Département COMELEC UE COM105

Corrigé du TD 6

Exercice 1

1.

X	Y	Z
1	1	1
2	0	2
3	1	0
4	0	1
5	1	2
6	0	0

2. X suit une loi uniforme sur 6 valeurs. Donc $H(X) = \log_2(6)$. Y suit une loi uniforme sur 2 valeurs, les valeurs 0 et 1. En fait, on note que $\Pr(Y = 1) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 5) = 1/2$ et donc $\Pr(Y = 0) = 1 - \Pr(Y = 1) = 1/2$. Alors, $H(Y) = \log_2(2) = 1$. De manière similaire, Z suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ et donc $H(Z) = \log_2(3)$.
3. Avec le tableau on note que chaque X est associé à une paire (Y, Z) différente. Il existe donc une fonction f tel que $X = f(Y, Z)$. Par conséquent (voir le résultat 3.3 aux pages 54/55 du polycopié) :

$$H(X|Y, Z) = H(f(Y, Z)|Y, Z) = 0.$$

Pour trouver $H(X|Y)$ on commence par écrire :

$$H(X|Y) = P_Y(0) \cdot H(X|Y = 0) + P_Y(1) \cdot H(X|Y = 1).$$

Puis on note en regardant le tableau ci-dessus que si $Y = 0$, alors X suit une loi uniforme sur $\{2, 4, 6\}$ car selon la règle de Bayes :

$$\begin{aligned} \Pr(X = i|Y = 0) &= \frac{\Pr(X = i, Y = 0)}{\Pr(Y = 0)} && (1) \\ &= \frac{\Pr(X = i) \cdot \Pr(Y = 0|X = i)}{\Pr(Y = 0)} && (2) \\ &= \frac{1/6 \cdot \mathbb{1}\{i \text{ est pair}\}}{1/2} && (3) \\ &= 1/3 \cdot \mathbb{1}\{i \text{ est pair}\}. && (4) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $\Pr(Y = 0) = 1/2$ comme calculé au dessus. Comme X est uniforme sur un alphabet de 3 valeurs quand $Y = 0$, on trouve

$$H(X|Y = 0) = \log_2(3). \tag{5}$$

De façon similaire, si $Y = 1$, alors X suit une loi uniforme sur $\{1, 3, 5\}$ et donc

$$H(X|Y = 1) = \log_2(3). \tag{6}$$

Comme $P_Y(0) + P_Y(1) = 1$, on déduit que

$$H(X|Y) = P_Y(0) \cdot H(X|Y = 0) + P_Y(1) \cdot H(X|Y = 1) = 1/2 \cdot \log_2(3) + 1/2 \cdot \log_2(3) = \log_2(3). \tag{7}$$

4. Les 6 valeurs possibles de (Y, Z) sont indiquées dans le tableau au dessus. Chacune de ses paires a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ car la valeur correspondante de X a une probabilité égale à $1/6$. Donc, la paire (Y, Z) est équiprobable sur 6 valeurs et son entropie conjointe vaut

$$H(Y, Z) = \sum_{(y,z)\in\{0,1\}\times\{0,1,2\}} P_{YZ}(y, z) \log \frac{1}{P_{YZ}(y, z)} = \sum_{(y,z)\in\{0,1\}\times\{0,1,2\}} \frac{1}{6} \log_2(6) = \log_2(6). \tag{8}$$

Pour trouver $H(X, Y)$ on écrit en utilisant la règle de chaînage :

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \tag{9}$$

Comme Y est une fonction de X, l'entropie conditionelle vaut (voir le résultat 3.3 aux pages 54/55 du polycopié)

$$H(Y|X) = 0. \tag{10}$$

Par conséquent,

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = \log_2(6) + 0 = \log_2(6). \tag{11}$$

5. Pour trouver l'entropie conditionelle $H(Y|Z)$ on utilise encore la règle de chainage et les résultats obtenus auparavant :

$$H(Y|Z) = H(Y, Z) - H(Z) = \log_2(6) - \log_2(3) = \log_2(2) = 1.$$

On observe que

$$H(Y|Z) = H(Y), \tag{12}$$

et conclut, d'après le résultat 3.3 aux pages 54/55 du polycopié, que Z et Y sont indépendants.

