

ENSIMAG

PROJET D'ÉVALUATION DE PRODUIT STRUCTURÉ

Playlist 2

Etudiants :

Guillaume FUCHS,
Guillaume PELLETIER,
Samuel ROSILIO,
Louis PERFUMO

14 mai 2014

Table des matières

1	Introduction	4
2	Définition	4
3	Analyse des flux financiers du produit	8
3.1	Description du produit	8
3.2	Flux envisageables du produit	8
3.3	Rentabilités espérées du produit	11
3.4	Expression analytique des flux	11
4	Clients visés	12
5	Analyse des risques du produit	14
5.1	Risques pour la Banque	14
5.2	Risques pour le détenteur	16
5.3	Synthèse des risques	17
6	Corrélation entre les indices	18
7	Modèles Mathématiques	20
7.1	Modélisation des indices	20
7.1.1	Modèle de Black-Scholes	20
7.1.2	Modèle de Merton	21
7.1.3	Modèle de Heston	21
7.1.4	Choix du modèle et validité du modèle de Black-Scholes pour les indices	21
7.2	Modélisation de la volatilité	23
7.2.1	Volatilité historique	24
7.2.2	Volatilité implicite	24
7.2.3	Choix du modèle	24
7.3	Modélisation des taux d'intérêts	25
7.3.1	Modèles à un facteur	25
7.3.2	Modèles à deux facteurs	26
7.3.3	Modèles de Heath-Jarrow-Morton	27
7.3.4	Retrouver le taux zero-coupon	27
7.3.5	Choix du modèle	28
8	Théorie de la couverture	29
8.1	Le cadre de Black-Scholes constant	29
9	Simulation de la couverture	31
9.1	Couverture avec taux de changes	32
9.2	Vers une modification des paramètres ?	34

10 Analyse logicielle	35
10.1 Cahier des charges	35
10.2 Architecture logicielle globale	36
10.3 Architecture détaillée	38
10.4 Spécifications	40
11 Moteur de calcul C++	45
11.1 Motivations pratiques	45
11.2 Architecture	45
11.3 Modèle de Black-Scholes	46
11.3.1 Prix	46
11.3.2 Delta	47
11.3.3 Couverture	48
11.4 Algorithme du payoff de Playlist 2	48
12 Amélioration : Le Gamma	50
12.1 Qu'est ce que le Gamma	50
12.2 Choix de l'utilisation du Gamma	50
12.3 Portefeuille Gamma-neutre	50
12.4 Calcul du Gamma	51
12.4.1 Méthode des trajectoires	51
12.4.2 Méthode du rapport de vraisemblance	52
12.4.3 Méthode des différences finies	52
12.5 Travail réalisé	53

1 Introduction

Ce rapport est l'objet d'une analyse du produit structuré nommé **Playlist 2** déposé par la CACEIS Bank, commercialisé par le réseau des caisses d'épargne et géré par Natixis Asset Management. Ce produit est un OPCVM français qui pouvait être acheté entre le 14 janvier 2010 et le 28 juin 2010 avec pour valeur nominale liquidative de référence la valeur la maximale parmi toutes les valeurs liquidatives entre le 14 janvier et le 28 juin 2010. L'objectif de gestion du FCP est de permettre au porteur de recevoir la valeur liquidative de référence majorée d'un gain final à une date donnée dépendant des performances de 4 indices boursiers.

2 Définition

Le **dépositaire** du produit financier est l'organisme qui sera chargé de :

- La garde des avoirs en dépôt et leur restitution.
- Le dépouillement des ordres.
- L'information de la société de gestion ou de la SICAV des opérations relatives aux titres conservés pour son compte.
- Le contrôle de la régularité des décisions de l'OPC ou de sa société de gestion par rapport aux dispositions législatives et réglementaires applicables.

La **société de gestion** associée au produit devra s'occuper de :

- La gestion de portefeuille pour le compte de tiers ce qui consiste à gérer des portefeuilles individuels d'instruments financiers pour le compte de clients, qu'il s'agisse par exemple de clients particuliers ou d'investisseurs institutionnels. Un mandat de gestion est conclu entre la société de gestion et son client.
- La gestion collective ou gestion d'organismes de placement collectif (OPC) consiste schématiquement à gérer des portefeuilles collectifs. Un OPC est constitué des sommes mises en commun par des investisseurs et gérées pour leur compte par un gestionnaire de portefeuille. Ce dernier utilise ces sommes pour acquérir des instruments financiers, par exemple des actions ou des obligations en fonction de ses objectifs. Des parts ou des actions représentant une quote-part de l'avoir de l'OPC sont émises, en contrepartie des sommes versées dans l'OPC.

Un FCP fait parti de la famille des OPCVM.

- Un **OPCVM** est une entité qui gère un portefeuille dont les fonds sont placés en valeurs mobilières. Garantie de l'investissement.
- Une **OAT** est une obligation assimilable du Trésor, emprunts d'Etat émis pour une durée de 5 à 50 ans.
- Un **fonds à formule** regroupe plusieurs catégories d'OPCVM. Il offre une perspective de gain dépendant des évolutions des marchés financiers, selon des paramètres définis

à la souscription. Il offre une garantie sur le capital initialement investi. Il s'occupe de la gestion active du fonds dans des actifs non-risqués (monétaires, obligataires ...) pour garantir le capital et des actifs risqués (actions, dérivées ...) à la recherche de performance.

- Une **OCDE** est une organisation de coopération et de développement économique. Elle publie des études statistiques. Les membres ont un système de gouvernement démocratique et une économie de marché.
- Une **caisse d'amortissement de la dette sociale** est un organisme gouvernemental français qui possède de la dette sociale.
- La **BPCE** est l'ensemble des entreprises qui composent la Caisse nationale des Caisses d'épargne et de la Banque fédérale des Banques populaires.
- Le **dépositaire** d'un OPCVM est un établissement qui assure la conservation des actifs et le contrôle de la régularité des décisions de l'OPCVM.
- La **société de gestion** d'un OPCVM est chargée de la gestion administrative, comptable et financière de l'OPCVM.
- Le **FCP de capitalisation des revenus** représente tous les revenus investis dans le portefeuille du fonds propre.
- Un **indice boursier** est une mesure statistique calculée par le regroupement des valeurs de titres de plusieurs sociétés.
Attention les indices des grands marchés mondiaux sont de plus en plus corrélés entre eux.
- La **valeur liquidative** est la division de l'actif net de l'OPCVM par son nombre de parts calculée toutes les 2 semaines. Ceci implique des actifs d'une valeur inférieure à 80 millions €.
- La **date de clôture de l'exercice** est la date à laquelle les résultats de l'année sont calculés.
- La **performance** est la plus ou moins-value réalisée par rapport à l'investissement initial.
- La **performance avec dividendes réinvestis** consiste en le fait que les dividendes sont réinvestis le jour même pour souscrire des actions supplémentaires. Cela permet d'estimer l'évolution véritable de la valeur de l'OPCVM, indépendamment de son mode de distribution.
- Une **cession temporaire des titres** consiste en la vente de titres contre espèces ou autres titres avec un engagement irrévocable de part et d'autres de restituer les

valeurs échangées.

- Un **titre garanti** est un titre comportant un garant.
- Un **Swap de performance** consiste à échanger de la performance d'une action contre un taux d'intérêt.
- Une **exposition** (financière) est une limitation financière.
- Un **Warrant** est un produit boursier à effet de levier qui donne le droit d'acheter ou de vendre à un prix donné un produit financier.
- Un **Asset Swap** en terme général est un Swap sur actif.
- Un **Swap** est un contrat d'échange de flux financiers entre deux parties jusqu'à une maturité et à fréquence déterminée.
- Un **Cap** est un produit financier visant à assurer par son achat un niveau maximal sur un indice de taux révisable tout en profitant d'une éventuelle stabilité ou baisse de ce taux révisable. L'acheteur de Cap paie une prime au vendeur de Cap.
- Un **Floor** est un produit financier visant à assurer par son achat un niveau minimal sur un indice de taux révisable tout en profitant d'une éventuelle stabilité ou hausse de ce taux révisable. L'acheteur d'un Floor paie une prime au vendeur du Floor.
- Un **Collar** consiste en l'achat d'un Cap et la vente d'un Floor. L'objectif est de réduire le coût de la couverture contre le risque de taux.
- Un **FRA** est un produit dérivé du marché monétaire. Il s'agit d'un contrat Forward, négocié sur le marché OTC (marché de gré à gré), entre deux contreparties et dont l'objectif est la fixation dès aujourd'hui d'un taux in fine de référence convenu sur un principal donné, pendant une période future spécifiée.
- Les **titres de taux** regroupent l'ensemble des obligations à taux fixe et à taux variable.
- Un **emprunt d'espèces** est un emprunt de liquidité sous forme de trésorerie. A comparer avec l'emprunt de titres.
- Un **dépôt** est une opération de prêt qui génère une créance dans le patrimoine de l'OPCVM et une dette pour la banque.
- La **prise et mise en pension** (cession de titre) est relative au taux REPO qui désigne une transaction dans laquelle deux parties s'entendent simultanément sur deux transactions : une vente de titres au comptant suivie d'un rachat à terme à une date et à un prix convenu d'avance. Cette transaction est qualifiée de pension livrée (prise

en pension des titres par le prêteur de cash et mise en pension des titres par le prêteur de titres).

- Le **titre de créance négociable** est un instrument financier qui suivant la nature de l'émetteur peut être : un Bon du Trésor à taux fixe (titre à court terme émis par le Trésor), un Bon du Trésor à intérêts annuels (titre moyen terme émis par le Trésor), un billet de trésorerie émis par les entreprises, un certificat de dépôts émis par les banques, un bon à moyen terme négociable émis par les entreprises et les établissements de crédit, un bon des institutions financières spécialisées émis par certains établissements du secteur financier public ou para-public.

3 Analyse des flux financiers du produit

3.1 Description du produit

Notre produit financier prend appui sur l'évolution de 4 indices boursiers à travers le monde, les flux versés dépendront en effet des performances de chacun de ces indices depuis leur niveau d'origines (moyenne arithmétique des niveaux de clôture publiés le 29 avril 2010, 30 avril 2010 et le 3 mai 2010). Les quatre indices considérés sont le Footsie 100, le Standard & Poor's 500, Dow Jones Euro Stoxx 50 et le Nikkei 225.

Le fonctionnement de notre produit est alors le suivant, si le 25 avril 2011 au moins trois des quatre indices ont eu un rendement supérieur à 10% alors un flux d'au moins 104,5% de la valeur nominale nous sera versé à échéance. De plus si trois des quatre indices ont eu un rendement supérieur à 20% alors la date d'échéance devient le 2 avril 2011 et nous recevons 104,5% de la valeur nominale.

En date du 23 avril 2012, nous raisonnons de la même façon en effet si trois des quatre indices ont eu un rendement supérieur à 10% par rapport à leur niveau d'origine alors on obtiendra 4,5% de plus que ce que l'on devrait déjà acquérir. En revanche si trois des quatre indices ont dépassé 20% de rendement, la date d'échéance devient le 30 avril 2012.

Pour ce qui est des années 2013, 2014, 2015 et 2016, on accumule simplement 4,5% en plus à échéance si trois des quatre indices ont un rendement supérieur à 10% aux dates de constatations. La date d'échéance finale (si aucun arrêt de la formule en 2011 et 2012) est le 25 avril 2016.

3.2 Flux envisageables du produit

Commençons par envisager les différents cas possibles :

Soit

$$A = \{\text{Dow Jones Euro Stoxx 50, Standard \& Poor's 500, Footsie 100, Nikkei 225}\}$$

Ainsi

$$\forall i, j, k, l \in A \text{ tels que } A = \{i, j, k, l\}$$

- Cas où l'échéance est en fin de première année :

Date	R_i	R_j	R_k	R_l	Prime accumulée
25/04/2011	21%	15.6%	22.6%	31.1%	4.5%

On constate dès la première année que trois des quatre indices dépassent un rendement de 20% ainsi le produit arrive à échéance en fin de première année et le client recevra 104,5% puisque par conséquent trois des quatre indices ont eu une performance supérieure à 10%

- Cas le moins intéressant pour le client avec échéance deux ans :

Date	R_i	R_j	R_k	R_l	Prime accumulée
25/04/2011	5.8%	15.6%	2.6%	-7.1%	0%
23/04/2012	21.3%	28.8%	20.4%	10.3%	4.5%

Dans ce cas ci, aucune prime n'est acquise grâce aux performances des indices la première année, de plus la seconde année comme trois des quatre performances dépassent 20%, l'échéance devient le 30/04/2012 et 104,5% sera versé au client.

- Cas le plus intéressant pour le client avec échéance deux ans :

Date	R_i	R_j	R_k	R_l	Prime accumulée
25/04/2011	13.8%	15.6%	10.6%	-7.1%	4.5%
23/04/2012	21.3%	28.8%	20.4%	5.3%	9%

Ainsi dans ce cas le client recevra une prime de 9% de la valeur liquidative de référence en fin de deuxième année. L'échéance devient donc le 30/04/2012 et 109% de la valeur liquidative de référence sera versé au client.

