Analyse I
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Les points à aborder

Pratiques sur les fonctions usuelles, dérivabilité, limites, continuités, asymptotes et tangente, concavité et convexité. Suites.

Intégration, intégration par partie, changement de variable.

Table des matières

1 Suites réelles **3**

1.1 Généralités sur les suites . . . 3

1.2 Convergence des suites . . . 6

1.3 Divergence des suites . . . 11

1.4 Limite d'une suite monotone . . . 13

1.5 Relations de comparaison . . . 13

1.5.1 Suite négligeable . . . 14

1.5.2 Suite dominée . . . 15

1.5.3 Suites équivalentes . . . 16

2 Fonctions usuelles **17**

2.1 Logarithme . . . 17

2.2 Fonction exponentielle . . . 20

2.3 Fonctions puissances . . . 23

2.4 Fonctions circulaires . . . 23

2.5 Fonctions hyperboliques . . . 26

3 Continuité et dérivabilité **30**

4 Etude des fonctions convexes **31**

5 Intégration **32**

1 Suites réelles

Cette section est dédiée à l'étude des suites réelles. Elle rappelle les définitions élémentaires sur les suites : variations et bornes. On abordera ensuite les notions de convergence et limite des suites On finira enfin par quelques rappels et études des suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

Cette première section est primordiale car elle permet d'introduire des outils nécessaires à l'étude des fonctions. En effet, on pourra voir les suites comme des fonctions évaluées sur l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$.

1.1 Généralités sur les suites

Définition 1.1: Suites réelles

On appelle *suite réelle* tout famille de nombres réels indexés par $\mathbb{N}$. On notera $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$ est le terme de rang n de la suite u.

Exemple 1.1. *Les suites u, v w définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par*

$$u_n = n + 3, \quad v_n = 4n, \quad \textit{et} \quad w_n = 2^n$$

sont des suites réelles au sens défini précédemment.

Dans l'exemple ci-dessus, les suites u et v sont des suites **arithmétiques** et la suite v est une suite **géométrique**. Nous reviendrons sur ces points là un peu plus tard dans cette section.

La définition de suite suppose que cette dernière est définie pour tout entier naturel n, mais il n'est pas rare que l'on souhaite définir une suite à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ afin que les objets soient bien définies.

Exemple 1.2. *Considérons la suite u définie par*

$$u_n = \sqrt{2n-6}.$$

Pour la suite u soit bien définie, il faut que l'argument dans la racine carrée soit positif ou nul, i.e. il faut que $2n - 6 \geq 0$ soit $n \geq 3$. Ainsi la suite u est définie à partir du rang $n_0 = 3$.

On pourra également introduire des suites plus *exotiques* dont la définition pourrait varier selon la parité de n, comme cela serait le cas avec la suite u définie pour tout entier n par :

$$u_n = \begin{cases} 2n-3 & \text{si n est pair,} \\ n+3 & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

On pourra également effectuer des opérations sur les suites, tout comme on peut effectuer des opérations sur les nombres réels.

Définition 1.2: Opérations sur les suites

Soient deux suites de nombres réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit λ un nombre réel quelconque. On peut alors définir :

1. la suite $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. la suite $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
3. la suite $u \times v = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
4. la suite $\dfrac{u}{v} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, à condition que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit non nulle pour tout entier n

Exemple 1.3. *Considérons les suites u et v définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par*

$$u_n = n + 3 \quad \textit{et} \quad v_n = 2^n$$

et λ un nombre réel quelconque. Alors les suite $u+v$ et $u \times v$ sont définies pour tout entier naturel n par

$$u_n + v_n = 2^n + n + 3 \quad \textit{et} \quad u_n \times v_n = 2^n(n+3).$$

Après avoir défini les suites, nous pouvons maintenant nous intéresser à l'évolution de leurs valeurs et plus précisément à leurs variations.

Définition 1.3: Variations

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq u_n$,
2. décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$,
3. constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n$.

On pourra également reprendre cette définition pour introduire les notions de monotonie stricte en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

A nouveau, il n'est pas rare d'étudier la monotonie d'une fonction à partir d'un certain rang n_0, *i.e.* en ne se préoccupant pas du comportement de la suite sur ses premiers termes.

Exemple 1.4. *On considère les suites u, v w définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par*

$$u_n = 2n, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \textit{et} \quad w_n = (-1)^n.$$

sont des suites réelles au sens défini précédemment.

