

Exercice 1. On souhaite calculer le prix du put américain par une méthode d'arbre. Soit T l'horizon de temps dans le modèle à temps continu et $N > 0$ le nombre de pas de discrétisation considérés. Le pas de temps est alors donnée par $h = \frac{T}{N}$. En choisissant $u = e^{\sigma\sqrt{h}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$ et $1 + R = e^{rh}$. Le modèle CRR est défini par

$$X_{n+1}^N = U_{n+1} X_n^N \text{ pour } n \geq 1, \quad X_0^N = x. \quad (1)$$

où la suite $(U_n, n \geq 1)$ est i.i.d. à valeurs dans $\{d, u\}$ avec

$$\mathbb{P}(U_1 = u) = 1 - \mathbb{P}(U_1 = d) = \frac{d - e^{rh}}{d - u} \triangleq p.$$

Le prix à l'instant 0 est donc donné par $P(0, X_0)$ où la fonction P est définie par la relation de récurrence suivante.

$$\begin{cases} P(N, y) &= (K - y)_+ \\ P(n - 1, y) &= \max \left((K - y)_+, e^{-rh} (P(n, yu)p + P(n, yd)(1 - p)) \right) \end{cases} \quad \forall 1 \leq n \leq N.$$

La résolution de ce système d'équation se ramène au parcours de l'arbre binomial recombinaut suivant en partant des feuilles.

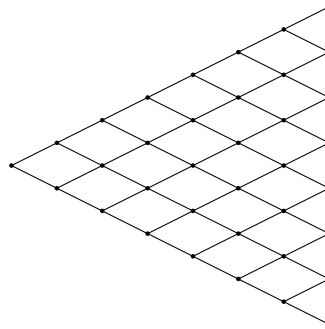


FIGURE 1 – Profondeur de l'arbre : 7

A titre indicatif on pourra prendre : $X_0 = 100$, $K = 10$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, et $T = 3$. Le prix vaut alors environ 8.65.

1. Comprendre le fonctionnement du code séquentiel fourni.
2. Proposer une parallélisation de ce code en utilisant une directive `parallel for`, éventuellement séparée en deux pragmas.
3. Comparer le prix obtenu avec celui du code séquentiel, expliquer la différence.
4. Sans modifier les pragmas de parallélisation, corriger le code de la question 2.
5. Etudier les performances du code parallèle.
6. Modifier le code précédent de réduire au minimum l'appel à la fonction `pow`.
7. Proposer une nouvelle approche de résolution (parcours de l'arbre) mettant en évidence des régions indépendantes.

8. Analyser les gains potentiels en terme de performance.
9. Implémenter les briques de base (séquentielles) nécessaires à la mise en œuvre de cette nouvelle approche.
10. Proposer une implémentation parallèle utilisant OpenMP de cette nouvelle approche.