- Nous allons maintenant distinguer les deux cas extrêmes dans le cas d'une échéance à six ans, le premier cas correspond à celui où le client ne gagnera rien soit :

Date	R_i	R_j	R_k	R_l	Prime accumulée
25/04/2011	3.8%	5.6%	0.6%	-7.1%	0%
23/04/2012	10.3%	8.8%	-10.4%	5.3%	0%
29/04/2013	4.5%	12.4%	4.2%	14.2%	0%
29/04/2014	-5.4%	16.3%	10.2%	9.4%	0%
29/04/2015	3.3%	11.1%	7.1%	18.2%	0%
25/04/2016	11.5%	15.2%	8.7%	9.9%	0%

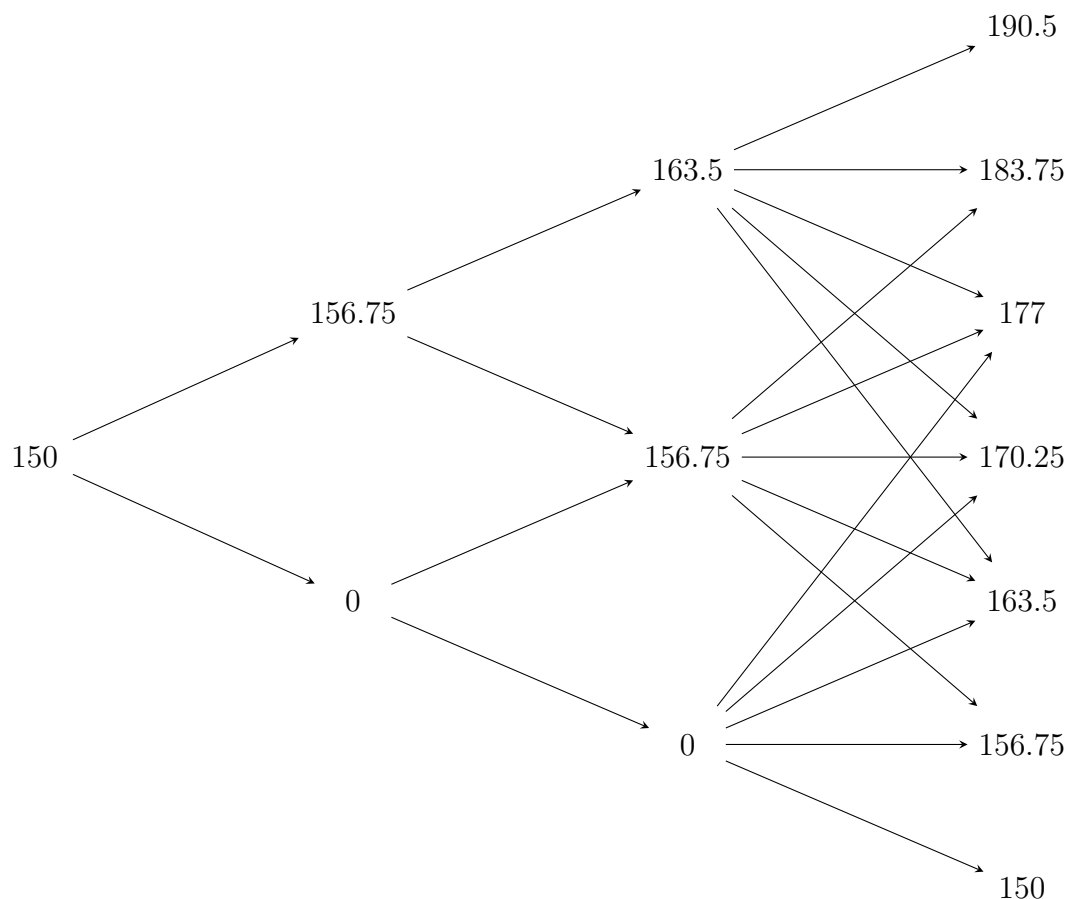
Dans ce cas ci qui est le cas le plus défavorable sur un horizon de six ans, le client retouchera la valeur liquidative de référence à la fin de la sixième année car trois des quatre indices n'ont jamais eu une performance supérieure à 10%.

- Cas le plus favorable pour une échéance de six ans :

Date	R_i	R_j	R_k	R_l	Prime accumulée
25/04/2011	13.8%	15.6%	10.6%	-7.1%	4.5%
23/04/2012	10.3%	18.8%	-10.4%	15.3%	9%
29/04/2013	14.5%	12.4%	4.2%	14.2%	13.5%
29/04/2014	-5.4%	16.3%	10.2%	19.4%	18%
29/04/2015	3.3%	11.1%	17.1%	18.2%	22.5%
25/04/2016	21.5%	15.2%	18.7%	29.9%	27%

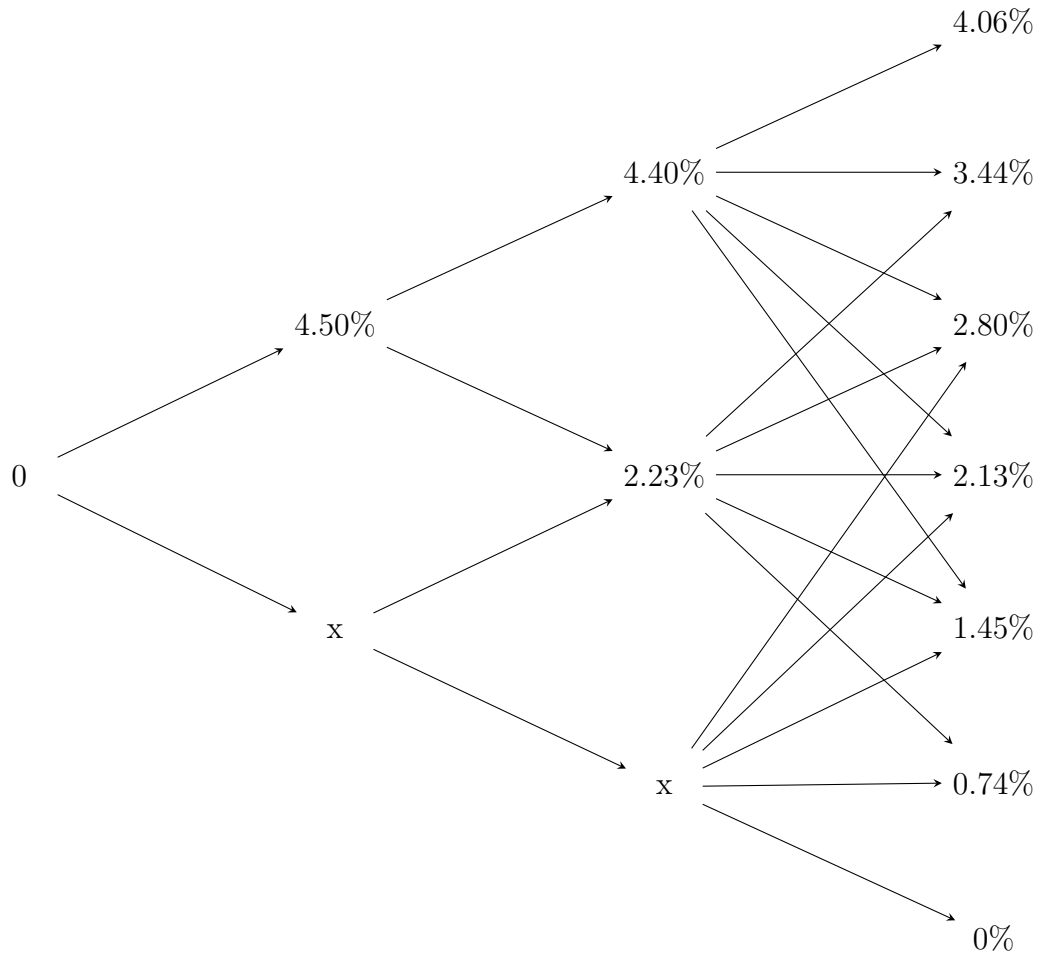
Dans ce cas ci, le client touchera à la fin de la sixième année 127% de la valeur liquidative de référence puisque chaque année, au moins trois des quatre indices ont une performance supérieure à 10%.

On peut résumer avec l'arbre suivant les flux possibles à échéance du produit (en notant 0 les nœuds non terminaux) :



3.3 Rentabilités espérées du produit

On peut avoir de même un tableau résumant les rentabilités actuarielles annuelles sous la forme suivante en considérant que le prix de départ est de la valeur liquidative de référence (les x sont des cas impossibles) :



3.4 Expression analytique des flux

Soit

$$A = \{\text{Dow Jones Euro Stoxx 50, Standard \& Poor's 500, Footsie 100, Nikkei 225}\}$$

et

$$B = \{1, 2, 6\}$$

On cherche alors à déterminer le flux qui sera versé à la date t en fonction de la valeur liquidative de référence notée N_0 . On obtient alors pour $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$F_{versé}(t) = N_0 * (1 + \sum_{i=1}^t (4.5\% * \mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(i) > 10\%\}} > 2\}}) * (\mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(\min(t,2)) > 20\%\}} > 2\}} + \mathbb{1}_{t=6} * \mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(1) > 20\%\}} < 3\}} * \mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(2) > 20\%\}} < 3\}}) * \mathbb{1}_{\{t \in B\}})$$

Analysons cette formule, dans un premier temps $\mathbb{1}_{\{t \in B\}}$ représente le fait que des flux ne peuvent être versés que si nous sommes en $t = 1$ ou 2 ou 6 . De plus, $\mathbb{1}_{t=6} * \mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(1) > 20\%\}} < 3\}} * \mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(2) > 20\%\}} < 3\}}$ représente le fait que en $t = 6$ un flux ne peut être versé que si moins de trois indices ont eu une performance inférieure à 20% en $t = 1$ et en $t = 2$. Le terme $\mathbb{1}_{\{\sum_{I \in A} \mathbb{1}_{\{Perf_I(\min(t,2)) > 20\%\}} > 2\}}$ permet quant à lui de détecter le fait qu'un flux est versé en $t = 1$ ou $t = 2$. Enfin le terme du début permet simplement de calculer le flux versé.

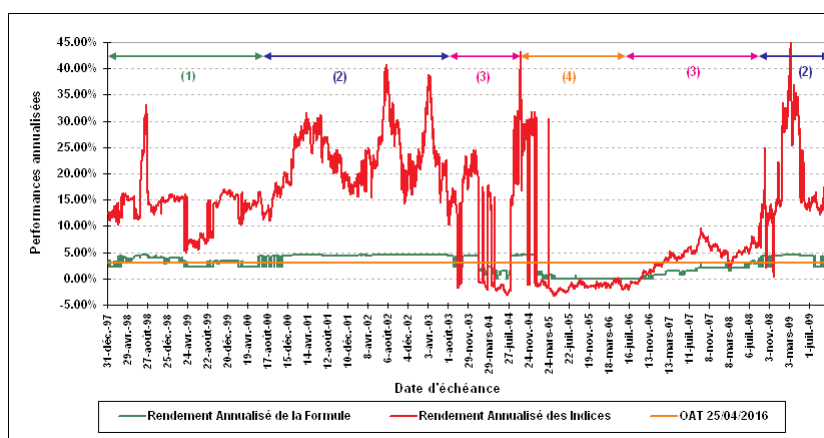
4 Clients visés

Afin de mieux comprendre les risques et le produit, nous devons réfléchir aux types d'investisseurs concernés par un tel produit.

Le Montant minimum à la première souscription est de 150 euros. Ce montant est faible comparé au montant minimum de souscription dans le cas d'obligations qui est généralement de l'ordre de quelques milliers d'euros, ou encore pour se créer un portefeuille d'actions diversifié. En effet, certaines actions peuvent atteindre plusieurs centaines d'euros l'unité. Ce montant de 150 euros pour une souscription permet à un particulier d'investir dans cet OPCVM.

Les simulations sur les données historique de marché permettent de calculer des rendements fictifs, calculés en fonction des dates d'échéance passées de la formule. Elles permettent de visualiser le comportement de la formule lors des différentes phases de marché traversées au moments de simulations.

FIGURE 1 – Simulations sur des données historiques de marché



Sur les simulations réalisées entre le 31 décembre 1991 et le 3 novembre 2009 on remarque que le rendement du FCP reste positif ou nul (hors commission de souscription) quelles que soit les phases de marché traversées. Néanmoins on remarque que le rendement des indices lors de hausse des marchés est très élevé par rapport au rendement de la formule qui est en moyenne supérieur au taux sans risque. Lors de phase de volatilité des marchés, alors que les performances des indices n'obéissent pas à une tendance claire, le rendement du FCP reste positif ou nul et est supérieur au taux sans risque. Enfin pendant une période de chute des marchés, tandis que les indices ont des performances négatives, le rendement du FCP reste positif ou nul mais inférieur au taux sans risque.

Ces simulations de scénarios montrent donc que la formule permet un rendement équivalent à un taux sans risque bien qu'il arrive lors de chute des marchés que le rendement du FCP soit nul. Lors de situation de marché stable où les indices sont élevés, les performances de la formule est nettement inférieure aux performances des indices.

L'OPCVM permet donc à un particulier d'investir dans un actif comparable à un taux sans risque. Il permet en plus d'avoir un produit qui suit les performances des indices sur des dates d'échéances. Néanmoins le produit n'est pas comparable à un Tracker car globalement la formule n'engendre pas des rendements du même ordre de grandeur que les indices. Les institutions financières qui cherchent à investir dans des actifs peu risqués utiliseront plutôt des obligations tandis que s'ils cherchent à obtenir un rendement élevé qui suit les performances des 4 indices, ils achèteront des Tracker. De plus le Fonds est plafonné à 924 459 parts, de valeur nominale de 150€, ce qui fait un total de 138 668 850€. Ce montant est faible pour des investisseurs qui seraient des institutions financières.

L'OPCVM se veut donc un produit pour des particuliers qui souhaitent obtenir un rendement similaire au taux sans risque avec une prise de risque faible. L'OPCVM garantit ainsi un rendement positif ou nul quelles que soient les fluctuations du marché. De plus un placement en OPCVM permet d'obtenir un portefeuille diversifié tout en restant accessible par son prix de souscription minimum faible et sécurisé grâce au cadre légal et réglementaire.

5 Analyse des risques du produit

Dans cette partie, nous allons analyser tous les points qui peuvent constituer un risque pour la banque émettrice du produit puis pour le détenteur du produit.

5.1 Risques pour la Banque

La banque est exposée au **risque de couverture**. La banque va devoir être en mesure de payer au porteur à l'une des dates d'échéances anticipées ou à la date d'échéance maximum, la valeur liquidative de référence, hors commission de souscription, majorée d'un gain final qui est acquis au cours du temps. Une fluctuation des marchés durant la durée de vie de la formule peut rendre moins efficace la couverture mise en place par la société de gestion. Le risque de couverture peut se matérialiser sous la forme d'autres risques : le risque de contrepartie, le risque sur la volatilité, risque de liquidité et le risque de taux.

Le risque de contrepartie est le risque que ses clients soient dans l'incapacité de rembourser leurs emprunts, ou qu'une institution financière avec laquelle le fonds a des opérations en cours soit défaillante. Ce risque est présent car le portefeuille de l'OPCVM est constitué d'actifs qui entrent dans ces deux catégories.

Pour illustrer ce risque, prenons un Swap de taux payeur (le taux fixe est payé, et le taux variable est perçu), conclu avec une contrepartie qui se finance intégralement à taux variable. Lorsque les taux augmentent, la rentabilité et donc la valeur de ce Swap de taux payeur augmente, cependant la qualité de crédit de la contrepartie qui se finance à taux variable baisse puisque le coût de son financement a augmenté. Dans cet exemple, le Swap de taux payeur est soumis au risque que l'exposition à la contrepartie soit inversement corrélée à la qualité de crédit de celle-ci.

