5. Tensor product formula for operads up to homotopy

Let X be a subset of $\mathbb{R}^n$. We denote the *cone of* X by

$$\mathrm{Cone}(X) := \{\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n \mid \{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\} \subseteq X, \lambda_i \geq 0\}$$

Let C be any subset of $\mathbb{R}^n$. We denote its *dual cone* by

$$C^* := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \vec{x} \in C, \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \leq 0\} \ .$$

If C is a cone, i.e. $C = \mathrm{Cone}(X)$ for a certain $X \subset \mathbb{R}^n$, then the *polar cone theorem* asserts that $C^{**} = C$.

Let P be a polytope in $\mathbb{R}^n$. For a face $F \in \mathscr{L}(P)$, we denote *the normal cone of* F by

$$\mathcal{N}_P(F) := \{\vec{c} \in (\mathbb{R}^n)^* \mid F \subseteq \{\vec{x} \in P \mid \langle \vec{c}, \vec{x}\rangle = \max\langle \vec{c}, \vec{y}\rangle : \vec{y} \in P\}\} \ ,$$

where we use the canonical identification between $\mathbb{R}^n$ and its dual, given by $\vec{c} \mapsto \langle \vec{c}, -\rangle$. We denote by

$$\mathcal{N}_P := \{\mathcal{N}_P(F) \mid F \in \mathscr{L}(P) \setminus \emptyset\}$$

the *normal fan* of P.

A polytope P is a bounded intersection of a finite number of closed half-spaces (if P is not full dimensional, there might be many choices of such a collection). For a face F of P, consider the subset of half-spaces $F_1, \ldots, F_k$ that contain F, and denote the associated outward pointing normal vectors by $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_k$. Then, we have $\mathcal{N}_P(F) = \mathrm{Cone}(\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_k)$.

je choisis une description

Lemma 5.1. *Let $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. The following relations hold:*

1. $\mathrm{Cone}(X)^* \cap \mathrm{Cone}(Y)^* = \mathrm{Cone}(X \cup Y)^*$, *and*
2. $\mathrm{Cone}(X)^* \subset \mathrm{Cone}(Y)^* \iff \mathrm{Cone}(Y) \subset \mathrm{Cone}(X)$.

Proposition 5.2 ("Coeur-coeur" formula). *Let $(P, \vec{v})$ be a positively oriented polytope of dimension d in $\mathbb{R}^n$. Let $F, G \in \mathscr{L}(P)$ be two faces of P and write their normal cones as $\mathcal{N}_P(F) = \mathrm{Cone}(\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_k)$ and $\mathcal{N}_P(G) = \mathrm{Cone}(\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l)$. Then,*

$d \leq n$

$$(F, G) \in \mathrm{Im}\,\triangle_{(P,\vec{v})} \iff \vec{v} \in \mathrm{Cone}(-\vec{F}_1, \ldots, -\vec{F}_k, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l) \ .$$

Proof. Let $x \in \mathring{F}$ and $y \in \mathring{G}$. We have

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \mathrm{Im}\,\triangle_{(P,\vec{v})} &\iff \text{for } z = (x+y)/2, \text{ we have } (x, y) = (\mathrm{bot}_{\vec{v}}(P \cap \rho_z P), \mathrm{top}_{\vec{v}}(P \cap \rho_z P)) \\
&\iff \nexists \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \nexists \varepsilon > 0 \text{ such that } \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle > 0 \text{ and } (x - \varepsilon\vec{w}, x + \varepsilon\vec{w}) \in P \times P \\
&\iff \nexists \vec{w} \in \mathbb{R}^n \text{ such that } \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle > 0 \text{ and } \vec{w} \in -\mathcal{N}_P(F)^* \cap \mathcal{N}_P(G)^* \\
&\iff \forall \vec{w} \in \mathrm{Cone}(-\vec{F}_1, \ldots, -\vec{F}_k, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l)^* \text{ we have } \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle \leq 0 \\
&\iff \mathrm{Cone}(-\vec{F}_1, \ldots, -\vec{F}_k, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l)^* \subset \mathrm{Cone}(\vec{v})^* \\
&\iff \mathrm{Cone}(\vec{v}) \subset \mathrm{Cone}(-\vec{F}_1, \ldots, -\vec{F}_k, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l) \\
&\iff \vec{v} \in \mathrm{Cone}(-\vec{F}_1, \ldots, -\vec{F}_k, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l) \ .
\end{aligned}$$

$\mathrm{Cone}(-\mathcal{N}_P(F) \cup \mathcal{N}_P(G))$

□

If P is full-dimensional, the half-spaces defining P are in bijection with the facets of P.

