15-03-2021

Soit P un opéraèdre.

THÉORÈME : Soient F, G deux faces de P, on note leurs emboîtements associés $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$.

$(F,G) \notin \mathrm{Im}\,\Delta \iff \exists\, I, J \subset \{1,\dots,n-1\}$, $\boxed{|I|=|J|,\ I\cap J=\emptyset,\ \min(I\cup J)\in I}$, tels que $\forall N\in\mathcal{N}$ on a $|N\cap I| \le |N\cap J|$ et $\forall N'\in\mathcal{N}'$ on a $|N'\cap I| \ge |N'\cap J|$.

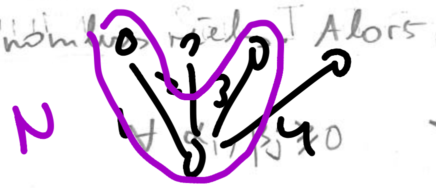
$\forall I, J$

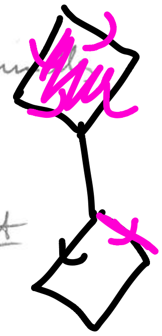
$\sum_{i\in I} v_i > \sum_{j\in J} v_j$ $\quad v_1>v_2>v_3>v_4$

$v_1+v_2>v_3+v_4$

Corollaire : $(F,G)\in \mathrm{Im}\,\Delta \iff \forall\, I,J\subset\{1,\dots,n-1\}$, $|I|=|J|$, $I\cap J=\emptyset$, $\min(I\cup J)\in I$,
$\exists\, N\in\mathcal{N}$ avec $|N\cap I| > |N\cap J|$ ou
$\exists\, N'\in\mathcal{N}'$ avec $|N'\cap I| < |N'\cap J|$.

Lemme : Soient I, J deux ensembles finis et $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$ deux familles de nombres réels. Alors

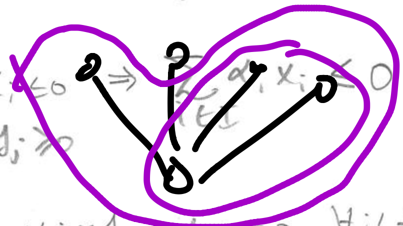




$\forall \dots \ \sum_{i\in I}\alpha_i x_i \le \sum_{j\in J}\beta_j y_j \iff \forall i\in I,\ x_i\le 0$ et $\forall j\in J,\ y_j \ge 0$.

$I=\{1,4\}$
$J=\{2,3\}$

démo : $(\Leftarrow)$ $\forall i\in I,\ x_i\le 0$, $y_j \ge 0$ $\Rightarrow \sum_{i\in I}\alpha_i x_i \le 0 \le \sum_{j\in J}\beta_j y_j$, $\forall$ familles $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, $\{\beta_j\}_{j\in J}$ avec $\alpha_i, \beta_j \ge 0$



$(\Rightarrow)$ On prend les familles $\alpha_i = 1$, $\alpha_{i'}=0\ \forall i'\neq i$ et $\beta_j\equiv 0\ \forall j$.
$\alpha_i \equiv 0\ \forall i$ et $\beta_j = 1$, $\beta_{j'}=0\ \forall j'\neq i$. □

démo du thm : $(\Leftarrow)$ On procède par contraposée. Soit $\vec{x}\in \mathrm{Cône}(-N_P(F)\cup N_P(G))$.

Alors $\vec{x} = \sum_{N\in\mathcal{N}} \alpha_N \vec{N} - \sum_{N'\in\mathcal{N}'} \beta_{N'} \vec{N'}$ où $\vec{N}$ et $\vec{N'}$ sont les vecteurs indicateurs associés aux boîtes N et N' (i.e. $N_i = 1$ si $i\in N$ et 0 si $i\notin N$). et $\alpha_N, \beta_{N'} \ge 0$.

Maintenant, supposons qu'il existe $I,J\subset\{1,\dots,n-1\}$, $|I|=|J|$, $I\cap J=\emptyset$, $\min(I\cup J)\in I$ tels que $\forall N\in\mathcal{N}, N'\in\mathcal{N}'$, on ait $|N\cap I|\le|N\cap J|$ et $|N'\cap I|\ge|N'\cap J|$.