Une manière de se couvrir contre ce risque de contrepartie consiste à diversifier les Swaps avec différentes institutions financières. Plus les Swaps sont établis avec un nombre d'institutions financières différentes et plus les pertes engendrées par les Swaps sont réduites. Une autre manière consiste à établir des CDS avec d'autres contreparties. Lors de la défaillance d'une contrepartie sur un Swap, le contrat permettra de se protéger contre la perte possible par le biais du vendeur de CDS qui se porte garant. Pour ce faire, la personne désireuse de se protéger (ici la société de gestion) contre une défaillance de contrepartie (ici la contrepartie du Swap) paie à un tiers un flux régulier et reçoit de ce tiers un paiement défini à l'origine en cas de survenance de la défaillance redoutée. Selon l'ISDA (International Swaps and Derivates Association), les événements de crédits concernent dans notre cas les défauts de paiements de la contrepartie du Swap.

L'objectif de gestion du FCP est de permettre aux porteurs de recevoir aux dates d'échéances anticipées ou à la date d'échéance finale la valeur liquidative de référence avec le gain engendré durant la période. Si le portefeuille d'OPCVM est constitué d'actifs risqués alors **le risque de volatilité** augmenterait l'incertitude des rendements qu'engendrent les actifs et donc le rendement final garanti aux porteurs.

C'est par exemple le cas de l'action d'une société plus endettée, ou disposant d'un potentiel de croissance plus fort et donc d'un cours plus élevé que la moyenne. Si la croissance

des ventes est moins forte qu'espérée ou si l'entreprise peine à rembourser sa dette, la chute du cours sera très forte.

Il est possible de tirer parti d'une volatilité élevée. Par exemple, prendre une position longue sur la volatilité peut être intéressant sur le plan tactique : la propension naturelle au retour vers la moyenne de la volatilité implicite offre des opportunités d'achat de couverture lorsque la volatilité retourne vers la moyenne après s'être hissée à un niveau élevé.

Les couvertures possibles se font grâce à des actifs financiers qui limitent l'achat maximale ou la vente minimale d'un actif. Des options exotiques comme les options Lookback permettent d'engendrer un gain important lorsque les marchés deviennent très volatiles. Les options Barrières permettent de limiter la prime payée sur ces options grâce à une volatilité élevée qui va enclencher la barrière et activer l'option. Les FRA, les Caps, les Floors et les Swaps vont permettre à la société de gestion de limiter le taux maximale pour l'emprunt (achat d'un FRA, Cap ou Swap payeur) ou limiter le taux minimale pour le prêt (achat d'un Floor).

Le risque de liquidité implique qu'une position, dans le portefeuille de l'OPCVM, ne puisse être cédée, liquidée ou clôturée pour un coût limité et dans un délai suffisamment court, compromettant ainsi la capacité de l'OPCVM à se conformer aux dates d'échéances et aux dispositions qui sont prévus pour le client. Si les marchés sont peu liquides, l'efficacité de la couverture est diminuée car la banque rencontrera des difficultés à acheter ou vendre les actifs de couverture aux moments nécessaires.

Par exemple, financer des crédits 10 ans par des emprunts à 3 mois représente un risque majeur en termes de liquidité. En effet, tous les trois mois, il faut trouver le refinancement et cela pendant 10 ans. En revanche, à l'inverse si on finance des crédits 5 ans par des emprunts 10 ans le risque de liquidité est minime. Pour se fixer des limites en liquidité, il faut donc se fixer un niveau de transformation sur chaque maturité.

Le Cash at Risk est une mesure du risque de liquidité. Elle se mesure soit à partir de la comparaison des échéances contractuelles des dettes et des estimations des recettes de trésorerie, ou bien à travers un budget de trésorerie. Cet indicateur reprend globalement les modélisations issues des calculs de Value at Risk. Le calcul de cette mesure avant d'investir dans un actif va permettre de savoir l'exposition au risque de liquidité que prend l'institution. Cette mesure permet aussi d'obtenir des informations sur le risque de liquidité d'actifs déjà en possession. Une augmentation du Cash at Risk d'un produit peut permettre de liquider une position avant que la vente soit impossible.

La variation des taux d'intérêts a un impact sur la variation du prix ou la valorisation d'un actif. La société de gestion possède donc un **risque de taux** sur l'ensemble de ses actifs. L'évolution des taux d'intérêts va générer un effet inverse sur le cours des obligations.

Par exemple, le risque de taux se matérialise quand une banque refinçant un prêt à long terme à taux fixe par un emprunt à taux variable fait face à une hausse brutale des taux d'intérêts. Le risque est d'autant plus élevé que la maturité des actifs à taux fixe est éloignée et que la proportion d'actifs à taux fixe est importante dans le bilan de l'OPCVM.

Pour se couvrir, on détermine par maturité la sensibilité du portefeuille au taux. On réduit cette sensibilité si on anticipe une hausse des taux et on augmente cette sensibilité si on anticipe une baisse. Plusieurs contrats permettent de se couvrir contre ce risque : les Swaps, les Caps ou les Collars.

Pour un OPCVM de la zone euro, le **risque de change**, c'est-à-dire la variation des cours d'une devise -autre que l'euro - dans laquelle un fonds aurait investi, est présent. Le risque de change tient au fait que l'intérêt sur les obligations puis le remboursement du capital peut être payé dans une devise faible, ou qui se dévalue, et par conséquent le paiement des intérêts et le rendement final de l'investissement sera donc plus faible que celui attendu par l'investisseur et idem pour le capital.

Playlist 2 est un OPCVM libellé en euros jouant sur les marchés internationaux et n'est pas donc pas exempt de ce risque. En effet la devise principale de l'investisseur est l'euro. Le portefeuille de l'OPCVM est donc valorisé en euro, néanmoins la devise des obligations dans lequel l'OPCVM investit peut être dans une monnaie différente comme le dollar qui peut aussi bien s'apprécier que se déprécier face à la monnaie européenne.

Pour se couvrir contre le risque de change, on détermine une position par devise. On gère cette position en la couvrant via des actifs financiers comme des Swaps, des Caps ou des FRA sur taux ou encore des options Quanto en euro(similaire à une option classique sur un actif étranger où les flux récupéré lors de l'activation de l'option sont en euro) qui vont permettre de limiter ce risque de change.

Un OPCVM possède une exposition au **risque d'actions**. Elle tient compte des opérations en cours et notamment de celles réalisées sur les marchés des dérivés, qui peuvent augmenter ou diminuer les risques de la gestion selon les fluctuations des marchés et du prix de l'action.

Avoir un seuil d'exposition minimum au risque d'actions de 60% signifie que les gérants ne pourront à aucun moment réduire l'exposition en-deçà de ce seuil, de façon à maintenir une corrélation étroite avec l'évolution des marchés conforme à la nature de cette catégorie d'OPCVM.

Une couverture sur le risque d'action peut se faire par le biais de contrats d'achat ou de vente passés à l'avance grâce à des produits dérivés fermes (Futures ou Forwards) ou des produits dérivés optionnels (options).

5.2 Risques pour le détenteur

En souscrivant au fonds, le détenteur, s'il garde ses parts, est assuré de récupérer au moins la Valeur Liquidative de Référence majorée du gain final. Cependant, cette valeur peut être sensible à de nombreux risques présents sur les marchés et auxquels la banque doit se couvrir comme expliqué plus haut. Le détenteur n'est donc pas à l'abri de voir la valeur de son investissement diminuer au cours de sa participation dans la formule.

Le détenteur du produit est exposé au risque financier systémique sur les 4 marchés de référence pour l'OPCVM. Une absence d'augmentation de la performance d'au moins 10% des indices aux dates de constatations entraînera un gain final réduit.

Le porteur ne peut se couvrir contre cette absence d'augmentation des marchés.

Le détenteur est exposé au risque que le fonds soit dissous ou soit fusionné. Dans ce cas, les détenteurs de parts pourraient voir sa valeur liquidative garanti réduite. En effet, en souscrivant à l'OPCVM, le porteur peut choisir qu'en cas de liquidation du fonds il est

remboursé par la société garante en numéraire ou en titres. Dans le cas des titres, le risque que les titres reçus ne soient pas liquides sont grands car dans le cas d'une liquidation du fonds, la société de gestion n'a pas pu vendre ses actifs. Dans le cas du numéraire, le risque pour le porteur est que le garant ne possède pas assez de trésorerie pour rembourser tous les épargnants.

Pour se couvrir contre un tel risque, une étude de la répartition des remboursements est à voir. Généralement, investir beaucoup dans un OPCVM permet d'avoir une priorité sur le remboursement en cas de liquidation.

Le client est également exposé à risque d'augmentation de l'inflation en effet malgré de potentielle gain il peut voir son pouvoir d'achat diminuer.

En cas d'augmentation de l'inflation, lors du versement des liquidités par le FCP, les revenus perçus seront déprécié au cours du temps. La valeur liquidative de référence n'est donc pas exactement celle à laquelle le porteur aurait pu s'attendre.

Une couverture contre l'inflation est par le biais d'un intermédiaire bancaire d'investir dans des produits indexés sur l'inflation. Les OAT et les Swaps d'inflation française permettent de se couvrir contre ce risque.

5.3 Synthèse des risques

Les risques énoncés précédemment peuvent donc être synthétisés selon le tableau suivant :

Type de risque	Détenteur	Banque
Risque de valeur de la VLR	✓	
Risque de contrepartie	✓	
Risque de marché	✓	✓
Risque de couverture		✓
Risque de volatilité		✓
Risque de liquidité		✓
Risque d'inflation	✓	
Risque de change		✓
Risque d'actions		✓
Risque de taux		✓

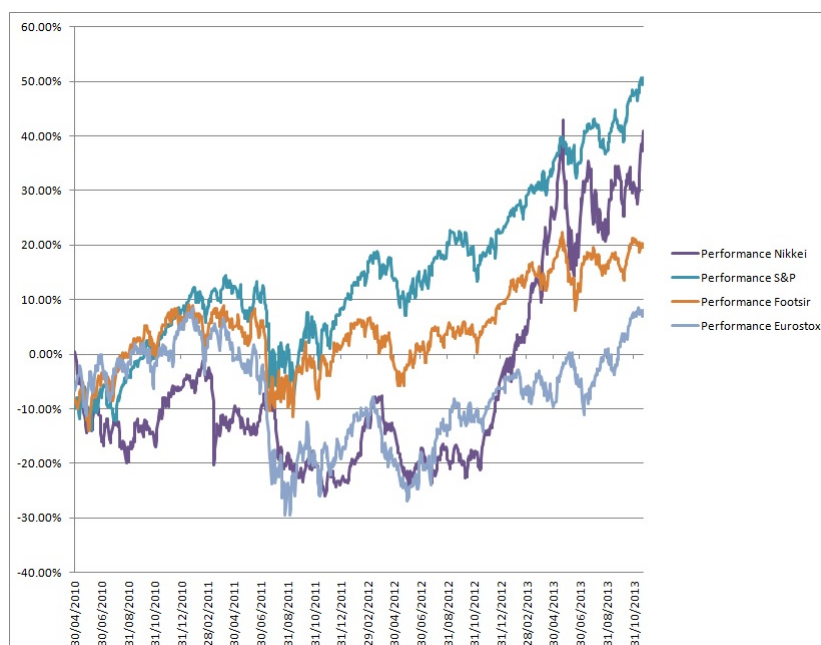
6 Corrélation entre les indices

Nous avons cherché à déterminer dans cette partie si il existait des corrélations entre les performances des différents indices en présence auquel cas, à partir de l'évolution d'un des indice on pourrait selon un certain intervalle de confiance prévoir l'évolution de la performance de certains autres indices parmi les 4 indices. C'est ainsi que nous avons commencé par calculer les différentes performances de chaque indice depuis le 29 avril 2010, puis que nous avons utilisé le logiciel R pour déterminer ces corrélations.

	Footsie 100	Eurostoxx 50	Nikkei 225	S&P 500
Footsie 100	1	0.568	0.848	0.894
Eurostoxx 50	0.568	1	0.507	0.278
Nikkei 225	0.848	0.507	1	0.822
S&P 500	0.894	0.278	0.822	1

Afin d'observer au mieux les corrélations relevées ci dessus, nous avons décidé de tracer les performances de chaque indice jour par jour en prenant comme point de référence les valeurs des cours le 29/04/2010 et le 30/04/2010 pour le Nikkei 225 puisque celui ci n'était pas coté le 29/04/2010. Aux vues des corrélations obtenues précédemment, nous devrions observé des rentabilités évoluant la plupart du temps dans le même sens et les mêmes proportions pour les couples (Footsie, Nikkei), (Footsie, S&P) et finalement de manière un peu moindre entre (Eurostoxx, S&P).

FIGURE 2 – Performances des différents indices du produit depuis le 29/10/2010



On constate suite à l'observation de ce graphique que l'évolution des performances du Footsie 100 et du S&P 500 sont souvent dans les mêmes proportions et on observe les mêmes pics ainsi que les mêmes creux dans la plupart des cas comme par exemple au niveau du 30/06/2012. Ceci offre donc de l'information à l'investisseur puisque celui-ci en anticipant une forte hausse du S&P par exemple saura que le Footsie et le Nikkei toutes proportions gardées, devraient sentir une hausse sensiblement identique or comme les performances sont évalués sur 3 indices et que les meilleurs taux de rendements actuariels sont obtenus pour des échéances de un et deux ans. Ceci implique que l'investisseur pourra espérer obtenir le meilleur rendement actuariel possible avec ce produit.

7 Modèles Mathématiques

Afin de proposer le produit Playlist 2 aux clients, il faut en déterminer le prix. L'importance de la modélisation est donc capitale. En effet, les prévisions sur l'évolution des différents éléments financiers vont impacter le prix du produit. Le payoff de Playlist 2 est directement lié à l'évolution des 4 indices présentés plus haut. Pour modéliser l'évolution de ces indices, il faudra aussi modéliser l'évolution du taux sans risque, ainsi que la volatilité. Or il existe plusieurs modèles, plus ou moins raffinés, permettant de décrire la dynamique des indices concernés et ces deux paramètres. Il convient donc de les présenter, et de faire un choix de modélisation.

7.1 Modélisation des indices

7.1.1 Modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black et Scholes permet de modéliser le cours des actions. Mais il permet aussi de modéliser l'évolution des indices comme nous le verrons un peu plus loin. Il repose sur les hypothèses suivantes :

- Absence d'Opportunité d'Arbitrage
- Absence de coûts de transaction
- Pas de restriction sur les ventes à découvert
- Le marché est continu
- Absence de dividendes
- Le taux sans risque r est constant quelle que soit la maturité

Dans le modèle de Black-Scholes, le cours du sous-jacent S vérifie l'équation stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec W_t un processus de Wiener

On obtient avec Itô :

$$d(\ln(S_t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

Soit

$$S(t) = S_0 * \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \right]$$

Le principal problème avec le modèle de Black-Scholes est qu'il ne présente pas une queue de distribution suffisamment lourde par rapport à la réalité : il ne prend pas en compte la possibilité de saut d'un cours boursier. Le modèle qui suit est le modèle de Merton. Celui-ci permet de prendre en compte cette possibilité.

