

ENSIMAG

PROJET D'ÉVALUATION DE PRODUIT STRUCTURÉ

---

## **Playlist 2**

### **Partie fonctionnelle**

---

*Etudiants :*

Guillaume FUCHS,  
Guillaume PELLETIER,  
Samuel ROSILIO,  
Louis PERFUMO

30 mars 2014

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Moteur de calcul C++</b>	<b>3</b>
1.1	Motivations pratiques . . . . .	3
1.2	Architecture . . . . .	3
1.3	Modèle de Black-Scholes . . . . .	3
1.3.1	Prix . . . . .	4
1.3.2	Delta . . . . .	5
1.3.3	Couverture . . . . .	6
1.4	Algorithme du payoff de <b>Playlist 2</b> . . . . .	6

# 1 Moteur de calcul C++

Le but de cette partie est d'expliquer la structure de l'outil permettant de calculer le prix de **Playlist 2**, le delta ainsi que le portefeuille de couverture par différente méthode de calcul et de simulation.

La section 1.1 présente le problème auquel on s'intéresse et les motivations pratiques. La section 1.2 présente l'architecture du moteur de calcul de notre outil. La section 1.3 explique dans le cadre du modèle de Black Scholes les différents algorithmes utilisés pour le calcul du prix, du delta et de la couverture.

## 1.1 Motivations pratiques

Durant l'ensemble de la description des algorithmes utilisés dans notre outils nous noterons  $S = (S_t, t \geq 0)$  la dynamique du sous-jacent et  $\mathcal{F}$  sa filtration naturelle. Pour simplifier les choses, nous allons supposer que le payoff du produit s'écrit sous la forme :

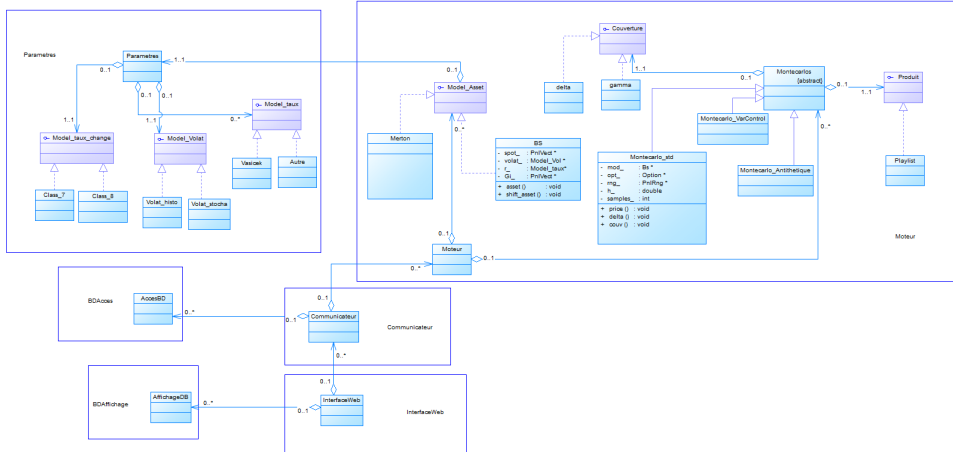
$$\phi(S_{t_0}, \dots, S_{t_N})$$

où  $0 = t_0 \leq \dots \leq t_N = T$  est une grille de dates de constatations non-forcément équi-réparties.

Notons  $r$  le taux d'intérêt instantané que nous supposerons pour l'instant constant. Le prix à l'instant  $0 \leq t \leq T$ , avec  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  du produit est donné par :

$$v(t, S_{t_0}, \dots, S_{t_N}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\phi(S_{t_0}, \dots, S_{t_N}) \mid \mathcal{F})$$

## 1.2 Architecture



## 1.3 Modèle de Black-Scholes

Considérons  $D$  indices évoluant chacun selon le modèle de Black Scholes et corrélés entre eux. La dynamique  $S$  de ces  $D$  indices s'écrit :

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d B_t^d}, \quad d = 1, \dots, D$$

où  $r$  est le taux d'intérêt,  $(\sigma^1, \dots, \sigma^d)$  sont les volatilités de chacun des indices que nous supposons constant et  $B = (B^1, \dots, B^D)^T$  est un vecteur de  $D$  mouvements Browniens standards et réels de matrice de corrélation  $Cov(B_t, B_t) = \Gamma t$  définie par  $Cov(B_t^i, B_t^j) = \Gamma_{ij}t$  avec  $\Gamma_{ij} = \rho$  pour tout  $i \neq j$  et  $\Gamma_{ii} = 1$ . Le paramètre  $\rho$  doit être choisi dans  $] -\frac{1}{D-1}, 1[$  de telle sorte que  $\Gamma$  soit définie positive pour assurer que le marché soit complet. Attention  $B$  n'est pas un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$  car ses composantes ne sont pas indépendantes mais on peut le réécrire en utilisant un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$ , noté dans la suite  $W = (W^1, \dots, W^D)^T$  et qui sera vu comme un vecteur colonne. Ainsi on a l'égalité en loi  $(B_t, t \geq 0) = (LW_t, t \geq 0)$  pour tout  $t \geq 0$  où  $L$  est la factorisée de Cholesky de la matrice  $\Gamma$ , i.e  $\Gamma = L'L$  avec  $L$  triangulaire inférieure. L'équation de la dynamique se réécrit alors :

