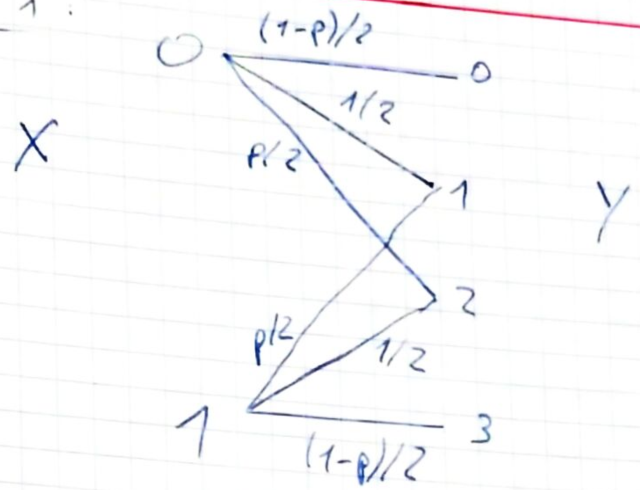
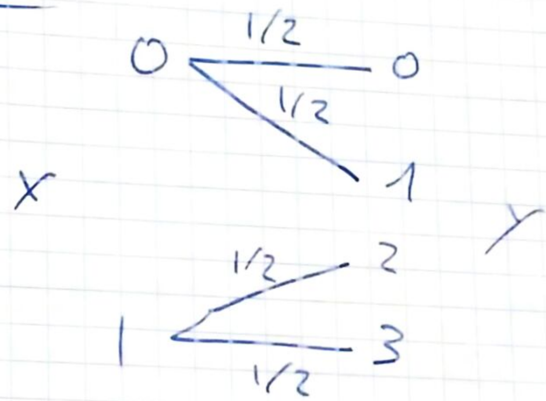
CAPITAN
Guillaume
Grp 3A
n°35

TD7 COMICS

Exercice 1 :



Q1) Pour $p=0$:



C'est un canal composé de deux parties indépendantes sur $X=0$ et $X=1$ donc on peut déjà supposer $C=1$, mais on va le montrer :

En notant $P(X=0)=1-q$ et $P(X=1)=q$, on a :

$$C = \max_{q\in[0,1]} I(X,Y) = \max_q \left[H(Y) - H(Y|X)\right]$$

or $$H(Y) = 2\left[-(1-q)\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-q}{2}\right)\right] + 2\left[-q\frac{1}{2}\log\left(\frac{q}{2}\right)\right]$$

$$= -(1-q)\left[\log(1-q) - 1\right] - q\left[\log q - 1\right]$$

$$= H_b(q) + 1$$

$$\text{et } H(Y|X) = \overbrace{(1-q)}^{X=0}\Big[\overbrace{-\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2}}^{Y=0}\ \overbrace{-\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2}}^{Y=1}\Big] + \overbrace{q}^{X=1}\Big[\overbrace{-\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2}}^{Y=2}\ \overbrace{-\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2}}^{Y=3}\Big]$$

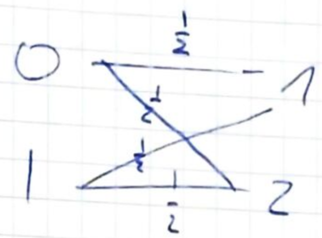
$$= (1-q)\, Hb\left(\tfrac{1}{2}\right) + q\, Hb\left(\tfrac{1}{2}\right) = \underline{1}$$

← Normal : si on connaît X on a Y. On aurait le même résultat pour $H(X|Y)$

d'où $$\boxed{C_{p=0}} = \max_q \left[Hb(q) + 1 - 1\right]$$

$$= Hb\left(\tfrac{1}{2}\right) = \underline{1}$$

Q2. Pour $p = 1$,



C'est un canal binaire symétrique (avec $p = \frac{1}{2}$) : le cours donne

$$\boxed{C_{p=1}} = 1 - Hb\left(\tfrac{1}{2}\right) = \underline{0}$$

C'était prévisible : rien ne peut être communiqué dans ce canal puisque recevoir 1 ou 2 ne signifie rien, cela peut avoir été 0 ou 1 équiprobablement à l'origine. Le canal choisit juste uniformément 1 ou 2.

