TD Notations de Dirac, la mesure en physique quantique ; exemple de la polarisation de la lumière

Objectifs

- Introduire le formalisme de Dirac en base discrète
- Relier un phénomène physique et des observations connus (polarisation de la lumière) au formalisme de la mesure.
- Appliquer les postulats de la mesure à l'expérience des polariseurs croisés pour un photon unique
- Constater le caractère non intuitif de certains résultats

I Description d'expérience : polariseurs en série

I.1 Situation classique

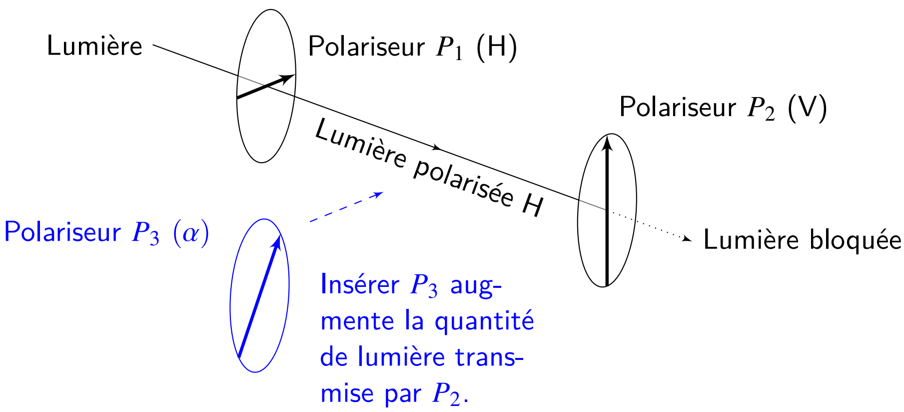

FIGURE 1 – Transmission de lumière à travers 2 polariseurs croisés, puis 3 polariseurs.

On envoie de la lumière d'intensité I et de polarisation quelconque sur un système composé de deux polariseurs en série P_1 et P_2 et croisés (c'est-à-dire que la polarisation transmise par P_2 est orthogonale à celle transmise par P_1. Par exemple supposons que P_1 transmet seulement la polarisation horizontale et P_2 seulement la polarisation verticale.

L'intensité transmise I_{T12} est alors nulle.

Une expérience bien connue consiste à ajouter entre P_1 et P_2 un troisième polariseur P_3 faisant l'angle α avec la direction horizontale, (figure 1). Il est intéressant de se demander ce que devient l'intensité transmise I_{T132} alors qu'on a ajouté un filtre à ce système qui ne transmettait déjà pas de lumière.

Pour le déterminer, on applique la loi de Malus :

$$I_{T13} = \cos^2 \alpha \cdot I_{T1}$$
$$I_{T132} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot I_{T1}$$

et l'on constate que le système de 3 polariseurs transmet effectivement plus de lumière que le système de 2 polariseurs croisés.

Intuition ?

I.2 Situation quantique

On souhaite à présent répéter cette expérience avec un état quantique de la lumière, à savoir un photon unique (un quantum d'énergie du rayonnement électromagnétique).

D'après vous quel sera le résultat de l'expérience dans ce cas ?

Pour répondre à cette question, il faut d'abord rappeler que le photon est « indivisible ». L'intensité (ou plutôt ici l'énergie) transmise a deux valeurs possibles 0 ou $\hbar\omega$ (autrement dit sur le détecteur de photon unique placé à la sortie du système de 3 polariseurs, 0 “clic” ou 1 “clic”) !

En fait, on ne doit plus se demander quelle est l'intensité transmise mais plutot quelle est la probabilité pour que le photon unique soit transmis. Le principe de la mesure nous permettra de calculer cette probabilité.

II Rappel : notations de Dirac, combinaison linéaire d'états du système

L'état d'un système quantique est décrit par un vecteur d'un espace de Hilbert (espace vectoriel hilbertien que l'on notera $\mathcal{H}$). C'est un espace vectoriel défini sur le corps des complexes muni d'un produit hermitien (analogue au produit scalaire) défini positif.

Une notation pratique est la notation « braket » :

ket	bra
$\|u\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \|i\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$	$\langle u\| = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \langle i\| = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* & \dots & c_n^* \end{pmatrix}$

Où n est la dimension de $\mathcal{H}$, qui dépend du nombre de degrés de liberté du système ; et $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, ... |n\rangle\}$ une base orthonormée. Ces formules s'étendent au cas de la dimension infinie, cf. un prochain TD, mais nous n'en parlerons pas ici.

