Corrigé du contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4, manuscrites ou dactylographiées.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits, ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste ; un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
Sauf mention contraire, on détaillera les calculs effectués.
Le barème (sur 40) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (15 points)
Soient α_1 et α_2 deux réels quelconques et β_1 et β_2 deux réels non nuls avec $|\beta_1| \geq |\beta_2|$. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

1. (5 points) Déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de A à l'aide de la méthode de Jacobi ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a) et on indiquera clairement, pour chaque vecteur propre, quelle valeur propre lui est associée.

Corrigé
On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 4}$. On appelle B_1 et B_2 les matrices obtenues après chaque itération de la méthode de Jacobi.
En reprenant les notations du cours, on considère $p = 1$ et $q = 4$ (valeurs correspondant au plus grand terme non diagonal en valeur absolue). On obtient successivement :

$$x = (a_{4,4} - a_{1,1})/2a_{1,4} = 0 \ ; \ t = 1 \ ; \ c = s = 1/\sqrt{2}\ .$$

L'objectif étant d'annuler les termes situés en première ligne et quatrième colonne ou en quatrième ligne et première colonne, on obtient $b_{1,4} = b_{4,1} = 0$.
Pour $i \notin \{1, 4\}$, il vient $b_{1,i} = b_{i,1} = c.a_{1,i} - s.a_{4,i} = 0$; $b_{4,i} = b_{i,4} = s.a_{1,i} + c.a_{4,i} = 0$.
Par ailleurs, on a $b_{1,1} = a_{1,1} - t.a_{1,4} = \alpha_1 - \beta_1$ et $b_{4,4} = a_{4,4} + t.a_{1,4} = \alpha_1 + \beta_1$.
Les autres valeurs de A ne changent pas. La nouvelle matrice B_1 est illustrée ci-dessous :

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage associée vaut $\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Pour la seconde itération, on obtient, en posant $B_1 = (b_{i,j})_{1\le i\le 4,\ 1\le j\le 4}$:

$$p = 2,\ q = 3\ ;\ x = (b_{3,3} - b_{2,2})/2b_{2,3} = 0\ ;\ t = 1\ ;\ c = s = 1/\sqrt{2}\ ;$$

puis la matrice B_2 par des calculs analogues aux précédents.

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 + \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_1 \end{pmatrix}$$

et $$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B_2 étant diagonale, la méthode de Jacobi s'arrête. Les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de B_2, c'est-à-dire $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\alpha_1 + \beta_1$ et $\alpha_2 + \beta_2$.

Pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres, il suffit de former le produit $\Omega_1\Omega_2$ des matrices de passage. Compte tenu de la forme particulière des matrices Ω_i, ce produit est facile à effectuer. On obtient :

$$\Omega_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $\Omega_1\Omega_2$ donnent une base orthonormée de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\alpha_2 + \beta_2$ et $\alpha_1 + \beta_1$.

Fin de corrigé

2. (1 point) On pose $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$. Soient a, b, c et d quatre réels. On considère la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q(X) = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_1 x_4^2\right) + \beta_1 x_1 x_4 + \beta_2 x_2 x_3 + a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4.$$

À quelle condition Q est-elle convexe ? strictement convexe ?

Corrigé

La forme Q peut s'écrire $Q(X) = \frac{1}{2} X^t A X + a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4$. Elle est convexe (respectivement strictement convexe) si les valeurs propres de A sont positives (respectivement strictement positives), c'est-à-dire, d'après la question 1, si on a $\alpha_1 \ge |\beta_1|$ et $\alpha_2 \ge |\beta_2|$ (respectivement $\alpha_1 > |\beta_1|$ et $\alpha_2 > |\beta_2|$).

Fin de corrigé

3. (4 points) On suppose que l'on a, pour $1 \leq i \leq 2$, $|\alpha_i| > |\beta_i|$ et $\alpha_i \neq 0$. Déterminer la décomposition LU de la matrice A en appliquant, à chaque itération, la stratégie du pivot partiel ; on détaillera les calculs de la première itération (on pourra être plus rapide pour les itérations suivantes, s'il y en a).

