}^{0} (X_{|t|} - \hat{\mu}_n) e^{-i\lambda t} + \sum_{k=-(n-1)}^{-1} (X_{|k|} - \hat{\mu}_n) e^{-ik\lambda} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \hat{\mu}_n) e^{-it\lambda} \right. \right.$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (X_k - \hat{\mu}_n) e^{-i\lambda k} \right.}\ \text{DTFT}$$

then $I_n(\lambda) = \frac{1}{2n\pi}\Big(\Big[\mathrm{DTFT}\big[(X_t - \hat{\mu}_n)\ i\,\mathrm{DTFT}(X_t - \hat{\mu}_n)\big]$

$+ \mathrm{DTFT}\big[(X_t - \hat{\mu}_n)\,(\lambda\ \mathrm{DTFT}(X_t - \hat{\mu}_n) - (X_0 - \hat{\mu}_n)\big)\Big)$

Q2) Done but no time to send graphs it's 13:57

Q3) We use the iFFT with $m = 2n - 1$

Exercice 3 :

(1) Soit $h \geq 1$. Comme (X_t) et (Z_t) sont de moyenne nulle,

$$\mathbb{E}[X_{t-h} Z_t] = \mathrm{Cov}(X_{t-h}, Z_t).$$

de plus, comme $h > 0$, l'expression de X_{t-h} ne fait pas intervenir Z_t.
et donc, (Z_t) étant un bruit blanc, tous les $\mathrm{Cov}(X_{t-h}, Z_t)$ sont nuls.
puisque $\gamma_Z(h) = 0$ pour $h \neq 0$. (il n'y a jamais de $\gamma_Z(0)$)

On peut aussi le voir par récurrence sur h : $\mathbb{E}[X_{t-1} Z_t] = 0$
clairement (cf AR(1)) et les $h > 1$ s'ensuivent par hérédité tout aussi clairement.

(2) En utilisant la question précédente, et l'équation de récurrence de l'AR(p) :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \quad (*)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_t X_{t-h}] = \phi_1 \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-h}] + \dots + \phi_p \mathbb{E}[X_{t-p} X_{t-h}] + \mathbb{E}[Z_t X_{t-h}]$$

$\forall h \geq 1$

$$= \boxed{\gamma(h) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(h-i)} + 0$$

par la q° (1) puisque $h \geq 1$

La même chose sur (*) en multipliant par X_t et en prenant l'espérance pour faire apparaître la cov:

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathbb{E}[X_{t-i} X_t] + \underbrace{\mathbb{E}[X_t Z_t]}_{\text{par } (*)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma_x(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma_x(-i) + \mathbb{E}\left[Z_t\left[\sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + Z_t\right]\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma_x(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma_x(-i) + \mathbb{E}[Z_t^2] + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \underbrace{\mathbb{E}[Z_t X_{t-i}]}_{0 \text{ par la Q1 } (i \geq 1)}$$

d'où $\boxed{\gamma_x(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma_x(-i) + \sigma_z^2}$

et d'où la Toeplitz Matrix: [la première ligne est donnée par $\gamma_x(0) - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma_x(-i) = \sigma^2$
et la deuxième par la relation $\gamma(h) - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(h-i) = 0$]

$$\boxed{\Gamma_{p+1} = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \gamma(-p) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma(p) & \gamma(p-1) & \cdots & \gamma(0) \end{bmatrix}}$$

(not enough time to show results/code.)