Alors

$$\sum_{N\in\mathcal{N}} \alpha_N\left(|N\cap I|-|N\cap J|\right) \le \sum_{N'\in\mathcal{N}'} \beta_{N'}\left(|N'\cap I|-|N'\cap J|\right). \quad (1)$$

Mais $\sum_{N\in\mathcal{N}} \alpha_N \left(|N\cap I| - |N\cap J|\right) = \sum_{N\in\mathcal{N}}\sum_{i\in N\cap I} \alpha_N - \sum_{N\in\mathcal{N}}\sum_{j\in N\cap J} \alpha_N$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{N\in\mathcal{N}(i)} \alpha_N - \sum_{j\in J}\sum_{N\in\mathcal{N}(j)} \alpha_N$$ et idem pour l'autre côté.

car $\mathcal{N}(i) := \{N\in\mathcal{N} \mid i\in N\}$. Donc, l'inégalité (1) se lit

$$\sum_{i\in I}\sum_{N\in\mathcal{N}(i)} \alpha_N - \sum_{j\in J}\sum_{N\in\mathcal{N}(j)} \alpha_N \leq \sum_{i\in I}\sum_{N'\in\mathcal{N}'(i)} \beta_{N'} - \sum_{j\in J}\sum_{N'\in\mathcal{N}'(j)} \beta_{N'}$$

Soit encore

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{N\in\mathcal{N}(i)} \alpha_N - \sum_{N'\in\mathcal{N}'(i)} \beta_{N'}\right) \leq \sum_{j\in J}\left(\sum_{N\in\mathcal{N}(j)} \alpha_N - \sum_{N'\in\mathcal{N}'(j)} \beta_{N'}\right)$$

et donc par définition $\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{j\in J} x_j$.

Donc, tout vecteur principal d'orientation $\vec{v} \notin \text{Cône}\left(-N_p(F)\cup N_p(G)\right)$.

($\Rightarrow$) On sait que deux vecteurs d'orientations principaux (vivant dans la même chambre C de l'arrangement d'hyperplans opéraédral) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnent la même diagonale : $\text{Im}\,\Delta_{(P,\vec{v})} = \text{Im}\,\Delta_{(P,\vec{w})}$. Donc, si $\vec{v} \notin \text{Cône}\left(-N_p(F)\cup N_p(G)\right)$, alors on a aussi $\vec{w} \notin \text{Cône}\left(-N_p(F)\cup N_p(G)\right)$, i.e. $C \cap \text{Cône}\left(-N_p(F)\cup N_p(G)\right) = \emptyset$. Ainsi, $\exists\, I, J \subset \{1,\ldots,n-1\}$, $|I| = |J|$, $I\cap J = \emptyset$, $\min(I\cup J)\in I$, tels que pour tout $\vec{x} \in \text{Cône}\left(-N_p(F)\cup N_p(G)\right)$, on ait $\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{j\in J} x_j$.

En remontant le chemin précédent, on a

$$\sum_{N\in\mathcal{N}} \alpha_N \left(|N\cap I| - |N\cap J|\right) \leq \sum_{N'\in\mathcal{N}'} \beta_{N'} \left(|N'\cap I| - |N'\cap J|\right)$$

Le lemme 1 implique alors que $\forall N\in\mathcal{N}$, $|N\cap I| \leq |N\cap J|$
et $\forall N'\in\mathcal{N}'$, $|N'\cap I| \geq |N'\cap J|$.

$\square$

<u>Corollaire</u> : Soit P un associaèdre. Alors,

$$(F,G) \in \mathrm{Im}\,\Delta \iff \mathrm{top}\,F \leq \mathrm{bot}\,G$$

<u>démo</u> : Les exigences sur la forme de $\vec{J}$ sont réduites aux I, J avec $|I|=|J|=1$.
On est donc ramené à montrer

$$\mathrm{top}F \leq \mathrm{bot}G \iff \forall i,j,\ i<j \quad \exists N \in \mathcal{N} \text{ qui contient } i \text{ mais pas } j$$
$$\text{ou } \exists N' \in \mathcal{N}' \text{ qui contient } j \text{ mais pas } i$$