7.1.2 Modèle de Merton

Le modèle de Merton introduit la possibilité de saut d'un cours boursier à l'aide d'un processus de Poisson :

$$S(t) = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma dW_t + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k) \right]$$

où

- N est un processus de Poisson
- U est une suite de variables aléatoires iid suivant une loi normale centrée
- W, N et U sont des processus indépendants les uns des autres
- Les paramètres concernant U et N, ainsi que μ et σ peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, entre autres

7.1.3 Modèle de Heston

Les deux modèles précédant prennent pour hypothèse que la volatilité est constante. La réalité montre que celle-ci a une forme de smile, lorsque le prix d'exercice ou la maturité varie. En effet, on observe que la volatilité augmente lorsque le Strike devient soit faible, soit très fort, deus les années 1980. Le modèle de Heston attribue à la volatilité une dynamique particulière :

$$dV(t) = K(\theta - V(t))dt + \sigma \sqrt{V(t)} dW_v(t)$$

et

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sqrt{V(t)} dW_s(t)$$

Où r est le taux sans risque, V la volatilité, K un paramètre de retour à la moyenne, θ la variance long terme, σ la volatilité de la volatilité, et W_s et W_v sont deux mouvements browniens corrélés.

7.1.4 Choix du modèle et validité du modèle de Black-Scholes pour les indices

Le modèle de Heston est reconnu comme étant le plus précis. Cependant, le nombre de paramètres étant très important, le calibrage de ces paramètres est très difficile sans des données réelles utilisables. Le modèle de Black-Scholes étant le plus simple à implémenter, l'évaluation du produit et ce qui en découle (grecques, couvertures...) sera faite à partir de ce modèle. L'implémentation du modèle de Merton pourrait représenter une bonne voie d'approfondissement.

Le modèle de Black-Scholes est le plus souvent utilisé pour modéliser la dynamique du cours d'une action boursière. Montrons qu'il peut aussi modéliser l'évolution d'un indice

boursier.

Un indice peut être assimilé à un portefeuille d'actions. On note :

- P_t la valeur de l'indice à l'instant t , $t \in \mathbb{R}^+$
- n le nombre d'actions qui composent l'indice
- $S_i(t)$ le cours de l'action i à l'instant t , $t \in \mathbb{R}^+$ et $i \in [[1, n]]$
- $\omega_i(t)$ la proportion du titre i dans l'indice, soit la capitalisation boursière de l'action i sur la capitalisation totale
- N_i le nombre de titres respectifs, supposé constant au cours du temps

On a donc à l'instant t :

$$P_t = \sum_{i=1}^n N_i S_i(t)$$

On peut écrire pour chacune des actions l'égalité suivante :

$$N_i S_i(t) = \omega_i(t) P_t$$

De plus, on considère un intervalle de temps infinitésimal dt . On a :

$$P_{t+dt} = \sum_{i=1}^n N_i (S_i(t+dt) + d_{i,t})$$

où $d_{i,t}$ sont les dividendes distribués par l'entreprise i entre t et $t+dt$. S'il n'y a pas de distribution de dividendes pendant cette période, alors $d_{i,t} = 0$.

Le rendement instantané du portefeuille s'écrit :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{P_{t+dt} - P_t}{P_t} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{P_t} (S_i(t+dt) - S_i(t) + d_{i,t})$$

Or, d'après la deuxième équation,

$$\frac{N_i}{P_t} = \frac{\omega_i(t)}{S_i(t)}$$

Donc

$$\frac{dP_t}{P_t} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i(t)}{S_i(t)} (S_i(t+dt) - S_i(t) + d_{i,t})$$

On note $dS_{i,t} = S_i(t+dt) - S_i(t) + d_{i,t}$.

On peut donc écrire

$$\frac{dP_t}{P_t} = \sum_{i=1}^n \omega_i(t) \frac{dS_{i,t}}{S_i(t)}$$

Notre hypothèse principale, est que chaque cours des différentes actions suit une dynamique de Black-Scholes. On a :

$$\frac{dS_{i,t}}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i dW_{i,t}$$

avec $W_{i,t}$ un processus de Wiener, $W_{i,t} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{t})$.

Le rendement instantané du portefeuille est donc :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(t) \mu_i \right) dt + \sum_{i=1}^n \omega_i(t) \sigma_i dW_{i,t}$$

On a $U_i \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ de loi centrée réduite.

On pose

$$\mu = \sum_{i=1}^n \omega_i(t) \mu_i$$

et

$$V = \sum_{i=1}^n \omega_i(t) \sigma_i U_i$$

V est une combinaison linéaire de variables aléatoires de loi normale centrée réduites. Elle suit donc une loi normale centrée, mais non réduite. Elle peut donc s'écrire sous la forme $V = \sigma U$, où $U \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et σ^2 est la variance de V , et vaut :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i(t) \omega_j(t) \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$$

où $\rho_{i,j}$ est le coefficient de corrélation entre U_i et U_j .

On peut donc écrire :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma U \sqrt{dt}$$

On retrouve bien un processus de Wiener.

Conclusion :

On peut donc légitimement modéliser l'évolution de la valeur d'un indice boursier avec la méthode de Black-Scholes, en supposant que le cours de chacune des actions qui le composent suivent une dynamique de Black-Scholes.

7.2 Modélisation de la volatilité

L'un des paramètres les plus déterminants dans la modélisation des indices est la volatilité. Il faut donc être en mesure de modéliser cette volatilité afin de l'utiliser comme paramètre dans la modélisation des indices.

Plusieurs modèles existent :

- La volatilité **constante** : c'est le modèle le plus simple
- La volatilité **stochastique** : comme dans le cas du modèle de Heston, on attribue une dynamique particulière à la volatilité
- La volatilité **locale** : c'est un cas particulier de volatilité stochastique, où l'on considère que la volatilité dépend uniquement du cours de l'actif sous-jacent et du temps ($\sigma = f(S_t, t)$)

Étant donné que nous nous concentrons dans un premier temps sur l'implémentation du modèle de Black-Scholes, et que celui-ci suppose que la volatilité est constante, nous allons tout d'abord nous intéresser à celle-ci. Les deux principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

7.2.1 Volatilité historique

Elle est mesurée par l'écart-type du rendement du sous-jacent, durant la période qui précède l'émission du produit structuré. En rapprochant les observations du cours du sous-jacent, on peut donc estimer la volatilité instantanée.

On peut donc considérer la racine carrée de la variance empirique sans biais comme son estimation :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \widehat{\mu} \right)^2$$

avec

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

où n est le nombre d'observations, S_t le cours du sous-jacent à l'instant t .

Par convention, l'unité de temps pour mesurer les paramètres est l'année. Il faut donc annualiser la volatilité calculée, en supposant que le nombre de jours ouvrés est 252 jours :

$$\sigma_{an} = \widehat{\sigma} \sqrt{\frac{252}{\Delta t}}$$

avec Δt l'intervalle de temps entre deux observations consécutives.

Concernant le nombre d'observations, d'après Hull, utiliser les données des cours les plus récents sur une durée de l'ordre de grandeur de la maturité du produit à modéliser. En effet, utiliser des observations trop éloignées va biaiser l'estimation, de même qu'avoir trop peu d'observations. Ici, il faudra donc se baser sur les données des six années précédant la mise sur le marché du produit Playlist.

7.2.2 Volatilité implicite

La volatilité implicite est obtenue à partir du prix de marché des indices, en inversant l'équation :

$$C_{BS}(\sigma) = C$$

où C_{BS} est le prix de l'option calculée avec la méthode de Black-Scholes, et C est son prix observé sur le marché.

7.2.3 Choix du modèle

Etant donné que le calcul de la volatilité implicite nécessite d'avoir recours à des méthodes numériques pour inverser la formule (notamment la méthode itérative de Newton-Raphson)

car celle-ci fait intervenir des intégrales, nous nous orienterons dans un premier temps vers le calcul présenté plus haut de la volatilité historique.

7.3 Modélisation des taux d'intérêts

Afin de pouvoir évaluer le produit structuré, nous devons aussi réussir à modéliser le taux sans risque. Plusieurs modèles de taux existent, présentant chacun des avantages et des inconvénients.

Le taux qui va nous intéresser est le taux sans risque zéro coupon de moyen-long terme comme il est question d'années avant l'échéance du produit Playlist. Il existe 3 catégories de modèles de taux : les modèles à 1 facteur, à 2 facteurs et ceux de type Heath-Jarrow-Morton (HJM).

7.3.1 Modèles à un facteur

Le **modèle de Vasicek** fait partie des premiers modèles de taux. Il repose sur l'hypothèse que les déformations de la structure du taux d'intérêt sont expliqués par le mouvement du taux court.

Le taux court suit une diffusion de type Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

où

- a est la force de rappel de retour à la moyenne
- b est le taux d'intérêt de long terme
- σ est l'écart-type de variation instantanée de r_t (volatilité instantanée)
- dW_t est un mouvement brownien

La remarque négative que l'on peut faire sur ce modèle est que la proportion de taux négatifs est parfois importante. Cela crée des distorsions fortes dans la valorisation de certains produits dérivés.

Le **modèle de Cox-Ingersoll-Ross** est proche de celui de Vasicek, en présumant que le taux court suit la dynamique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

avec a , b , σ , et dW_t similaires au modèle de Vasicek.

La principale remarque qu'on peut faire sur ce modèle est que le taux court n'est pas un processus gaussien, ce qui complexifie les calculs.

Le **modèle de Black-Derman-Toy** est un modèle log-normal :

$$d(\log r_t) = (b_t - a_t \log r_t)dt + \sigma dW_t$$

Le problème avec les modèles log-normaux est qu'on observe des proportions trop élevées de taux importants pour des horizons lointains, par rapport à la réalité.

Le **modèle de Ho et Lee** est aussi utilisé pour modéliser l'évolution du taux court :

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

avec θ_t la moyenne du taux court, évoluant dans le temps.

Ce modèle présente le même problème que celui de Vasicek dans le sens où l'on observe des taux négatifs. De plus, il ne prend pas en compte le phénomène de retour à la moyenne, à la différence des trois modèles précédents.

Ces modèles ont la particularité d'être simples, cependant il est généralement reconnu que l'intégration d'une unique variable d'état ne permet pas de reproduire le comportement des courbes de taux observées. C'est pourquoi nous introduisons ici les modèles à 2 facteurs.

7.3.2 Modèles à deux facteurs

Le premier modèle bi-factoriel que nous allons présenter est le **modèle de Hull et White**. Ici on prend pour hypothèse que les coefficients varient en fonction du temps, et que les taux courts et taux longs suivent les deux dynamiques suivantes :

Taux court

$$dr_t = K_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dW_{r,t}$$

Taux long

$$dl_t = K_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dW_{l,t}$$

avec

- K_r et K_l les vitesses de retour à la moyenne pour les taux courts et taux longs
- σ_r et σ_l leurs volatilités
- μ_l le taux long à 50 ans

Les avantages de ce modèle est qu'il prend bien en compte le retour à la moyenne, et que sa discrétisation est exacte. Il faut tout de même préciser que les taux peuvent être négatifs, et que l'on n'observe pas la volatilité.

Dans le **modèle de Fong et Vasicek** les deux variables d'état utilisées sont le taux court r_t et la variance du taux court ν_t :

$$dr_t = \alpha(b - r_t)dt + \sqrt{\nu(t)}dW_1(t)$$

$$d\nu_t = \gamma(c - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu(t)}dW_2(t)$$

avec

- b et c les moyennes long terme du taux instantané et de sa variance
- α et γ leurs vitesses de retour à la moyenne

Ce modèle présente l'avantage de tenir compte du retour à la moyenne et de ne donner que des taux courts positifs. Cependant, la complexité de la dynamique de la variance le rend difficilement exploitable.

Le dernier modèle bi-factoriel que nous allons présenter est le **modèle de Lonstaff et Schwartz**. Les dynamiques des deux variables d'état sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\begin{aligned} dx_t &= a(b - x_t)dt + c\sqrt{x_t}dW_2(t) \\ dy_t &= a(e - y_t)dt + f\sqrt{y_t}dW_3(t) \end{aligned}$$

Le taux instantané s'écrit au moyen de ces deux processus par :

$$dr_t = (\mu x_t - \theta y_t)dt + \sigma\sqrt{y_t}dW_1(t)$$

où W_2 est non corrélé avec W_1 et W_3 , et $\theta > \sigma^2$ assure la non-négativité de r_t .

Le principal problème de ce modèle est son nombre important de paramètres : 11 en tout.

7.3.3 Modèles de Heath-Jarrow-Morton

L'approche HJM est fondée sur la volonté de construire un modèle respectant la courbe des taux initiale, prise comme point de départ : on assimile le sous-jacent à l'entière courbe des taux dont la dynamique repose sur les taux forwards instantanés.

7.3.4 Retrouver le taux zero-coupon

La quasi-totalité des modèles que nous avons présenté permettent d'obtenir la dynamique du taux court r_t . Cependant, dans le cas de l'évaluation du produit structuré Playlist, il est important de déterminer les taux zéro coupon de moyen-long terme, car les échéances se comptent en années. On peut les obtenir de la manière suivante :

On suppose qu'on a la dynamique du taux court r_t . Le prix des zéro-coupon d'échéance T peut s'exprimer sous la forme

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t}$$

avec A et B qui diffèrent selon les modèles que l'on utilise. On sait de plus que

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

avec $R(t, T)$ le taux zéro-coupon d'échéance T . On peut récupérer $R(t, T)$ en résolvant l'équation suivante :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$$

7.3.5 Choix du modèle

Si les modèles HJM ou bi-factoriels permettent d'obtenir des courbes beaucoup plus précises de taux zéro-coupon, le modèle le plus abordable serait celui de Vasicek unifactoriel. Le modèle de Black-Scholes pour la simulation des indices nécessite un taux sans risque constant, c'est pourquoi nous commencerons par calculer à partir des données observées sur les marchés, un taux sans risque constant. Dans un deuxième temps seulement, nous essaierons d'implémenter et d'intégrer le modèle de Vasicek unifactoriel dans nos modélisations des indices.

8 Théorie de la couverture

Dans cette partie, nous aborderons les différentes étapes qui permette de valider théoriquement la couverture du gérant du fond. Rappelons au préalable que cette couverture se fait dans le cadre d'un modèle. Ici nous avons opté dans un premier temps pour une couverture en dite en delta neutre, dans le cas d'un modèle de Black-Scholes, avec taux sans risque et volatilité des quatre sous-jacents constante.

