
Devoir Maison

Vous trouverez sans doute des informations sur internet sur le sujet en question. Mais il vous est demandé d'argumenter précisément les démonstrations mathématiques en suivant les questions et en vous appuyant sur vos connaissances acquises.

Les questions avec une astérisque II-g)h)i)j) sont des questions subsidiaires présentes pour une présentation plus complète du sujet.

Exercice 1 Autour des fonctions de Bessel de première espèce

Nous allons étudier les solutions régulières de

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0 \quad (1)$$

Première partie.

On considère d'abord, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le problème de Cauchy sur l'intervalle $]0, +\infty[$ avec donnée initiale $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$ en $t_0 \in]0, +\infty[$, que l'on écrira

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{t^2-n^2}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} Y \\ Y(t_0) = Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

I-a) Montrer que pour t_0 , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy (2) admet une unique solution $Y \in \mathcal{C}^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta]; \mathbb{R}^2)$.

I-b) En prenant $\|Y\|_{\mathbb{R}^2} = \max(|Y_1|, |Y_2|)$, vérifier que

$$\|Y'(t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|Y_0\|_{\mathbb{R}^2} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \|Y\|_{\mathbb{R}^2}.$$

I-c) A l'aide du Lemme de Gronwall en déduire que l'intervalle maximal sur $]0, +\infty[$ d'existence et d'unicité d'une solution est $]0, +\infty[$.

I-d) En conclure que sur $]0, +\infty[$ l'ensemble des solutions de (1) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R})$.

Deuxième partie : Solution développable en série entière en 0

II-a) A l'aide du théorème de Lebesgue holomorphe montrer que la fonction J_n , $n \in \mathbb{Z}$, donnée par

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu - z \sin u)} du \quad (3)$$

est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

II-b) Vérifier $J_n(z) = J_{-n}(-z)$. Jusqu'à la fin on travaillera essentiellement avec $J_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

II-c) Montrer à l'aide de deux intégrations par parties en u que

$$\begin{aligned} zJ'_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n \cos(u) e^{i(nu - z \sin(u))} du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos^2(u) e^{i(nu - z \sin(u))} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (n^2 - z^2 \cos^2(u)) e^{i(nu - z \sin(u))} du. \end{aligned}$$

II-d) Déduire du II-c) que $z^2 J_n'' + z J_n' + (z^2 - n^2) J_n = 0$ sur \mathbb{C} . Et qu'en particulier cela donne une solution sur \mathbb{R} de (1) développable en série entière avec rayon de convergence infini.

II-e) A l'aide de l'équation (1) montrer que le développement en série entière $J_n(z) = z^r \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ avec $r \in \mathbb{N}$ qui est l'ordre d'annulation de J_n en zéro, vérifie :

$$n = r, \quad a_0 \neq 0, \quad a_{2p+1} = 0 \quad a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{4p(n+p)},$$

et finalement $a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! (p+n)!}$.

II-f) Vérifier que $J^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inu} (-i \sin u)^k du$. Ensuite en écrivant $-i \sin(u) = \frac{e^{-iu} - e^{iu}}{2}$ calculer $a_0 = n! J^{(n)}(0)$ et en déduire une formule générale pour

$$\int_0^{2\pi} e^{inu} (\sin(u))^k du \quad , \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

On remarquera également que $(-1)^n J_n(z) = J_n(-z) = J_{-n}(z)$.

II-g)* Expliquer pourquoi on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $t_0 \in]0, \delta[$, $J_n(t_0) \neq 0$. On fixe un tel $t_0 > 0$, en déduire qu'il existe une solution Y_n de (1) sur $]0, +\infty[$ linéairement indépendante de J_n telle que $Y_n(t_0) = 0$ et $Y_n'(t_0) = 1$.

II-h)* En écrivant $\frac{Y_n(t)}{J_n(t)} = F_n(t)$ vérifier que $F_n \in \mathcal{C}^2(]0, \delta[; \mathbb{R})$ puis avec $Y_n = F_n J_n$ vérifier que

$$\forall t \in]0, \delta[, \quad t^2 J_n(t) F_n''(t) + (2t^2 J_n'(t) + 2t J_n(t)) F_n'(t) = 0.$$

II-i) * A l'aide du développement limité de J_n en $t = 0$, établir consécutivement

$$\begin{aligned} \frac{F_n'}{F_n''} &= -\frac{n+1}{t} + O(t) \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+, \\ \exists C > 1, \forall t \in]0, \delta[, \quad \frac{1}{C t^{n+1}} &\leq |F_n'(t)| \leq \frac{C}{t^{n+1}}, \\ \exists C' > 1, \forall t \in]0, \delta[, \quad |F_n(t)| &\leq \frac{C'}{t^n}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} |Y_n'(t)| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} |Y_n'(t) J_n(t) + Y_n(t) J_n'(t)| = +\infty. \end{aligned}$$

II-j)* Conclure que les seules solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (1) qui admettent un intervalle maximal dans \mathbb{R} plus grand que $]0, +\infty[$ sont les solutions colinéaires à J_n .

Fonction génératrice pour les fonctions $J_n(x)$

On fixe $x \in \mathbb{C}$ et on considère la fonction $\varphi_x(z) = e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}$.

III-a) Expliquez pourquoi φ_x est une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* .

III-b) En déduire que si γ_1 et γ_2 sont deux contours de \mathbb{C} ne passant pas par 0 et tels que $\text{Ind}_{\gamma_1}(0) = \text{Ind}_{\gamma_2}(0)$ alors

$$\int_{\gamma_1} \varphi_x(z) dz = \int_{\gamma_2} \varphi_x(z) dz.$$

III-c) La fonction $\varphi_x(z)$ est-elle méromorphe sur \mathbb{C} ?

III-d) Montrer que la double série $\sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \frac{(xz/2)^{n_1}}{n_1!} \frac{(-1)^{n_2} (x/2)^{n_2}}{z^{n_2} n_2!}$ converge normalement sur toute couronne $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z| \leq R\}$, $0 < r < R < +\infty$, vers $\varphi_x(z)$.

III-e) En réordonnant les sommes (on précisera pourquoi on peut le faire) montrer que pour tout $0 < r < R < +\infty$

$$e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{n' \geq n} \frac{(x/2)^{n'} (-1)^{n'-n}}{n'! (n-n')!} \right] z^n$$

avec convergence normale dans $\{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$.

III-f) Avec la définition (3) de $J_n(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et utilisant en particulier le cercle de rayon 1 comme contour, donner un sens aux formules

$$J_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}}{z^{n+1}} dz,$$

puis en justifiant bien l'interversion intégrale et série (attention $\varphi_x(z)$ a une singularité essentielle en 0)

$$e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) z^n.$$

La notation \oint désigne une intégrale de contour pour un lacet γ ne passant pas par 0 et tel que $\text{Ind}_\gamma(0) = 1$.