Paris, 9 octobre 2024

Journée MaMuPhi

« Lawvere & Hegel »

1

L'unité et l'identité des opposés adjoints selon Lawvere

I. Préambule

J'aimerais débuter par une citation de Lawvere qui annonce bien son programme ; tirée de son article " Catégories d'espace et de quantité " (1992) :

« Je suis convaincu qu'au cours de la prochaine décennie et du prochain siècle, les progrès techniques réalisés par les théoriciens des catégories seront utiles à la philosophie dialectique, en donnant une forme précise, avec des modèles mathématiques sujets à débat, à d'anciennes distinctions philosophiques telles l'opposition entre le général et le particulier, l'objectif et le subjectif, l'être et le devenir, l'espace et la quantité, l'égalité et la différence, le quantitatif et le qualitatif. En retour, l'attention explicite des mathématiciens à ces questions philosophiques est nécessaire pour atteindre l'objectif de rendre les mathématiques (et donc les autres sciences) plus largement accessibles et utilisables. Bien entendu, il faudra pour cela que les philosophes apprennent les mathématiques et que les mathématiciens apprennent la philosophie. »

Je suis mathématicien (et musicien) mais je ne suis pas philosophe, et je suis ici pour apprendre.

Mon but sera ici d'éclairer l'article de Lawvere intitulé "L'unité et l'identité des opposés dans le calcul différentiel et la physique", ~~du~~ du point de vue d'un mathématicien qui veut aller vers la philosophie.

La situation de départ est la suivante, un diagramme de la forme

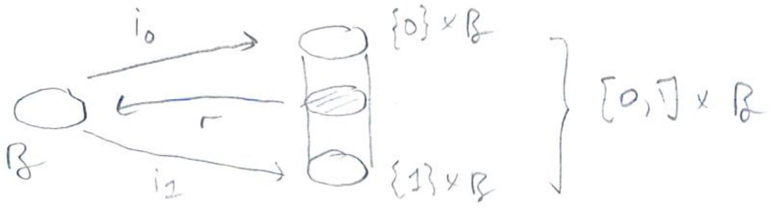
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left=3, "i_0"] \arrow[r, shift right=3, "i_1"'] & C \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd} \quad \text{où} \quad r\circ i_0 = r\circ i_1 = id_B .$$

On a ici trois flèches, deux "inclusions" i_0 et i_1, et une "rétraction" r. Lawvere appelle un tel diagramme "d'unité et identité" : ~~chaque~~ il faut concevoir les deux flèches i_0 et i_1 comme déterminant deux sous-objets de C qui sont isomorphes (car tous deux issus de B) et donc "identiques", ~~et~~ "unis" par ~~les~~ une rétraction commune r, qui ~~les~~ ramène les deux sous-objets de C à leur point de départ, B.

Une classe particulière de tels diagrammes est donnée par ~~les~~ des "cylindres"

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left=3, "i_0"] \arrow[r, shift right=3, "i_1"'] & C = [0,1]\times B \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

où i_0 et i_1 sont les inclusions des deux copies de B aux extrémités du cylindre, ~~et r~~ que l'on peut représenter comme suit :



Ici, r représente l'oubli de la coordonnée entre 0 et 1.

Lawvere dit dans ce cas que les deux sous-objets associés à i_0 et i_1 sont non-seulement unis et identiques, mais en même temps opposés car vivant chacun à une extrémité du cylindre.

L'analogue catégorique de cette opposition est représentée par des foncteurs adjoints. On a vu ~~comment~~ plus tôt dans l'exposé de Martin comment deux foncteurs adjoints expriment, tout en étant liés, un défaut d'homogénéité entre les catégories qu'ils relient.

~~[illegible]~~ Lawvere voit le passage d'une extrémité à l'autre du cylindre comme enchaînement de deux adjonctions :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

~~Il dit~~ et il dit appelle i_0 et i_1 "opposés adjoints". En effet, le foncteur r "oppose" i_0 et i_1 car il est tout à la fois adjoint à droite de i_0 et adjoint à gauche de i_1.