Corrigé

Les hypothèses $|\alpha_1| > |\beta_1|$ et $\alpha_1 \neq 0$ font que l'on choisit α_1 comme pivot à la première itération. Les termes de la première colonne situés en ligne 2 ou 3 étant nuls, il n'y a rien à faire pour les lignes 2 et 3. Pour la ligne 4, il convient de multiplier la première ligne par β_1/α_1 et de retrancher ce produit de la quatrième ligne. On obtient ainsi la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 - \dfrac{\beta_1^2}{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

On fait ensuite de même pour la deuxième ligne :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - \dfrac{\beta_2^2}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 - \dfrac{\beta_1^2}{\alpha_1} \end{pmatrix},$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, il s'agit de la matrice U et le calcul de la décomposition est terminé. La matrice L est par ailleurs donnée par les coefficients dont on a multiplié les lignes du pivot à chaque étape :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2/\alpha_2 & 1 & 0 \\ \beta_1/\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin de corrigé

4. (2 points) On considère le cas pour lequel on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Soit $X \in \mathbf{R}^4$. Résoudre le système linéaire $A.X = (0\ \ 4\ \ 5\ \ -3)^t$ en utilisant la décomposition LU de A.

Corrigé

On résout le système $A.X = LU.X = b$ en deux temps : $L.Y = b$ et $U.X = Y$. Le système $L.Y = b$ s'écrit, en posant $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ \dfrac{1}{2} y_2 + y_3 = 5 \\ \dfrac{1}{2} y_1 + y_4 = -3 \end{cases}$$

L'application d'une méthode de remontée (ou plutôt, ici, de descente) donne la solution $Y = (0\ \ 4\ \ 3\ \ -3)^t$.

Puis on résout le système $U.X = Y$, qui s'écrit, en posant $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ \frac{3}{2}x_3 = 3 \\ \frac{3}{2}x_4 = -3 \end{cases}$$

L'application d'une méthode de remontée donne la solution $X = (1\ \ 1\ \ 2\ \ -2)^t$.

Fin de corrigé

5. (3 points) On souhaite minimiser la forme quadratique Q_0 définie sur $\mathbf{R}^4$ par :

$$Q_0(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4.$$

a. Appliquer la méthode de Newton à Q_0 en partant du point $(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^t$.

b. Le point déterminé par la méthode de Newton est-il un minimum global ? Existe-t-il d'autres points qui soient des minima (locaux ou globaux) ?

Corrigé

La forme Q_0 correspond à Q pour les valeurs suivantes : $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $a = 0$, $b = 4$, $c = 5$, $d = -3$.

Rappelons que, de façon générale, la méthode de Newton consiste à construire une suite de points $(X^k)_k$ définis par :

$$X^k = X^{k-1} - [\nabla^2 Q_0(X^{k-1})]^{-1}.\nabla Q_0(X^{k-1}).$$

En partant de $0 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^t$ et compte tenu du fait que l'on a, d'une part, $\nabla^2 Q_0(X^{k-1}) = A$ (qui est inversible puisque, d'après la question 1, ses valeurs propres valent 1, 1, 3 et 3) pour tout point et, d'autre part, $\nabla Q_0(0) = (0\ \ 4\ \ 5\ \ -3)^t$, on obtient le point $-A^{-1}.\ (0\ \ 4\ \ 5\ \ -3)^t$. D'après la question 4, il s'agit du point $(-1\ \ -1\ \ -2\ \ 2)^t$, avec $Q_0(-1\ \ -1\ \ -2\ \ 2) = -10$.

En fait, on remarque que ce point est celui qui annule le gradient de Q_0. En effet, on a $\nabla Q_0(X) = AX + (0\ \ 4\ \ 5\ \ -3)^t$, d'où $\nabla Q_0(-1\ \ -1\ \ -2\ \ 2) = A(-1\ \ -1\ \ -2\ \ 2)^t + (0\ \ 4\ \ 5\ \ -3)^t = 0$. Or, d'après la question 2, Q_0 est strictement convexe. L'annulation du gradient est alors une condition nécessaire et suffisante de minimalité globale et tout minimum local est global. On peut donc conclure que le point obtenu par la méthode de Newton, $(-1\ \ -1\ \ -2\ \ 2)^t$, est l'unique minimum global de Q_0 et qu'il n'y a pas d'autre minimum (local ou global).

