ELEC101 – Corrigés exos LG1 Laplace

Ex. 1 : Transformée de Laplace

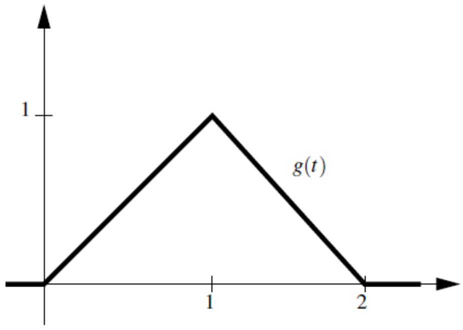


FIGURE 1.1 – Fonction $g(t)$

1. *Exprimer g(t)*

La fonction indicatrice de l'intervalle $[t_1,t_2]$ est donné par :
$\mathbb{1}_{[t_1,t_2]}(t) = \Upsilon(t-t_1) - \Upsilon(t-t_2)$, Υ étant l'échelon de Heaviside.
$g(t) = t\,\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + (t-2)\mathbb{1}_{[1,2]}(t)$ (évident)
$= t[\Upsilon(t) - \Upsilon(t-1)] - (t-2)[\Upsilon(t-1) - \Upsilon(t-2)]$
$= t\Upsilon(t) - 2(t-1)\Upsilon(t-1) + (t-2)\Upsilon(t-2)$, CQFD.

2. *Calculer la transformée de Laplace G(p) de g(t)*

La TL $R(\text{p})$ d'une « rampe » $r(t) = t\Upsilon(t) = \int_0^t \Upsilon(\tau)d\tau$ est telle que :

$$r(t) = \int_0^t \Upsilon(\tau)d\tau \implies R(\text{p}) = \mathcal{L}\{r(t)\}(p) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \Upsilon(\tau)d\tau\right\}(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{\Upsilon(t)\}(p) = \frac{1}{p^2}$$

De plus : $\mathcal{L}\{\delta_\tau\}(p) = e^{-\tau p}$

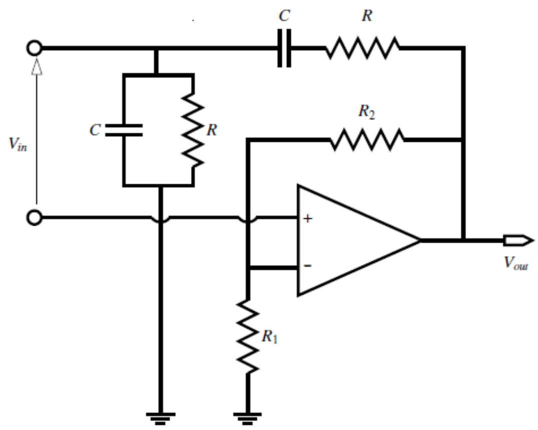
d'où : $G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\}(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2}$, CQFD. Rmq. : les temps sont supposés normalisés ici.

3. *En déduire sa transformée de Fourier G(jω)*

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} + 2\frac{e^{-j\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-2j\omega}}{\omega^2} = -\frac{1}{\omega^2}\{1 - 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\} = -\frac{\left(1-e^{-j\omega}\right)^2}{\omega^2}$$
$$= -\frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}\left(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)^2 = e^{-j\omega}\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

CQFD.

Ex. 2 : Fonction de transfert d'un filtre sélectif



On donne : $F(p) = \frac{-a(\tau^2p^2 + 3\tau p + 1)}{\tau^2p^2 + (3-a)\tau p + 1}$, $a = 1 + \frac{R_2}{R_1}$, $\tau = RC$

1. A quelle condition sur a le système est-il stable ?

$\tau^2p^2 + (3-a)\tau p + 1 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{(a-3)\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2\tau^2}$,
$\Delta = [(3-a)^2 - 4]\tau^2$:
$a \geq 1 \implies (3-a) \in\,]-\infty, 2]$