Sa dimension dim($\mathcal{H}$) dépendra du nombre de degrés de liberté du système pris en compte dans sa modélisation. Elle peut être finie, infinie dénombrable, ou infinie indénombrable (cas du spectre continu).

Dans ce cas, le produit hermitien (forme définie positive) s'écrit :

$$\langle v|u\rangle = \begin{pmatrix} d_1^* & d_2^* & \dots & d_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} d_i^* c_i$$

Approche phénoménologique : ce produit hermitien est un nombre complexe qui correspond physiquement à l'« amplitude de probabilité » pour passer (lors d'une mesure par exemple) de l'état $|u\rangle$ à l'état $|v\rangle$ (dans le cas où les vecteurs d'état sont normés).

Question 1 Écrire la relation entre $\langle u|v\rangle$ et $\langle v|u\rangle$

Réponse 1 $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$

III Polarisation de la lumière comme exemple de mesure projective en physique quantique

III.1 Méthode

- Déterminer l'état avant mesure $|\psi\rangle$.
- Repérer une base orthonormée $\{|\varphi_i\rangle\}_{i\in\{1\ldots n\}}$ de l'espace de Hilbert où la grandeur à mesurer est parfaitement définie. (Si on connaît l'opérateur linéaire associé à la grandeur, ce sera la base de ses états propres.)
- La mesure projette le système quantique sur l'un des états propres $|\varphi_i\rangle$.
- la probabilité d'obtenir l'état propre $|\varphi_i\rangle$ à partir de l'état de départ $|\psi\rangle$ est égale à $p_i = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$.

III.2 Exemple de la polarisation de la lumière

Question 2 On choisit un système d'axes, horizontal et vertical, selon lesquels on mesure la polarisation d'un photon. Proposer une base orthonormée définissant un espace de Hilbert pertinent pour ce système. Quelle est sa dimension ?

Réponse 2
La polarisation est un système à 2 dimensions, on le voit déjà par notre choix de 2 axes dans l'espace réel. L'espace de Hilbert peut donc être décrit par une base à 2 états, par exemple les états $|H\rangle$ et $|V\rangle$, correspondant aux polarisations horizontale et verticale. On peut toujours supposer ces états normés ; et on peut aussi les supposer orthogonaux, car un photon polarisé horizontalement n'a aucune chance de traverser un polariseur vertical et vice-versa.

III.3 Application au cas du photon unique

On suppose à présent que l'on a un photon unique incident sur le prisme séparateur de polarisation de la figure 2.

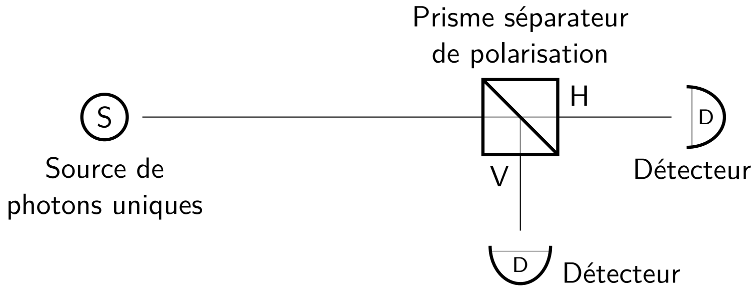

FIGURE 2 – Mesure de polarisation de photons uniques. Pour chaque photon émis par la source, un seul des deux détecteurs « clique », chaque détecteur correspondant à un résultat de mesure (polarisation H ou V).

Question 3 Que se passe-t-il en pratique ?

Réponse 3
Le prisme séparateur fait bien apparaitre la dimension 2 de l'espace de Hilbert avec les deux vecteurs de base $|H\rangle$ et $|V\rangle$

En pratique, on observe qu'un seul des deux détecteurs « clique » indiquant que l'état du photon à la sortie du prisme et avant les détecteurs est soit $|H\rangle$ soit $|V\rangle$.

C'est tout ce qu'on peut déduire sur une seule réalisation de l'expérience. Pour aller plus loin, et faire apparaître la probabilité des résultats, on doit répéter l'expérience N fois.