Fin de corrigé

Exercice 2 (13 points)

Soient a et b deux réels. On considère le problème $(P_{a,b})$ d'optimisation linéaire suivant :

$$(P_{a,b}) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = 2x_1 - x_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} -x_2 \le -2 + a \\ x_1 \le 1 + b \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

1. (5 points) Résoudre $(P_{0,0})$ à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires (plus précisément, à l'aide de ce qui est appelé dans le polycopié la méthode à deux phases).

Corrigé

Le problème $(P_{0,0})$ s'écrit comme suit :

$$(P_{0,0}) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximiser } z = 2x_1 - x_2 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} -x_2 \le -2 \\ x_1 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

On constate que $(P_{0,0})$ n'admet pas l'origine comme solution réalisable. Pour appliquer la méthode à deux phases, considérons le problème auxiliaire[1] de $(P_{0,0})$:

$$\begin{array}{l} \text{Maximiser } w = -x_0 \\ \text{avec les contraintes } \begin{cases} -x_0 - x_2 \le -2 \\ -x_0 + x_1 \le 1 \\ x_0 \ge 0, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

Après introduction des variables d'écart x_3 et x_4, on obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} x_3 = -2 + x_0 + x_2 \\ x_4 = 1 + x_0 - x_1 \\ \hline w = -x_0 \end{array}$$

La première itération, forcée, consiste à faire entrer x_0 en base et faire sortir de celle-ci la variable « la plus négative », ici x_3. On obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} x_0 = 2 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 3 - x_1 - x_2 + x_3 \\ \hline w = -2 + x_2 - x_3 \end{array}$$

L'itération suivante consiste à faire entrer x_2 en base et faire sortir de celle-ci la variable qui limite le plus la croissance de x_2, ici x_0. On obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} x_2 = 2 - x_0 + x_3 \\ x_4 = 1 + x_0 - x_1 \\ \hline w = -x_0 \end{array}$$

Il n'y a plus de variable entrante, la méthode s'arrête. La solution optimale du problème auxiliaire étant nulle, le problème initial $(P_{0,0})$ est réalisable. En « oubliant » x_0 dans le dictionnaire précédent et en réintroduisant la fonction objectif z, on obtient un dictionnaire réalisable pour $(P_{0,0})$:

$$\begin{array}{l} x_2 = 2 + x_3 \\ x_4 = 1 - x_1 \\ \hline z = 2x_1 - x_2 = -2 + 2x_1 - x_3 \end{array}$$

On passe à la seconde phase : x_1 entre en base et x_4 en sort. On obtient le nouveau dictionnaire :

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 \\ x_2 = 2 + x_3 \\ \hline z = 0 - x_3 - 2x_4 \end{array}$$

Il n'y a plus de coefficient strictement positif dans l'expression de z ; on a donc atteint une solution optimale de $(P_{0,0})$, de valeur égale à 0, obtenue pour $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Fin de corrigé

[1] La variante consistant à n'ajouter x_0 que pour les contraintes associées à des b_i négatifs, autrement dit ici que dans la définition de x_3, ne change pas qualitativement les calculs et conduit au même résultat.

