17 nov. 2020

Soit G chordful.

être ds la m̂ cc du graphe

$\tilde{\underline{X}}_1 := \widetilde{G \setminus \underline{X}_1}$

Prop 1: G-épines stables par contraction.

$$\underset{\text{hyp.}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} sc(j_\beta) \underset{\underline{X}_2}{\nsim} sc(j_{\beta'}) \underset{\underline{X}_2}{\nsim} sc(r). \\[1em] sc(i_\alpha) \underset{\underline{X}_1}{\nsim} sc(i_{\alpha'}) \end{array} \right.$$

1) Chaque $sc(-)$ est ds une cc $G \setminus \underline{X}_1 \cup \underline{X}_2$

Pour les j_β : X_1 est dans ccd de $G \setminus \underline{X}_2$

Pour les i_α :

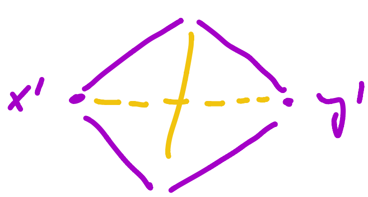
(convention) induits

LEMME: Soient C_1 et C_2 deux ss-graphes connexes de G

Alors, $C_1 \cap C_2$ est connexe.

Soient $x, y \in C_1 \cap C_2$. $\exists \gamma_1 : x \to y$ ds C_1, $\exists \gamma_2 : x \to y$ ds C_2.

On affirme que $\gamma_1 \cap \gamma_2$ est dans $C_1 \cap C_2$. On prend x', y' pas reliés par une arête



$\exists$ arête qui relie x' et y'.

$\square$

$=$ $sc(i_\alpha)$ est ds cc C_1 de $G \setminus \underline{X}_1$

$sc(r)$ est ds cc C_2 de $G \setminus \underline{X}_2$

$sc(i_\alpha) \subset sc(r) \Rightarrow sc(i_\alpha) \subset C_2$.

$\Rightarrow sc(i_\alpha) \subset C_1 \cap C_2$.

par le lemme, $C_1 \cap C_2$ est connexe.

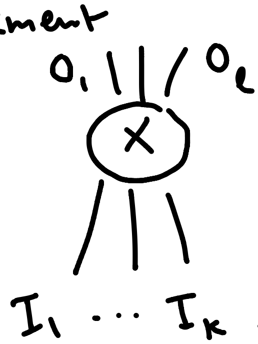
$(G \setminus \underline{X}_1) \cap (G \setminus \underline{X}_2) = G \setminus (\underline{X}_1 \cup \underline{X}_2) =: G \setminus \underline{X_1 \cup X_2}$

$C_1 \cap C_2$ est ds cc de

$\square$

Prop. 2 : Éclatement

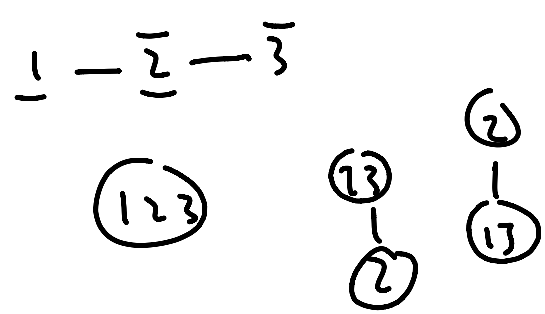
preuve: Soit



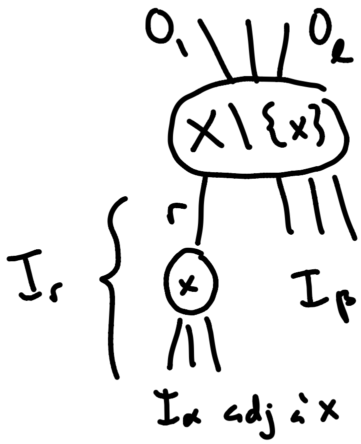
$O_1 \cdots O_\ell \to$ ccd de $G \setminus \overline{X}$

$I_1 \cdots I_k \to$ ccd de $G \setminus \underline{X}$

$\forall x \in X$, ~~on~~ peut éclater



1) Si x est ◓ (soit $\ominus$, soit $\oplus$)

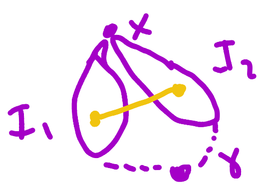


① Les O_β sont ccd de $G\setminus\overline{X\setminus\{x\}}$

Comme $x\in\overline{X}$ $\longrightarrow$ $\| \; G\setminus\overline{X}$ ✓

② Les I_β, I_r sont ccd de $G\setminus \underline{X\setminus\{x\}}$ ✓

③ Les I_α sont ccd de $G\setminus\{x\}$.