Corollary 5.3. *Let $(P, \vec{v})$ be a positively oriented polytope of dimension n in $\mathbb{R}^n$. Let $F, G \in \mathscr{L}(P)$ be two faces of P of codimension k and l, respectively. We denote by $\{F_i\}_i$ and $\{G_j\}_j$ the sets of facets of P such that $F = \cap_{i=1}^k F_i$ and $G = \cap_{j=1}^l G_j$, and we denote by $\{\vec{F}_i\}_i$ and $\{\vec{G}_j\}_j$ the sets of associated outward pointing normal vectors. Then,*

$$(F, G) \in \mathrm{Im}\,\triangle_{(P,\vec{v})} \iff \vec{v} \in \mathrm{Cone}(-\vec{F}_1, \ldots, -\vec{F}_k, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_l) \ .$$

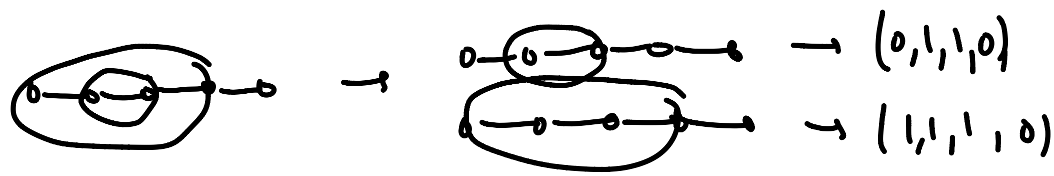
Corollary 5.4. *For all $\varepsilon > 0$, we have*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\triangle_{(P,\vec{v})} &= \{ \textit{dim } 0 \textit{ intersections of } (\mathcal{N}_P + \varepsilon\vec{v}) \cap \mathcal{N}_P\} \\
&= \{ \textit{dim } 0 \textit{ intersections of } \mathcal{N}_P \cap (\mathcal{N}_P - \varepsilon\vec{v})\}
\end{aligned}$$

We recover the "perturbative" construction of the diagonal approximation of the simplices by M. Abouzaid [Abo09, Appendix E]. See in particular [Abo09, Figure 12 p.71].

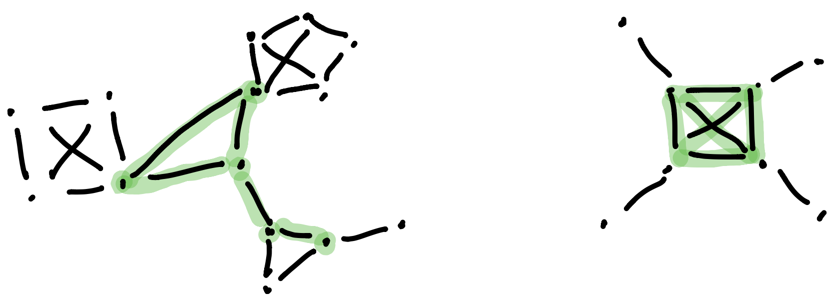
Le cône d'une épine $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq x_j \ \forall\, i \to j \text{ dans } S\}$.

Les générateurs sont les coupes (chaque arête de S)



$\boxed{1}$

Prop. A L'ens. $\{d \in V(G) \mid d \text{ déconnecte } G\}$; le graphe induit est un ~~arbre~~ T dans G.



Prop. B : L'ens. $\Pi(i,j)$ des chemins entre i et j est un poset par l'inclusion ; il admet un unique élément minimal

$$\gamma(i,j) := \bigcap_{\gamma \in \Pi(i,j)} \gamma$$

$$\mathring{\gamma}(i,j) := \gamma(i,j) \setminus \{i,j\}.$$

Prop. C: $\forall\, i,j \in V(G)$, $\mathring{\gamma}(i,j) \subset T$

- $\mathring{\gamma}(i,j) = \emptyset \iff$ i et j sont adjacents
- $u \in V(G)$ sépare i et j $\iff u \in \mathring{\gamma}(i,j)$

Donc, $\mathring{\gamma}(i,j) := \{d \in V(G) \mid d$ sépare i et j$\}$.
$= \{d \in V(G) \mid$ i et j sont ds ccd de $G \setminus \{d\}\}$.

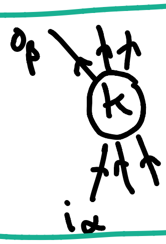
démo: $(\subset)$ Soit d qui ne sépare pas i et j. $\Rightarrow \exists\, \gamma : i \to j$ qui ne passe pas par d $\Rightarrow d \notin \mathring{\gamma}(i,j)$.

$(\supset)$ Soit d qui sépare i et j. $\gamma(i,j)$ est chemin de i à j, donc il passe par d. $\square$

Corollaire: Si $U \subset V(G)$ qui sépare i et j, alors $U \cap \mathring{\gamma}(i,j) \neq \emptyset$; $\exists\, u \in \gamma(i,j)$

$\boxed{2}$ S une épine arbre orienté avec ses sommets décorés par une partition de $V(G)$ t.q.