La condition à droite est préservée lorsqu'on rajoute des boîtes pour obtenir topF et botG ; on va donc supposer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont les emboîtements complets de topF et botG.
On peut aussi la reformuler de la manière suivante dans ce cas :

$$\mathrm{top}F \leq \mathrm{bot}G \iff \forall i,j,\ i<j, \ \min \mathcal{N}(i) \text{ contient } i \text{ mais pas } j$$
$$\text{ou } \min \mathcal{N}'(j) \text{ contient } j \text{ mais pas } i$$

($\Rightarrow$) On procède par récurrence sur la longueur du chemin entre topF et botG.

- topF = botG par définition d'un emboîtement complet
- topF < botG on est dans la situation 

On vérifie pour chaque couple $k,i \longrightarrow$ ds $\mathcal{N}$; $i,l \longrightarrow$ ds $\mathcal{N}'$
$l,j \longrightarrow$ ds $\mathcal{N}$; $j,m \longrightarrow$ ds $\mathcal{N}'$

$i,j \longrightarrow$ ds $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$!

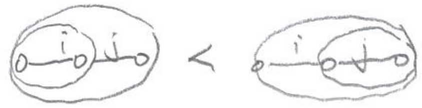
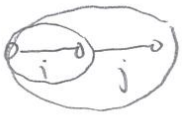
- On suppose que le résultat tient pour la longueur k. On examine le passage à la longueur $k+1$ exactement comme ce que l'on vient de faire pr la longueur 1.

($\Leftarrow$) On procède par contraposée. Si topF > botG, la preuve de la première direction règle le cas. Supposons maintenant que topF $\not\leq$ botG et que topF $\not\geq$ botG. Alors il existe un "toit"

On montre par récurrence sur la longueur de ce toit que $\exists i,j,\ i<j$ tels que

$$s_i \supset s_j \quad \text{et} \quad t_i \subset t_j$$

• longueur 2

Supposons que $r \to s$ est donné par . Alors $r \to t$ laisse  invariant ou bouge ainsi r_j 

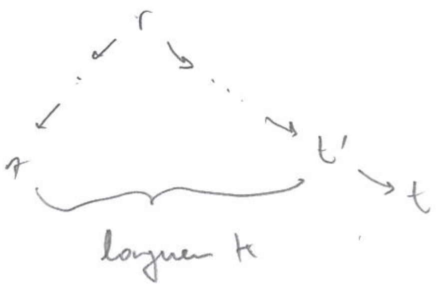
Dans les deux cas, $s_j \subset s_i$ et $t_i \subset t_j$.

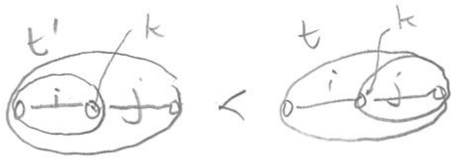
• Supposons le résultat vrai pour les toits de longueur k.

Comme un mouvement élémentaire déplace une boîte de la gauche vers la droite, on a

$$s_j' \subset s_i' \Rightarrow s_j \subset s_i .$$

Maintenant, si



Supposons que 

$t_i' \subset t_j'$ mais que $t_j \subset t_i$.

Dans ce cas, comme $i<k<j$, on a

$s_i \supset s_j \Rightarrow s_k \supset s_j$

et on a $t_k \subset t_j$

□

?

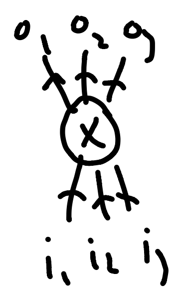
— besoin de se ramener aux cas $i, i+1$ pour que ce soit vrai ? ou ça marche par récurrence ?

— qu'arrive-t-il si k est un point ? Il faut se servir de $|N|+|N'|=n$ et montrer qu'on doit rester sur $L=cst$?

ds les 2 cas ça doit fonctionner mais cela rallonge un petit peu la preuve ici...

But : Soit $\sigma : V(G) \longrightarrow \{1, \dots, n\}$. On veut m.q.

$\exists !$ épine maximale S sur G pour laquelle σ est une ext. lin.