2. (2 points) Donner l'expression du problème dual de ($P_{0,0}$) et, à l'aide de la question 1, en donner une solution optimale.
Corrigé
Remarquons que ($P_{0,0}$) est ms sous forme standard. Le problème dual de ($P_{0,0}$) a donc pour expression :

$$\text{Minimiser } w = -2y_1 + y_2$$
$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} y_2 \geq 2 \\ -y_1 \geq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

On sait que le dernier dictionnaire associé à la résolution de ($P_{0,0}$) donne une solution optimale $\left(y_1^*, y_2^*\right)$ du problème dual : il suffit pour cela de considérer l'opposé des coefficients des variables d'écart. En considérant ici le dernier dictionnaire obtenu à la question 1, on obtient $\left(y_1^*, y_2^*\right) = (1, 2)$ comme solution optimale du problème dual, avec une valeur optimale nulle pour la fonction objectif.
Fin de corrigé

3. (2 points) On suppose dans cette question que a et b sont suffisamment petits pour que la base optimale de ($P_{0,0}$) soit encore réalisable pour ($P_{a,b}$). Que vaut alors le maximum de ($P_{a,b}$) ?
Corrigé
Puisque la base optimale de ($P_{0,0}$) est supposée encore réalisable pour ($P_{a,b}$), la variation du maximum de z est donné par $(a \quad b).\left(y_1^*, y_2^*\right)^t$, soit $a + 2b$. Comme le maximum de ($P_{0,0}$) vaut 0, le maximum de ($P_{a,b}$) vaut $a + 2b$.
Fin de corrigé

4. (4 points) Soient (P) et (Π) deux problèmes mis sous forme standard :

$$(P) : \text{Maximiser } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ avec, pour } 1 \leq i \leq m, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ et, pour } 1 \leq j \leq n, \ x_j \geq 0.$$

$$(\Pi) : \text{Maximiser } \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j x_j \text{ avec, pour } 1 \leq i \leq \mu, \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i \text{ et, pour } 1 \leq j \leq \nu, \ x_j \geq 0.$$

On dit que (P) et (Π) sont *de formulations identiques* si on a $n = \nu$, $m = \mu$ et, pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$, $c_j = \gamma_j$, $a_{ij} = \alpha_{ij}$ et $b_i = \beta_i$.
Soit (P) un problème d'optimisation linéaire mis sous forme standard comme ci-dessus.
a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n, m, les c_j, les a_{ij} et les b_i pour que (P) soit de formulation identique à celle de son problème dual mis sous forme standard.
Corrigé
Le problème dual (D) de (P) a pour expression :

$$(D) : \text{Minimiser } \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \text{ avec, pour } 1 \leq j \leq n, \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \text{ et, pour } 1 \leq i \leq m, \ y_i \geq 0.$$

Mis sous forme standard, on obtient :

$$\text{Maximiser } \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i \text{ avec, pour } 1 \leq j \leq n, \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j \text{ et, pour } 1 \leq i \leq m, \ y_i \geq 0.$$

Pour que (D) mis sous forme standard soit de formulation identique à celle de (P), il faut et il suffit d'avoir :
* $n = m$;
* pour tout j compris entre 1 et n, $b_i = -c_j$;
* pour tout i et tout j compris entre 1 et n, $a_{ij} = -a_{ji}$ (l'interversion des indices provenant du fait que, dans (P), la sommation porte sur le second indice alors que, dans (D), la sommation porte sur le premier).

Fin de corrigé

b. Montrer qu'alors (P) est non réalisable ou de valeur maximum nulle.

Corrigé

Supposons (P) réalisable, ce qui implique que (D), puisqu'il est de formulation identique à celle de (P), l'est aussi. Par conséquent, (P) est borné. Soit x^* une solution optimale de (P) ; c'est aussi une solution optimale de (D). D'après le théorème de la dualité, on a donc :

$$\text{maximum de } (P) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \text{minimum de } (D) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j^* ,$$

d'où il vient $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = 0$: le maximum de (P) vaut 0.

On peut remarquer que, mis sous forme standard, le problème dual de ($P_{0,0}$) admet la même formulation que ($P_{0,0}$) (en changeant le nom des variables et de la fonction objectif). On retrouve ici le fait que le maximum de ($P_{0,0}$) vaut 0.

Fin de corrigé

Exercice 3 (12 points)

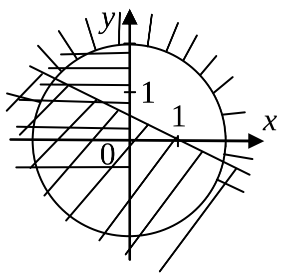
Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \le 0 \\ 1 - x - 2y \le 0 \\ -x \le 0 \end{cases}$.