8.1 Le cadre de Black-Scholes constant

On suppose donc que l'évolution des indices suit une dynamique de Black-Scholes. On va s'intéresser aux actifs dérivés d'indices, en déterminant leur prix, et en trouvant une stratégie pour se couvrir.

On se place dans les hypothèses du modèle de Black-Scholes, sous la probabilité \mathbb{P} sous (Ω, F_T) . On note \widetilde{S}_t l'actif actualisé :

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = e^{-rt} S_t$$

avec S_t^0 l'actif sans risque, de dynamique $dS_t^0 = rS_t^0 dt$

On applique la formule d'Itô à l'actif actualisé :

$$d\widetilde{S}_t = \frac{1}{S_t^0} dS_t + S_t d\left(\frac{1}{S_t^0}\right) + d\left\langle S, \frac{1}{S_t^0} \right\rangle_t = \widetilde{S}_t [(\mu - r)dt + \sigma dW_t]$$

En notant $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ et $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$ on trouve

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

On remarque donc que si le processus \widehat{W}_t est un mouvement brownien, alors l'actif actualisé \widetilde{S}_t est une martingale.

En appliquant le Théorème de Girsanov, on montre qu'il existe une probabilité \mathbb{Q} sur (Ω, F_T) , équivalente à \mathbb{P} et définie par la densité de Radon-Nikodym suivante :

$$Z_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_T = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T}$$

sous laquelle le processus $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un Mouvement Brownien sur $[0, T]$.

On vient donc de montrer qu'en se plaçant sous cette probabilité \mathbb{Q} , le prix des actifs actualisé est une martingale.

On introduit maintenant la notion de portefeuille autofinancé. On note X_t la valeur à l'instant t d'un portefeuille composé d'une quantité Φ_t d'actif risqué et de Φ_t^0 d'actif sans risque. On a :

$$X_t = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_t$$

On appelle autofinancement le fait que la variation de la valeur du portefeuille soit égale à la variation de la valeur des actifs multipliée par la quantité d'actifs détenus. On écrit donc la condition d'autofinancement de la manière suivante :

$$dX_t = \Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t dS_t$$

Si on veut actualiser la valeur du portefeuille, on obtient, en utilisant la formule d'intégration par partie :

$$d(S_t^0 X_t) = \Phi_t d(S_t^0 S_t)$$

Ce qui donne, en se plaçant sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} introduite plus haut :

$$d\widetilde{X}_t = \sigma \Phi_t \widetilde{S}_t d\widetilde{W}_t$$

Si $(\Phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie la condition d'intégrabilité suivante

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T |\Phi_t \widetilde{S}_t|^2 dt \right] < \infty$$

alors \widetilde{X} est une martingale sous \mathbb{Q} , et donc :

$$X_t = e^{rt} \widetilde{X}_t = e^{rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\widetilde{X}_T | F_t] = e^{rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} X_T | F_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [X_T | F_t]$$

On vient de montrer que la valeur en t de toute stratégie autofinancée respectant les conditions énoncées plus haut, sous la probabilité \mathbb{Q} et de flux final $X_T = h(T)$ est :

$$X_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(T) | F_t]$$

Dans le modèle de Black-Scholes, la valeur de l'actif en t est :

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t - \sigma W_t}$$

On en déduit que

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \sigma(W_T - W_t)}$$

donc l'espérance conditionnelle se réécrit :

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(T) | F_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[h(S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \sigma(W_T - W_t)}) | F_t \right]$$

Or S_t est F_t -mesurable et la variable aléatoire $W_T - W_t$ est indépendante de F_t .

On en déduit donc qu'il existe une fonction $v : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(S_T) | F_t]$$

et c'est la fonction suivante :

$$v : (t, x) \rightarrow e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[h \left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \sigma(W_T - W_t)} \right) \right]$$

On définit un marché complet comme un marché où $\forall h \in \mathbb{L}^2(\Omega, F_T)$, un produit payant $h(T)$ en T peut être couvert par un portefeuille admissible autofinancé. On sait par le théorème fondamental de valorisation des actifs financiers qu'un marché est complet si et seulement si la mesure de probabilité risque neutre est unique. On va supposer que c'est le cas ici.

On cherche donc maintenant à se couvrir, c'est à dire trouver un portefeuille admissible et autofinancé qui réplique cette fonction v . On pose donc

$$X_t = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_t$$

Le portefeuille est autofinancé, donc

$$dX_t = \Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t dS_t$$

En remplaçant dans l'équation $dS_t^0 = rS_t^0 dt$, on trouve

$$dX_t = r(X_t - \Phi_t S_t)dt + \Phi_t dS_t$$

On applique la formule d'Itô à v :

$$dv(t, S_t) = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} d\langle S \rangle_t$$

Avec la formule de Black-Scholes,

$$dv(t, S_t) = \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial S} dW_t + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right) dt$$

Pour que $dX_t = dv(t, S_t)$, nécessairement

$$\Phi_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$$

$$rv(t, S_t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \mu S \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}$$

Si une fonction quelconque $v(t, S_t)$ satisfait la dernière équation, et c'est le cas de la fonction v donnée plus haut, alors le portefeuille X_t avec $\Phi_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$ et $\Phi_t^0 = \frac{1}{S_t^0} (v(t, S_t) - \Phi_t S_t)$ d'actif sans risque est autofinancé, et réplique le produit financier payant $h(S_T)$ à l'échéance T .

C'est ce qu'on appelle la couverture en Delta.

9 Simulation de la couverture

La répartition du PL (Profit and Loss, ie erreur de couverture) joue un rôle central. Un modèle est jugé sur sa bonne capacité à couvrir les produits exotiques.

Considérons un actif dont la valeur du sous-jacent est noté S_t . Son évolution se fait sur une

grille de temps $\{t_0, \dots, t_N\}$ de pas T/N où $t_0 = 0$, le début de l'option et $t_N = T$, la maturité de l'option sur le sous-jacent.

La méthode `simul_market` de la classe `BS` renvoi une simulation du marché avec un nombre de dates H . On considère la grille de discrétisation de pas T/H $\{\tau_0, \dots, \tau_N\} \supset \{t_0, \dots, t_N\}$ où $\tau_0 = 0$ et $\tau_N = T$.

Le long de cette trajectoire, la construction du portefeuille de couverture se fait par le calcul du prix p_i et du delta δ_i à chaque date τ_i . L'évolution de la part investie au taux sans risque s'écrit :

$$\begin{cases} V_0 = p_0 - \delta_0 \cdot S_0 \\ V_i = V_{i-1} * \exp^{\frac{r \cdot T}{H}} - (\delta_i - \delta_{i-1}) \cdot S_{\tau_i}, & i = 1, \dots, H \end{cases} \quad (1)$$

L'erreur de couverture est donnée par :

$$P\&L = V_H + \delta_H \cdot S_{\tau_H} - \text{payoff}$$

Il s'agit à présent de déterminer les propriétés statistiques de l'erreur de couverture. Pour cette étude, on se place dans le cadre de l'étude des actifs actualisés, ce qui revient à considérer

$$r = 0$$

. D'après la formule précédente, on a :

$$dP\&L_t = \left(\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} - \frac{\partial C(\tau_{[t/H]}, S_{\tau_{[t/H]}})}{\partial S} \right) dS_t$$

En notant

$$P\&L_t^* = \frac{1}{\sqrt{h}} P\&L_t$$

. Il est possible de démontrer que le processus converge en distribution vers un autre processus.

$$P\&L_t^* \xrightarrow[h \rightarrow \infty]{d} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 C(u, S_u)}{\partial S^2} \sigma^2 S_u^2 dW'_u \right)$$

Le mouvement brownien W' étant indépendant de W , régissant la dynamique de S . La démonstration de ce résultat se trouve dans l'article EVALUATING HEDGING ERRORS : AN ASYMPTOTIC APPROACH de Takaki Hayashi Per A. Mykland.

On en retient plusieurs élément :

L'erreur de couverture est proportionnelle à la racine du pas T/H , elle est également d'autant plus grande que le gamma de l'option est grand. Il s'agit d'une loi gaussienne.

Il est à présent nécessaire de confronter les résultats obtenus à partir de notre pricer.

9.1 Couverture avec taux de changes

Le produit Playlist fait intervenir des sous-jacents qui sont cotés en devise étrangère. La couverture sur ces produits est donc soumise à l'évolution des taux de changes. Une couverture de type delta neutre est compatible avec un marché multi-devises, comme nous

allons le voir dans cette section.

On considère un marché dit domestique D et un marché étranger F (devises d et f) possédant chacun un taux sans risque r . On peut appliquer le raisonnement décrit dans la partie précédente : si on suppose la complétude et l'absence d'opportunité d'arbitrage sur chacun des marchés, il existe des probabilités risque neutres sur ces marchés, notées \mathbb{Q}^d et \mathbb{Q}^f , dont les browniens associés sont, (W_t^d) et (W_t^f) . D'après ce qui a été vu plus haut, et la définition de ces probabilités par rapport à la probabilité historique, on a, notant λ_t^d et λ_t^f les primes de risques associées, la relation :

$$W_t^f = W_t^d + \int_0^t (\lambda_s^f - \lambda_s^d) ds$$

On souhaite utiliser le taux de change entre les deux devises, noté X_t qui représente le prix en unité monétaire domestique d'une unité monétaire étrangère. On suppose que ce taux suit un processus d'Itô, vérifiant $\sup_{t \in [0, T]} (\mathbb{E}[X_t^2]) < \infty$ et presque sûrement positif. Montrons que le taux de change a pour dynamique :

$$dX_t = X_t[(r_t^d - r_t^f)dt + \sigma_t^X dW_t^d]$$

où (σ_t^X) est un processus adapté.

En effet, $(e^{\int_0^t r_s^f ds} X_t)$ est un actif domestique, dont le prix actualisé au taux sans risque domestique est donc martingale sous \mathbb{Q}^d . Or, d'après la formule d'Itô :

$$d(e^{\int_0^t (r_s^f - r_s^d) ds} X_t) = e^{\int_0^t (r_s^f - r_s^d) ds} [dX_t + (r_t^f - r_t^d) X_t dt]$$

La propriété martingale implique qu'il existe (H_t) dans L^2 , tel que :

$$dX_t = X_t(r_t^d - r_t^f)dt + (H_t)dW_t^d$$

Posant $\sigma_t^X = \frac{H_t}{X_t}$, on a le résultat annoncé.

De plus, $\sigma_t^X = \lambda_t^f - \lambda_t^d$. En effet, considérons à présent un actif étranger Z^f , de dynamique :

$$dZ_t^f = Z_t^f[r_t^f dt + \sigma_t^Z dW_t^f]$$

D'après, le même raisonnement que précédemment, $X_t Z_t^f$ est un actif domestique, dont le prix actualisé est donc martingale sous \mathbb{Q}^d . On applique la formule d'Itô pour exprimer sa dynamique, il vient après calcul et utilisation de la relation entre les browniens montrée plus haut :

$$d(X_t Z_t^f) = X_t Z_t^f [r_t^d dt + (\sigma_t^X + \sigma_t^Z) dW_t^d + \sigma_t^Z (\sigma_t^X - \lambda_t^f - \lambda_t^d) dt]$$

Ce qui montre le résultat. De plus, d'après le caractère martingale du prix actualisé, on connaît les dynamiques de $X_t Z_t^f$ et $X_t e^{\int_0^t r_s^f ds}$:

$$d(X_t Z_t^f) = X_t Z_t^f [r_t^d dt + (\sigma_t^X + \sigma_t^Z) dW_t^d]$$

$$d(X_t e^{\int_0^t r_s^f ds}) = X_t e^{\int_0^t r_s^f ds} [r_t^d dt + \sigma_t^X dW_t^d]$$

Les prix actualisés de ces deux actifs domestiques sont donc des martingales sous \mathbb{Q}^d et correspondent aux achats de l'actif Z^f en devise domestique et de taux sans risque étranger. Le rapport de ces deux actifs redonne l'actif Z^f . Un produit dérivé sur Z^f peut donc utiliser ces deux actifs pour réaliser sa stratégie auto-financée, dans le cadre de la théorie vue précédemment. C'est ce que nous utilisons dans la couverture du produit Playlist.

9.2 Vers une modification des paramètres ?

Le cadre du modèle de Black-Scholes constant est assez restrictif. Le calcul des deltas de couverture se fera dans notre application par simulation de Monte Carlo, ce qui suppose de simuler l'évolution des cours futurs des sous-jacents. Ainsi, une remarque vient alors naturellement à l'esprit : les années passant, la connaissance des paramètres, notamment la volatilité historique du sous-jacents s'améliore, pourquoi alors ne pas simuler ces mêmes trajectoires historiques avec des paramètres nouveaux, recalibrés sur une plage de temps plus récente ? On collerait alors plus à la réalité de l'évolution futur du sous-jacents.

En réalité, une telle supposition ne trouve aucune justification théorique et va même à l'encontre du raisonnement présenté dans la partie précédente. Montrons ceci dans le cadre d'un produit dérivé sur un seul sous-jacent, donc la dynamique s'écrit :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Pour décrire le portefeuille V de réplication du payoff du produit, on souhaite se placer sous une mesure de probabilités \mathbb{Q} qui fait en sorte que la valeur du portefeuille actualisé est une martingale. Cette mesure de probabilités \mathbb{Q} s'obtient à partir des équations de marché. En effet, \mathbb{Q} est définie à partir de sa dérivée de Radon-Nykodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(\lambda * W_t - \frac{\lambda^2}{2} t)$$

avec λ solution de

$$\sigma * \lambda + r = \mu$$

Dès lors, on se rend compte que si on change de valeur de volatilité (σ) pour la simulation, le portefeuille actualisé ne sera plus une martingale sous \mathbb{Q} . En fait, changer de volatilité revient à modifier l'évaluation que l'on fait du prix du produit, et à commencer une nouvelle

couverture sous une nouvelle de mesure de probabilités : constituer un nouveau portefeuille de réplication. Rien ne dit que le prix que l'on trouve soit égal à celui obtenu précédemment (il est même forcément différent). Dès lors, si l'on ne peut pas réajuster la valeur du portefeuille par un réinvestissement issu de fonds disponibles par ailleurs, c'est à dire hors du cadre du portefeuille de réplication, on enregistre une erreur de couverture immédiatement, qui perdurera durant tout le restant de la vie du produit dérivé.

Illustrons ce propos dans un cas simple : le cas d'un call sur un sous-jacent. On suppose qu'on rebalance notre portefeuille aujourd'hui (t_1) et demain (t_2) en ayant changé de volatilité, ayant $\sigma_1 < \sigma_2$. Il se trouve que $S_{t_1} = S_{t_2}$. On a néanmoins, d'après les propriétés du call :

$$C_1 < C_2$$

et

$$\Delta_1 < \Delta_2$$

Pour respecter la couverture, on doit investir plus dans le sous-jacent, sachant que notre portefeuille n'a pas changé de valeur, ou très peu (composition de l'actif sans risque pendant dt), et que si on apporte pas la différence, le portefeuille n'aura plus la valeur du prix calculé (C_2).