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d L^d W_t}, \quad d = 1, \dots, D$$

où  $L^d$  est la ligne  $d$  de la matrice  $L$ . Ainsi la quantité  $L^d W_t$  est bien un réel. De cette équation, on remarque facilement que l'on peut déduire :

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d L^d (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}, \quad d = 1, \dots, D$$

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d \sqrt{(t_{i+1} - t_i)} L^d G_{i+1}}, \quad d = 1, \dots, D$$

où la suite  $(G_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d de vecteurs gaussiens centrés de matrice de covariance identité. Ainsi pour simuler le processus  $S$  sur la grille  $(t_i)_{i=0, \dots, N}$  il suffit de savoir simuler des vecteurs gaussiens centrés de matrice de covariance identité.

### 1.3.1 Prix

#### Prix à l'instant 0

Le prix à l'instant 0 est donné

$$v(0, S_0) = e^{-rT} \mathbb{E}(\phi(S_{t_0}, \dots, S_{t_N}))$$

On approche  $v(0, S_0)$ , grâce à une méthode de Monte Carlo, par

$$e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(S_{t_0}^{(j)}, \dots, S_{t_N}^{(j)})$$

où les  $N$ -uplets  $(S_{t_0}^{(j)}, \dots, S_{t_N}^{(j)})$  pour  $j = 1, \dots, M$  sont i.i.d selon la loi de  $(S_{t_0}, \dots, S_{t_N})$ .

#### Prix à l'instant $t > 0$

Pour calculer le prix à l'instant  $t$ , il faut calculer une espérance conditionnelle. Lorsque cela est possible, une manière de traiter le calcul de cette espérance conditionnelle est de réécrire le sous-jacent  $S_{t+u}$  à l'instant  $t+u$  pour  $u > 0$  en fonction de la valeur  $S_t$  d'un sous-jacent à l'instant  $t$  et d'une quantité indépendante de  $\mathcal{F}_t$  :

$$S_{t+u} = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma(B_{t+u} - B_t)} = S_t \tilde{S}_u$$

où  $\tilde{S}_u$  est **indépendant** de  $\mathcal{F}_t$  ie indépendant du passé jusqu'à  $t$  inclus et la dynamique de  $\tilde{S}$  est donnée par

$$\tilde{S}_u = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma \tilde{B}_u}$$

où  $\tilde{B}$  est un mouvement Brownien réel standard indépendant de  $\mathcal{F}_\square$ . On a donc :

$$S_{t_{i+1}} \stackrel{Loi}{=} S_{t_i} e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} G_{i+1}}$$

où  $(G_{i+1})_{i \geq 0}$  est une suite i.i.d selon la loi normale centrée réduite.

Ainsi le prix à l'instant  $t$  se réécrit

$$v(t, S_{t_0}, \dots, S_{t_i}, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}((\phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, S_{t_{i+1}}, \dots, S_{t_N})))$$

Les lettres s minuscules désignent des variables déterministes. On peut alors approcher le prix à l'instant  $t$  par la moyenne Monte Carlo suivante :

$$e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, S_{t_{i+1}}^{(j)}, \dots, S_{t_N}^{(j)})$$

Les quantités  $(s_{t_0}, s_{t_1}, \dots, s_{t_i}, s_t)$  représentent les valeurs réellement observées jusqu'à l'instant  $t$  sur la trajectoire du sous-jacent sur laquelle on souhaite calculer le prix du produit. D'un point de vue pratique, les valeurs  $(s_{t_0}, s_{t_1}, \dots, s_{t_i}, s_t)$  sont les cotations du sous-jacent observées sur le marché jusqu'à la date  $t$ .

