L'unité et l'identité des opposés adjoints selon Lawvere

Guillaume Laplante-Anfossi

Journée MaMuPhi *Lawvere & Hegel*, 9 octobre 2021

Préambule J'aimerais débuter par une citation de Lawvere qui annonce bien son programme, tirée de son article *Catégories d'espace et de quantité* [Law92] :

> Je suis convaincu qu'au cours de la prochaine décennie et du prochain siècle, les progrès techniques réalisés par les théoriciens des catégories seront utiles à la philosophie dialectique, en donnant une forme précise, avec des modèles mathématiques sujets à débat, à d'anciennes distinctions philosophiques telles que l'opposition entre le général et le particulier, l'objectif et le subjectif, l'être et le devenir, l'espace et la quantité, l'égalité et la différence, le quantitatif et le qualitatif. En retour, l'attention explicite des mathématiciens à ces questions philosophiques est nécessaire pour atteindre l'objectif de rendre les mathématiques (et donc les autres sciences) plus largement accessibles et utilisables. Bien entendu, il faudra pour cela que les philosophes apprennent les mathématiques et que les mathématiciens apprennent la philosophie.

La situation d'UIAO Mon but sera ici d'éclairer l'article de Lawvere intitulé *Unité et identité des opposés dans le calcul différentiel et la physique* [Law96], du point de vue d'un mathématicien qui veut aller vers la philosophie.

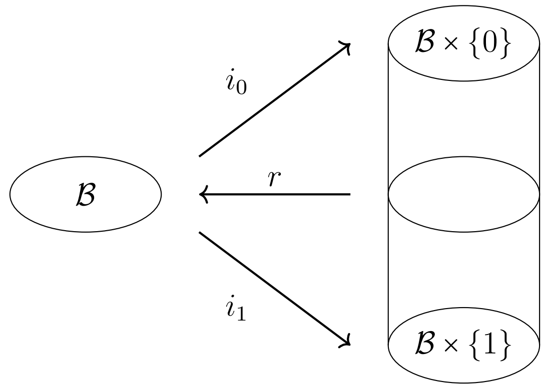
La situation de départ est la suivante, un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd} \quad \text{où} \quad r \circ i_0 = r \circ i_1 = \mathsf{id}_{\mathcal{B}} \ . \tag{1}$$

On a ici trois flèches, deux "inclusions" i_0 et i_1 et une "rétraction" r. Lawvere appelle un tel diagramme "d'unité et identité" (UI) : il faut concevoir les deux flèches i_0 et i_1 comme déterminant deux sous-objets de $\mathcal{C}$ qui sont isomorphes (car tous deux issus de $\mathcal{B}$) et donc "identiques", "unis" par une rétraction commune r qui les ramène à leur point de départ. Une classe particulière de tels diagrammes est donnée par les "cylindres"

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{B} \times [0,1] \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

où i_0 et i_1 sont les inclusions des deux copies de $\mathcal{B}$ aux extrémités du cylindre, que l'on peut représenter comme suit :



Ici, r représente l'oubli de la coordonnée entre 0 et 1.

Lawvere dit dans ce cas que les deux sous-objets associés à i_0 et i_1 sont non seulement unis et identiques, mais en même temps *opposés* car vivant chacun à une extrémité du cylindre.

L'analogue catégorique de cette opposition est représentée par des foncteurs *adjoints*. On a vu plus tôt dans l'exposé de Martin [Gon21] comment deux foncteurs adjoints expriment, tout en étant liés, un défaut d'homogénéité entre les catégories qu'ils relient.

Lawvere voit le passage d'une extrémité à l'autre du cylindre comme enchaînement de deux adjonctions

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "r"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\perp"] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\perp"] \end{tikzcd} \tag{2}$$

et il dit i_0 et i_1 "opposés adjoints". En effet, le foncteur r "oppose" i_0 et i_1 car il est tout à la fois adjoint à *droite* de i_0 et adjoint à *gauche* de i_1.

Lorsque de plus r "unit et identifie" i_0 et i_1 comme précédemment (1), c'est-à-dire si de plus $r \circ i_0 \simeq r \circ i_1 \simeq \mathsf{id}_{\mathcal{B}}$, alors Lawvere parle "d'unité et identité d'opposés adjoints" (UIAO). Un tel triplet de foncteurs représente pour lui l'*Aufhebung* de la dialectique hégélienne.

Plus précisément,

1. l'identité des sous-catégories $i_0(\mathcal{B})$ et $i_1(\mathcal{B})$ représente le moment unitaire ; le "même",

2. la relation de double adjonction dans des sens opposés (l'un à droite, l'autre à gauche) représente le moment négatif, qui vient contester la plénitude du moment unitaire ; "l'autre",

3. la rétraction commune r représente la réconciliation, qui par double négation du moment unitaire, établit la totalité : "l'auto-affirmation du même qui a cependant, suite à la rencontre avec l'altérité, a renoncé à sa particularité pour se présenter comme un tout". [Mar18]

Références

[Gon21] Martin Gonzalez : De l'inauguration d'une intellectualité mathématique matérialiste codifiée catégoriquement. `http://www.entretemps.asso.fr/2021-2022/Gonzalez-Lawvere-texte.pdf`, oct 2021.

[Law92] F. William Lawvere : Categories of space and of quantity. *In* Javier Echeverria, Andoni Ibarra et Thomas Mormann, éditeurs : *The Space of Mathematics : Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*, pages 14–30. De Gruyter, 1992.

[Law96] F. William Lawvere : Unity and identity of opposites in calculus and physics. *Applied Categorical Structures*, 4(2):167–174, juin 1996.

[Mar18] Gilles Marmasse : *Hegel*. 2018.