En conclusion, il n'est possible de réévaluer les paramètres en cours de simulation que sous certaines conditions. Si cette réévaluation conduit à une diminution du prix du produit, il n'y a pas de problème, en revanche, si elle conduit à une augmentation de l'estimation du prix du produit, elle n'est possible que si l'on a vendu les parts du produit, au début de sa vie, à un prix qui reste supérieur à cette nouvelle estimation.

10 Analyse logicielle

10.1 Cahier des charges

Il s'agit ici de faire l'inventaire des fonctionnalités indispensables que doit fournir notre application. Elles seront présentées par ordre d'importance, et détaillées en sous fonctionnalités si besoin est.

Dans un premier temps, le gestionnaire doit avoir la possibilité de consulter les informations globales concernant le produit. Ces informations comportent par exemple la date de début de validité du produit soit le 29 avril 2010 ainsi que la date actuelle ou bien la date d'échéance qui sera maintenant de façon certaine le 29 avril 2016. Hormis ceci, le gestionnaire doit également pouvoir voir le nombre de parts acquises par les investisseurs ainsi que le nombre de parts disponibles au total et les valeurs que chacun de ces deux ensembles représentent en terme de cash. Toutes ces informations devront être réunies dans un même cadre (page web).

Le gestionnaire doit également avoir la possibilité de voir l'évolution des différents indices, il doit ainsi avoir accès à la performance actuelle du fonds.

Le gestionnaire doit avoir la possibilité de voir la composition de son portefeuille et notamment la répartition en pourcentage ou bien en quantité de chacun de ces investissements. Il pourra ainsi avoir la valeur liquidative de chacune de ses parts. Le gestionnaire doit également avoir la possibilité de choisir le modèle d'évolution des sous jacents, que ce soit Black-Scholes ou bien le modèle de Merton, qu'il souhaite utiliser pour évaluer cette valeur. Il pourra de même choisir les différents modèles utilisés pour modéliser les taux, la volatilité ainsi que les taux de change.

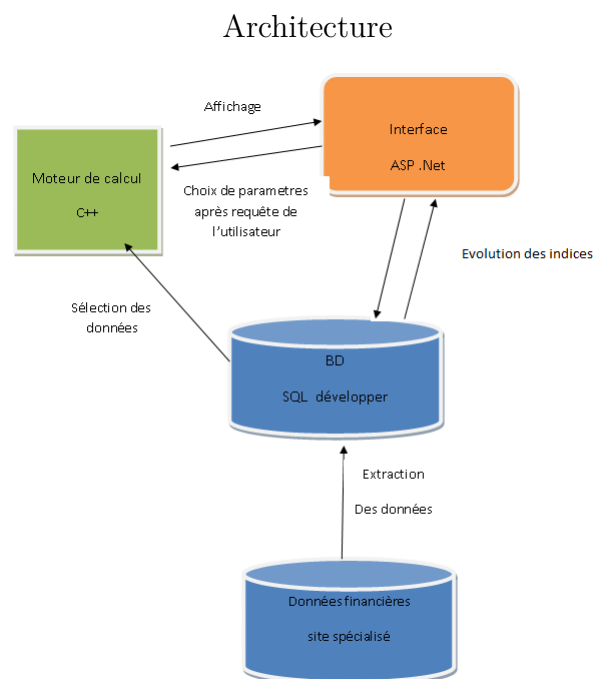
Aussi, le gestionnaire doit avoir accès à une proposition de couverture, dans le cadre des modèles choisis. Plus précisément le gestionnaire ne devra pas avoir la possibilité de modifier le modèle en cours de simulation si celui ci veut regarder les différents P&L obtenus avec les modèles choisis, par soucis de cohérence. De plus le gestionnaire devra avoir la possibilité d'indiquer son nombre de dates de rebalancement.

On laissera la possibilité au gestionnaire de se couvrir différemment de ce qui est préconisé, ce qui implique que celui-ci aura la possibilité de relancer une simulation à partir de la composition de portefeuille qu'il a choisi. Il pourra donc entrer la composition de son nouveau portefeuille. Notre précision de date est telle que celui ci ne peut avoir qu'une seule composition de portefeuille par jour.

Enfin, il aura également la possibilité d'accéder à une simulation des cours futurs et de l'erreur commise à maturité pour une trajectoire particulière en supposant qu'il ait suivi aujourd'hui, et chaque fois qu'elles lui auront été proposées, les recommandations de rebalancement. Il s'agit de le convaincre du bien fondé de ces propositions.

10.2 Architecture logicielle globale

Voici une première schématisation de l'architecture de notre produit.

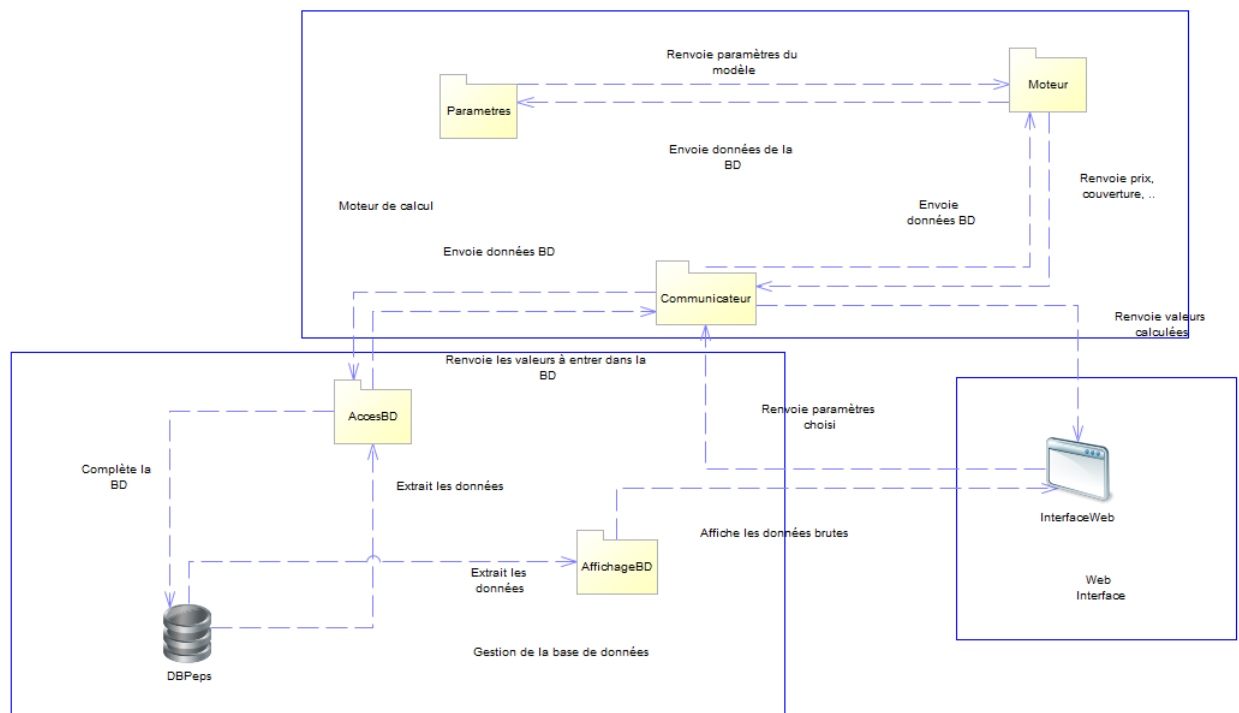


Ainsi on constate que l'architecture que nous avons adopté se base sur les cours disponibles sur des sites spécialisés tels que **yahoo finance**, ainsi à partir d'un extracteur de données, nous récupérerons les données de ce site concernant les indices voulus, ce qui alimentera notre base de données. Les données seront alors traitées par le moteur de calcul notamment pour connaître la performance actuelle du fonds, avoir diverses modélisations de l'évolution des indices. Il vient alors l'interface qui à l'aide des sorties du moteur de calcul peut afficher l'évolution des différents indices ainsi que la performance du fonds.

On constate également la présence d'un lien entre l'interface et la base de données en effet, lorsque l'utilisateur sélectionne de nouvelles dates pour voir l'évolution des différents indices, il n'est pas nécessaire de faire appel au moteur de calcul.

Si l'on rentre un peu plus dans le détails, on peut modéliser l'architecture de la façon suivante :

Architecture globale



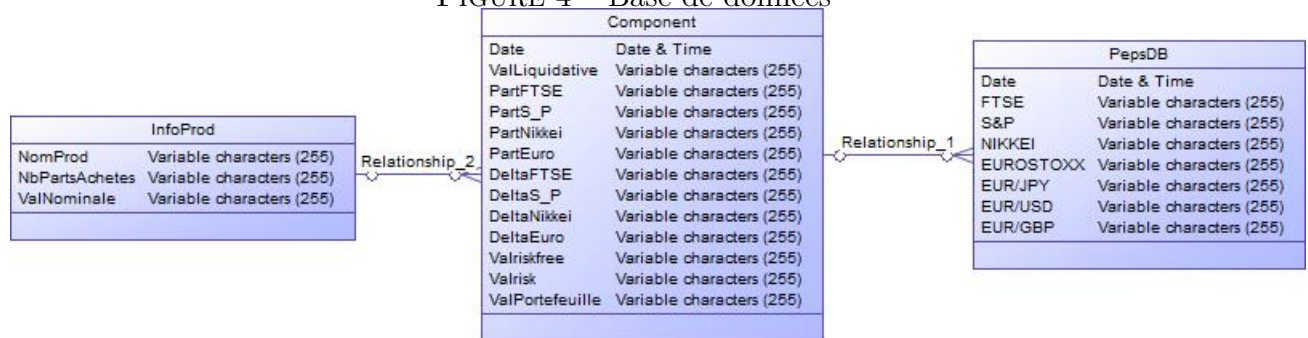
On constate dans cette architecture que l'intégralité de la partie calcul s'effectuera en C++ grâce à l'utilisation de deux modules C++/CLI. C'est pourquoi, on aura deux packages de traitement de la base de données, en effet le premier **AffichageBD** sera directement relié à l'application web pour afficher notamment le cours actuel des indices. L'autre **AccèsBD** permettra de transmettre le nécessaire au calcul des paramètres et donc au calibrage de notre modèle. Les différents paramètres étant calculés, **Moteur** interviendra pour réaliser les différentes simulations, et donc calculer le prix ainsi que le vecteur associé à la couverture ainsi que le P&L. Les relations sont dans les deux sens entre **InterfaceWeb** et le **Communicateur** ainsi que entre le **Communicateur** et le **Moteur** car comme précisé précédemment le gestionnaire à par exemple la possibilité de donner la composition de son portefeuille, les informations relatives doivent donc redescendre jusqu'au **Moteur** pour que cela soit pris en compte.

10.3 Architecture détaillée

De façon plus précise, l'architecture précédente peut être explicitée comme suit :

différentes évolutions du sous-jacents ou bien encore le type d'évolution de la volatilité. De plus par soucis d'efficacité et de cohérence, nous avons choisi de réaliser l'intégralité des calculs en C++, que ce soit pour obtenir les valeurs de la volatilité ou bien calculer le vecteur de couverture. De plus nous ne passons pas par cette voie pour afficher directement des données extraites de la base de données, dans ce cas particulier, la classe C# **AffichageBD** communiquera directement avec l'interface. La base de données associées sera la suivante :

FIGURE 4 – Base de données



La base de données ne sera en effet pas plus compliquée puisque nous aurons besoin du cours des indices à tout moment ainsi que stocker les différentes valeurs liquidatives et compositions de la couverture. Les trois tables précédentes sont donc suffisantes.

10.4 Spécifications

On considérera tout au long du développement que le gestionnaire maintient toujours le système en cohérence et qu'il n'agit pas sur son portefeuille sans en informer le logiciel. Nous allons dans un premier temps expliciter ce qui se cache derrière la fonctionnalité couverture énuméré dans le cahier des charges.

La question de la couverture pose différents problèmes, en effet dans un premier temps nous réaliserons une couverture en delta. Ainsi pour une action devant répliquer les flux du fonds que nous vendrons, nous cherchons à savoir quelle est la quantité de chaque indices que nous devons acheter pour s'assurer éviter des pertes et plus particulièrement supprimer le risque associé au produit structuré.

Ainsi dans un premier temps, il nous faut pricer le produit que nous proposons. Cela implique de devoir fixer le modèle que nous allons utiliser pour modéliser l'évolution des sous jacents. Ainsi nous avons choisi dans un premier temps d'implémenter le modèle de Black& Scholes. Se pose alors la question des différents paramètres du modèle, nous avons dans un premier temps choisi de déterminer la variance à l'aide d'un backtest sur les valeurs des différents indices au cours des trois derniers mois, nous ferons de mêmes pour déterminer la matrice des corrélations. En ce qui concerne les autres paramètres tels que le taux sans risque ou bien la probabilité historique, nous prendrons des valeurs arbitraire en essayant de coller au maximum avec les valeurs dont nous disposons.

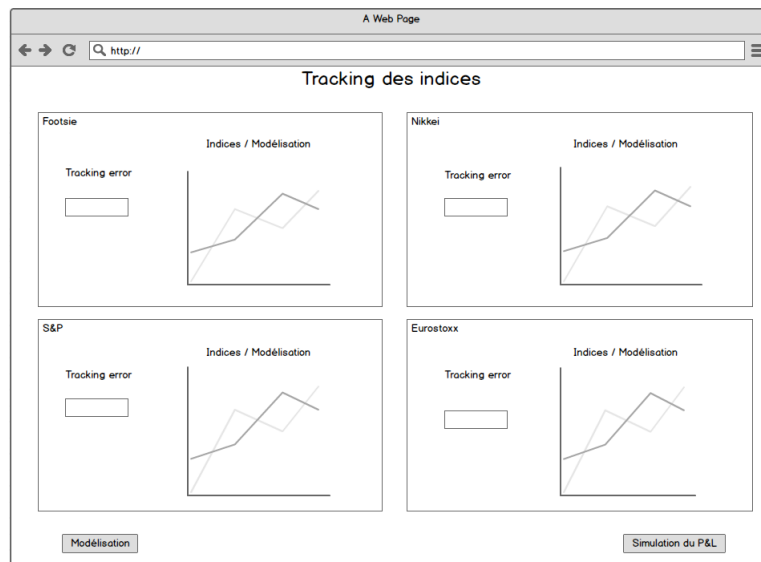
Disposant alors d'un modèle, il nous faut définir les paramètres caractérisant notre produit, aux vues des propriétés de celle ci énoncé précédemment, on lui attribuera une maturité fixée par défaut à 6, un nombre de date de constatation ainsi que la taille du modèle. Enfin on considère un modèle de MonteCarlo pour obtenir le prix de notre produit.

