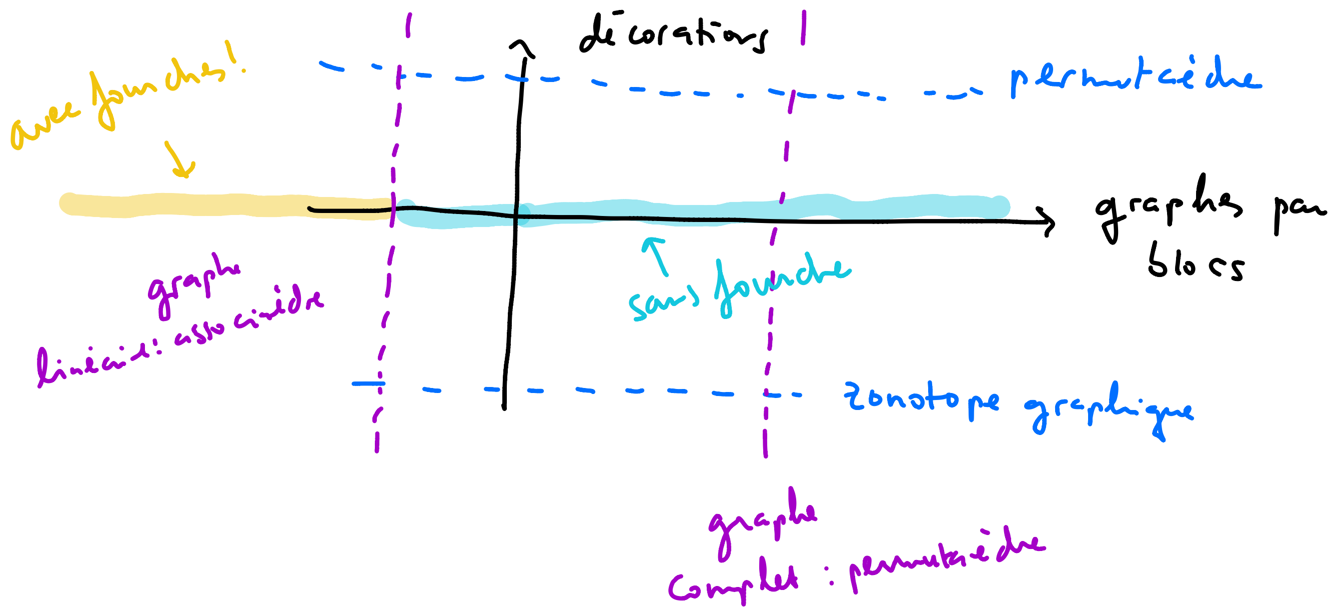
11 décembre 2021

Blocs, graphes et compagnie

Guillaume : structure d'opérade sur les réalisation de Loday des opéraèdres, i.e. les graphes par blocs sans fourches

Vincent : il existe des réalisations de Loday pour tous les graphes par blocs — et même une deuxième dimension !



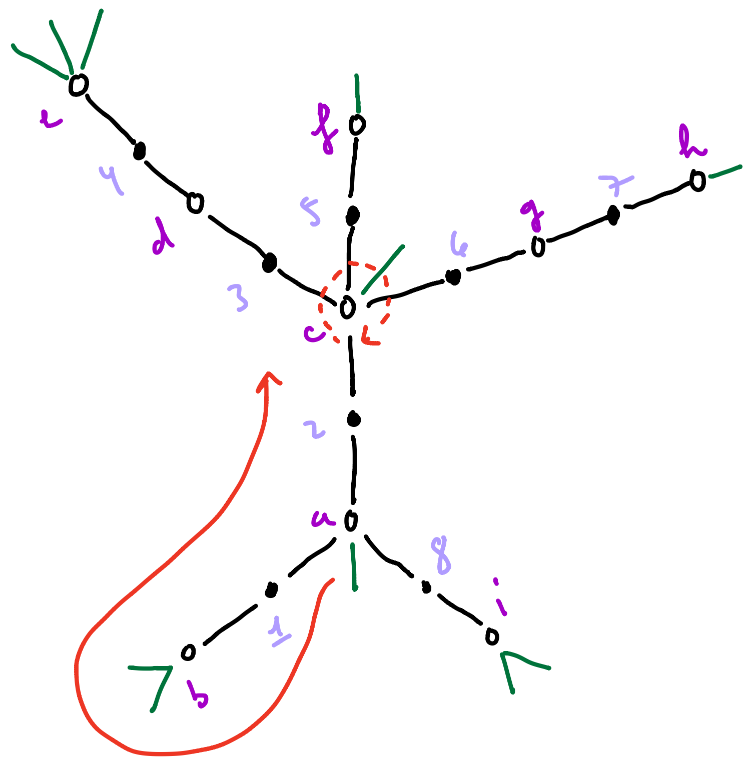
↳ QUESTION : peut-on mettre une structure d'opérade sur toutes les réal. de Loday des graphes par blocs ?

sur tous les associaèdres de graphe par blocs décorés ?

↳ QUESTION SUBSIDIAIRE :

les opéraèdres encodent les opérades ns à homotopie près (que l'on obtiendra comme sous-opérade) ; quid de cette nouvelle structure ? cas particulier d'opérade modulaire à homotopie près ? torsion d'une autre opérade ?

