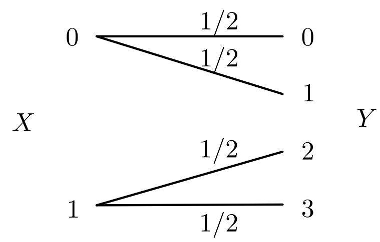
Département COMELEC UE COM105

Corrigé du TD 7

Exercice 1

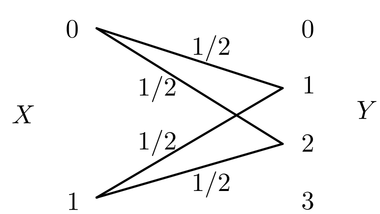
1. Pour $p = 0$, le diagramme de canal est :



C'est un canal à entrée binaire donc $C \leq 1$. Car à partir de la sortie on peut reconstruire l'entrée du canal, $H(X|Y) = 0$. Donc la capacité est égale à

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X}(H(X) - H(X|Y)) = \max_{P_X} H(X) = 1.$$

2. Pour $p = 1$, le diagramme du canal est :



Les sorties $Y = 0$ et $Y = 3$ ont zéro probabilité d'apparaître et peuvent donc être négligées. Si on ne considère que les sorties $Y = 1$ et $Y = 2$, on retrouve un canal binaire symétrique avec probabilité de changement de bit égale à $1/2$. La capacité du canal est donc égale à $C = 1 - H_b(1/2) = 0$.

3. (a) Nous avons

$$\begin{aligned} H(Y|X=0) = H(Y|X=1) &= -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1-p}{2}\log_2\frac{1-p}{2} - \frac{p}{2}\log_2\frac{p}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \left(\frac{1-p}{2} + \frac{p}{2}\right)\log_2\frac{1}{2} - \frac{1-p}{2}\log_2(1-p) - \frac{p}{2}\log_2 p \\ &= 1 + \frac{1}{2}H_{\mathrm{b}}(1-p)\,. \end{aligned}$$

Indépendamment de la loi de l'entrée X (et du paramètre q), on obtient donc :

$$H(Y|X) = 1 + \frac{1}{2}H_{\mathrm{b}}(1-p)\,.$$

(b) Car Z est une fonction de Y, l'entropie conditionelle $H(Z|Y) = 0$. En utilisant la règle de chainage nous obtenons donc d'un côté :

$$H(Y, Z) = H(Y) + H(Z|Y) = H(Y)$$

et de l'autre côté

$$H(Y, Z) = H(Z) + H(Y|Z).$$

On trouve l'égalité dans l'énoncé en combinant ces deux équations.

(c) Pour trouver $H(Z)$ nous calculons la loi de Z :

$$\begin{aligned} P_Z(1) &= P_Y(0) + P_Y(3) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,3) = P_X(0)P_{Y|X}(0|0) + P_X(1)P_{Y|X}(1|3) \\ &= q\frac{1-p}{2} + (1-q)\frac{1-p}{2} = \frac{1-p}{2}. \end{aligned}$$

Comme Z est binaire, nous obtenons directement que

$$H(Z) = H_b\left(\frac{1-p}{2}\right).$$

On note que l'entropie $H(Z)$ ne dépend pas du paramètre q et donc du choix de la loi de l'entrée X.

(d) Si $Z = 0$ alors $Y \in \{0, 3\}$ et l'entropie conditionelle est bornée par

$$H(Y|Z = 0) \leq \log_2(2) = 1. \tag{1}$$

Pareil, si $Z = 1$, alors $Y \in \{1, 2\}$ et

$$H(Y|Z = 1) \leq \log_2(2) = 1. \tag{2}$$

En combinant ces deux inégalités on obtient que

$$H(Y|Z) = P_Z(0)H(Y|Z = 0) + P_Z(1)H(Y|Z = 1) \leq P_Z(0) + P_Z(1) = 1. \tag{3}$$

On note qu'en choisissant $q = 1/2$ la sortie Y suit la loi

$$P_Y(0) = \frac{1-p}{4}, \qquad P_Y(1) = \frac{1+p}{4}, \qquad P_Y(2) = \frac{1+p}{4}, \qquad P_Y(3) = \frac{1-p}{4}.$$

Donc pour $Z = 1$, Y est uniforme sur l'alphabèt $\{0, 3\}$, et pour $Z = 0$, Y est uniforme sur sur l'alphabèt $\{1, 2\}$. On déduit que pour $q = 1/2$ les entropies conditionelles $H(Y|Z = 0) = H(Y|Z = 1) = 1$ et donc $H(Y|Z) = 1$. Avec l'inégalité (3) cela implique que

$$\max_{q \in [0,1]} H(Y|Z) = 1.$$

(e) Avec les résultats précédents on obtient pour la capacité du canal :

$$\begin{aligned} C &= \max_{q\in[0,1]} [H(Y) - H(Y|X)] = \max_{q\in[0,1]} [H(Z) + H(Y|Z) - H(Y|X)] \\ &= \left[\max_{q\in[0,1]} H(Y|Z)\right] + H_b\left(\frac{1-p}{2}\right) - 1 - \frac{1}{2}H_b(1-p) \\ &= H_b\left(\frac{1-p}{2}\right) - \frac{1}{2}H_b(1-p). \end{aligned}$$