Par la suite, nous considérerons des modèles plus compliqués, c'est pourquoi nous avons choisi d'implémenter des classes abstraites pour que différents modèles puissent être ajoutés.

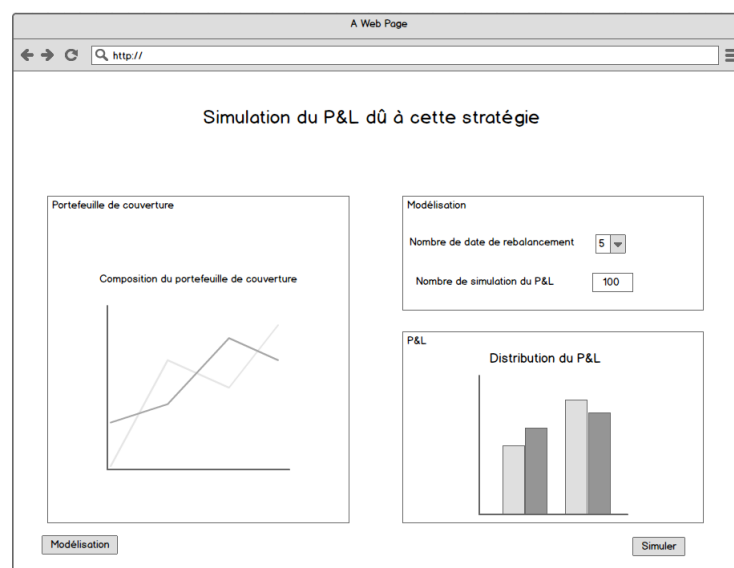
Un interface alors envisageable pour représenter les éléments décrits précédemment pourrait être l'interface suivante :

Dans un premier temps, le gestionnaire avant de vendre son produit, va choisir le modèle qu'il souhaite adopter pour réaliser un backtest. Ainsi par ce biais, le gestionnaire va choisir la modélisation de l'évolution de ses sous jacents, des taux d'intérêts, des taux de change ainsi que de la volatilité. Une fois ces différents paramètres choisis, le gestionnaire peut alors se rendre sur la fenêtre du backtest

Sur cette fenêtre et en fonction des paramètres que le gestionnaire a choisi précédemment, il peut normalement choisir la période d'estimation des paramètres si pour le modèle considéré on peut estimer des paramètres, choisir la fenêtre de validation et enfin choisir la date à partir de laquelle on commence le backtest sachant que le calendrier débute lors de la dernière des premières dates de cotation des indices.

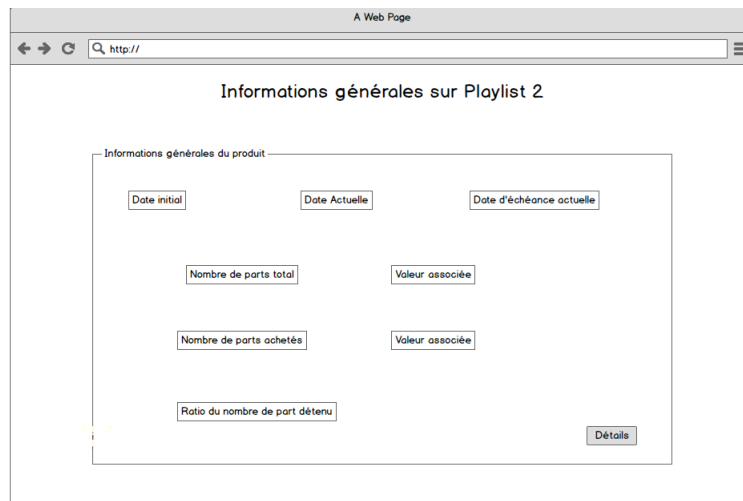


Le gestionnaire peut alors voir selon les modèles qu'il a choisi l'évolution de son cours théorique par rapport au cours réel pour chaque indices ainsi que obtenir la tracking error pour qu'il puisse voir si son modèle d'évolution des sous jacents est correct ou non.

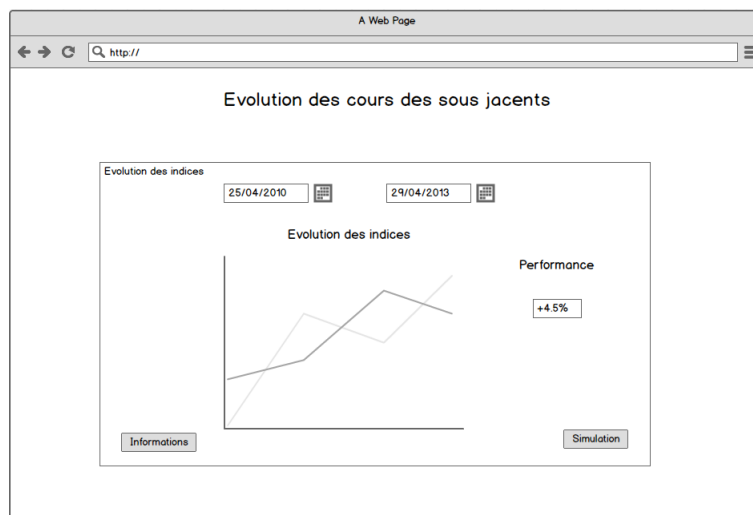


Enfin on arrive sur un onglet de simulation qui reprend la modélisation choisit précédemment, on a alors la possibilité de choisir de nombre de date de rebalancement parmi une plage données car dans notre pricer le nombre de date de rebalancement doit être un multiple du nombre de date de rebalancement des indices et il pourra choisir le nombre de PL a calculer. L'objectif étant pour le gestionnaire de voir la distribution des PL qu'il obtient avec le modèle choisit. Ainsi que la composition de son portefeuille de couverture moyen.

Une fois que tout ceci a été réalisé préalablement au début du cycle de vie du produit, le gestionnaire peut choisir le modèle définitif en validant simplement son modèle.



Voici alors la page d'accueil du produit durant son cycle de vie, celle ci décrit les principaux éléments à connaître pour le gestionnaire telles que les échéances, le nombre de parts vendues, le ratio entre le nombre de parts vendues et le nombre de parts totales. Nous avons modéliser dans un premier temps la navigation par des boutons mais en réalité, ce sera plutôt un système d'onglets.



Le second onglet présentera l'évolution des différents cours des indices ainsi que l'évolution du cours d'un tracker sur les différents indices afin de pouvoir comparer la performance de notre fonds qui sera décrite à droite là où il est indiqué performance et la performance d'un portefeuille composé des quatre indices.

A Web Page

← → ↻ http://

Couverture et cotation du produit

Composition du portefeuille de couverture

- Investissement dans le S&P
146 fois le S&P
- Investissement dans l'Eurostoxx
129 fois l'Euro
- Investissement dans le Footsie
142 fois le Footsie
- Investissement dans le Nikkei
163 fois le Nikkei
- Vente de produit Playlist 2
4231

Valeur liquidative

174.32

Variation de composition du portefeuille

- Vendre 23 fois le S&P
- Vendre 12 fois l'Eurostoxx
- Acheter 25 fois le Footsie
- Acheter 15 fois le Nikkei

Paramétrage

Simulation

On obtient alors la couverture obtenu du fait du modèle choisi, on doit alors avoir la possibilité de voir la composition nécessaire de notre portefeuille pour être couvert, la valeur liquidative de notre produit aujourd'hui ainsi que la différence avec notre ancien portefeuille pour connaître réellement les opérations que l'on doit effectuer pour obtenir le nouveau portefeuille de couverture.

A Web Page

← → ↻ http://

Portefeuille de couverture

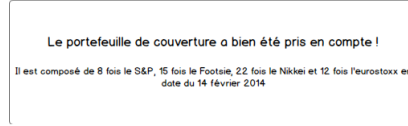
Composition réelle du portefeuille

S&P	13
Fotsie	25
Eurostoxx	20
Nikkei	15

Valider

Modélisation

Enfin le gestionnaire à la possibilité d'entrer lui même la composition de son portefeuille si il décide de ne pas suivre les conseils de notre outils d'aide. Cela permet au logiciel de rester en cohérence avec le portefeuille du gestionnaire et de continuer à lui indiquer la quantité à acheter et vendre pour chaque indice.



Une pop up s'affichera alors pour confirmer la bonne prise en compte de l'information, comme on peut le voir ci dessous.

11 Moteur de calcul C++

Le but de cette partie est d'expliquer la structure de l'outil permettant de calculer le prix de **Playlist 2**, le delta ainsi que le portefeuille de couverture par différente méthode de calcul et de simulation.

La section 1.1 présente le problème auquel on s'intéresse et les motivations pratiques. La section 1.2 présente l'architecture du moteur de calcul de notre outil. La section 1.3 explique dans le cadre du modèle de Black Scholes les différents algorithmes utilisés pour le calcul du prix, du delta et de la couverture.

11.1 Motivations pratiques

Durant l'ensemble de la description des algorithmes utilisés dans notre outils nous noterons $S = (S_t, t \geq 0)$ la dynamique du sous-jacent et \mathcal{F} sa filtration naturelle. Pour simplifier les choses, nous allons supposer que le payoff du produit s'écrit sous la forme :

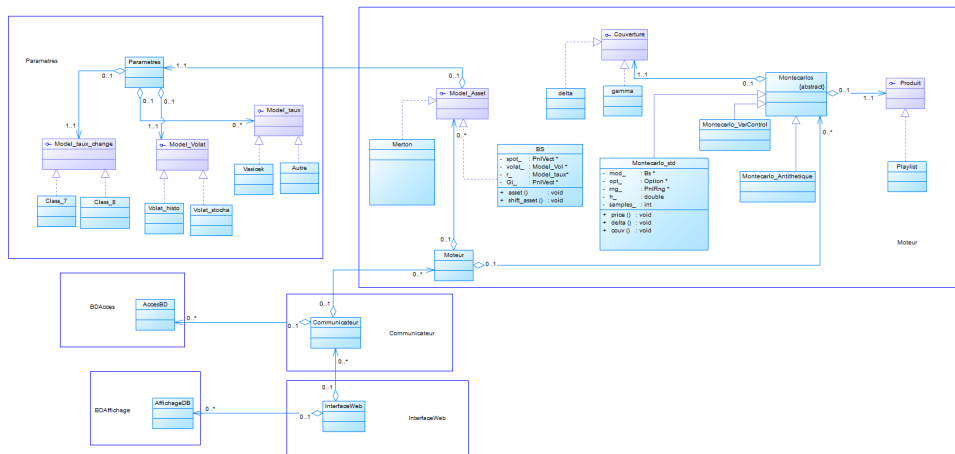
$$\phi(S_{t_0}, \dots, S_{t_N})$$

où $0 = t_0 \leq \dots \leq t_N = T$ est une grille de dates de constatations non-forcément équi-réparties.

Notons r le taux d'intérêt instantané que nous supposons pour l'instant constant. Le prix à l'instant $0 \leq t \leq T$, avec $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ du produit est donné par :

$$v(t, S_{t_0}, \dots, S_{t_N}) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\phi(S_{t_0}, \dots, S_{t_N}) \mid \mathcal{F})$$

11.2 Architecture



11.3 Modèle de Black-Scholes

Considérons D indices évoluant chacun selon le modèle de Black Scholes et corrélés entre eux. La dynamique S de ces D indices s'écrit :

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d B_t^d}, \quad d = 1, \dots, D$$

où r est le taux d'intérêt, $(\sigma^1, \dots, \sigma^d)$ sont les volatilités de chacun des indices que nous supposons constant et $B = (B^1, \dots, B^D)^T$ est un vecteur de D mouvements Browniens standards et réels de matrice de corrélation $Cov(B_t, B_t) = \Gamma t$ définie par $Cov(B_t^i, B_t^j) = \Gamma_{ij}t$ avec $\Gamma_{ij} = \rho$ pour tout $i \neq j$ et $\Gamma_{ii} = 1$. Le paramètre ρ doit être choisi dans $] -\frac{1}{D-1}, 1[$ de telle sorte que Γ soit définie positive pour assurer que le marché soit complet. Attention B n'est pas un mouvement Brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^D car ses composantes ne sont pas indépendantes mais on peut le réécrire en utilisant un mouvement Brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^D , noté dans la suite $W = (W^1, \dots, W^D)^T$ et qui sera vu comme un vecteur colonne. Ainsi on a l'égalité en loi $(B_t, t \geq 0) = (LW_t, t \geq 0)$ pour tout $t \geq 0$ où L est la factorisée de Cholesky de la matrice Γ , i.e $\Gamma = L'L$ avec L triangulaire inférieure. L'équation de la dynamique se réécrit alors :

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d L^d W_t}, \quad d = 1, \dots, D$$

où L^d est la ligne d de la matrice L . Ainsi la quantité $L^d W_t$ est bien un réel. De cette équation, on remarque facilement que l'on peut déduire :

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d L^d (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}, \quad d = 1, \dots, D$$

$$S_t^d = S_0^d e^{(r - \frac{(\sigma^d)^2}{2})t + \sigma^d \sqrt{(t_{i+1} - t_i)} L^d G_{i+1}}, \quad d = 1, \dots, D$$

où la suite $(G_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d de vecteurs gaussiens centrés de matrice de covariance identité. Ainsi pour simuler le processus S sur la grille $(t_i)_{i=0, \dots, N}$ il suffit de savoir simuler des vecteurs gaussiens centrés de matrice de covariance identité.

11.3.1 Prix

Prix à l'instant 0

Le prix à l'instant 0 est donné

$$v(0, S_0) = e^{-rT} \mathbb{E}(\phi(S_{t_0}, \dots, S_{t_N}))$$

On approche $v(0, S_0)$, grâce à une méthode de Monte Carlo, par

$$e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(S_{t_0}^{(j)}, \dots, S_{t_N}^{(j)})$$

où les N -uplets $(S_{t_0}^{(j)}, \dots, S_{t_N}^{(j)})$ pour $j = 1, \dots, M$ sont i.i.d selon la loi de $(S_{t_0}, \dots, S_{t_N})$.