- $\Delta \leq 0 \implies p_{1,2} = \alpha + j\omega,\ \alpha = a - 3 \implies 1 \leq a \leq 3$
- $\Delta > 0 \implies (3-a)^2 > 4 \implies a - 3 > 2$ (ou $a \leq 1$, mais impossible) $\implies a > 5$ et $\sqrt{\Delta} < a - 3$
  Donc $\Re e(p_{1,2}) > 0$ ($\implies$ instable)

Conclusion : stabilité au sens large $\rightarrow 1 \leq a \leq 3$, stabilité au sens strict $\rightarrow 1 \leq a < 3$ ($a = 3 \implies \Re e(p_k) = 0$).

2. *Calculer les zéros $z_{1,2}$ de F(p) en fonction de τ et expliciter F(p) en fonction de $\tau_{1,2} = -\frac{1}{z_{1,2}}$*

Les zéros de la TF sont donnés par : $z_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2\tau}$, d'où : $\tau_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\tau \cong 2.6\tau$ et $\tau_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\tau \cong 0.4\tau$
D'où : $F(p) = \frac{-a(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{\tau^2p^2+(3-a)\tau p+1} = \frac{-a(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{\tau^2p^2+\varepsilon\tau p+1}$, avec $\varepsilon = (3-a)$

3. *Tracer le diagramme asymptotique de Bode de F* : $|F(p = j\omega)|_{dB}$ *et* $\Phi\{F(p = j\omega)\}$ *ainsi que l'allure de la courbe réelle dans le cas où a* = 1.

Pour $a = 1$, $F(p) = \frac{-(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{(1+\tau p)^2} \quad \Rightarrow \quad |F(j\omega)|^2 = \frac{(1+\omega^2\tau_1^2)(1+\omega^2\tau_2^2)}{(1+\omega^2\tau^2)^2}$

On a donc un pôle double $p_0 = \frac{-1}{\tau} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\tau}$. On a de plus $\tau_1\tau_2 = \tau^2 \Rightarrow \omega_1\omega_2 = \omega_0^2$