On envoie ensuite, un par un, N photons uniques sur le prisme et on compte le nombre de « clics » sur chacun des détecteurs. On obtient respectivement N_H et N_V, avec $N_H + N_V = N$.

Question 4 Que peut-on en déduire sur l'état de polarisation du photon ?

Réponse 4
On en déduit les probabilités de mesurer H ou V, qui sont resp N_H/N et N_V/N et donc l'état de polarisation du photon est : $|\psi\rangle = c_H |H\rangle + c_V |V\rangle$ avec $|c_H|^2 = N_H/N$ et $|c_V|^2 = N_V/N$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= c_H |H\rangle + c_V |V\rangle \qquad \text{avec } |c_H|^2 + |c_V|^2 = 1 \\ &= \cos\theta |H\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |V\rangle \end{aligned}$$

(à un facteur de phase global près).

Question 5 Si l'on tourne le prisme d'un angle α dans le sens trigonométrique (ou de manière équivalente, on place devant le prisme une lame d'onde dont l'axe rapide fait un angle $\alpha/2$ avec la direction horizontale), que deviennent les états propres ?

Réponse 5 Les nouveaux états propres correspondent aux axes du prisme :

$$\begin{aligned} |H_\alpha\rangle &= \cos\alpha |H\rangle + \sin\alpha |V\rangle \\ |V_\alpha\rangle &= -\sin\alpha |H\rangle + \cos\alpha |V\rangle \end{aligned}$$

III.4 Probabilité de traverser plusieurs prismes séparateurs de polarisation successifs

Question 6 On a deux prismes en série, c'est-à-dire qu'on place le deuxième à la sortie H du premier et tourné de 90° par rapport au premier. On suppose toujours un photon unique incident avec un état de polarisation quelconque. Quelle est la probabilité de détecter le photon à la sortie H_{90} du deuxième prisme ? Justifier votre réponse d'après votre intuition physique, d'après le principe de la mesure projective rappelé ci-dessus.

Réponse 6

- Physiquement, quand les deux prismes sont orthogonaux, il ne reste plus de lumière en sortie autrement dit la probabilité pour le photon unique de traverser cet appareil constitué de 2 filtres qui sélectionnent des polarisations croisées est nulle.
- D'après le principe de la mesure, l'état du système en sortie du premier prisme est $|H\rangle$.
- La sortie H_{90} du deuxième prisme sélectionne l'état $|V\rangle$.
- La probabilité que le photon soit détecté à cette sortie est donc $|\langle V|H\rangle|^2 = 0$. **Comme dans la situation classique, rien ne passe par ce chemin.**

Question 7 On place à présent un troisième prisme tourné d'un angle 45° entre les deux premiers. Quelle est la probabilité de détecter un photon en sortie du système de trois filtres ? On détaillera l'état de polarisation après chaque prisme pour un photon incident quelconque.

Réponse 7

- L'état est décomposé sur les vecteurs propres $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ du prisme. $|\psi\rangle = \cos\theta |H\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |V\rangle$
L'état en sortie du premier prisme d'axe horizontal est $|H\rangle$ avec la probabilité $p_1 = \cos^2\theta$.

- Pour connaître la probabilité de détecter un photon en sortie du second prisme tourné de 45°, il faut écrire cet état dans la base des états propres de ce dernier.

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H_{45}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|V_{45}\rangle$$

  On a la probabilité totale $p_{13} = \frac{1}{2}\cos^2\theta$ qu'un photon soit transmis et il est dans l'état $|H_{45}\rangle$
- On recommence de la même manière avec le troisième prisme dont l'axe est vertical :

$$|H_{45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle$$

  Globalement, on a la probabilité totale $p_{132} = \frac{1}{4}\cos^2\theta$ de détecter un photon en sortie de ce système de 3 prismes.

Remarque : on peut faire la même expérience avec un flux d'atomes dont on mesure le spin (expérience de Stern et Gerlach)

III.5 Utilisation de projecteurs pour calculer la probabilité d'un état final

La probabilité pour que l'on mesure la polarisation H (resp. V) peut s'écrire $P(H) = \langle\psi|H\rangle\langle H|\psi\rangle$ (resp. $P(V) = \langle\psi|V\rangle\langle V|\psi\rangle$) où $\hat{P}_H = |H\rangle\langle H|$ et $\hat{P}_V = |V\rangle\langle V|$ sont des projecteurs ; par construction, l'état final après la mesure est $|H\rangle$ si on a trouvé H (resp. $|V\rangle$ si on a trouvé V), qui peut aussi s'écrire : $|H\rangle = \frac{\hat{P}_H|\psi\rangle}{||\hat{P}_H|\psi\rangle||}$ (resp. $|V\rangle = \frac{\hat{P}_V|\psi\rangle}{||\hat{P}_V|\psi\rangle||}$).