$\forall k$



$s(i_\alpha)$ sont ccd de $G \setminus \{k\}$

$t(o_p)$ sont ccd de $G \setminus \{k\}$

$s(k) := \bigcup_{\alpha} s(i_\alpha)$

$i \leq k$

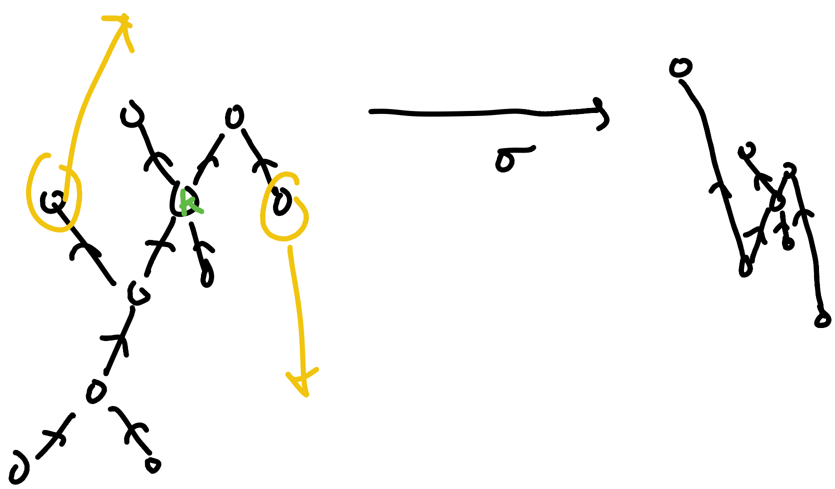
$s_{\leq}(k) := \{ i \in s(k) \mid \exists\, i \to k \text{ dans } S \}.$

$s_{\leq}(i_\alpha) := s_{\leq}(k) \cap s(i_\alpha)$

Soit S une épine maximale

$\iff$ $\forall k$ $s_{\leq}(i_\alpha)$ sont ccd de $G \setminus \underline{\{k\}}$

$t_{\geq}(o_\beta)$ sont ccd de $G \setminus \overline{\{k\}}$



Je fixe k. Je veux m.q. $s(i_\alpha)$ soit ccd de $G \setminus \underline{\{k\}}$

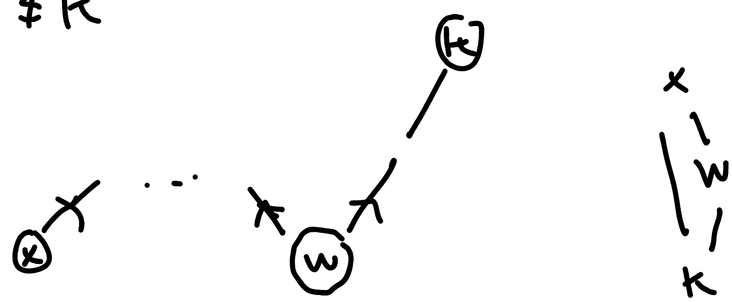
Soit $x \in s(i_\alpha)$.

Je montre par récurrence sur la longueur du chemin entre x et k

longueur 1 ✓

$o \quad x \to k$ ✓

∘ Sinon, $x \not\leq k$



le chemin entre x et w est + court qu'entre x et k

$\Rightarrow$ $\overline{w}$ sépare x et k $\quad G \setminus \{\overline{w}\}$

mais k ne peut pas séparer x et $\overline{w}$!

$\Rightarrow$ x et w sont ds m̃ cc de $G \setminus \underline{\{k\}}$.

$$\boxed{i \leq j \iff (\sigma(i) < \sigma(j)) \text{ et } i \text{ et } j \text{ sont ds m̃ cc } \underline{G \setminus (S_{\overline{\sigma(i)}} \cup t_{\sigma(j)})}}$$

~~Soit S une épine maximale~~

~~$i \leq j$ ds S $\iff$ i et j sont m̃ cc de $G \setminus (S_{\leq}(i) \cup \underline{t_{\geq}(j)})$~~

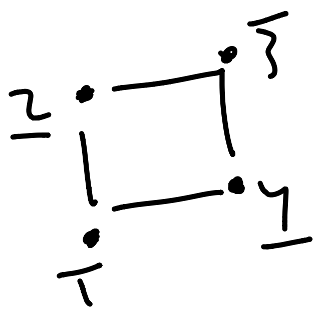
$$\boxed{\text{Soit } S \text{ une épine maximale}}$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{ll} \forall k & s_{\leq}(i_\alpha) \text{ sont ccd de } G\setminus\{k\} \\ & t_{\geq}(o_\beta) \text{ sont ccd de } G\setminus\{k\} \end{array}}$$

$\iff$ $\forall k$ $s_{\leq}(i_\alpha)$ sont ds ccd de $G \setminus \underline{t_{\geq}(k)}$

$t_{\geq}(o_\beta)$ sont ds ccd de $G \setminus \overline{s_{\leq}(k)}$

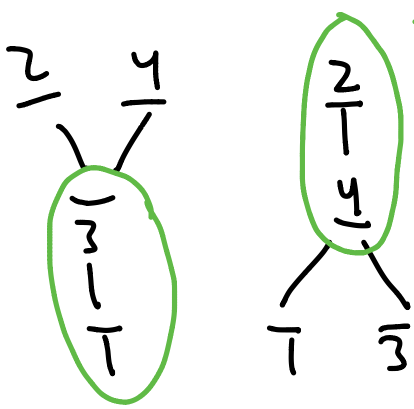
bon pour graph-assoc.
non-décorés



$i = 1$

$j = 3$

$Y = \{2,4\}$.



! dans les chordful