Q3 $X \sim \mathcal{B}(q)$ et $(p,q) \in [0,1]^2$.

a) $$H(Y|X=0) = -\left[\frac{(1-p)}{2}\log\left(\frac{1-p}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\log\frac{p}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(1-p)\log(1-p) - (1-p) - 1 + p\log p - p\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-Hb(p) - 2\right] = \boxed{1 + \frac{Hb(p)}{2}}$$

le problème étant symétrique, $\boxed{H(Y|X=1) = 1 + \frac{Hb(p)}{2}}$ également.

Ainsi, $H(Y|X)$ ne dépend pas de la valeur de X

et donc $\boxed{H(Y|X) = 1 + \frac{Hb(p)}{2}}$

(Rq : on pouvait écrire $H(Y|X) = (1-q)\,H(Y|X=0) + q\,H(Y|X=1) = 1 + \frac{Hb(p)}{2}$)

(b) $Z = \mathbb{1}\{Y \in \{0,3\}\}$

On remarque que $Z = \frac{(Y-1)(Y-2)}{2}$ ($Y = 0$ ou $3 \rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ok, $Y = 1$ ou $2 \rightarrow \frac{0 \cdot \cdot}{2} = 0$ ok)

ie $Z = g(Y)$ avec g déterministe

d'où $H(Y, Z) = H(Y)$

Par la règle de chaînage, on a donc $\boxed{H(Y) = H(Z) + H(Y|Z)}$

(c) $P(Z=1) = P(Y \in \{0,3\})$

$$= \underset{(X=0)}{(1-q)} \underset{(Y=0|X=0)}{\left(\frac{1-p}{2}\right)} + \underset{(X=1)}{q} \underset{(Y=3|X=1)}{\left(\frac{1-p}{2}\right)} = \frac{1-p}{2}$$

et donc $P(Z=0) = \frac{1+p}{2}$ $\left(Z \sim \mathcal{B}\left(\frac{1-p}{2}\right)\right)$

d'où $H(Z) = H_b\left(\frac{1-p}{2}\right)$

Cela ne dépend pas de q donc pas de la loi de X.

(d) $H(Y|Z) = P(Z=1)\,H(Y|Z=1) + P(Z=0)\,H(Y|Z=0)$

$$= \frac{1-p}{2} Hb(q) + \frac{1+p}{2} H(Y|Z=0)$$

En effet $Y|Z=1$ donne "$Y = 0$ ou 3" soit une détermination uniquement

en fonction de X : $X = 0 \Longrightarrow Y = 0$ et $X \sim \mathcal{B}(q)$ donc $H(Y|Z=1)$

$X = 1 \Longrightarrow Y = 3$ $= Hb$

$$H(Y/Z=0) = \left(\frac{(1-q)\frac{1}{2}}{\frac{p+1}{2}} + \frac{q\frac{p}{2}}{\frac{p+1}{2}}\right) \log\left(\frac{1-q+pq}{1+p}\right)$$

$$+ \frac{(1-q)p+q}{1+p} \log\left(\frac{(1-q)p+q}{1+p}\right)$$

Ce ne sont que des combinaisons menant à $Y=1$ ou 2 depuis $1=0$ ou 1.
donc

$$H(Y/Z=0) = \frac{1-q+pq}{p+1} \log\left[\frac{1-q+pq}{1+p}\right]$$

$$+ \frac{p-qp+q}{p+1} \log\left[\frac{p-qp+q}{1+p}\right]$$

$$= H_b\left(\frac{1-q+pq}{1+p}\right) \text{ exactement}$$

Finalement $\boxed{H(Y/Z) = \frac{1-p}{2}\left(H_b(q) + H_b\left(\frac{1-q+pq}{1+p}\right)\right)}$