On souhaite minimiser la fonction f définie pour $(x, y) \in D$ par : $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

1. (2 points) Pour quels points de D les contraintes sont-elles qualifiées ?

Corrigé

Commençons par dessiner le domaine D : celui-ci est représenté ci-dessous, par la partie non hachurée, délimitée par un arc de cercle et deux segments de droite.



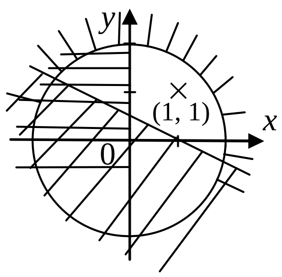
On définit trois fonctions g_1, g_2, g_3 par $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \le 0$, $g_2(x, y) = 1 - x - 2y \le 0$, $g_3(x, y) = -x \le 0$. Déterminons la matrice hessienne de g_1 : $\nabla^2 g_1(x, y) = 2I$, où I désigne la

matrice identité. La matrice hessienne de g_1 est donc (définie) positive en tout point et, par conséquent g_1 est (strictement) convexe. De même, g_2 et g_3 sont convexes car elles sont affines.
De plus, l'intérieur strict de D est non vide (par exemple le point (1, 1) en fait partie).
Un théorème du cours permet alors d'affirmer que les contraintes sont qualifiées en tout point de D.
Fin de corrigé

2. (6 points) Appliquer au problème la méthode de plus grande descente admissible en partant du point de coordonnées (1, 1). On détaillera les calculs.
Indication : on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions suivies, mais on expliquera les choix qui seront faits.
Corrigé
Déterminons le gradient $\nabla f(x, y)$ de f en un point (x, y) appartenant à D :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

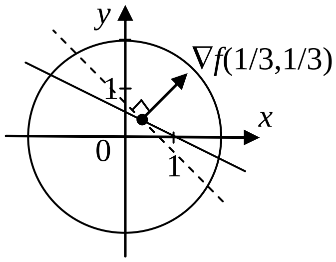
* 1^{re} itération.
Au point $(x_1, y_1) = (1, 1)$, aucune des trois contraintes n'est saturée, comme le montre le dessin ci-dessous, où le point (1, 1) est représenté par une croix.



Autrement dit, le point (1, 1) est dans l'intérieur strict du domaine. La direction de plus grande descente d_1 est donc donnée par l'opposé du gradient de f en (x_1, y_1) : $d_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Cherchons un point (x_2, y_2) sous la forme $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + s\, d_1 = \begin{pmatrix} 1 - 3s \\ 1 - 3s \end{pmatrix}$, où s est un scalaire (positif), de façon à minimiser $f(x_2, y_2)$ tout en restant dans D. Pour cela, on pose $h(s) = f(x_2, y_2) = 3(1 - 3s)^2$. Le minimum de h est atteint en $s = 1/3$. Mais cela donne $x_2 = y_2 = 0$, ce qui n'est pas un point de D. Cela provient du fait que l'on dépasse la contrainte g_2. On est donc limité par cette contrainte lors du déplacement dans la direction d_1. Le mieux que l'on puisse faire dans cette direction consiste à saturer g_2, ce qui correspond à un point (x_2, y_2) vérifiant $g_2(x_2, y_2) = 0$. Ce qui donne $1 - 3(1 - 3s) = 0$, ou encore $s = 2/9$, d'où $(x_2, y_2) = (1/3, 1/3)$.
* 2^e itération.
Au point (x_2, y_2), seule la contrainte g_2 est saturée. On cherche donc une direction qui soit à la fois de descente et admissible pour g_2. Le gradient de f en (x_2, y_2) vaut $(1, 1)^t$. Dans le dessin ci-dessous, la droite en pointillés correspond à la perpendiculaire au gradient en $(x_2, y_2) = (1/3, 1/3)$. Les directions de stricte descente sont celles qui font un angle strictement supérieur à $\pi/2$ avec le gradient. Le dessin ci-dessous permet de constater que la direction

admissible de plus grande pente, c'est-à-dire faisant le plus grand angle possible avec le gradient de f en (x_2, y_2), est donnée par le bord de la contrainte associée à g_2, dans le sens supérieur gauche.