Objets de base : arbres alphanumériques



- ∘ sommets blancs = lettres
  chaque lettre a un poids $w \in \mathbb{Z}_{>0}$
- • sommets noirs = chiffres
  chaque chiffre a une décoration parmi $\overline{\underline{1}}, \underline{1}, \overline{1}, 1$

- • lettres et chiffres alternent ; chaque branche se termine par une lettre

- ∘ les lettres peuvent avoir des feuilles, chaque extrémité en a au moins une

- • on fixe un ordre sur les feuilles, les lettres et les chiffres en partant d'une feuille et en faisant le tour de l'arbre ; cela induit un ordre total, cyclique sur l'ensemble des arêtes adjacentes à un sommet

- • à chaque arbre correspond un graphe par blocs, obtenu en oubliant les lettres extrêmes et en remplaçant les fourches alphabétiques par des cliques :

Prop: On peut définir la substitution d'arbres alphanumériques à un sommet blanc

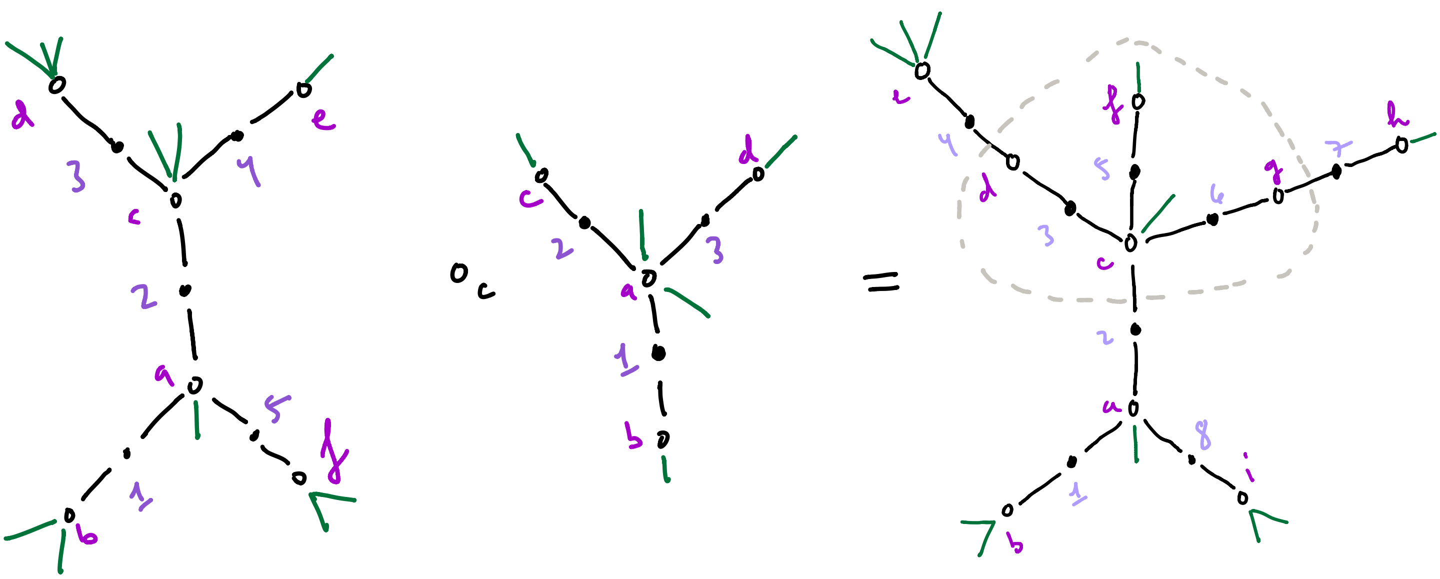
$$t \circ_a t'$$

sommet

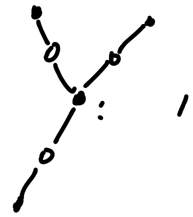
Cela est possible uniquement lorsque le nombre d'arêtes adjacentes à a dans t est égal au nombre de feuilles dans t'.

On substitue alors t' à a, et on recolle les feuilles de t' aux arêtes adjacentes à a en fonction des ordres canoniques.

On ré-étiquette tout le monde de manière cohérente (comme le fait Van der Laan).



On définit ainsi une structure d'opérade ensembliste sur les arbres alphanumériques

→ restreinte aux arbres sans fourches  ,

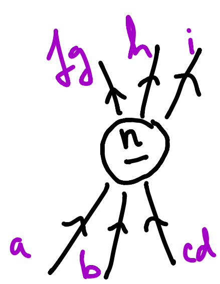
on retrouve l'opérade de Guillaume

Observation : en dessinant les nestings / tubings qui naissent de la composition, on obtient une opérade sur les arbres alphanum. <u>nichés</u> = une structure d'opérade sur toutes les épines pour les décorations $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \ldots$ où la composition est la greffe

QUESTION : peut-on généraliser cette composition à toutes les décorations ?

Dans tous les cas, pour la structure d'opérade on a besoin de réalisations avec poids. Sur les épines alphanumériques maximales, on définit les coordonnées de la manière suivante

QUESTION : vérifier que ça marche !



$\longrightarrow \quad ab(c+d) - (f+g)hi$

De manière équivalente (?), on définit une matrice de poids spéciale

QUESTION: Peut-on définir une substitution pour toute matrice de poids? / Une structure d'opérade sur les poids quelconques?

Du point de vue opéradique, je ne vois pas la motivation pour ce degré de généralité: la combinatoire des polytopes est déjà là.

Mais peut-être y a-t-il un intérêt géométrique?