$Hb(q)$ est maximale en $\frac{1}{2}$

et $\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{p}{2}}{1+p} = \frac{\frac{p+1}{2}}{1+p} = \frac{1}{2}$ donc $Hb\left(\frac{1-q+pq}{1+p}\right)$ est maximale pour $q=\frac{1}{2}$

donc $\boxed{\max_q H(Y/Z) = H(Y/Z)(q=\tfrac{1}{2}) = 1-p}$

ⓔ $I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$ (cours)

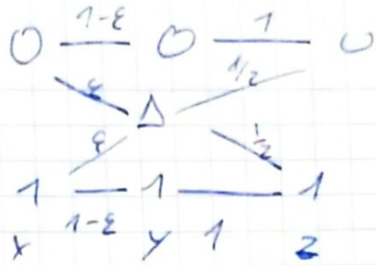
$= H(Z) + H(Y/Z) - \left(\frac{Hb(p)}{2}+1\right)$ (chaînage)

$= Hb\left(\frac{1-p}{2}\right) + \frac{(1-p)}{2}\left(Hb(q) + Hb\left(\frac{1-q+pq}{2}\right)\right) - \left(\frac{Hb(p)}{2}+1\right)$

d'où $C = \max_q I(X;Y) = Hb\left(\frac{1-p}{2}\right) + (1-p) - 1 - \frac{Hb(p)}{2}$ i.e. $\boxed{C = Hb\,\frac{1-p}{2} - \frac{Hb(p)}{2} - p}$

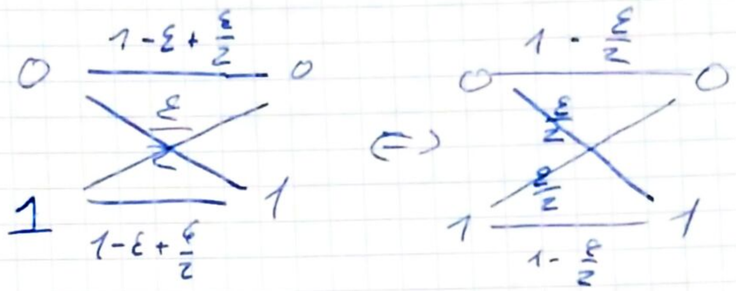
question ⓓ

Exercice 2 :



Q1

en éliminant Y :



C'est un canal binaire symétrique de paramètre $\frac{\varepsilon}{2}$.

Q2 ⓐ Connaître Y et Z revient à connaître Y (par rapport à X) car Z ne rajoute de l'information que sur Y.

On a $\boxed{H(X|Y,Z) = H(X|Y)}$ de manière "entropique", cela revient à dire que Z ne change pas l'entropie de X si on a conditionné sur Y.

ⓑ $I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y,Z)$

$$\overset{ⓐ}{=} H(X) - H(X|Y) \boxed{= I(X;Y)}$$

ⓒ En utilisant le théorème admis :

$$H(X|Y,Z) = H(X|Z,Y) \leq H(X|Z) \quad \text{(logique de toute façon)}$$

Ainsi $I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y,Z)$

$$\geq H(X) - H(X|Z) = I(X;Z)$$

d'où $\boxed{I(X;Y,Z) \geq I(X;Z)}$

(d) En utilisant les questions précédentes,

on a $\boxed{I(X,Y) \geq I(X,Z)}$

(on s'y attendait : Z ne rajoutait d'information sur X/Y donc Z "vaut" moins d'information)

En passant au max à droite $I(X,Y) \geq \underset{P_X}{\max}\ \underset{\overset{\|}{C_{Total},\ C_{composé}}}{I(X,Z)}$

et par définition du max : $\underset{\underset{C_1}{\|}}{\underset{P_X}{\max} I(X,Y)} \geq I(X,Y)$

d'où $\boxed{C_1 \geq C_{Total}}$

On ne peut pas augmenter la capacité du canal composé des deux canaux plus haut que la capacité du canal 1.

Q3 On a montré que tout BSC se décomposait en un (BEC + canal 2 fourni par l'énoncé) dont la capacité totale serait limitée par la capacité du BEC.

Cela signifie qu'on peut toujours trouver un BEC plus efficace qu'un BSC en utilisant cette décomposition (en retirant le canal 2 on peut augmenter la capacité totale !)