Mettre plusieurs définitions block graph, relation avec line graph,

1. Chaque cycle induit une clique
2. Toute composante biconnnexe est une clique
3. ?

Rechercher les caractérisations des block graphs (wikipédia: tout ce qui peut nous intéresser)

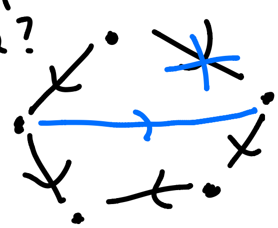
Faire le block graph d'un graphe G: prendre les composantes biconnexes et en faire des cliques
Si G est un arbre, on obtient exactement le line graph

Propriétés:
-géodétique: il existe un unique chemin le plus court (chemin canonique entre deux sommets)
-héréditaire pour la distance

-exactement les graphes pour lesquels le zonotope graphique est un polytope simple!

Chambre $\overbrace{\text{arrangement graphique}}^{H}$ = orientations acycliques de G

Pourquoi H est simplicial?



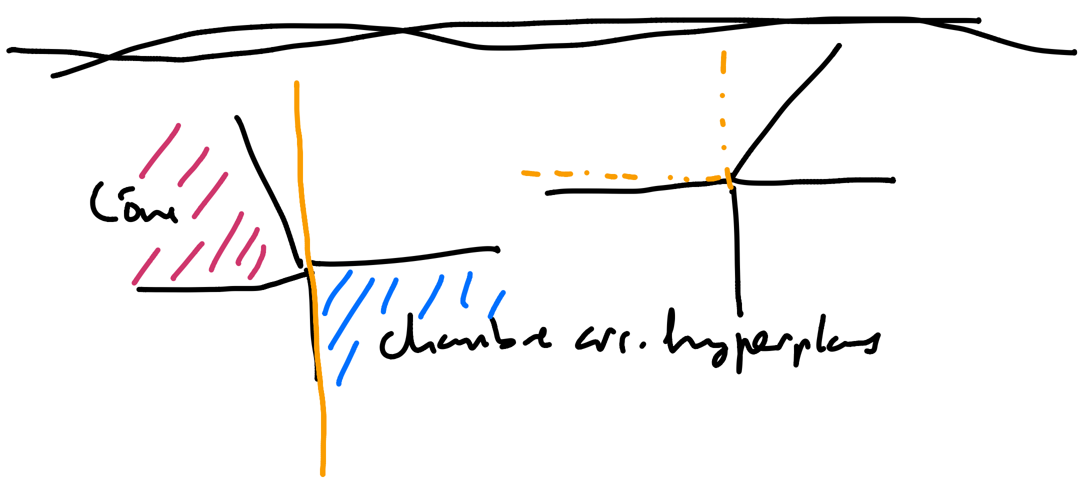
⇒ si on enlève les arêtes obtenues par transitivité c'est un arbre

THM: H est simplicial ⇔ G est block graph.

⇒ le poset des régions est un treillis! (car simplicial)

On sait quand on a des quotients de l'ordre faible

⇝ Vincent sait faire pour tout zonotope graphique.



$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_j \qquad |I| = |J| \quad I\cap J = \emptyset$$
$$\min(I\cup J)\in I.$$

$$(F,G)\in \mathrm{Im}\,\Delta \Leftrightarrow \vec{v}\in \mathrm{Cone}(-N_P(F)\cup N_P(G))$$

$$\pi : P\times P \longrightarrow P \qquad\qquad \phi : P\times P \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y)\longmapsto \frac{x+y}{2} \qquad\qquad (x,y)\longmapsto \langle x-y, \vec{v}\rangle$$

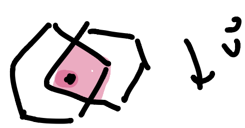
$\forall \vec{v}$, on a $\underbrace{\mathcal{F}^\phi} \subset \mathcal{L}(P\times P)\cong \mathcal{L}(P)\times\mathcal{L}(P)$

$$(F,G)$$

$$(F,G)\in \mathcal{F}^\phi \Leftrightarrow \vec{v}\in \mathrm{Cone}(-N_P(F)\cup N_P(G))$$

$\mathcal{F}^\phi$ est <u>tight</u> $\Leftrightarrow$? $\Leftrightarrow$ $P\cap\{z+P\}$ est orienté par $\vec{v}$ $\forall z$

$$\forall (F,G)\in\mathcal{F}^\phi,\ \dim(F\times G) = \dim(\pi(F\times G))$$



* On peut aussi dire quand on a un treillis quotient

[la question des treillis]

<u>Question</u>. On passe par quotient de

$$\mathrm{Perm} \to \mathrm{Ass} \to \mathrm{Zono}.$$

Pour les block graph, y a-t-il des quotients intermédiaires ?

