MACS201a
Contrôle du 10 novembre 2021

Documents autorisés : polycopié et notes de cours et TD.

Durée : 3 heures et quart.

Préambule.

Tout au long de ce sujet, on pourra utiliser les définitions et résultats suivants :

(a) Pour $\theta > 0$, $\mathbf{Poi}(\theta)$ désigne la loi de Poisson qui, pour tout $k \in \mathbb{N}$, alloue au singleton $\{k\}$ la probabilité $\frac{\theta^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\theta}$. On étend au cas $\theta = 0$ en allouant à $\{0\}$ la probabilité 1. On rappelle qu'une v.a. de loi $\mathbf{Poi}(\theta)$ a une espérance et une variance toutes deux égales à θ.

(b) Dans tout le sujet on considère un espace mesurable $(\mathsf{X}, \mathcal{X})$ et on note $\mathsf{Y} = \mathbb{N}^{\mathcal{X}}$ l'espace des trajectoires des applications de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{N}$, et on note $\mathcal{Y} = \mathbb{N}^{\otimes \mathcal{X}}$ la tribu associée.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathcal{X}$ 2 à 2 disjoints,

$$\mathcal{D}_n = \{A_{1:n} \in \mathcal{X}^n \ : \ A_k \cap A_l = \emptyset \text{ pour tous } k \neq l\} \ .$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathcal{X}$ qui forment une partition de X,

$$\mathcal{Q}_n = \left\{ A_{1:n} \in \mathcal{D}_n \ : \ \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k = \mathsf{X} \right\} \ .$$

(e) On note de plus Y_+ le sous-ensemble de Y des fonctionnels *additives* de Y, c'est-à-dire $a \in \mathsf{Y}_+$ si $a = (a(A))_{A \in \mathcal{X}} \in \mathsf{Y}$ vérifie $a(A \cup B) = a(A) + a(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{D}_2$. On note alors $\mathcal{Y}_+ = \{A \cap \mathsf{Y}_+ \ : \ A \in \mathcal{Y}\}$ qui forme une tribu de Y_+.

(f) Soit ν une mesure finie sur l'espace mesurable $(\mathsf{X}, \mathcal{X})$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On dit qu'un processus $Z = (Z(A))_{A \in \mathcal{X}}$ est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité ν définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si chaque $Z(A)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

  (i) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{D}_2$, $Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)$.

  (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A_{1:n} \in \mathcal{D}_n$, $Z(A_1), \ldots, Z(A_n)$ sont n variables aléatoires indépendantes et, pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$Z(A_k) \sim \mathbf{Poi}(\nu(A_k)) \ .$$

(g) On rappelle que si U_1 et U_2 sont 2 v.a. indépendantes telles que $U_k \sim \mathbf{Poi}(\theta_k)$ pour $k = 1, 2$, alors $U_1 + U_2 \sim \mathbf{Poi}(\theta_1 + \theta_2)$. Cette propriété fait que les deux propriétés (i) et (ii) sont bien compatibles.

(h) On peut voir la mesure aléatoire de Poisson ci-dessus comme une variable aléatoire $Z = (Z(A))_{A \in \mathcal{X}}$ à valeurs dans l'espace des trajectoires Y muni de la tribu $\mathcal{Y}$ pour laquelle les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées. Comme la propriété (i) équivaut à dire que Z est à valeurs dans Y_+, on peut directement voir la mesure aléatoire de Poisson ci-dessus comme une variable aléatoire $Z = (Z(A))_{A \in \mathcal{X}}$ à valeurs dans $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$ pour laquelle la propriété (ii) est vérifiée.

(i) Pour tout $x \in \mathsf{X}$, on note δ_x la mesure de Dirac en x, qui vérifie $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ pour tout $A \in \mathcal{X}$. On peut donc voir δ_x comme un élément de Y_+.