Exercice 2

1. L'entrée X et la sortie Z du canal composé prennent valeurs en $\{0, 1\}$. Nous trouvons par la loi de la probabilité totale et la règle de Bayes :

$$\begin{aligned} P_{Z|X}(0|0) = & \sum_{y\in\{0,\Delta\}} P_{ZY|X}(0, y|0) = \sum_{y\in\{0,\Delta\}} P_{Z|YX}(0|y, 0)P_{Y|X}(y|0) \\ = & \sum_{y\in\{0,\Delta\}} P_{Z|Y}(0|y)P_{Y|X}(y|0) = 1 \cdot (1-\epsilon) + 1/2 \cdot \epsilon = 1 - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
P_{Z|X}(1|1) = & \sum_{y\in\{0,\Delta\}} P_{ZY|X}(1,y|1) = \sum_{y\in\{1,\Delta\}} P_{Z|YX}(1|y,1)P_{Y|X}(y|1) \\
= & \sum_{y\in\{0,\Delta\}} P_{Z|Y}(1|y)P_{Y|X}(y|1) = 1\cdot(1-\epsilon)+1/2\cdot\epsilon = 1-\frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

En conséquence, $P_{Z|X}(1|0) = P_{Z|X}(0|1) = \frac{\epsilon}{2}$ et le diagramme du canal composé est donc comme indiqué dans la figure suivante :

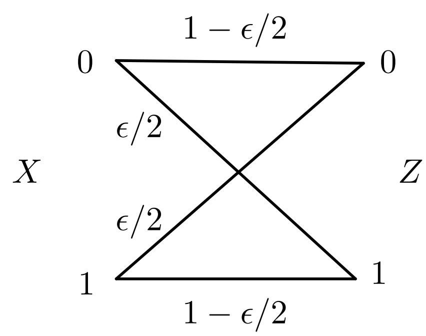


FIGURE 1 – Diagramme du canal composé.

On reconnait un BSC($\epsilon/2$).

2. (a) En utilisant la règle de Bayes nous trouvons que :

$$
P_{X|YZ}(x|y,z) = \frac{P_{XYZ}(x,y,z)}{P_{YZ}(y,z)} = \frac{P_X(x)P_{Y|X}(y|x)P_{Z|Y}(z|y)}{P_Y(y)P_{Z|Y}(z|y)} = \frac{P_X(x)P_{Y|X}(y|x)}{P_Y(y)} = P_{X|Y}(x|y).
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
H(X|Y,Z) &= -\sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x,yz)\log_2 P_{X|YZ}(x|y,z) = -\sum_{x,y} \underbrace{\left(\sum_z P_{XYZ}(x,y,z)\right)}_{P_{XY}(x,y)} \log_2 P_{X|Y}(x|y) \\
&= -\sum_{x,y} P_{XY}(x,y)\log_2 P_{X|Y}(x|y) = H(X|Y)
\end{aligned}
$$

Une autre façon de trouver le résultat souhaité est d'utiliser la règle de chaînage comme dans le TD6 :

$$
H(X,Z|Y) = H(X|Y) + H(Z|X,Y) = H(Z|Y) + H(X|Y,Z).
$$

Or pour tout triple (x,y,z) il vaut que $P_{Z|YX}(z|y,x) = P_{Z|Y}(z|y)$ et

$$
\begin{aligned}
H(Z|Y,X) &= \sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x,y,z)\log_2 P_{Z|YX}(z|y,x) = \sum_{x,y,z} P_{XYZ}(x,yz)\log_2 P_{Z|Y}(z|y) \\
&= \sum_{y,z} P_{YZ}(y,z)\log_2 P_{Z|Y}(z|y) = H(Z|Y).
\end{aligned}
$$

En combinant les deux égalités on obtient donc $H(X|Y) = H(X|Y,Z)$.

(b) On utilise le résultat à la question précédente :

$$
I(X;YZ) = H(X) - H(X|Y,Z) = H(X) - H(X|Y) = I(X;Y).
$$

(c) On utilise l'indication $H(X|Y,Z) \leq H(X|Y)$ pour obtenir :

$$I(X;Y,Z) = H(X) - H(X|Y,Z) \geq H(X) - H(X|Z) = I(X;Z).$$

(d) On dénomme la capacité du canal 1 par C_1 et la capacité du canal composé par $C_{\text{composé}}$ et on revise la formule de la capacité vue en cours :

$$C_{\text{composé}} = \max_{P_X} I(X;Z) = I(X;Z)\Big|_{X\sim P_X^*},$$

où P_X^* est une loi d'entrée qui atteint la capacité du canal composé. Alors

$$C_1 = \max_{P_X} I(X;Y) \geq I(X;Y)\Big|_{X\sim P_X^*} \geq I(X;Z)\Big|_{X\sim P_X^*} = C_{\text{composé}}.$$

3. Comme noté dans la réponse 1), le canal composé est un BSC($\epsilon/2$). Par la question précédente nous obtenons donc :

$$C_{\text{BEC}(\epsilon)} \geq C_{\text{BSC}(\epsilon/2)}.$$