Exercice 2

1. On note les définitions suivantes

$$H(E, X|Y) = \sum_y P_Y(y) \left(-\sum_{e,x} P_{EX|Y}(e, x|y) \log_2 P_{EX|Y}(e, x|y) \right).$$

et

$$H(E|X, Y) = \sum_{x,y} P_{XY}(x, y) \left(-\sum_{e} P_{E|XY}(e|x, y) \log_2 P_{E|XY}(e|x, y) \right)$$
$$H(X|E, Y) = \sum_{e,y} P_{EY}(e, y) \left(-\sum_{x} P_{X|EY}(x|e, y) \log_2 P_{X|EY}(x|e, y) \right)$$

Suivant les mêmes étapes que dans la règle de chaînage vu en cours, on peut voir qu'on utilisant la règle de Bayes et la règle de la probabilité totale :

$$\begin{aligned}
&H(E, X|Y) \\
&= \sum_y P_Y(y) \left(-\sum_{e,x} P_{EX|Y}(e, x|y) \log_2 P_{EX|Y}(e, x|y) \right) \\
&= \sum_y P_Y(y) \left(-\sum_{e,x} P_{EX|Y}(e, x|y) \log_2 P_{E|Y}(e|y) \right) \\
&\quad + \sum_y P_Y(y) \left(-\sum_{e,x} P_{E|Y}(e|y) \cdot P_{X|EY}(x|e, y) \log_2 P_{X|EY}(x|e, y) \right) \\
&= \sum_y P_Y(y) \left(-\sum_{e} P_{E|Y}(e|y) \log_2 P_{E|Y}(e|y) \right) + \sum_{e,y} P_{EY}(e, y) \left(-\sum_{x} P_{X|EY}(x|e, y) \log_2 P_{X|EY}(x|e, y) \right) \\
&= H(E|Y) + H(X|E, Y)
\end{aligned}$$

et de même :

$$H(E,X|Y) = H(X|Y) + H(E|X,Y),$$

En combinant les deux égalités en haut, on obtient $H(E|Y) + H(X|E,Y) = H(X|Y) + H(E|X,Y)$ et donc l'égalité désirée.

2. Comme $\hat{X}$ est une fonction de Y, $E = \mathbb{1}\{\hat{X} \neq X\}$ est une fonction de X et Y. Ainsi, on obtient que $H(E|X,Y) = 0$, voir le résultat 3.3 du polycopié.
3. On se rappelle que

$$H(X|E,Y) = \sum_{e,y} P_{EY}(e,y) H(X|E=e, Y=y),$$

où $H(X|E=e,Y=y) = -\sum_x P_{X|EY}(x|e,y)\log_2 P_{X|EY}(x|e,y)$ est simplément l'entropie d'une variable aléatoire qui suit une loi $P_{X|EY}(\cdot|e,y)$. Pour $e=0$, on sait que $X = g(y)$ et donc $P_{X|EY}(\cdot|0,y)$ est une loit déterministe sur $X = g(y)$ et son entropie est 0 :

$$H(X|E=0, Y=y) = 0.$$

Pour $e = 1$ on sait que $X \neq g(y)$ et donc prend valuer sur l'ensemble $\mathcal{X}\backslash\{g(y)\}$ qui est de taille $|\mathcal{X}| - 1$. L'entropie d'une variable aléatoire est toujours inférieure au logarithme de la taille de son alphabet et donc :

$$H(X|E=1, Y=y) \leq \log_2(|\mathcal{X}| - 1).$$

On continue en utilisant la définition de l'entropie conditionelle :

$$\begin{aligned} H(X|E,Y) &= \sum_{e,y} P_{EY}(e,y) H(X|E=e,Y=y) \\ &\leq \sum_{y} P_{EY}(0,y)\cdot 0 + \sum_{y} P_{EY}(1,y)\cdot \log_2(|\mathcal{X}|-1) \\ &= P_e \cdot \log_2(|\mathcal{X}|-1). \end{aligned}$$

4. Pour toutes variables aléatoires E et Y :

$$H(E|Y) \leq H(E).$$

Et comme E est une variable binaire, $H(E) = H_b(P_e)$.

5. En réunissant tous ces éléments, on obtient la borne

$$H(X|Y) \leq H_b(P_e) + P_e \log_2(|\mathcal{X} - 1).$$

Elle est connue comme « Inégalité de Fano » et permet de prouver facilement qu'aucun taux supérieur à la capacité est atteignable. (Les définitions de capacité et atteignabilité seront prochainement traitées en cours et aussi expliquées dans le polycopié.)

6. On observe que si $P_e \to 0$, alors $H_b(P_e)$ tend aussi vers 0. Par conséquent, l'inégalité ci-dessus indique que $P_e \to 0$ est possible seulement si $H(X|Y) \to 0$, donc si X devient de plus en plus déterminé par Y.