



# MODELISATION STATISTIQUE

STA110 - DEVOIR N°2

Plans hiérarchiques – Modèle à effets aléatoires

A l'attention de Monsieur Luan JAUPI.

Guillaume Chevron

le **cnam**

La société Paritexo vient de remporter un appel d'offre décisif concernant la commercialisation d'un nouveau type de radar plus performant, dont l'objectif est de pouvoir contrôler la vitesse des véhicules motorisés sur les voies de circulation rapide et sur les autoroutes. La nouveauté de ce radar réside dans sa capacité à mesurer les excès de vitesse de moins de 20km/h.

Afin de vérifier le niveau de performance de l'outil, la société Paritexo souhaite donc effectuer une étude de la fidélité avec pour objectif une incertitude de moins de 5% quant à la valeur mesurée sur les autoroutes.

La construction du schéma expérimental et l'enregistrement des mesures obtenues sont effectués par une équipe dédiée au sein de la société Paritexo. Cette dernière fait le choix de procéder à cinq séances (k = 5) composées pour chacune de quatre essais (n = 4).

Essais	Séances				
	1	2	3	4	5
1	131	128	139	132	131
2	140	135	132	141	135
3	124	129	126	128	129
4	135	137	131	127	136

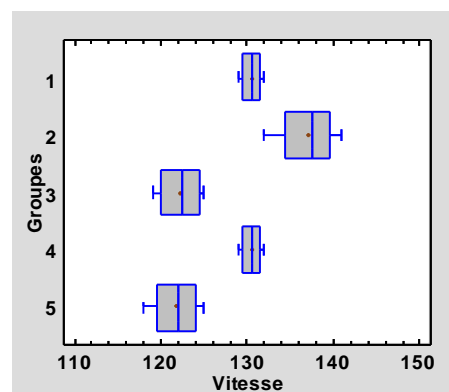
Les mesures ont été effectuées avec brio, et n'ont pas données lieu à de quelconques données manquantes. Ce schéma expérimental peut être également transposé sous la forme du plan d'expérience suivant :

Groupes	Répétabilité	Vitesse observée
1	1	131
1	2	129
1	3	132
1	4	130
2	1	137
2	2	138
2	3	141
2	4	132
3	1	121
3	2	125
3	3	124
3	4	119
4	1	130
4	2	131
4	3	129
4	4	132
5	1	121
5	2	123
5	3	118
5	4	125

La variable « Groupes » correspond aux différentes séances de mesure effectuées, tandis que la variable « Répétabilité » correspond au nombre d'essais réalisés lors de chacune des séances.

La première étape de l'étude consiste à déterminer la composante de répétabilité  $S_r^2$  pour la vitesse observée. Les écarts-types sont donc calculés pour chacun des groupes.

Groupes	Comptage	Moyenne	Ecart-type
1	4	130,5	1,29099
2	4	137,0	3,74166
3	4	122,25	2,75379
4	4	130,5	1,29099
5	4	121,75	2,98608
Total	20	128,4	6,32788



Afin de vérifier s'il y a une différence statistiquement significative entre les écarts-types de chacun des groupes au niveau de confiance 95,0%, on procède au test de Levene.

Tests des variances	
Test de Levene	1,16518
Probabilité	0,3651

La valeur de probabilité obtenue est supérieure à 0,05 ce qui signifie que l'on ne rejette pas l'hypothèse nulle correspondant à une égalité statistiquement significative entre les écarts-types avec un niveau de confiance de 95,0%.

Etant donnée que la variance intergroupe est significative, la variance de fidélité intermédiaire peut alors être estimée à partir de ses composants pour le modèle à effets aléatoires :

Source	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen	Composant de la variance	Contribution
Groupes	659,3	4	164,825	39,5146	85,38%
Répétabilité	101,5	15	6,76667	6,76667	14,62%
Total	760,8	19			100,00%

Le tableau de l'analyse de la variance ci-dessus décompose la variance de la vitesse observée en deux composants, un pour chacun des facteurs. A l'exception du premier, chaque facteur est imbriqué dans le facteur qui précède. Le but d'une telle analyse est d'estimer le montant de la variabilité expliquée par chaque facteur, appelé composant de la variance.

Dans ce cas, le facteur contribuant le plus à la variance est le facteur « Groupes » correspondant aux différentes séances. Sa contribution représente 85,3792% du total de la variance de la vitesse observée.

L'essentielle de la variabilité (85,3792% du total de la variance de la vitesse observée) est issue de la variabilité intergroupe, ce qui signifie que les répétitions inter-séances (k) apportent davantage de précision que les répétitions intra-séances (n). Aussi, la société Paritexo peut procéder à davantage de séances ( $k' > k$ ) afin d'améliorer la précision.

La seconde étape de l'étude consiste à calculer la variance de fidélité intermédiaire  $S_R^2$  pour la vitesse observée à partir de l'égalité suivante :

$$\begin{cases} S_R^2 = S_r^2 + S_g^2 = 6,76667 + 39,5146 = 46,28127 \\ S_R = \sqrt{S_R^2} = \sqrt{46,28127} \approx 6,8030 \end{cases}$$

L'écart-type de fidélité intermédiaire est donc :  $S_R \approx 6,8030$

Il est alors possible de calculer l'intervalle de confiance des résultats :

$$IC_R = \text{vitesse limite} \pm t_{\alpha,v} \sqrt{\frac{S_g^2}{k} + \frac{S_r^2}{kn}} = 130 \pm 2,1 \sqrt{\frac{39,5146}{k} + \frac{6,76667}{kn}}$$

Pour  $k = 1$  et  $n = 1$ , on obtient l'intervalle de confiance suivant :  $IC_R = 130 \pm 14,286 = [115,714 ; 144,286]$

En conclusion, pour une vitesse limite de 130 km/h, les résultats de l'évaluation de la fidélité sont les suivants :

- Ecart-type de répétabilité :  $S_r \approx 2,601$  avec 15 degrés de liberté
- Ecart-type de fidélité intermédiaire :  $S_R \approx 6,803$  avec 19 degrés de liberté