Lorsque de plus r "unit" et identifie i_0 et i_1 comme précédemment, c'est-à-dire si de plus $r \circ i_0 \simeq r \circ i_1 = id_{\mathcal{B}}$, alors Lawvere parle "d'unité et identité d'opposés adjoints" (UIAO).

Un tel triplet de foncteurs représente pour lui ~~les trois instants~~ l'Aufhebung de la dialectique hégélienne.

Plus précisément,

1) l'identité des sous-catégories $i_0(B)$ et $i_1(B)$ représente le moment unitaire ; le "même"

2) ~~...~~ la relation de double adjonction dans des sens opposés (l'un à droite, l'autre à gauche) représente le moment négatif, qui vient contester la plénitude du moment unitaire ; "l'autre"

3) la rétraction commune r ~~s'affirme~~ représente la réconciliation, qui par double négation du moment unitaire, établit la totalité ; "l'auto-affirmation du même ~~qui~~ s'il qui renonce à sa particularité ~~à l'aide de l'Autre~~" cependant, suite à la rencontre avec l'altérité pour ~~former~~ se présenter comme un tout".

L'exemple fondamental est donné par les objets initial et ~~terminal~~ final d'une catégorie (ou plus précisément un topos). Prenons la catégorie des ensembles, et considérons l'unique foncteur à destination de la catégorie triviale

$$1 \xleftarrow{r} Ens$$

Ici, la catégorie 1 n'a qu'un seul objet et une seule flèche, l'identité, et le foncteur r envoie tout ensemble sur cet unique objet et toute fonction sur cette unique flèche.

On considère maintenant les foncteurs désignant l'ensemble vide et l'ensemble à un élément, qui vont dans l'autre sens

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\emptyset"] \arrow[r, bend right, "*"'] & Ens \arrow[l, "r"'] \end{tikzcd}$$

~~Dans~~ L'ensemble vide est initial, c'est-à-dire qu'il admet une unique ~~flèche~~ fonction vers tout ensemble et l'ensemble à un élément est final, c'est-à-dire ~~que tout~~ qu'il reçoit une unique fonction depuis tout ensemble.

On obtient ainsi un UIAO au sens de Lawvere, ~~tas~~ et on ~~est tenté de~~ nommer l'ensemble $*$ "être"

l'ensemble $\emptyset$ "néant"

et la rétraction r "devenir",

qui à la fois unit, identifie et oppose l'être et le néant. On peut repenser à notre cylindre et à cette citation de Hegel :

« Il n'y a rien qui ne soit un état intermédiaire entre l'être et le néant »

~~C'est~~ Cela est bien vrai pour les ensembles, qui sont caractérisés par la relation d'appartenance, qui est elle-même déterminée par les fonctions vers les deux objets initial et final, soit encore par la logique ~~des ensembles telle que nous la connaissons~~ usuelle, c'est-à-dire la logique dans les ensembles.

En d'autres mots, ~~le néant~~ l'être et le néant sont les mêmes car ils sont tous deux singletons ; ils sont opposés par leur nature ontologique car (l'un est vide et l'autre est plein) ; et ils donnent par leur rapport dialectique naissance à tout ce qui est, c'est-à-dire les ensembles et leur logique, qui est précisément l'objet du livre de Hegel,

dans la catégorie Ens

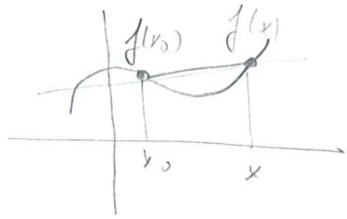
Mais comment, plus précisément, les deux entités "statiques", $\emptyset$ et $*$ ~~donnent-ils~~ engendrent-ils une entité "dynamique", le devenir?

Autrement dit, comment la situation d'UIAO rend-t-elle compte du procédé dialectique décrit par Hegel? Lawvere donne un exemple éclairant, celui du calcul différentiel.

L'idée de base, que Lawvere fait remonter aux Manuscrits Mathématiques de Marx, est que la dialectique est à l'oeuvre au coeur même du calcul différentiel.