Attention : ce que l'on vient de montrer ici est que l'on peut utiliser le projecteur pour calculer la probabilité d'un état final, mais il ne suffit pas de l'appliquer directement pour déterminer l'état final ! Tous les états finaux sont possibles a priori, et ce n'est qu'une fois connu le résultat de la mesure qu'on peut écrire l'état final avec le bon projecteur ! La nuance est subtile ; la mesure projette mais ne se résume pas à l'action d'un projecteur.

Dans le cas des deux prismes en série, on peut utiliser l'orthogonalité des deux projecteurs pour montrer que l'on obtient une probabilité nulle de détecter le photon à cette sortie. (on a bien sûr le cas particulier où l'état initial serait $|V\rangle$, qui donnerait une probabilité nulle dès la sortie H du premier prisme).

On peut également calculer les projecteurs associés au prisme tourné d'un angle α dans la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$:

$$\hat{P}_{H_\alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$
$$\hat{P}_{V_\alpha} = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

Alors, si l'on considère le vecteur $|u\rangle = \hat{P}_V\hat{P}_{H_\alpha}\hat{P}_H|\psi\rangle = |V\rangle\langle V|H_\alpha\rangle\langle H_\alpha|H\rangle\langle H|\psi\rangle$, on remarque que sa norme au carré s'écrit :

$$\begin{aligned} ||\,|u\rangle\,||^2 &= \langle\psi|H\rangle\langle H|H_\alpha\rangle\langle H_\alpha|V\rangle\overbrace{\langle V|V\rangle}^{=1}\langle V|H_\alpha\rangle\langle H_\alpha|H\rangle\langle H|\psi\rangle \\ &= |\langle H|\psi\rangle|^2\cdot|\langle H_\alpha|H\rangle|^2\cdot|\langle V|H_\alpha\rangle|^2 \end{aligned}$$

Qui est bien la probabilité cumulée de passage à travers les 3 prismes.

Polariseurs d'Alice	↕	↔	⤢	↕	⤢	⤢	⤡	↕	⤡
Séquence de bits	1	0	0	1	0	0	1	1	1
Analyseurs de Bob	+	×	+	+	×	×	+	+	×
Mesures de Bob	1	1	0	1	0	0	1	1	1
Bits retenus	1	–	–	1	0	0	–	1	1

FIGURE 3 – Cryptographie quantique (BB84) : transmission de photons polarisés entre Alice et Bob. Seuls ceux pour lesquels Bob a fait la mesure selon la même base qu'Alice seront retenus. Le fait de communiquer publiquement a posteriori la base choisie pour chaque photon ne révèle pas l'information du résultat de mesure, et arrive trop tard pour l'espion qui aurait intercepté les photons pour tenter d'en mesurer la polarisation.

IV Pour aller plus loin : distribution de clé quantique : exemple du protocole BB84

[2]

Le fait que la mesure détruise l'état du système a des applications cryptographiques. Supposons que Alice et Bob veuillent partager un secret (typiquement une clé de chiffrement) en s'envoyant des objets quantiques dont l'état est ensuite mesuré : par exemple des photons polarisés transmis sur une fibre optique. Si un espion (Eve) intercepte ces photons et mesure leur polarisation, leur état est changé par la mesure ; même si Eve renvoie à Bob des photons dans l'état obtenu par Eve après sa mesure, il pourra s'agir d'un état différent de celui qui avait été choisi par Alice, et Alice et Bob peuvent faire en sorte de s'en rendre compte.

