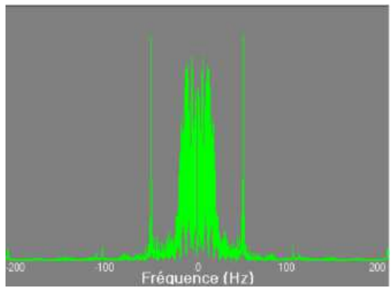
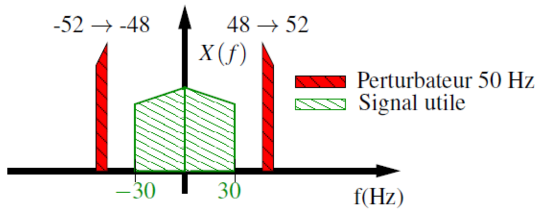
ELEC101 – Corrigés exos LG4 TZ

Ex. 1 : Acquisition signal ECG



Nous souhaitons faire l'acquisition d'un signal Electrocardiogramme (ECG). Le spectre de ce signal est illustré dans la figure ci-contre. Comme on peut le constater, le signal présente un perturbateur fort autour de la fréquence 50 Hz dû au réseau électrique.

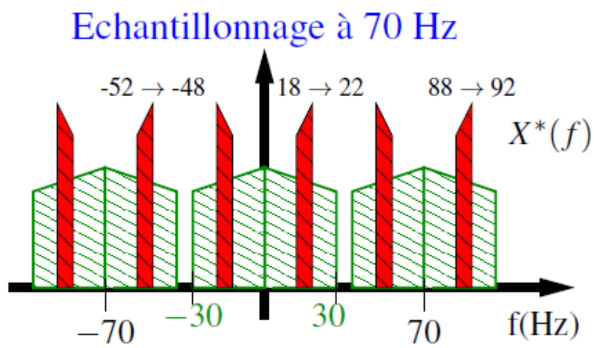
1. *Sachant que la phase du signal ECG est une fonction impaire dans le domaine fréquentiel et que son module, comme illustré, est une fonction paire, quelle conclusion peut-on tirer sur le signal ECG ?*



→ Symétrie Hermitienne $X(-f) = X^*(f) \implies x \in \mathbb{R}$

Dém. : $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft}df$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{0} X(f)e^{j2\pi ft}df + \int_{0}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$
$$= \int_0^{+\infty}\{X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft}\}df$$
$$= \int_0^{+\infty}\{X^*(f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft}\}df = \int_0^{+\infty}\{[X(f)e^{j2\pi ft}]^* + X(f)e^{j2\pi ft}\}df$$
$$= \int_0^{+\infty} 2\Re e\{X(f)e^{j2\pi ft}\}df \in \mathbb{R} \qquad \text{CQFD.}$$



2. *En utilisant la modélisation de la 2^e figure, tracer le module du spectre du signal ECG pour une fréquence d'échantillonnage f_e de 70 Hz.*

   On observe un repliement du perturbateur dans la bande utile à ~ 20 Hz.

3. *Que faut-il faire pour éviter d'avoir le problème du repliement ?*

   Il faut soit filtrer dans le domaine analogique avant de faire l'échantillonnage soit échantillonner à une fréquence supérieure à 82 Hz (car 82–52 = 30) suivi d'un filtrage numérique.

Ex. 2 : Echantillonnage et TZ

Soit le signal échantillonné selon la Figure ci-contre.

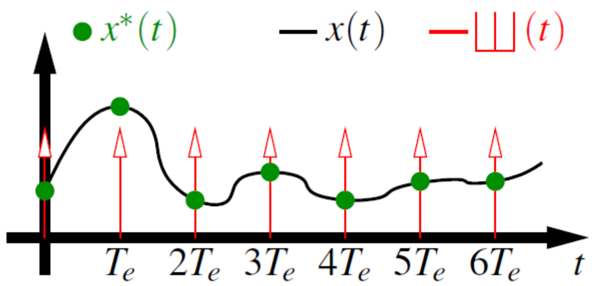


FIGURE 5.10 – Echantillonnage avec un peigne de Dirac

1. *Ecrire l'expression du signal échantillonné x*(t) en fonction de la valeur des échantillons de x(t) et du peigne de Dirac.*

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sqcup\!\sqcup(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