Rappel : $|F(j\omega)|_{dB} = 10\log|F(j\omega)|^2$

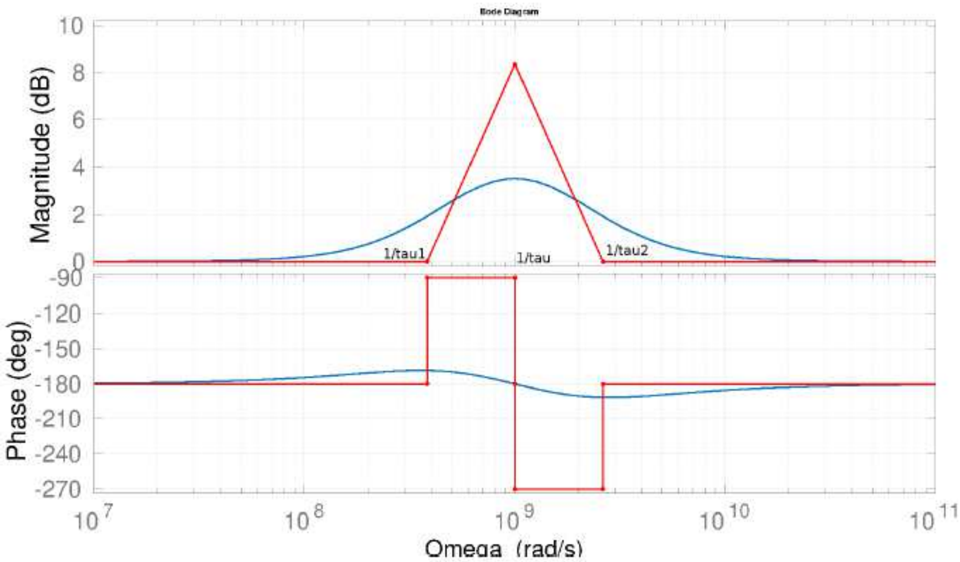
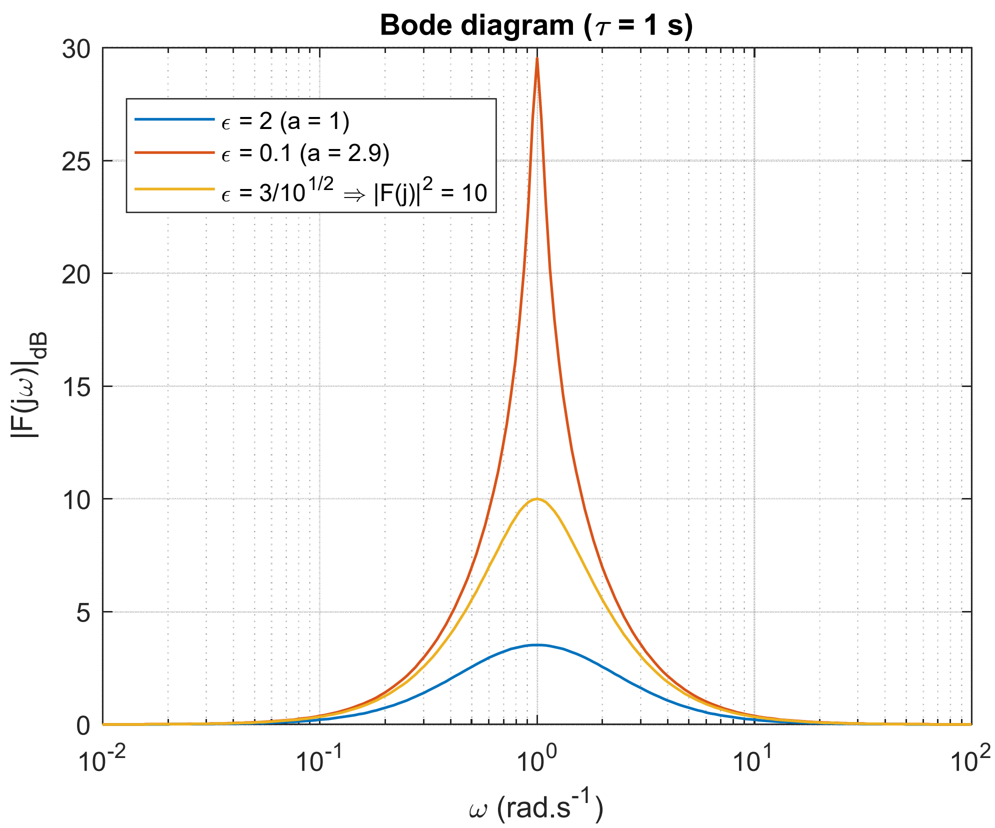


FIGURE 1.3 – Diagramme de Bode de la fonction $F(j\omega)$



4. *Quelle est la fonction réalisée par le système pour a = 1. Pour a = 3 ?*

Pour $a = 1$, c'est un filtre BP ; Pour $a = 3$, $\Re e(p_k) = 0$, c'est un oscillateur (oscillateur à pont de Wien).

La figure 1.4 montre le résultat d'une simulation électrique avec 3 valeurs de a, 2.9, 3 et 3.1. Pour les 3 simulations, l'entrée V_{in} est nulle (les 2 terminaux sont reliés entre eux). Comme on peut le constater, pour a = 2.9 < 3, le circuit est stable avec une réponse transitoire rapidement amortie. Pour a = 3.1 > 3, le circuit est clairement instable atteignant au bout de 100 ns des niveaux de plusieurs dizaines de kV. Bien évidemment, en pratique, la sortie saturera avant d'atteindre la tension d'alimentation de l'amplificateur opérationnel. Pour a = 3, le circuit se comporte comme un oscillateur dont la fréquence de résonance est donnée par $f_r = \frac{1}{2\pi RC}$.