Le protocole BB84 (proposé comme son nom l'indique en 1984 par Bennett et Brassard) permet de générer une séquence binaire commune entre Alice et Bob, avec des contraintes physiques garantissant que celle-ci est secrète, ou alors que la communication peut avoir été espionnée et la génération doit avorter. Le principe central en est que Alice transmet des bits 0 ou 1 en les encodant sur l'état de polarisation des photons, mais en choisissant aléatoirement entre la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ ($|H\rangle$ pour 0, $|V\rangle$ pour 1) et la base $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ inclinée à $\pm 45°$ ($|D\rangle$ pour 0, $|A\rangle$ pour 1). **C'est l'utilisation d'états non-orthogonaux utilisés pour encoder le même bit sur une base ou une autre, qui rend l'interception impossible à cacher :** les lois de la physique quantique ne permettent pas de réaliser une mesure qui serait capable de distinguer des états non-orthogonaux sans faire d'erreur.

Sans entrer dans les détails, le protocole est illustré figure 3 :

- Alice envoie une séquence de bits aléatoires matérialisée par la polarisation des photons successifs ;
- Bob mesure la polarisation des photons en choisissant aléatoirement la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ ou $\{|D\rangle, |A\rangle\}$; il obtient les mêmes bits qu'Alice pour les photons où la base de mesure est la même, et des bits aléatoires pour les autres ;
- Alice et Bob communiquent a posteriori (via un canal classique qui peut être public, et doit seulement être authentifié) les bases qu'ils ont utilisées pour chaque bit, ce qui leur permet de ne retenir que les bons ;
- une phase de post-traitement, en communiquant sur le canal classique, permet à Alice et Bob d'évaluer un éventuel taux d'erreurs (relié statistiquement à la quantité d'information qui pourrait avoir été espionnée) et, si ce dernier est suffisamment faible, distiller une clé finale identique et parfaitement secrète entre Alice et Bob.

On suppose qu'Eve peut intercepter un par un les photons émis par Alice, mesurer leur état de polarisation, et tenter de dissimuler sa présence en renvoyant à Bob des photons dans l'état qu'elle a détecté.

Question 8 Supposons qu'Eve a intercepté un photon. Quelles mesures peut-elle faire pour déterminer si Alice a envoyé 0 ou 1 ?

Réponse 8
Elle doit choisir une base de mesure de la polarisation (ou un angle du polariseur) car elle ne sait pas si Alice a encodé avec les états $|H\rangle, |V\rangle$ ou $|D\rangle, |A\rangle$

.

Question 9 En supposant qu'Eve choisit les mêmes bases que l'aurait fait Bob, étudier tous les cas de figure de mesure qu'elle peut faire et donner les probabilités des différents résultats. On pourra faire une hypothèse sur l'état envoyé par Alice pour faire le raisonnement.

Réponse 9
Si Alice a envoyé $|H\rangle$ par exemple et qu'Eve mesure dans la base $|H\rangle, |V\rangle$, Eve obtient bien le message d'Alice, soit dans ce cas, 0. Si Eve choisit de mesurer dans la base $|D\rangle, |A\rangle$, alors elle obtient 0 ou 1 avec des probabilités égales à $1/2$. Dans ce cas, elle a 50% de chances d'erreur.

Question 10 Quelle est la probabilité pour qu'en mesurant le photon renvoyé par Eve, Bob obtienne la même valeur qu'Alice ?

Réponse 10
Si Eve a mesuré dans la « bonne base », elle a renvoyé le « bon état » et Bob obtient le même résultat qu'Alice. Dans le cas contraire, qu'elle renvoie $|D\rangle$ ou $|A\rangle$ Bob a 50% de chances de ne va pas trouver le bon résultat. (On suppose ici que Bob mesure dans la même base qu'Alice puisque sinon, ils n'utilisent pas ce bit particulier et il n'intervient pas dans leur évaluation de l'erreur).

Question 11 Alice et Bob choisissent au hasard un sous-ensemble de leur clé et le comparent publiquement. Comme Eve a une chance sur deux d'orienter son analyseur dans la bonne direction, quel pourcentage d'erreur Alice et Bob vont-ils enregistrer en présence d'un espion ?

Réponse 11
Alice et Bob vont enregistrer une différence dans 25 % des cas, bien pire que ce qu'on aurait pu espérer, et surtout qui ne permettra pas de garantir que la quantité d'information pouvant avoir fuité reste inférieure à celle partagée par Alice et Bob. Les bits seront donc inexploitables, le protocole avortera et, en supposant qu'Alice et Bob avaient dimensionné leur système pour fonctionner et peuvent vérifier qu'il n'est pas défaillant, ils pourront conclure qu'ils sont sur écoute.