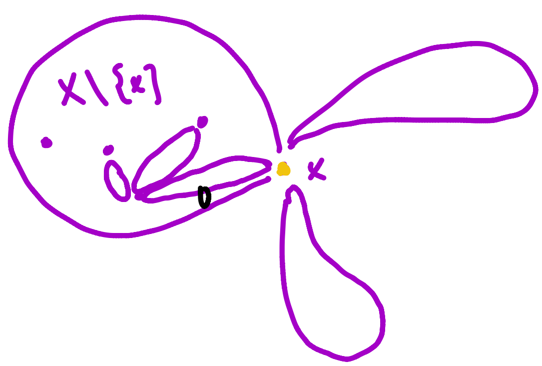
④ $sk(r)$ est cc de $G\setminus\cancel{\{x\}}$ ✓

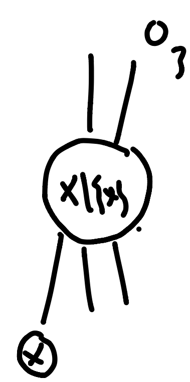
2) Si x est ◡ (soit $\ominus$, soit ⊖)

3) Si x est ●

Si $X\setminus\{x\}$ ne vit pas ds la m cc de $G\setminus\{x\}$, impossible

Sinon,

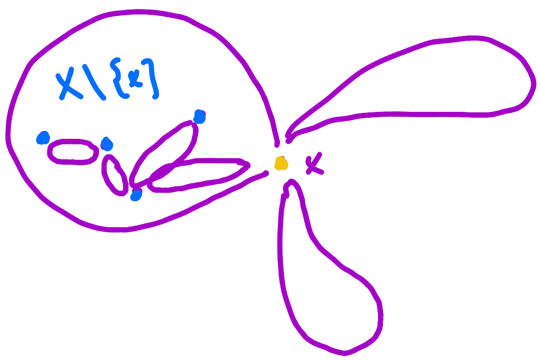


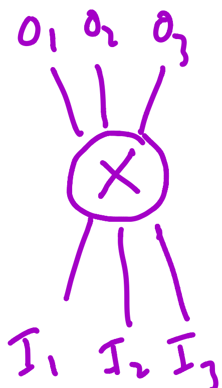


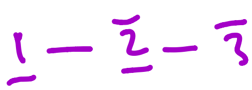
- Les O_p sont ccd de $G \setminus (\overline{X \setminus \{x\}})$

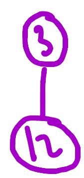
Supposons que O_1 et O_2 sont adj. à x

Comme O_1 et O_2 sont ds la m̂ cc de $G \setminus \{x\}$, $\exists$ chemin γ entre O_1 et O_2 $\Longrightarrow$ $\exists$ un cycle $x - O_1 - O_2 - x$









① Si $X \setminus \{x\} \cup O_1 \cdots O_\ell$ ds la m̂ cc de $G \setminus \{x\}$

Si O_i et O_j sont adj. à x. ↳ $\exists\, \gamma$ entre O_1 et O_2

donc forment un cycle $\xRightarrow[\text{chordal}]{}$ $\exists$ arête entre $v_1 \in O_1$ et $v_2 \in O_2$ #

②③] Pour les I_α, comme avant

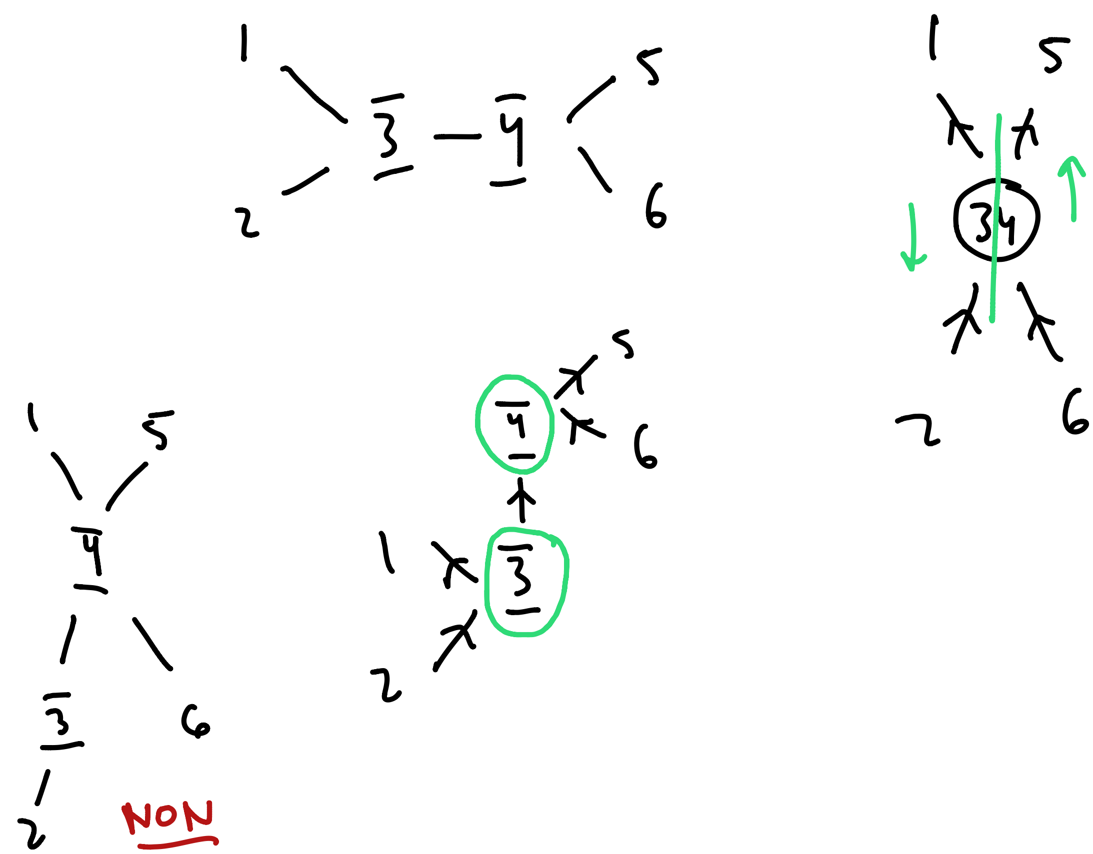
④ $SK(i)$ impliqué par $O_1, \dots, O_\ell$ m̂ cc de $G \setminus \{x\}$.