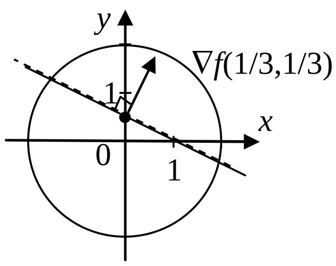
Un vecteur directeur de cette droite, dans le sens voulu, est $d_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche donc un point (x_3, y_3) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + s\, d_2 = \begin{pmatrix} 1/3 - 2s \\ 1/3 + s \end{pmatrix},$$

où s est un scalaire (positif), de façon à minimiser $f(x_3, y_3)$ tout en restant dans D. Pour cela, on pose $h(s) = f(x_3, y_3) = (1/3 - 2s)^2 + (1/3 - 2s)(1/3 + s) + (1/3 + s)^2$. Par dérivation de h, on voit que le minimum de h est atteint en $s = 1/6$, ce qui donne $x_3 = 0$ et $y_3 = 1/2$, ce qui est bien un point de D. On a donc $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$.

* 3^e itération.

Au point (x_3, y_3), les contraintes g_2 et g_3 sont saturées. On cherche donc une direction qui soit à la fois de descente et admissible. Le gradient de f en (x_3, y_3) valant $(1/2, 1)^t$, il est perpendiculaire à la contrainte g_2 et orienté vers l'intérieur du domaine : même sans la contrainte g_3, il n'y a donc pas de direction à la fois admissible et de descente. Un dessin comme celui donné ci-dessous confirme qu'il n'y a plus de direction admissible qui soit aussi de descente. En effet, la droite en traits pointillés représentant encore la perpendiculaire au gradient, on constate que toutes les directions de stricte descente sont non admissibles. La méthode s'arrête.



Le point déterminé par la méthode est finalement $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$.

Fin de corrigé

3. (2 points) La condition de Karush, Kuhn et Tucker est-elle satisfaite pour le point obtenu à la question précédente ?

Corrigé

Au point $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$, les contraintes g_2 et g_3 sont saturées. Les contraintes étant qualifiées en (x_3, y_3), la condition de Karush, Kuhn et Tucker consiste donc à savoir s'il existe deux réels positifs ou nuls, λ_2 et λ_3, vérifiant $\nabla f(x_3, y_3) = -\lambda_2 \nabla g_2(x_3, y_3) - \lambda_3 \nabla g_3(x_3, y_3)$,

c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, ce système admet pour solution $\lambda_2 = 1/2$ et $\lambda_3 = 0$. Ces deux nombres étant positifs ou nuls, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est satisfaite en $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$.
Fin de corrigé

4. (2 points) Le point trouvé à la question 2 est-il un minimum du problème ? Si oui, on précisera s'il s'agit d'un minimum global ou seulement local et on indiquera s'il peut en exister d'autres.
Corrigé
La condition de Karush, Kuhn et Tucker est ici une condition nécessaire et suffisante de minimalité globale. En effet, on a déjà constaté que les contraintes sont qualifiées en (x_3, y_3) et que les fonctions définissant les contraintes sont convexes. Montrons qu'en outre f est strictement convexe. Pour cela, considérons la matrice hessienne de f : $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant (égal au produit des valeurs propres) et la trace (égale à la somme des valeurs propres) étant tous deux positifs, on en déduit que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont strictement positives (en fait, elles valent 1 et 3) : f est strictement convexe.
Par ailleurs, dans ce contexte, on sait que tout minimum local est global et que celui-ci est unique. On peut donc conclure : $(x_3, y_3) = (0, 1/2)$ est un minimum global du problème (la valeur minimum de f valant ¼) et il n'existe pas d'autre point qui soit un minimum local ou global.
Fin de corrigé