V Plus étrange : forcer un système quantique à rester dans un état par des mesures successives

[4]

Un système quantique soumis à une succession de mesures très rapprochées n'évolue pas dans le temps : toute opération de mesure projette le système dans l'état propre normalisé de l'observable mesurée, associé à la valeur propre obtenue en tant que résultat de la mesure effectuée. La vitesse d'évolution du vecteur d'état étant finie, la probabilité d'obtenir la même valeur lors d'une deuxième mesure rapprochée dans le temps est relativement grande – en quelque sorte, la deuxième mesure « freine » l'évolution. Si on procède à une série de mesures très voisines dans le temps, on conçoit que se produise un ralentissement de la dynamique. L'argument qui suit montre, dans un cas d'école, que dans la limite d'un nombre infini de mesures effectuées entre deux temps fixés t_i et t_f, la probabilité pour le système d'être à l'instant t_f dans le même état qu'à l'instant t_i est égale à 1.

V.1 Évolution dans le temps

On peut définir l'opérateur évolution dans le temps $\hat{U}$, tel que

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_1, t_2)\,|\psi(t_1)\rangle$$

Les postulats de la mécanique quantique nous disent que l'évolution dans le temps d'un système est régie par l'équation de Schrödinger, qui fait intervenir l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$.

$$i\hbar\frac{\partial\,|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

ou encore :

$$i\hbar\frac{d\,|\psi(t)\rangle}{|\psi(t)\rangle} = \hat{H}dt$$

qui s'intègre en

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)\,|\psi(0)\rangle$$

autrement dit

$$\hat{U}(0,t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)$$

V.2 Expérience de pensée sur l'effet Zenon

On suppose que le hamiltonien du système donne une évolution qui se traduit par une rotation de la polarisation du photon proportionnelle au temps. Notre système est un photon dont l'état initial est une polarisation horizontale $|H\rangle$

$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(0,t_1)\,|\psi(0)\rangle$$
$$|H_{\alpha_1}\rangle = \hat{U}(0,t_1)\,|H\rangle \text{ avec } \alpha_1 = kt_1$$

On place un polariseur dont l'axe est horizontal sur le trajet du photon

Question 12 Ecrire la probabilité d'avoir un probabilité d'avoir un photon transmis en fonction de t_1

Réponse 12

$$p_H(t_1) = \langle H|H_{\alpha_1}\rangle = \cos^2(kt_1)$$

Question 13 Si le photon a effectivement traversé le polariseur horizontal à t_1 et que l'on refait la mesure (même polariseur horizontal) à t_2, exprimer la probabilité d'avoir un photon transmis, en fonction de t_1 et t_2.

Réponse 13
A t_1, l'état du photon est de nouveau $|H\rangle$, donc la probabilité est :

$$p_H(t_2/t_1) = \langle H|H_{\alpha_2}\rangle = \cos^2(k(t_2 - t_1))$$

Question 14 On suppose maintenant que l'on effectue une série de N mesures aux instants $t_j = j\Delta t$ avec $\Delta t = t/N$ où t et N sont fixés. Ecrire la probabilité d'avoir un photon transmis (dans l'état $|H\rangle$) au bout des N mesures. Quelle est la limite de cette probabilité quand N devient très grand, c'est à dire que l'on mesure "en continu" ?

Réponse 14
probabilité d'avoir un photon transmis après N mesures :

$$= p_H(t_1)p_H(t_2/t_1)...p_H(t_N/t_{N-1}) \simeq [1 - k^2\frac{t^2}{N^2}]^N$$

qui tend vers 1 quand N tend vers l'∞.

$$(1 - \frac{C}{N^2})^N = \exp(N\ln(1 - \frac{C}{N^2})) \simeq \exp -\frac{C}{N} \simeq 1$$

La mesure « en continu » bloque l'évolution du système ! ! !

Références

[1] Basdevant, J. L., Dalibard, J., et Joffre, M. (2002). Mécanique quantique. Editions Ecole Polytechnique.

[2] Le Bellac, Michel. Physique quantique (nouvelle édition). EDP sciences, 2012.

[3] Feynman, Richard, Robert Leighton, and Matthew Sands. Le cours de physique de Feynman. Dunod, 2013.

[4] Haroche, Serge. "Physique quantique." L'annuaire du Collège de France. Cours et travaux 111 (2012) : 117-128.