(j) Pour tout $A \in \mathcal{X}$, on note $\xi(A;\cdot)$ l'application de Y_+ dans $\mathbb{N}$ qui à a associe $\xi(A;a) := a(A)$, i.e.$(\xi(A;\cdot))_{A\in\mathcal{X}}$ est le processus canonique des trajectoires de Y_+. On note

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcap_{1\le k\le n} [\xi(A_k;\cdot)]^{-1}(\{j_k\}) \;:\; n \in \mathbb{N}^*,\; j_{1:n} \in \mathbb{N}^n,\; A_{1:n} \in \mathcal{Q}_n \right\} ,$$

qui est donc une classe d'éléments de $\mathcal{Y}_+$. On peut montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{Y}_+$ et qu'une probabilité sur $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$ est entièrement caractérisée par sa valeur prise sur les éléments de $\mathcal{C}$.

(k) On peut montrer que $(a,b) \mapsto a+b$ est mesurable de $(\mathsf{Y}_+^2, \mathcal{Y}_+^{\otimes 2})$ dans $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$, où la somme $a+b$ est définie par $(a+b)(A) = a(A) + b(A)$ pour tout $A \in \mathcal{X}$.

(l) Soit μ une probabilité sur $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute partition $A_{1:n} \in \mathcal{Q}_n$ et tout $z_{1:n} \in \mathbb{C}^n$, on note

$$\mathcal{L}^\mu(A_{1:n}, z_{1:n}) = \int \left(\prod_{k=1}^n z_k^{a(A_k)} \right) \mu(\mathrm{d}a) .$$

En particulier pour une v.a. $Y = (Y(A))_{A\in\mathcal{X}}$ à valeurs dans $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note

$$\mathcal{L}^Y(A_{1:n}, z_{1:n}) = \mathcal{L}^{\mathbb{P}^Y}(A_{1:n}, z_{1:n}) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n z_k^{Y(A_k)} \right] .$$

On note

$$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \le 1 \} .$$

On remarque que la connaissance de $\mathcal{L}^\mu(A_{1:n}, z_{1:n})$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{1:n} \in \mathcal{Q}_n$ et $z_{1:n} \in \mathbb{D}^n$ permet de caractériser la probabilité μ sur $\mathcal{C}$ et donc d'après le point (j) sur toute la tribu $\mathcal{Y}_+$.

(m) De même pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, on note

$$\mathcal{L}^Y(A_{1:n}, z_{1:n} \,|\, \mathcal{G}) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n z_k^{Y(A_k)} \middle| \mathcal{G} \right] ,$$

et l'on peut montrer que la connaissance de $\mathcal{L}^Y(A_{1:n}, z_{1:n} \,|\, \mathcal{G})$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{1:n} \in \mathcal{Q}_n$ et $z_{1:n} \in \mathbb{D}^n$permet de caractériser la loi conditionnelle $B \mapsto \mathbb{P}[Y \in B \,|\, \mathcal{G}]$ sur tout $B \in \mathcal{Y}_+$.

(n) D'après les points (h) et (l), on obtient que $Z = (Z(A))_{A\in\mathcal{X}}$ est une mesure aléatoire de Poisson de mesure d'intensité ν si et seulement si c'est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$ telle que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{1:n} \in \mathcal{Q}_n$ et $z_{1:n} \in \mathbb{D}^n$,

$$\mathcal{L}^Z(A_{1:n}, z_{1:n}) = \exp\left(-\nu(\mathsf{X}) + \sum_{k=1}^n z_k\, \nu(A_k) \right) .$$

Préparation.

Réfléchir à la mesurabilité de l'application $\Delta : x \mapsto \delta_x$ de $(\mathsf{X}, \mathcal{X})$ dans $(\mathsf{Y}_+, \mathcal{Y}_+)$. On pourra introduire $\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{Y}_+ \;:\; \Delta^{-1}(A) \in \mathcal{X} \right\}$ et montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.