Feuille 4 : Théorème de Cauchy global
Théorème des résidus

Exercice 1. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; |xy| < 1\}$. Montrer que Ω est simplement connexe.

Exercice 2. Soit V l'ouvert de $\mathbb{C}$ donné par $V = \{z \in \mathbb{C}; z \neq it$ pour tout t avec $|t| \geq 1\}$.

1. Montrer que V est simplement connexe.

2. Soit f l'unique primitive de $\dfrac{1}{1+z^2}$ sur V, vérifiant $f(0) = 0$. Que vaut $f(x)$ lorsque x est réel ? Écrire un développement limité de f au voisinage de 0.

3. Montrer que si $\operatorname{Re} z > 0$, $f(z) + f(1/z) = \pi/2$.

4. Montrer que lorsque z tend vers l'infini dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, $f(z)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\frac{1}{z}$.

5. Soit γ un lacet de $\mathbb{C} - \{-i, i\}$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ à partir de $\operatorname{Ind}_\gamma(i)$ et $\operatorname{Ind}_\gamma(-i)$. En déduire que lorsque γ est un lacet de $\mathbb{C} - [-i, i]$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

6. Montrer qu'il existe f_1 holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - [-i, i]$, telle que $f_1'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

7. Peut-on choisir f_1 telle que $f = f_1$ sur $U \cap V$? Justifier.

Exercice 3. 1. (a) Soient P, Q deux fonctions holomorphes au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, vérifiant $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$. On pose $f(z) = P(z)/Q(z)$. Montrer que $\operatorname{Res}(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

(b) Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions :

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad \frac{e^z}{z-1}, \quad \frac{ze^z}{z^2-1}, \quad \frac{1}{\sin \pi z}.$$

2. Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions

$$\frac{e^z}{z(z-1)^2}, \quad \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2}, \quad \frac{e^z}{(z-1)^k}, \ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 1 de rayon 1, orienté positivement.
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre -2 de rayon 2, orienté positivement.
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 0 de rayon 3/2, orienté positivement.
4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^k}$, où γ est le cercle de centre 0 de rayon 5, orienté positivement, et où $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. 1. Déterminer les racines de l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0$.

2. Soit γ le cercle unité orienté positivement. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{2}z + 1}$.

3. Calculer l' intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}$. (On se ramènera à la question précédente en exprimant $\cos\theta$ à partir de $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$).

4. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{2} + \cos\theta)^2}$.

Exercice 6. On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta, \quad B = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)\, d\theta.$$

1. Montrer que $B = 0$.
2. Calculer A (Indication : On calculera $A + iB$).