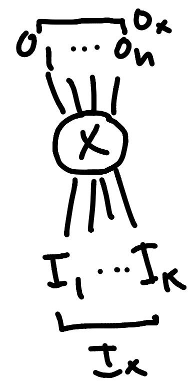
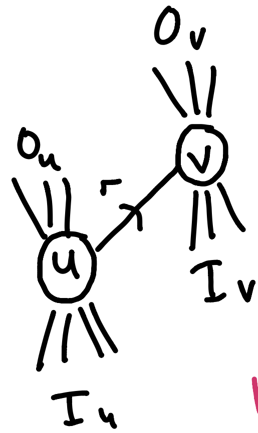
24 nov. 2020

Prop : Les éclatements de




sont les dislocations




où

H1 – U et V forment une partition de X

H2 – $\bar{U}$ ne déconnecte pas V

H3 – $\underline{V}$ ne déconnecte pas U

la cc de $I_x$ ds $G\setminus\underline{V}$ contient U

H4 – $I_u$ = les $I_x$ dont la cc de $G\setminus\underline{X}$ intersecte $\bar{U}$ ou est adj. à $\underline{U}$.

H5 – $O_v$ = les $O_x$ dont la cc de $G\setminus\bar{X}$ intersecte $\underline{V}$ ou est adj. à $\bar{V}$.

la cc de

H6 – $I_v$ = les $I_x$ dont la cc de $G\setminus\underline{X}$ est adj. à $\underline{V}$.

H7 – $O_u$ = les $O_x$ dont la cc de $G\setminus\bar{X}$ est adj à $\bar{U}$.

preuve : (i) les $O_v$ sont ccd de $G\setminus\bar{V}$ | ...

(ii) les $I_v$ et sc(c) sont ccd $G\setminus\underline{V}$

(i) (a) les $O_v$ sont cc de $G\setminus\bar{V}$. → automatique

sont cc de $G\setminus\bar{X}$ ⇒ sont cc de $G\setminus\bar{V}$.

(ii) (a) $\mathcal{I}c(c)$ est cc de $G \setminus \underline{V}$.

Appelons $C$ la cc de $G \setminus \underline{V}$ contenant $U$. (H3)

Les $\underline{I}_u$, par H4, sont dans $C$.

Soit $O_u$.

Soit $D$ la cc de $G \setminus \overline{X}$ contenant $O_u$.

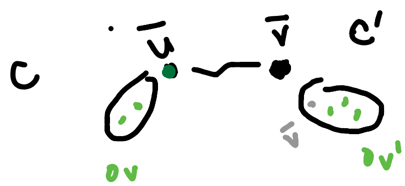
On sait que $D \cap \underline{V} = \emptyset$, et $D$ n'est pas adj. à $\overline{V}$ (H3)

$\Downarrow$

$D$ est connexe dans $G \setminus \underline{V}$

$\Rightarrow D \cap C \neq \emptyset$, donc $D \subset C$.

(i)(b) les $O_v$ sont ds ccd de $G \setminus \overline{V}$.




Soit $C$ la cc de $O_v$ dans $G \setminus \overline{X}$.
$C'$ la cc de $O_{v'}$ dans $G \setminus \overline{X}$.

Un chemin entre $C$ et $C'$ passe par $\overline{X}$.

$\exists$ un chemin qui ne passe pas par $\overline{V}$.

Si $\exists$ un chemin qui ne passe pas par $\overline{u}$, on a un cycle #

$\Rightarrow$ tout chemin entre $C$ et $C'$ passe par $\overline{u}$.

Soit $D$ la cc de $C$ dans $G \setminus \overline{u}$. ($D'$ pour $C'$)

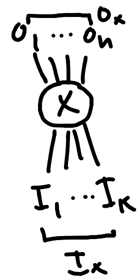
On sait que $D \neq D'$, mais $D \cap V$ et $D' \cap V$ (H5)

$\Rightarrow \overline{u}$ sépare $V$ # (H2).

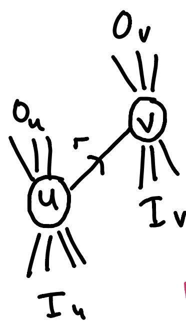
(ii)(b) M.q. $Sc(r)$ et $I_v$ sont ds ccd de $G \setminus \underline{V}$.

- les $I_v$ ne sont pas adj. à $\underline{U}$ ⇒ distinctes entre elles.
- les $I_v$ n'intersectent pas $\overline{U}$ et ne sont pas adj à $\underline{U}$
 ⇒ la cc qui contient $I_v$ ne contient pas $U$.

Prop : Les éclatements de



sont les dislocations



où

H1 - $U$ et $V$ forment une partition de $X$

H2 - $\overline{U}$ ne déconnecte pas $V$

H3 - $\underline{V}$ ne déconnecte pas $U$ — la cc de $I_x$ ds $G \setminus \underline{V}$ contient $U$

H4 - $I_u$ = les $I_x$ dont la cc de $G \setminus \underline{X}$ intersecte $\overline{U}$ ou est adj. à $\underline{U}$.

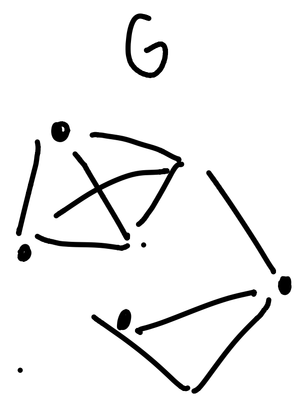
H5 - $O_v$ = les $O_x$ dont la cc' de $G \setminus \overline{X}$ intersecte $\underline{V}$ ou est adj. à $\overline{V}$.

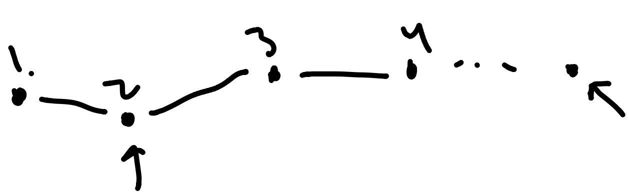
Prop. On peut toujours éclater

Si $X$ contient □, Alors $U = \{x\}$

Si $X$ contient ▽, Alors $V = \{x\}$.

Si $X = \underline{X}$, il faut $U$ et $V$ soient connexes.





$X \subset V(G)$ $\qquad [u \to y, v \to z]$.

Une partition $U, V$ de $X$ est <u>valide</u> si $U$ ne déconnecte pas $V$ et $V$ " $U$

On veut m.q. tout $X$, $|X| \geq 2$ admet une partition valide

<u>rem</u> : Soient $G$ et $G'$ deux graphes avec $V(G) = V(G')$ et $E(G) \subset E(G')$. Si $(U,V)$ valide pour $G$, alors $(U,V)$ valide pour $G'$.

Donc il suffit de montrer pour un arbre.

Toute arête donne une partition valide ; donc $\forall X \subset V(G)$ il existe une partition valide (sépare 2 sommets de $X$) $\square$