2. *Trouver la transformation de Laplace, puis la transformation en $\mathcal{Z}$ de $x^*(t)$.*

$$\mathcal{L}[x^*(t)](p) = \int_0^{+\infty} x^*(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot \sqcup\!\sqcup(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)\, e^{-pt}dt$$

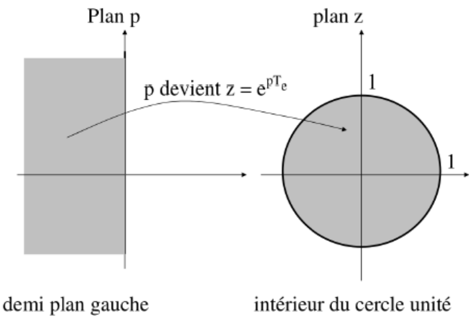
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)e^{-pnT_e} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)(e^{pT_e})^{-n}$$

3. *En déduire la relation entre z et p. De cette relation, sachant que les pôles d'une fonction de transfert T(p) doivent être dans le 1/2 plan gauche de Laplace pour garantir la stabilité du système, en déduire la position des pôles d'une fonction de transfert T(z) pour garantir également la stabilité du système en temps discret.*

   Soit, en posant $z = e^{pT_e}$: $\mathcal{L}[x^*(t)](p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)z^{-n} = \mathcal{Z}[x(nT_e)](z)$

   $p = \sigma + j\omega \implies z = e^{pT_e} = e^{\sigma T_e} \cdot e^{j\omega T_e}$

   Pôles $p_k = \sigma_k + j\omega_k \rightarrow$ Stabilité $\Leftrightarrow \sigma_k < 0 \implies |z_k| < 1$



Ex. 3 : Signal échantillonné et bloqué

En pratique le signal analogique échantillonné est bloqué, en général, pendant une période d'horloge (Figure). On se propose d'étudier l'influence de ce blocage sur le signal en fréquence.

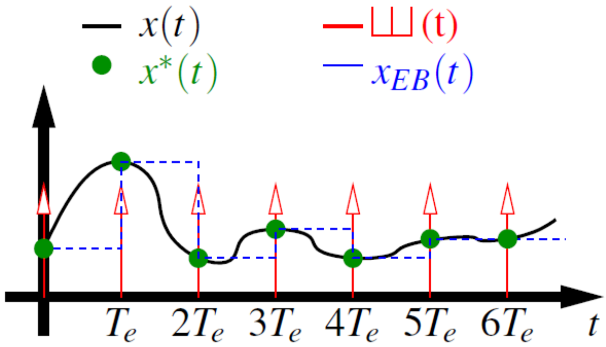
1. *Exprimer $x_{EB}(t)$ en fonction des échantillons x(nTe) et de la fonction échelon $\Upsilon(t)$, en supposant x(t) = 0 pour t < 0.*

   Le signal x_{EB} est la convolution du signal échantillonné x^* et d'une porte $\Pi(t)$ de largeur T_e, fonction indicatrice de l'intervalle $[0, T_e]$, c'est-à-dire :

   $\Pi(t) = \Upsilon(t) - \Upsilon(t - T_e)$

   On a donc :

   $$x_{EB}(t) = (x^* * \Pi)(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)\right) * \Pi(t)$$



2. *Calculer la transformation de Laplace de $x_{EB}(t)$: $X_{EB}(p)$. Faire apparaître dans cette expression la transformation de Laplace de $x^*(t)$: $X^*(p)$. En déduire la fonction de transfert d'un bloqueur, notée $T_B(p)$. Représenter le module de $T_B(j\omega)$ en fonction de la fréquence.*

   $x_{EB}(t) = (x^* * \Pi)(t) \implies X_{EB}(p) = X^*(p) \cdot T_B(p)$, d'où, par identification :

   $T_B(p) = \mathcal{L}[\Pi(t)](p) = \mathcal{L}[\Upsilon(t) - \Upsilon(t - T_e)](p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT_e}}{p} = \frac{1-e^{-pT_e}}{p}$

3. *Représenter le module de $T_B(j\omega)$ en fonction de la fréquence.*

   $$T_B(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = T_e e^{-j\pi f T_e} \frac{e^{j\pi f T_e} - e^{-j\pi f T_e}}{j2\pi f T_e} = T_e e^{-j\pi f T_e} \operatorname{sinc}(\pi f T_e) \implies |T_B(j\omega)| = T_e|\operatorname{sinc}(\pi f T_e)|$$