Prop : S épine (maximale) $\iff$ $\forall$ sommet

$s_{\le}(i_\alpha)$ sont ds ccd de $G \setminus \underline{\{x\}}$

et $t_{\geq}(o_\beta)$ sont ds ccd de $G \setminus \overline{\{x\}}$.

Soit σ une permutation.

Déf : $i \le j$ dans $S \iff \sigma(i) \le \sigma(j)$ et i, j sont ds la m̃ cc C de $G \setminus \left(\overline{s_\sigma(i)} \cup \underline{t_\sigma(i)} \right)$

Il faut tout reprendre.

THM : S est l'unique épine sur G pour laquelle σ est ext. lin.

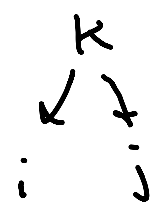
démo : 0) S est un poset. ✓

1) S est une épine

a) $s_{\le}(i_\alpha)$ sont ds m̃ cc de $G \setminus \underline{\{x\}}$ ✓

montrer que c'est un arbre ?!?!!

⚠ RÉÉCRIRE AVEC X et Y.



b) Soient $i \le k$ et $j \le k$, et supposons que $\nexists \ell$, $\sigma(\ell)<\sigma(k)$, et $\nexists \ell$, $i<\ell<k$, avec $i \le \ell$ et $j \le \ell$.

SPDG $\sigma(i)<\sigma(j)$. On veut m.q. i et j sont ds ccd de $G\setminus\{k\}$.

$i \le k \iff$ i et k sont ds cc de $G\setminus(\overline{s_\sigma(i)} \cup t_\sigma(k))$

$j \le k \iff$ j et k sont ds cc de $G\setminus(\overline{s_\sigma(j)} \cup t_\sigma(k))$

$\Rightarrow$ j et k sont ds cc de $G\setminus(\overline{s_\sigma(i)} \cup t_\sigma(k))$

$\Rightarrow$ i et j le sont.

Supposons le contraire;

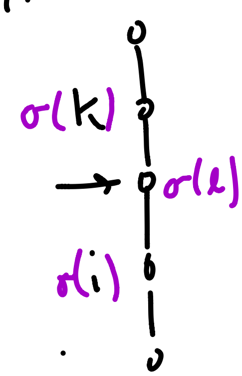
G est block graph $\Rightarrow$ i et j sont ds m cc C de

$$G\setminus(\overline{s_\sigma(i)} \cup t_\sigma(k) \cup \{k\})$$

$$= \boxed{G\setminus(\overline{s_\sigma(i)} \cup t_\sigma(\ell))}$$

pour $\ell := \sigma^{-1}(\sigma(k)-1)$. Si $\ell = j$, $\Rightarrow i \le j$. #

$$\left(t_\sigma(k) := \{\ell \in V(G) \mid \sigma(\ell) > \sigma(k)\}.\right)$$



Si i et j sont m cc de $G\setminus\{\ell\}$, on refait l'étape.

Sinon, $\ell \in C$ et on a $i \le \ell$ #

□.

$\ell \leq k \qquad G \setminus \left(\overline{S_\sigma(\ell)} \cup \underline{t_\sigma(k)} \right)$

3) Unicité. Soit S' un épi pour laquelle σ est ext. lin. $i \leq j \in S' \Leftrightarrow \sigma(i) \leq \sigma(j)$ et i, j sont ds même cc de $G \setminus \left(\overline{S_\sigma(i)} \cup \underline{t_\sigma(j)} \right)$

$(\Rightarrow)$

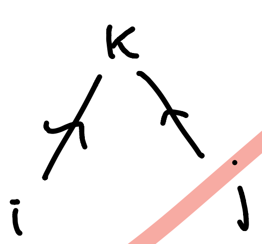
$(\Leftarrow)$?

$\exists$ un chemin minimal $\gamma(i,j)$ entre i et j constitué des éléments qui séparent i et j.