Dualement, si $X \setminus \{x\}$ et $I_1, \dots, I_k$ ds k ci cc de $G \setminus \{x\}$ on peut éclater par en haut.

<u>Prop.</u> On peut toujours éclater

- si X contient θ, $\ominus$ ou $\ominus$, c'est bon.
- Supposons que $X = \overline{\underline{X}}$

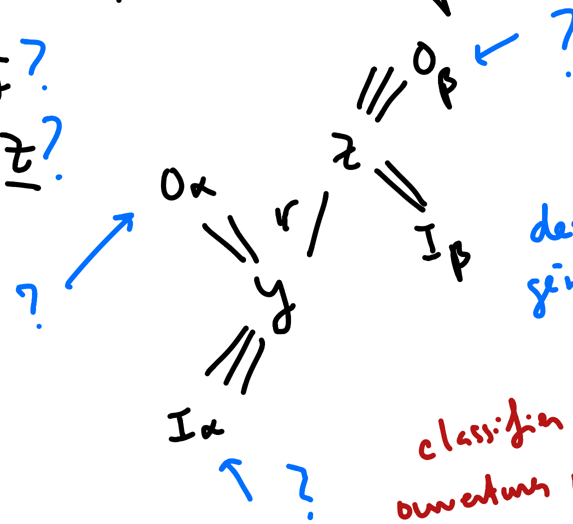
si $|X| = 2$ . . .



Supposons que $X = Y \sqcup Z$, de manière ce que

* $Z \subset$ cc de $G \setminus \overline{Y}$?
* $Y \subset$ cc de $G \setminus \underline{Z}$?

quelles conditions?



dessin général?

($\Rightarrow$ adj. à $\overline{Y}$)

classifier les ouvertures possibles?

$\Downarrow$

toutes les ouvertures possibles

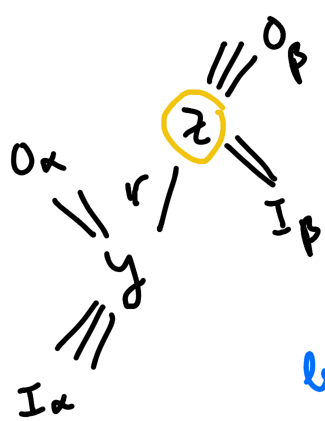
- O_β ccd de $G \setminus Z$ ✓
- I_β ccd de $G \setminus Z$ ✓
- A est ccd de $G \setminus Z$

$A = \bigcup O_\alpha, Y, I_\alpha$ $\qquad \gamma : I_\alpha \longrightarrow Y$

γ sort de A, γ sort de I_α, rencontre $Y \cup Z$, donc Z #

- A et I_β dans ccd de $G \setminus Z$?

$I_\beta, I_{\beta'}$ ds m̂ cc de $G \setminus \underline{\underline{Z}}$



$O = \bigcup O_\alpha, O_\beta$

$\{O_i\}$ ens des cc de $G \setminus \overline{X}$

$\{O'_j\}$ la partition en cc de $G \setminus \overline{Z}$

les parts reliées entre elles par $\overline{Y}$

on les fait descendre | en p

- O_β cc de $G \setminus \overline{X}$ $\Rightarrow$ O_β cc de $G \setminus \overline{Z}$

  et ccd car sinon on les aurait descendues

- $I_\beta, I_{\beta'}$ sont des m̄ cc de $G \setminus \underline{Z}$

  elles sont reliées par $\underline{Y}$