TELECOM ParisTech	UE COM105 **Contrôle de Connaissance** Année 2019 Durée : 1h30 - 3 exercices - Tout document non électronique autorisé

Lisez attentivement toutes les instructions. Réfléchissez bien avant de commencer à écrire. Cela peut vous permettre de gagner beaucoup de temps. Considérez tous les exercices. Parfois vous arriverez à répondre à une question, même si vous n'avez pas su répondre aux questions précédentes du même exercice. Ainsi, à tout moment vous pouvez utiliser les premières questions d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Exercice 1 : Codage (4 points)

1. *(1pt)* Est-il possible de trouver un code linéaire $\mathcal{C}(n, k, d_{\min})$ avec les paramètres suivants. Si non, expliquer pourquoi. Si oui, donner un tel code.
   (a) $n = 17$, $k = 16$, $d_{\min} = 2$
   (b) $n = 12$, $k = 7$, $d_{\min} = 7$.

Dans le reste de l'exercice on utilise le code avec matrice de contrôle de parité suivante

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

2. *(1 pt)* On appelle un code $\mathcal{C}(n,\ k, d_{\min})$ parfait s'il atteint la borne de Hamming, c'est-à-dire, si l'inégalité suivante devient égalité :
$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{n}{j} \leq 2^{n-k}, \qquad \ell := \left\lfloor \frac{d_{\min}}{2} \right\rfloor,$$
où on utilise $\binom{n}{0} = 1$. Est-ce que le code $\mathcal{C}$ décrit par sa matrice de contrôle de parité H dans (1) est parfait ?

On obtient un deuxième code $\mathcal{C}'$ à partir du code $\mathcal{C}$ en ajoutant un bit de parité à chaque mot du code de façon à que le nombre de 1 dans tout mot de code de $\mathcal{C}$ est pair.

3. *(1pt)* Trouver la matrice de contrôle de parité H' du nouveau code $\mathcal{C}'$.
4. *(1pt)* Trouver le rendement et la distance minimale de $\mathcal{C}'$. Lequel des deux codes, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}'$, utiliseriez-vous ?

Exercice 2 : Théorie de l'Information (6 points)

On considère le canal discret sans mémoire suivant

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}, \qquad P_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/3, & \text{si } x = 0 \\ 1-p, & \text{si } \ x, y \in \{1,2\} \text{ et } x = y \\ p, & \text{si } \ x, y \in \{1,2\} \text{ et } x \neq y \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

avec p une constante réelle comprise entre 0 et 1.

Questions : (N'oubliez pas de bien justifier vos réponses.)

1. *(1pt)* Faire un diagramme du canal et trouver une borne supérieure finie sur la capacité du canal valable pour toute valeur de p.
2. *(0.75 pt)* Prouver que pour tout $p \in [0, 1]$, la capacité du canal vaut au moins $1 - H_b(p)$ en choisissant judicieusement la loi d'entrée P_X.

Dans la suite, $p = 1/2$ pour le canal décrit ci-dessus. De plus, on définit

$$X_{\mathrm{A}} := \mathbb{1}\{X \neq 0\} \qquad \text{et} \qquad Y_{\mathrm{A}} := \mathbb{1}\{Y \neq 0\}.$$

3. *(0.25 pt)* Faire le diagramme du DMC qui a pour entrée X_{A} et sortie Y_{A}.

On peut démontrer que pour toute loi d'entrée P_X :

$$I(X; Y) = I(X_{\mathrm{A}}; Y_{\mathrm{A}}) + \big(H(Y_{\mathrm{A}}|X_{\mathrm{A}}) - H(Y_{\mathrm{A}}|X_{\mathrm{A}}, X)\big) + \big(H(Y|Y_{\mathrm{A}}) - H(Y|Y_{\mathrm{A}}, X_{\mathrm{A}}, X)\big).$$

4. *(1 pt)* Prouver que pour toute loi d'entrée P_X :

$$H(Y_{\mathrm{A}}|X_{\mathrm{A}}) - H(Y_{\mathrm{A}}|X_{\mathrm{A}}, X) = 0.$$

5. *(1 pt)* Prouver que pour toute loi d'entrée P_X :

$$H(Y|Y_{\mathrm{A}}) - H(Y|Y_{\mathrm{A}}, X_{\mathrm{A}}, X) = 0.$$

6. *(1pt)* Montrer que la capacité du DMC de X à Y est égale à la capacité du DMC de X_{A} à Y_{A}.
   Utilisez les équations dans 4. et 5., même si vous n'avez pas su les prouver.

Exercice 3 : Modulation (5 points)

On considère un système de communication qui émet une suite de symboles indépendants $\{s_n\}_{n=0}^N$ prenant les valeurs $\pm A$ de manière équiprobable. On suppose que le signal émis s'écrit

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} s_n g(t - nT_s), \qquad t \in \mathbb{R},$$

avec T_s un nombre réel positif représentant le temps-symbole, et $g(t)$ la fonction porte qui vaut $\frac{1}{\sqrt{T_s}}$ sur l'intervalle $[-T_s/2, T_s/2[$ et 0 sinon.

Le récepteur observe le signal $y(t) = x(t) + b(t)$ avec $b(t)$ un bruit blanc Gaussien de densité spectrale $N_0/2$. Le signal reçu $y(t)$ passe à travers un filtre de réception

$$h(t) = g(t - 2T_s)$$

ce qui donne le signal

$$z(t) = (h \star y)(t).$$

Ensuite on échantillonne aux instants $\ldots, -2T_s, -T_s, 0, T_s, 2T_s, \ldots$. On obtient donc la suite des échantillons $\{z_n\}$ comme suit

$$z_n = z(nT_s), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Questions : (N'oubliez pas de bien justifier vos réponses.)

1. *(1pt)* Soit le filtre global $f(t) = g(t) \star h(t)$. Calculer $f(0)$, $f(T_s)$, et $f(2T_s)$.
2. *(1.5 pt)* Décrivez les échantillons z_n, pour $n = 2, \ldots, N + 2$.
3. *(0.5 pt)* Est-ce qu'il y a de l'interférence entre symboles (IES) dans la suite $z_2, \ldots, z_{N+2}$?
4. *(1pt)* A partir de la suite $z_2, \ldots, z_{N+2}$ trouver la règle de détection optimale pour les symboles $s_0, \ldots, s_N$.
5. *(1 pt)* Exprimer la probabilité d'erreur par symbole de cette règle de détection en utilisant la fonction $Q(\bullet)$.