$\cancel{i < j \qquad \sigma(i) < \sigma(j) \text{ et } \boxed{]i,j[\cap C = \emptyset}}$

$\cancel{\Updownarrow}$

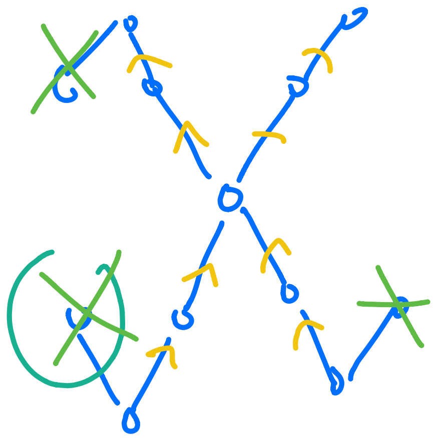
$\cancel{\{\ell \in V(G) \mid \sigma(i) < \sigma(\ell) < \sigma(j)\}}.$



~~i et j sont ds cc de $G \setminus \left(\overline{S_\sigma(i)} \cup \underline{t_\sigma(k)} \right)$~~

Caractériser les relations de couverture dans S ?

3) Unicité. Soit S' une épine pour laquelle σ est ext. lin. $i \le j \in S' \iff \sigma(i) \le \sigma(j)$ et i, j sont ds même cc de $G \setminus (\overline{S_\sigma(i)} \cup t_\sigma(j))$

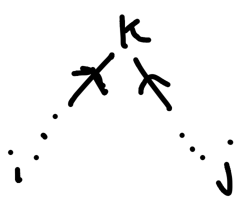


$(\Rightarrow)$

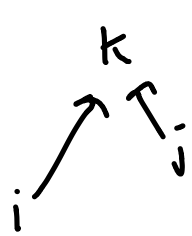
Prop : S épine (maximale) $\iff$ $\forall$ sommet x, $s_\le(x)$ sont ds ccd de $G \setminus \{x\}$ et $t_\ge(x)$ sont ds ccd de $G \setminus \{x\}$.

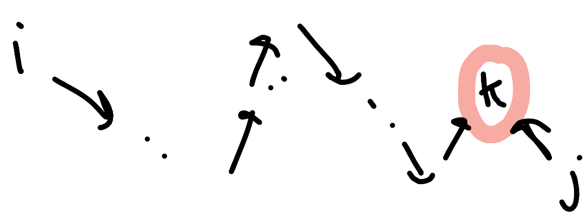
$(\Leftarrow)$ Supposons que $i \not\le j$ dans S'. Si $i > j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$. Supposons donc i et j pas comparables.

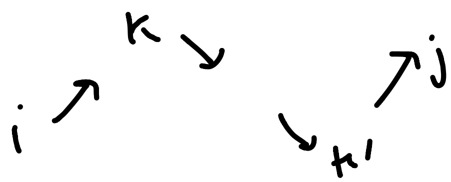
Entre i et j $\exists !$ chemin ds S'. Il change de direction.



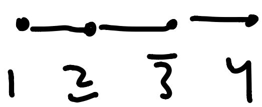
Alors $K = \{k\}$ et il sépare i et j.
SPDG $\sigma(i) < \sigma(j)$. Si $\sigma(k) > \sigma(j)$ ✓



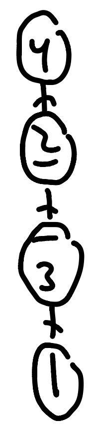




1324

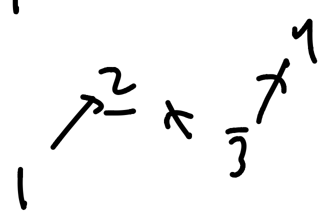


$$\sigma : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ \bar{3} \longrightarrow 2 \\ 4 \longrightarrow 4 \end{array}$$



> $\underline{\sigma(i) \leq \sigma(j)}$ et i,j sont ds une cc^c de $\underline{G \setminus (\overline{s_\sigma(i)} \cup \underline{t_\sigma(j)})}$

1,4 ???



Comment on peut voir avec σ que 1 - 4 n'est pas une relation ?

$\overline{s_\sigma(j) \setminus \{i\}} \cup \underline{t_\sigma(i) \setminus \{j\}}$. ??

<u>But</u> : comprendre les relations de couverture !

⟶ relire l'algorithme de Vincent.