Prix à l'instant $t > 0$

Pour calculer le prix à l'instant t , il faut calculer une espérance conditionnelle. Lorsque cela

est possible, une manière de traiter le calcul de cette espérance conditionnelle est de réécrire le sous-jacent S_{t+u} à l'instant $t + u$ pour $u > 0$ en fonction de la valeur S_t d'un sous-jacent à l'instant t et d'une quantité indépendante de \mathcal{F}_t :

$$S_{t+u} = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma(B_{t+u} - B_t)} = S_t \tilde{S}_u$$

où \tilde{S}_u est **indépendant** de \mathcal{F}_t ie indépendant du passé jusqu'à t inclus et la dynamique de \tilde{S} est donnée par

$$\tilde{S}_u = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma \tilde{B}_u}$$

où \tilde{B} est un mouvement Brownien réel standard indépendant de \mathcal{F}_\square . On a donc :

$$S_{t_{i+1}} \stackrel{Loi}{=} S_{t_i} e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} G_{i+1}}$$

où $(G_{i+1})_{i \geq 0}$ est une suite i.i.d selon la loi normale centrée réduite.

Ainsi le prix à l'instant t se réécrit

$$v(t, S_{t_0}, \dots, S_{t_i}, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, S_{t_{i+1}}, \dots, S_{t_N}))$$

Les lettres s minuscules désignent des variables déterministes. On peut alors approcher le prix à l'instant t par la moyenne Monte Carlo suivante :

$$e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, S_{t_{i+1}}^{(j)}, \dots, S_{t_N}^{(j)})$$

Les quantités $(s_{t_0}, s_{t_1}, \dots, s_{t_i}, s_t)$ représentent les valeurs réellement observées jusqu'à l'instant t sur la trajectoire du sous-jacent sur laquelle on souhaite calculer le prix du produit. D'un point de vue pratique, les valeurs $(s_{t_0}, s_{t_1}, \dots, s_{t_i}, s_t)$ sont les cotations du sous-jacent observées sur le marché jusqu'à la date t .

11.3.2 Delta

Pour construire notre portefeuille de couverture, nous appliquerons une *couverture en delta*. Ce portefeuille est entièrement déterminé par la quantité d'actifs risqués à posséder à chaque instant t qui est donnée par la dérivée du prix par rapport à S_t , ie

$$\frac{\delta v(t, S_{t_0}, \dots, S_{t_i}, S_t)}{\delta S_t}$$

Cette quantité est connue sous le nom de delta du produit et sera approché par une méthode de différence finies associé à une méthode de Monte Carlo :

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{M 2s_t h} \sum_{j=1}^M (\phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, (1+h)S_{t_{i+1}}, \dots, (1+h)S_{t_N}) - \phi(s_{t_0}, \dots, s_{t_i}, (1-h)S_{t_{i+1}}, \dots, (1-h)S_{t_N}))$$

Pour un produit faisant intervenir D sous-jacents (4 dans notre cas), son portefeuille de couverture contient les D actifs et la quantité d'actifs d à détenir à l'instant t est donnée par :

$$\frac{\delta v(t, S_{t_0}^d, \dots, S_{t_i}^d, S_t^d)}{\delta S_t^d}$$

11.3.3 Couverture

La répartition du $P\&L$ (Profit and Loss, ie erreur de couverture) joue un rôle central. Un modèle est jugé sur sa bonne capacité à couvrir les produits exotiques.

Considérons un actif dont la valeur du sous-jacent est noté S_t . Son évolution se fait sur une grille de temps t_0, \dots, t_N de pas T/N où $t_0 = 0$, le début de l'option et $t_N = T$, la maturité de l'option sur le sous-jacent.

La méthode `simul_market` de la classe `BS` renvoi une simulation du marché avec un nombre de dates H . On considère la grille de discrétisation de pas $\frac{T}{H}$ avec

$$(\tau_0, \dots, \tau_N) \supset (t_0, \dots, t_N)$$

où $\tau_0 = 0$ et $\tau_N = T$.

Le long de cette trajectoire, la construction du portefeuille de couverture se fait par le calcul d'un portefeuille constitué d'actifs sans risques et d'un portefeuille d'actifs risqués.

Soit le prix p_i , δ_i^0 la part d'actif non risqué, δ_i^1 la part d'actif risqué et δ_i le delta à chaque date τ_i .

La part en actifs risqué est calculée à partir de l'achat du sous-jacent de l'option. L'évolution du portefeuille d'actifs risqués s'écrit :

$$\delta_i^1 = \delta_i \cdot S_{\tau_i}, \quad i = 0, \dots, H$$

La part en actifs sans risques est calculée à partir de la vente à l'instant 0 de l'option et de la composition du portefeuille d'actifs risqués. L'évolution du portefeuille d'actifs sans risques s'écrit :

$$\begin{cases} \delta_0^0 = p_0 - \delta_0 \cdot S_0 \\ \delta_i^0 = \delta_{i-1}^0 * \exp^{\frac{r \cdot T}{H}} - (\delta_i - \delta_{i-1}) \cdot S_{\tau_i}, \quad i = 1, \dots, H \end{cases}$$

Le portefeuille de couverture est donné par la somme des deux portefeuilles :

$$V_i^{hedge} = \delta_i^0 + \delta_i^1, \quad i = 0, \dots, H$$

L'erreur de couverture est donnée par :

$$P\&L = V_H^{riskfree} + \delta_H \cdot S_{\tau_H} - payoff$$

11.4 Algorithme du payoff de Playlist 2

Le produit **Playlist 2** permet au porteur de recevoir à l'une des Dates d'Echéances Anticipées ou à la Date d'Echéance Maximum, la Valeur Liquidative de Référence majorée d'un Gain Final compris entre 0% et 27%.

Le Gain Final est conditionné à l'évolution des 4 Indices du Panier. Ainsi, chaque année, aux Dates de Constatations Intermédiaires et à la Date de Constatation Finale, si au moins 3 des 4 indices du Panier ont progressé de 10% ou plus, par rapport à leur Niveau d'Origine, un Gain Annuel de 4,5% est acquis. Le Gain Final est égale à la somme des Gains Annuels. De plus, la formule peut s'arrêter par anticipation. Si à l'un des deux premières Dates de

Constatations Intermédiaires, 3 des 4 Indices du Panier ont progressé de 20% ou plus par rapport à leur Niveau d'Origine, le porteur recevra la Valeur Liquidative de Référence majorée du Gain Final.

```

payoff(var ValNom, var temps){
  Pour les dates t = 1 an et t = 2 ans
    compteur_10 = 0
    compteur_20 = 0

    Pour chaque Indice du Panier
      si (valeur_indice[t]/valeur_indice[0] - 1) > 10%
        compteur_10++

      si (Valeur_indice[t]/Valeur_indice[0] - 1) > 20%
        compteur_20++

      si compteur_20 > 2
        gain += 4,5%
        retourne exp(-r*t)*150*(1+gain)

      si compteur_10 > 2
        gain += 4,5%
        stop boucle sur indice

    Pour les date t = 3 an à t = 6 ans
      compteur_10 = 0;

      Pour chaque Indice du Panier
        si (valeur_indice[t]/valeur_indice[0] - 1) > 10%
          compteur_10++;

        si compteur_10 > 2
          gain += 4,5%
          stop boucle sur indice

      retourne exp(-r*t)*150*(1+gain)
}

```

12 Amélioration : Le Gamma

12.1 Qu'est ce que le Gamma

Le Gamma d'un portefeuille est défini comme la sensibilité du Delta de ce portefeuille à une variation de la valeur du sous-jacent S :

$$\Gamma = \frac{\partial \delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

12.2 Choix de l'utilisation du Gamma

Lorsque nous travaillions sur la simulation de la couverture en Delta (cf la partie du rapport "Simulation de la couverture"), nous nous sommes rendu compte que si nous souhaitions diminuer au maximum l'erreur de couverture, il fallait soit :

- diminuer au maximum le pas de discrétisation
- diminuer le Gamma

En effet, nous avons montré dans cette partie qu'en notant

$$P\&L_t^* = \frac{1}{\sqrt{h}} P\&L_t$$

Il est possible de démontrer que le processus converge en distribution vers un autre processus :

$$P\&L_t^* \xrightarrow[h \rightarrow \infty]{d} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 C(u, S_u)}{\partial S^2} \sigma^2 S_u^2 dW'_u \right)$$

et que $\frac{\partial^2 C(u, S_u)}{\partial S^2}$ est la définition du Gamma du produit. Nous avons donc décidé de nous pencher sur le calcul de cette variable afin de réduire notre erreur de couverture.

12.3 Portefeuille Gamma-neutre

Afin de réduire l'erreur de couverture liée à la discrétisation, il faut diminuer le gamma du portefeuille et donc se construire un portefeuille delta-gamma neutre. Pour cela, il faut introduire dans notre portefeuille de couverture un autre actif, ou une option suffisamment liquide, dont le prix sera noté C_0 . L'idée est que le Gamma de cet actif va compenser le Gamma du produit que l'on cherche à couvrir, tout en restant Delta-neutre.

On considère donc notre portefeuille de couverture du produit C , composé

- d'une quantité δ_t du sous-jacent à l'instant t
- d'une quantité Γ_t d'actif C_0
- de cash B , investi au taux sans risque (pas obligatoire)

D'où à chaque instant t on a :

$$C(t, S_t) = \delta_t S_t + \Gamma_t C_0(t, S_t) - B$$

On cherche à éliminer le risque du portefeuille, on s'intéresse donc aux variations de sa valeur :

$$dC(t, S_t) = \delta_t dS_t + \Gamma_t dC_0(t, S_t) - dB$$

À l'aide d'un développement de Taylor au deuxième ordre par rapport au sous-jacent on trouve :

$$dC(t, S_t) = \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS_t^2$$

$$dC_0(t, S_t) = \frac{\partial C_0}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} dS_t^2$$

En substituant ces valeurs dans l'expression du portefeuille et en regroupant les termes, on obtient :

$$\left(-\frac{\partial C}{\partial S} + \delta_t + \Gamma_t \frac{\partial C_0}{\partial S}\right) dS_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \Gamma_t \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}\right) dS_t^2 + dB = 0$$

Afin de faire disparaître les facteurs de risque dS_t et dS_t^2 , il faut que

$$-\frac{\partial C}{\partial S} + \delta_t + \Gamma_t \frac{\partial C_0}{\partial S} = 0 \rightarrow \delta_t = \frac{\partial C}{\partial S} - \Gamma_t \frac{\partial C_0}{\partial S}$$

et

$$-\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \Gamma_t \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} = 0 \rightarrow \Gamma_t = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}$$

On obtient que le portefeuille de couverture doit contenir à chaque instant t , Γ_t actifs C_0 , et δ_t sous-jacent, avec :

$$\Gamma_t = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}$$

$$\delta_t = \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C_0}{\partial S} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} / \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}$$

On remarque qu'à chaque changement de couverture, l'actif C_0 disparaît du portefeuille de couverture, celui-ci n'a donc servi qu'à rendre plus précise la couverture.

12.4 Calcul du Gamma

Nos savons désormais comment utiliser le Gamma dans notre portefeuille pour réduire l'erreur de couverture. mais il nous faut tout de même être en mesure de calculer, ou d'approximer cette variable. Plusieurs méthodes existent pour calculer les grecques :

12.4.1 Méthode des trajectoires

Cette méthode repose sur la relation entre la fonction de payoff et le paramètre étudié. Voici un exemple avec un Call européen classique sous les hypothèses du modèle de Black-Scholes. La formule de Black-Scholes nous donne que le prix d'un Call est donné par :

$$C(t, S_t, K, T) = S_t \mathcal{N} \left[d_1(T-t, S_t e^{r(T-t)}, K) \right] - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left[d_0(T-t, S_t e^{r(T-t)}, K) \right]$$

avec

$$d_0(t, x, y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{t}$$

$$d_1(t, x, y) = d_0(t, x, y) + \sigma \sqrt{t}$$

et avec \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En dérivant directement la formule on obtient une formule fermée pour le Gamma :

$$\Gamma = \frac{\mathcal{N}'(d1)}{S_t \sigma \sqrt{T}}$$

Malheureusement, cette la formule du payoff de notre produit, fait que le prix chaque instant de celui-ci (espérance actualisée sous la proba risque-neutre) ne nous permet pas d'obtenir une formule fermée pour le Gamma.

12.4.2 Méthode du rapport de vraisemblance

La méthode du rapport de vraisemblance est basée sur la relation entre la fonction de densité du prix de l'option et le paramètre étudié. Le rapport de vraisemblance est obtenu en partant de la valeur de l'option :

$$C = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[h(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sigma \sqrt{T}Z}) \right]$$

$$C = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} h(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sigma \sqrt{T}z}) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

puis à l'aide d'un changement de variable, de mettre le prix sous la forme

$$C = \int_0^{+\infty} h(x) e^{-rT} f(x) dx$$

puis de dériver à l'intérieur de l'intégrale par le paramètre dont on se sert et d'en déduire une autre expression du prix sous forme d'espérance, ce qui donnera une densité pour la variable que l'on recherche, et même un estimateur sans biais. De la même façon que pour la méthode des trajectoires, la méthode du maximum de vraisemblance n'est pas applicable dans notre cas.

12.4.3 Méthode des différences finies

La méthodes des différences finies est très utilisée en physique et a été appliquée à la finance par Brennan et Schwartz en 1978. Il s'agit de remplacer des dérivées partielles par des différences finies. Cela consiste à approximer à l'aide de développements de Taylor les dérivées d'une variable par cette même variable en différents points :

On commence tout d'abord par discrétiser le temps $0 < t_1 < .. < t_N = T$ et on note $h_i = x_{i+1} - x_i$

On approxime ensuite au second ordre de la manière suivante :

$$u'(x_i) \sim \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_{i-1}}$$

ou encore

$$u''(x_i) \sim \frac{2}{(h_i + h_{i+1})} \left[\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_{i-1}} \right]$$

C'est la méthode que nous avons utilisé pour calculer le Delta, c'est pourquoi nous avons décidé de la réutiliser pour calculer cette fois-ci le Gamma.

$$\Gamma = \frac{C(S + \epsilon) - 2C(S) + C(S - \epsilon)}{\epsilon^2}$$

12.5 Travail réalisé

Nous avons voulu intégrer totalement à notre produit la couverture en Delta-Gamma neutre.

La première étape était d'implémenter une fonction qui calcule le Gamma avec la méthode des différences finies. Nous l'avons fait et avons testé cette méthode à l'aide d'un pricer Black-Scholes d'options européennes classique. En effet, nous pouvions vérifier nos calculs à l'aide de la formule fermée présentée plus haut.

Une fois que la méthode avait été implémentée et testée, nous avons voulu l'intégrer au logiciel. L'étape suivante aurait été d'intégrer la couverture en Gamma neutre mais nous n'avons pas eu le temps de le terminer totalement, et il y avait peu d'intérêt à afficher uniquement le Gamma à un gestionnaire.