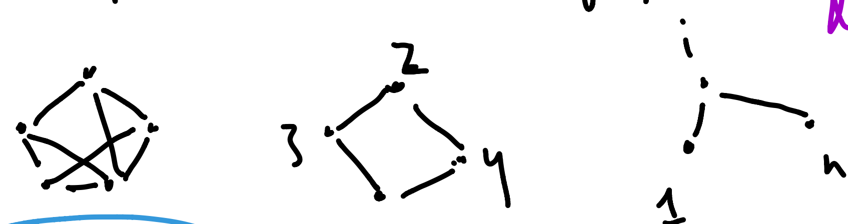
~~Q: Soit~~ <u>Déf</u>: G sur $\{1,\dots,n\}$ est <u>plein</u> ssi

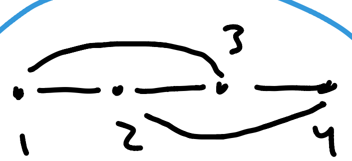
$$\forall\, i<j<k,$$

$$ik \in E(G) \Rightarrow ij \in E(G) \text{ et } jk \in E(G)$$

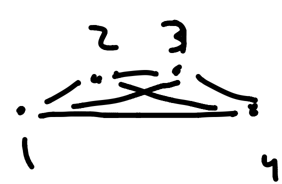
<u>Q</u>: G plein $\Rightarrow$ G block graph ?

Now

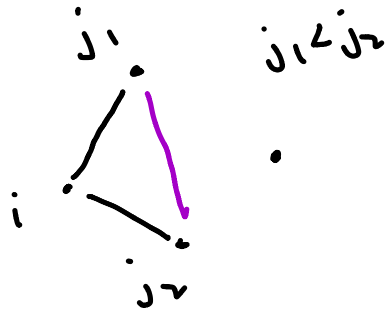




plein ! mais pas block

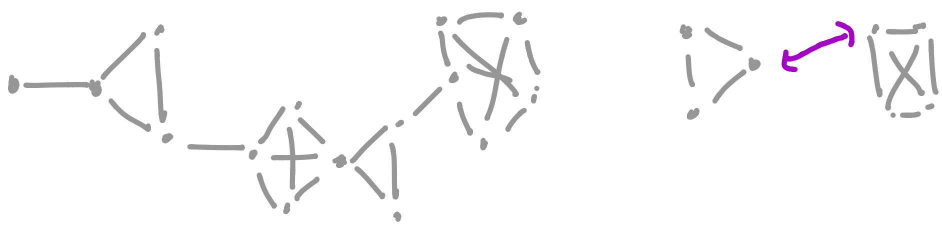


plein $\Rightarrow$ chordal mais pas chordful



<u>Question</u> Soit G chordful et plein.

Alors G est un chemin de cliques ?



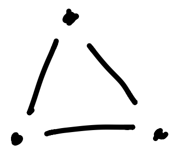
Un chordful est "un arbre de cliques"

<u>Question</u> : Si G est chordful et plein.

1) Est-ce que c'est la même chose que les permutarbres ?

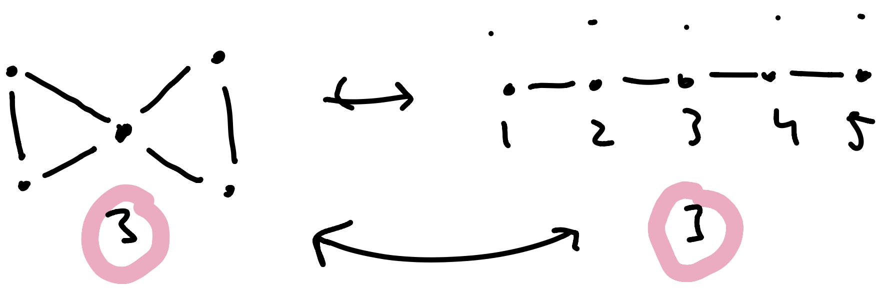
Est-ce qu'on obtient des polytopes différents des permutarbres ?

2) $\Longrightarrow$ A-t-on une suite de quotients qui se raffinent ?



permutoèdre et autres

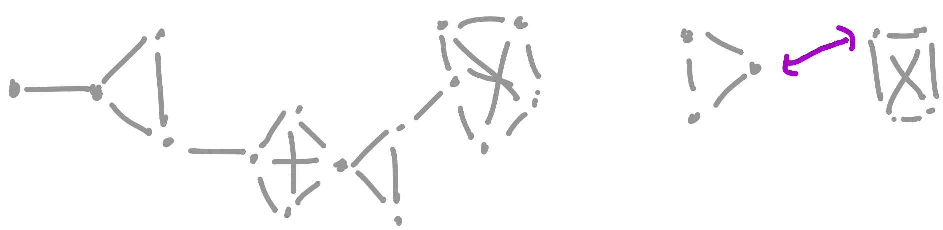
que le permutoèdre



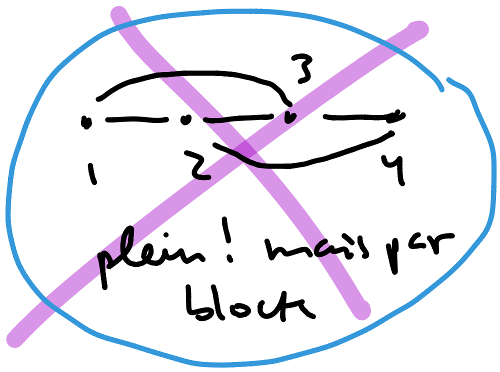
on met la même couleur sur les points de jonction.