Rappelons que la différentielle d'une fonction lisse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point x_0 est définie par la limite

$$f'(x) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



En suivant ~~l'interprétation~~ la lecture de François Nicolas des MMM, on peut interpréter l'opération de différentiation d'une fonction comme un double travail du négatif:

1) On part du point x_0, où $f(x_0)$ est identique à elle-même

2) On nie cette identité par ~~une altérité~~, un point $x \neq x_0$ où f ~~n'est plus~~ devient autre, opposée; il y a alors apparition d'une différence $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

3) Finalement, on nie cette négation, en réduisant la différence entre $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$ à néant. ~~Ce faisant, le rapport~~

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ $\qquad$ $\Delta x \to 0$ et $\Delta f \to 0$

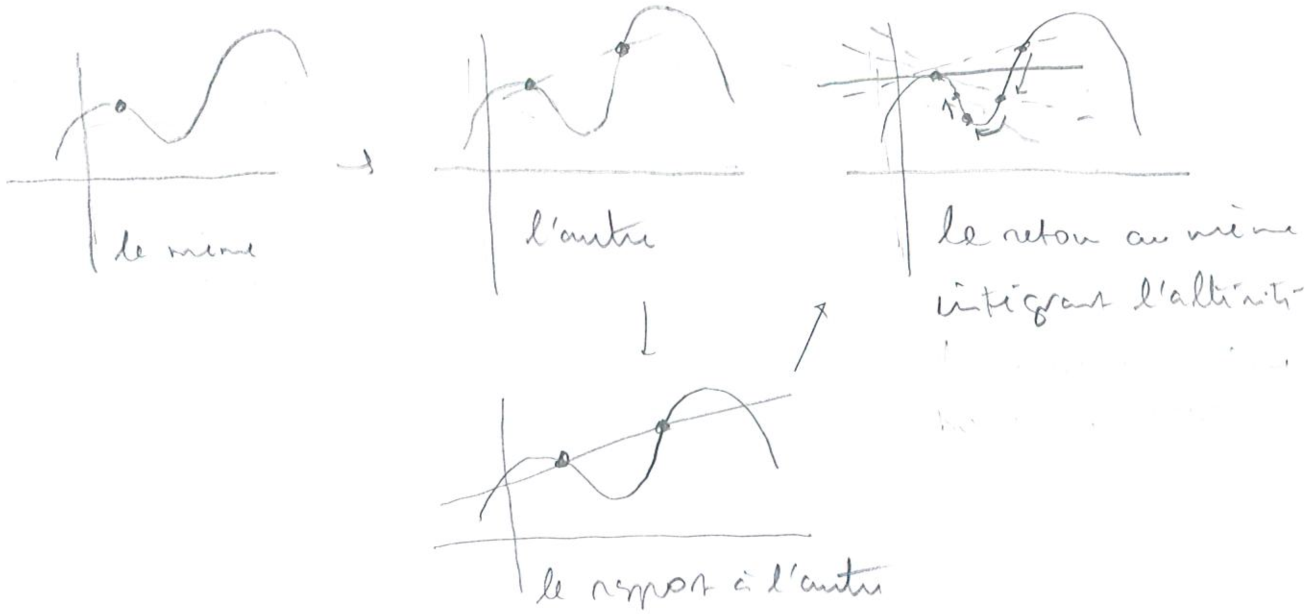
~~Ici, donc, l'auto-affirmation du même (la fonction) renonce si son~~
~~Suite à sa rencontre avec l'altérité, la fonction renonce~~
~~s'auto affirme se présente comme renonce à sa particularité,~~

~~Ka~~ Lors de cette étape, la fonction f ne revient pas de manière tautologique à l'affirmation de son identité, mais entre en rapport avec l'altérité pour se présenter comme un tout :

ici c'est au sens propre et au figuré !

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

L'auto-affirmation du même ~~donne alors~~ ~~re~~ ici comme par le processus de limite, donne alors naissance à une nouvelle quantité, la dérivée, la "vitesse" de la fonction, "son "devenir"". *



* ~~En~~ En effet, si l'on interprète notre fonction comme la trajectoire d'une particule, la dérivée en un instant donne la direction et la ~~mesure~~ ~~de la~~ quantité de mouvement

Lawvere formalise cette pensée dans son cadre (accrochez-vous, on va faire un peu de maths, simples mais il faut suivre !).

