Département COMELEC UE COM105

Corrigé du TD 5

1. Lorsque s_n vaut A et s_{n-1} vaut A, l'observation y_n vaut
$$y_n = s_n + \alpha s_{n-1} + w_n = (1+\alpha)A + w_n. \tag{1}$$
Le détecteur à seuil $\hat{s}_n = A \cdot \text{signe}(y_n)$ fait une erreur, c'est-à-dire décide que $\hat{s}_n = -A$, si $y_n < 0$. Sous l'hypothèse (1), ceci est équivalent à $w_n < -(1+\alpha)A$. On obtient :
$$\begin{aligned} P_e(A,A) &= \text{Prob}\left[w_n < -(1+\alpha)A\right] && (2)\\ &= \text{Prob}\left[-\frac{w_n}{\sqrt{N_0/2}} > \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2A^2}{N_0/2}}\right] && (3)\\ &= \mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1+\alpha)^2\frac{A^2}{N_0}}\right), && (4)\end{aligned}$$
où la dernière égalité vaut parce que $-\frac{w_n}{\sqrt{N_0/2}}$ est une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance 1 et par la définition de la fonction $\mathcal{Q}(\cdot)$, page 39 du polycopié.
Lorsque s_n vaut A et s_{n-1} vaut $-A$, l'observation y_n vaut
$$y_n = s_n + \alpha s_{n-1} + w_n = (1-\alpha)A + w_n. \tag{5}$$
Le détecteur à seuil $\hat{s}_n = A \cdot \text{signe}(y_n)$ fait alors une erreur, c'est-à-dire décide que $\hat{s}_n = -A$, si $w_n < -(1-\alpha)A$. En suivant les mêmes étapes que précédemment, on obtient :
$$\begin{aligned} P_e(A,-A) &= \text{Prob}\left[w_n < -(1-\alpha)A\right] && (6)\\ &= \text{Prob}\left[-\frac{w_n}{\sqrt{N_0/2}} > \sqrt{\frac{(1-\alpha)^2A^2}{N_0/2}}\right] && (7)\\ &= \mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2\frac{A^2}{N_0}}\right). && (8)\end{aligned}$$
Nous avons utilisé que $\alpha \in [0,1]$ pour obtenir la deuxième égalité.
2. Lorsque s_n et s_{n-1} valent $-A$, l'observation y_n vaut
$$y_n = -(1+\alpha)A + w_n. \tag{9}$$
Le détecteur à seuil fait une erreur, c'est-à-dire décide que $\hat{s}_n = -A$, si $y_n > 0$ ou de façon équivalente si $w_n > (1+\alpha)A$. Par la symétrie de la distribution gaussienne de moyenne 0,
$$\text{Prob}[w_n > (1+\alpha)A] = \text{Prob}[-w_n < -(1+\alpha)A] \tag{10}$$
et donc en utilisant l'équation (2) :
$$P_e(A,A) = P_e(-A,-A) \tag{11}$$

De façon similaire, on peut prouver que

$$P_e(-A, A) = \text{Prob}[w_n > (1-\alpha)A] \tag{12}$$

et en utilisant la symétrie de la distribution Gaussienne et l'équation (6) on deduit :

$$P_e(-A, A) = P_e(A, -A). \tag{13}$$

3. Pour tout $n \geq 1$ la probabilité d'erreur par symbole P_e peut être calculée en utilisant la formule de la probabilité totale, le fait que s_n et s_{n-1} sont équiprobables sur l'ensemble $\{-A, A\}$, et les résultats obtenus auparavant. On trouve alors :

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{a,a' \in \{-A,A\}} \text{Prob}[s_n = a, s_{n-1} = a']\text{Prob}[\hat{s}_n \neq s_n | s_n = a, s_{n-1} = a'] && (14) \\ &= \frac{1}{4}\left(P_e(A,A) + P_e(-A,A) + P_e(A,-A) + P_e(-A,-A)\right) && (15) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1+\alpha)^2\frac{A^2}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2\frac{A^2}{N_0}}\right). && (16) \end{aligned}$$

4. Comme $E_b = A^2$, pour $n \geq 1$, on peut reécrire (16) en fonction de E_b et N_0 :

$$P_e = \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1+\alpha)^2\frac{E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2\frac{E_b}{N_0}}\right). \tag{17}$$

5. Le terme qui domine cette probabilité d'erreur est $\frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2\frac{E_b}{N_0}}\right)$ car la fonction $\mathcal{Q}$ est exponentiellement décroissante. Nous obtenons donc à fort RSB :

$$P_{e,n} \approx \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

6. On se trouve avec une 2-PAM avec seuil de décision à 0. Donc

$$P_{e,0} = \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \tag{18}$$

selon la formule (2.38) à la page 39 du polycopié.