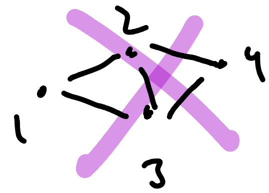
Question Soit G chordful et plein.

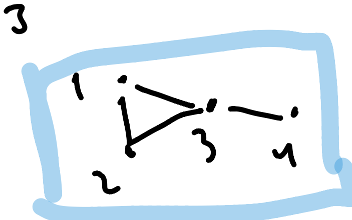
Alors G est un chemin de cliques ?



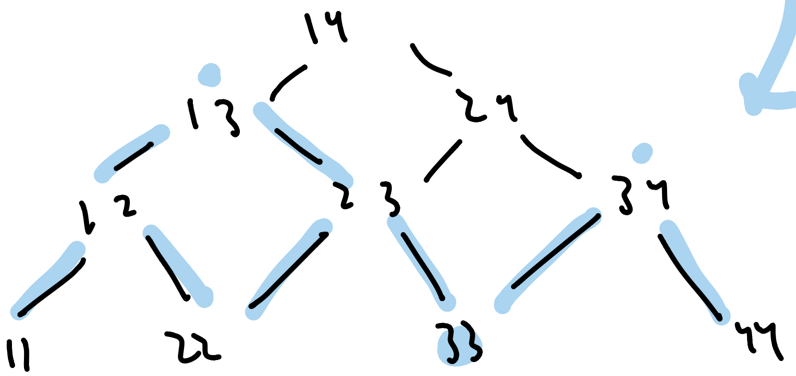
Un chordful est "un arbre de cliques"



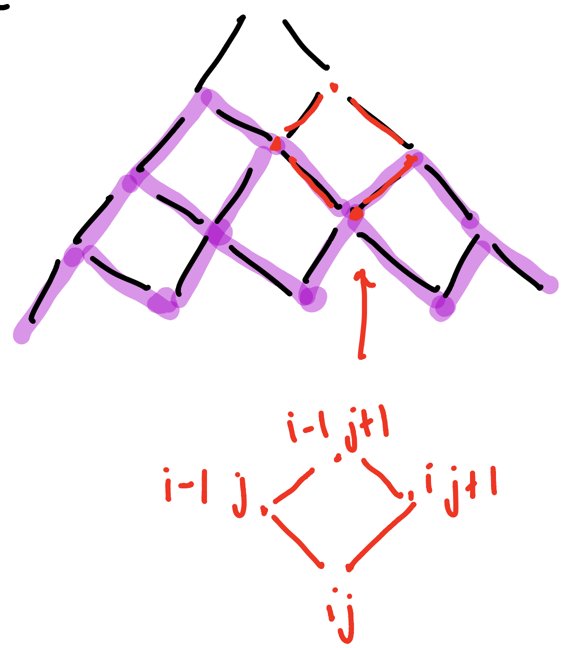




$\{i,j\}$ ordonnés par inclusion des intervalles correspondants

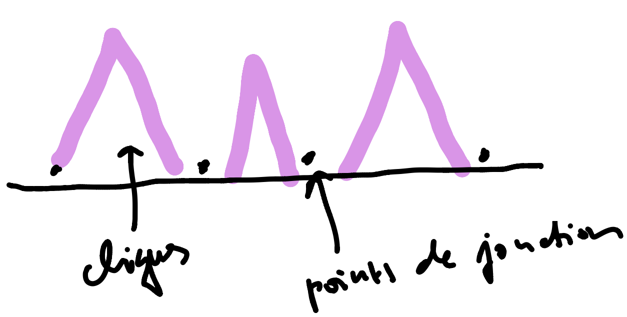


plein ⇒ on a un idéal



chordful

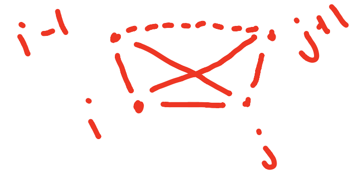
⇓



fonctionne

car i et j sont

distincts.



En somme :

1) on a compris les quotients de treillis
(les permutations sont les seuls)

2) on devrait se poser la question des ½ quotients

[être ½ quotient ⇒ être un treillis]
ceux qui sont pleins à gauche ou à droite

→ suite de demi-quotients

" Qu'est-ce qu'un graphe chordful et plein à gauche ? "

" y en a-t-il qui ne sont pas des chemins de cliques ? "

https://arxiv.org/pdf/math/0609184.pdf

-
https://en.wikipedia.org/wiki/Line_graph

-
https://en.wikipedia.org/wiki/Block_graph

https://arxiv.org/pdf/math/0610941.pdf

-
https://mathoverflow.net/questions/336330/when-is-the-poset-of-acyclic-orientations-of-a-graph-a-lattice

-