Il reformule les enjeux de la manière suivante :

« En supposant les lois de l'algèbre qui sont vraies à la fois pour les quantités constantes et variables, quelle est la donnée supplémentaire nécessaire pour déterminer les dérivées des variables et établir les règles de dérivation ? »

La réponse, nous dit Lawvere, est « l'unité et l'identité des opposés qui permet à une seule variable de se séparer en deux variables analogues, puis de se réunir à nouveau plus tard en une seule »

Plus précisément, il considère une UIAO dans la catégorie des anneaux commutatifs.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left=3, "i_0"] \arrow[r, shift right=3, "i_1"'] & C \arrow[l, "r"'] \end{tikzcd}$$

Rappelons que dans un anneau B, on a

- une addition $a+b$ associative et commutative
- une multiplication ab 〃
- compatibles dans le sens que la deuxième se distribue sur la première

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Un homomorphisme d'anneaux préserve cette structure :

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Lawvere considère (à juste titre) cette catégorie comme incarnant les "lois de l'algèbre", qui sont valides à la fois pour les quantités constantes (les nombres) et variables (les fonctions). 9

Les deux ~~homo~~morphismes i_0 et i_1 réalisent la négation par l'altérité :

- un élément $y \in \mathcal{B}$ est envoyé sur deux éléments $i_0(y)$ et $i_1(y)$ que nous noterons y_0 et y_1.
- on peut alors considérer leur différence que nous noterons
$$\Delta y := y_1 - y_0$$
- étant donné que $r(y_0) = r(y_1) = y$, on a $r(\Delta y) = r(y_1) - r(y_0) = 0$
On écrit suggestivement $\Delta y \to 0$ pour ~~signifier que~~ symboliser l'image d'un élément de $\mathcal{C}$ par r.
(le morphisme r incarne algébriquement, "synthétiquement" le processus de limite)

~~On est~~ maintenant ~~en mesure de dériver formellement les lois du calcul différentiel dans ce cas~~ on a besoin de 3 définitions formelles :

Déf : Un élément $x \in \mathcal{B}$ est appelé "variable" si
$$\forall q \in \mathcal{C},\quad q \Delta x = 0 \implies q \to 0$$
(en d'autres mots, si x est variable, Δx n'est jamais 0.)

Déf : Soit $x \in \mathcal{B}$. On définit l'ensemble
$$A(x) := \{ y \in \mathcal{B} \mid \exists g \in \mathcal{C} \text{ ~~avec~~ } \Delta y = g \Delta x \}.$$

Déf : Soit $y \in A(x)$. S'il existe, on note dy/dx l'élément de $\mathcal{B}$ tel que
$$\forall g \in \mathcal{C},\quad \Delta y = g \Delta x \implies g \to \frac{dy}{dx}.$$

On est maintenant en mesure de dériver formellement les lois du calcul différentiel :

Prop. Soit $x \in \mathcal{B}$ une variable. Alors, $A(x)$ est un anneau,

1) $\frac{d}{dx}$ est bien défini sur $A(x)$

2) $$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v \quad \forall\, u,v \in A(x)$$

démo :

1) On veut montrer que $\frac{dy}{dx}$ existe $\forall y \in A(x)$. Si x est variable et $y \in A(x)$ on a

$$\left.\begin{array}{l}\Delta y = g_1 \Delta x \\ \Delta y = g_2 \Delta x\end{array}\right\} \Rightarrow (g_1 - g_2)\Delta x = 0 \Rightarrow g_1 - g_2 \to 0$$

$$\Rightarrow r(g_1) = r(g_2) =: \frac{dy}{dx}$$

2) Supposons que $\begin{array}{l}\Delta u = g\Delta x \\ \Delta v = h\Delta x\end{array} \in \mathcal{C}$. Alors,

$$\begin{aligned}\Delta(uv) = u_1v_1 - u_0v_0 &= u_1(v_1 - v_0) + (u_1 - v_0)v_1 \\ &= u_0\Delta v + (\Delta u)v_1 \\ &= (u_0h + gv_1)\Delta x\end{aligned}$$

on ajoute 0 !