7. Quand $\hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}$, comme c'est une 2 PAM on a $\hat{s}_{n-1} = -s_{n-1}$. Donc,

$$z_n = y_n - \alpha\hat{s}_{n-1} = s_n + 2\alpha s_{n-1} + w_n. \tag{19}$$

8. Pour tout $n \geq 1$, la probabilité d'erreur peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} P_{e,n} &= \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n) && (20) \\ &= \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | \hat{s}_{n-1} = s_{n-1})\text{Prob}(\hat{s}_{n-1} = s_{n-1}) + \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1})\text{Prob}(\hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}) && (21) \\ &= \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | \hat{s}_{n-1} = s_{n-1})(1 - P_{e,n-1}) + \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1})P_{e,n-1}. && (22) \end{aligned}$$

Comme décrit dans l'énoncé, si $\hat{s}_{n-1} = s_{n-1}$, alors

$$z_n = s_n + w_n \tag{23}$$

et on se retrouve dans le cas d'une 2-PAM classique. La probabilité d'erreur dans ce cas vaut donc

$$\text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | \hat{s}_{n-1} = s_{n-1}) = \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \tag{24}$$

Pour calculer la probabilité d'erreur dans le cas où $\hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}$, on se rappelle d'abord que sous cette hypothèse :

$$z_n = y_n - \alpha \hat{s}_{n-1} = s_n + 2\alpha s_{n-1} + w_n. \tag{25}$$

On répète les étapes des trois premières questions, où on distingue les 4 cas pour (s_{n-1}, s_n). En effet, les mêmes calculs sont toujours valables si on ajoute un facteur 2 devant le α. Ceci nous amène à :

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | s_n = A, s_{n-1} = A, \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}) &= Q\left(\sqrt{\frac{2(1+2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right) && (26) \\ &= \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | s_n = -A, s_{n-1} = -A, \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}) && (27) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | s_n = A, s_{n-1} = -A, \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}) &= Q\left(\sqrt{\frac{2(1-2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right) && (28) \\ &= \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | s_n = -A, s_{n-1} = A, \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}). && (29) \end{aligned}$$

On se rappelle que pour la réponse de la question **1.** nous nous sommes servis de la condition $\alpha \in [0, 1]$ pour assurer que le facteur $(1 - \alpha)$ dans les équations (6) et (7) soit positif. Donc, pour que les même étapes valent quand α est remplacé par 2α, il faut supposer que $\alpha \in [0, 1/2]$.
En combinant les quatres équations (26)–(29), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\hat{s}_n \neq s_n | \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}) &= \sum_{a,a' \in \{-A,A\}} \text{Prob}[s_n = a, s_{n-1} = a' | \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}] \\ &\qquad \cdot \text{Prob}[\hat{s}_n \neq s_n | s_n = a, s_{n-1} = a', \hat{s}_{n-1} \neq s_{n-1}] && (30) \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2(1+2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2(1-2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right). && (31) \end{aligned}$$

On combine (22), (24), et (31) pour obtenir :

$$\begin{aligned} P_{e,n} &= (1 - P_{e,n-1}) \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + P_{e,n-1}\left(\frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2(1+2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2(1-2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right)\right) \\ &= \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + P_{e,n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2(1+2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2(1-2\alpha)^2 E_b}{N_0}}\right) - \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right)}_{=:\gamma} \end{aligned}$$

9. Pour une recurrence de la forme $x_n = \delta x_{n-1} + \beta$ nous obtenons la solution $x_n = \delta^n x_0 + \frac{1-\delta^n}{1-\delta}\beta$. Donc, à partir des réponses aux questions 6. et 9., nous obtenons

$$P_{e,n} = \gamma^n \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \frac{1-\gamma^n}{1-\gamma}\mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \cdot \frac{1-\gamma^{n+1}}{1-\gamma}$$

10. A fort E_b/N_0, $\gamma \ll 1$ et donc $\frac{1-\gamma^{n+1}}{1-\gamma} \approx 1 + \gamma \approx 1$. Donc

$$P_{e,n} \approx \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

Si on compare cette expression avec l'approximation trouvée dans la question 5., nous voyons qu'avec la deuxième méthode de détection, nous avons un gain en RSB de $(1-\alpha)^{-2}$. En effet, nous arrivons à corriger la perte en RSB causée par l'interférence et à avoir presque la même performance que quand il n'y a pas d'interférence.