### 1.3.2 Delta

Pour construire notre portefeuille de couverture, nous appliquerons une *couverture en delta*. Ce portefeuille est entièrement déterminé par la quantité d'actifs risqués à posséder à chaque instant  $t$  qui est donnée par la dérivée du prix par rapport à  $S_t$ , ie

$$\frac{\delta v(t, S_{t_0}, \dots, S_{t_i}, S_t)}{\delta S_t}$$

Cette quantité est connue sous le nom de delta du produit et sera approché par une méthode de différence finies associé à une méthode de Monte Carlo :

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{M 2s_t h} \sum_{j=1}^M (\phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, (1+h)S_{t_{i+1}}, \dots, (1+h)S_{t_N}) - \phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, (1-h)S_{t_{i+1}}, \dots, (1-h)S_{t_N}))$$

Pour un produit faisant intervenir  $D$  sous-jacents (4 dans notre cas), son portefeuille de couverture contient les  $D$  actifs et la quantité d'actifs  $d$  à détenir à l'instant  $t$  est donnée par :

$$\frac{\delta v(t, S_{t_0}^d, \dots, S_{t_i}^d, S_t^d)}{\delta S_t^d}$$

### 1.3.3 Couverture

La répartition du  $P\&L$  (Profit and Loss, ie erreur de couverture) joue un rôle central. Un modèle est jugé sur sa bonne capacité à couvrir les produits exotiques.

Considérons un actif dont la valeur du sous-jacent est noté  $S_t$ . Son évolution se fait sur une grille de temps  $t_0, \dots, t_N$  de pas  $T/N$  où  $t_0 = 0$ , le début de l'option et  $t_N = T$ , la maturité de l'option sur le sous-jacent.

La méthode `simul_market` de la classe `BS` renvoi une simulation du marché avec un nombre de dates  $H$ . On considère la grille de discrétisation de pas  $\frac{T}{H}$  avec

$$(\tau_0, \dots, \tau_N) \supset (t_0, \dots, t_N)$$

où  $\tau_0 = 0$  et  $\tau_N = T$ .

Le long de cette trajectoire, la construction du portefeuille de couverture se fait par le calcul d'un portefeuille constitué d'actifs sans risques et d'un portefeuille d'actifs risqués.

Soit le prix  $p_i$  et  $\delta_i$  à chaque date  $\tau_i$ .

Le portefeuille d'actifs risqué est calculé à partir de l'achat du sous-jacent de l'option. L'évolution du portefeuille d'actifs risqués s'écrit :

$$V_i^{risk} = \delta_i \cdot S_{\tau_i}, \quad i = 0, \dots, H$$

Le portefeuille d'actifs sans risques est calculé à partir de la vente à l'instant 0 de l'option et de la composition du portefeuille d'actifs risqués. L'évolution du portefeuille d'actifs sans risques s'écrit :

$$\begin{cases} V_0^{riskfree} = p_0 - \delta_0 \cdot S_0 \\ V_i^{riskfree} = V_{i-1}^{riskfree} * \exp^{\frac{r \cdot T}{H}} - (\delta_i - \delta_{i-1}) \cdot S_{\tau_i}, \quad i = 1, \dots, H \end{cases}$$

Le portefeuille de couverture est donné par la somme des deux portefeuilles :

$$V_i^{hedge} = V_i^{riskfree} + V_i^{risk}, \quad i = 0, \dots, H$$

L'erreur de couverture est donnée par :

$$P\&L = V_H^{riskfree} + \delta_H \cdot S_{\tau_H} - payoff$$

## 1.4 Algorithme du payoff de Playlist 2

Le produit **Playlist 2** permet au porteur de recevoir à l'une des Dates d'Echéances Anticipées ou à la Date d'Echéance Maximum, la Valeur Liquidative de Référence majorée d'un Gain Final compris entre 0% et 27%.

Le Gain Final est conditionné à l'évolution des 4 Indices du Panier. Ainsi, chaque année, aux Dates de Constataions Intermédiaires et à la Date de Constataion Finale, si au moins 3 des 4 indices du Panier ont progressé de 10% ou plus, par rapport à leur Niveau d'Origine, un Gain Annuel de 4,5% est acquis. Le Gain Final est égale à la somme des Gains Annuels. De plus, la formule peut s'arrêter par anticipation. Si à l'un des deux premières Dates de Constataions Intermédiaires, 3 des 4 Indices du Panier ont progressé de 20% ou plus par

rapport à leur Niveau d'Origine, le porteur recevra la Valeur Liquidative de Référence majorée du Gain Final.

```
payoff(var ValNom, var temps){
  Pour les dates t = 1 an et t = 2 ans
    compteur_10 = 0
    compteur_20 = 0

    Pour chaque Indice du Panier
      si (valeur_indice[t]/valeur_indice[0] - 1) > 10%
        compteur_10++

      si (Valeur_indice[t]/Valeur_indice[0] - 1) > 20%
        compteur_20++

      si compteur_20 > 2
        gain += 4,5%
        retourne  $\exp(-r*t)*150*(1+gain)$ 

      si compteur_10 > 2
        gain += 4,5%
        stop boucle sur indice

    Pour les date t = 3 an à t = 6 ans
      compteur_10 = 0;

      Pour chaque Indice du Panier
        si (valeur_indice[t]/valeur_indice[0] - 1) > 10%
          compteur_10++;

        si compteur_10 > 2
          gain += 4,5%
          stop boucle sur indice

      retourne  $\exp(-r*t)*150*(1+gain)$ 
}
```