Mais $u_0h + gv_1 \longrightarrow u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$.

□

Prop. Soit x une variable et soit $y \in A(x)$ également une variable. Alors, $A(y) \subseteq A(x)$ et $\forall z \in A(y)$ on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

démo : Si $\Delta z = g \Delta y$ et $\Delta y = h \Delta x$, alors $\Delta z = (gh)\Delta x$.

Mais $g \to \frac{dz}{dy}$ et $h \to \frac{dy}{dx}$ et $r(gh) = r(g) r(h)$

$\square$

Remarque : dans la première proposition on s'est servi de l'additivité de r
dans la deuxième " multiplicativité "

On est donc parvenu à établir, avec une grande économie de moyens, les lois fondamentales du calcul différentiel à partir de considérations <u>purement algébriques</u>.

~~Ainsi~~ Le moteur que l'on a dû fournir, ajouter ~~à ces~~ d aux lois de l'algèbre est (toujours selon Lawvere) l'incarnation de la dialectique hégélienne :

> l'unité et l'identité des opposés donne naissance
> par un double travail du négatif à l'opération
> de dérivation et à ses lois constitutives.

Ceci constitue une formalisation mathématique rigoureuse de l'idée de Marx, dont on peut débattre à la fois sur les terrains mathématique et philosophique.

Lawvere attribue cette formalisation à Hadamard, ce qui paraît à première vue surprenant. En fait, Hadamard a prouvé le lemme ~~suivant~~ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \exists g \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \text{tel que } f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)\, g(x_1) \end{array}}$$

Il serait intéressant de savoir si Hadamard avait ~~lu~~ en tête Marx ou Hegel au moment de prouver ce lemme. Toujours est-il que ce dernier, d'apparence simple, a des conséquences profondes. Dans le cas qui nous préoccupe, en prenant (12)

$$\mathcal{B} = C^\infty(\mathbb{R}) \underset{i_1}{\overset{i_0}{\underset{\longleftarrow r}{\rightrightarrows}}} \mathcal{C} = C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

$$f_0(x,y) := f(x) \qquad \Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$f_1(x,y) := f(y) \qquad x \mapsto (x,x)$$
$$r(g) := g\circ\Delta$$

le lemme d'Hadamard affirme que

$$A(id_{\mathbb{R}}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\, g\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}),\ \Delta f = g\,\Delta x \}$$
$$= C^\infty(\mathbb{R})$$

et les propositions précédentes redonnent le calcul différentiel usuel. Il apparaît donc comme la clef de voûte d'un développement formel du calcul différentiel sur $C^\infty(\mathbb{R})$.

On peut se demander immédiatement dans quels contextes plus généraux pourraient tenir le lemme d'Hadamard ; par exemple en remplaçant l'anneau $C^\infty(\mathbb{R})$ par un autre anneau.

Lawvere affirme que l'on tient là des outils pour l'enseignement* les anneaux pour lesquels le lemme d'Hadamard est vérifié sont

*car les règles formelles précédentes capturent l'idée essentielle.

ceux où la fonction "pente-de-la-sécante" existe toujours et se spécialise de manière non-ambiguë en une fonction "pente-de-la-tangente".

On peut pousser plus loin et se demander s'il est possible, à l'aide de ce genre de pensée "catégorielle", d'étendre la géométrie différentielle à des contextes où elle ne peut d'ordinaire être définie.

Il s'avère que cela est possible, et c'est tout l'enjeu d'un domaine à part entière nommé "géométrie différentielle synthétique". Il s'agit en particulier d'un modèle alternatif pour les infinitésimaux par rapport à l'analyse non-standard. Il permet de parler de géométrie différentielle dans des topos analogues ~~à notre topos~~ au topos des ensembles que nous avons étudié, où ~~être~~ la trilogie être-néant-devenir est toujours à l'oeuvre mais où la logique n'est plus celle que nous connaissons.

Voilà qui aurait sans doute intéressé Hegel.