Alors la suite u est strictement croissante pour tout n. En effet $u_{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2 > 2n = u_n$. De la même façon on remarque que la suite v est strictement décroissante et que la suite w n'est ni croissante, ni décroissante.

Etudier les valeurs successives des suites revêt d'un enjeu important dans l'étude de certains algorithmes afin d'étudier d'éventuelles propriétés de convergence de ces derniers. Pour étudier cette convergence, nous avons donc besoin de connaître le comportement de la suite mais aussi de savoir si cette dernière prend des valeurs bornées. En effet, la monotonie d'une suite et son caractère bornée vont nous permettre d'affirmer que cette dernière est convergente.

Nous illustrerons plus tard dans ce cours, après avoir étudié les fonctions, l'utilité des suites et de l'étude de leur convergence.

Définition 1.4: Suites minorées, majorées et bornées

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors cette suite est dite :

1. *minorée* s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$,
2. *majorée* s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M \geq u_n$,
3. *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

De cette définition découle la proposition immédiate suivante :

Proposition 1.1: Suite bornée

Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors la suite u est bornée si et seulement si la suite $|u| = (|u|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration. La proposition se démontre en montrant les deux implications.

- Supposons que $|u|$ soit majorée, il existe donc un réel M tel que pour tout n, $|u_n| \leq M$. En utilisant la définition de la valeur absolue, on a pour tout entier n
$$-M \leq u_n \leq M.$$
Ainsi la suite u est donc bien minorée et majorée, elle est donc bornée.
- Supposons que la suite u soit bornée, il existe donc des réels m, M tels que pour tout n
$$m \leq u_n \leq M.$$
En posant $K = max\,(|m|, |M|)$, nous avons, pour tout entier n
$$-K \leq m \leq u_n \leq M \leq K.$$
Ainsi, en utilisant la définition de la valeur absolue, nous avons $|u_n| \leq K$ pour tout n, ce qui montre bien que la suite $|u|$ est majorée.

□

Nous allons maintenant définir la convergence d'une suite, les propriétés de convergence ainsi que les liens entre la monotonie, le caractère borné et la convergence d'une suite.

1.2 Convergence des suites

La notion de convergence est très importante lorsqu'il s'agira, plus tard, d'étudier des algorithmes d'optimisation.
En effet, nous serons souvent amenés à construire des algorithmes pour trouver une solution à un problème que l'on souhaite résoudre. Le problème sera résolu de façon itérative et on espère que notre algorithme convergera vers une (bonne) solution.

On va donc étudier à quelle(s) condition(s) une suite converge, ce qui permettra de donner quelques outils pour étudier, plus tard, la convergence de méthodes plus complexes.

Définition 1.5: Convergence

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* L si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |u_n - L| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = L$.

Dit autrement, une suite admet pour limite $L \in \mathbb{R}$, si tous les termes de la suite, peuvent être aussi proche de L qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang.
On peut montrer que, lorsqu'elle existe, **la limite d'une suite est unique**.

Définition 1.6: Suite convergente

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que cette suite est *convergente* s'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = L.$$

Dans le cas contraire, elle est dite *divergente*.

Regardons quelques exemples pour illustrer des cas de suite convergentes et divergentes.

Exemple 1.5. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par*

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Notons que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 en appliquant nos connaissances sur les calculs de limites. En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Si nous devions employer la définition, cela nous donnerait

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |1 + \frac{1}{n+1} - 1| \leq \varepsilon.$$

Il faudrait donc montrer l'existence d'un tel n_0 qui dépendrait donc de ε.

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Ainsi, la définition est vérifiée en prenant $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Bien évidemment, nous n'utilisons pas la définition, en pratique, pour montrer qu'une suite converge. On se contente d'appliquer ce que l'on connaît pour le calcul de limites ou, quand cela est moins visible, d'utiliser des propriétés que nous verrons plus tard.

Exemple 1.6. *Considérons les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes*

$$v_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad w_n = 2^n$$

Ces deux suites divergent. En effet, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterne entre deux valeurs -1 et 1 selon la parité de n et ne peut donc pas être convergente (cela contredirait l'unicité de la limite).

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également divergente car elle peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite.

Nous verrons un peu plus tard, comment définir une suite qui diverge. Mais regardons d'abord quelques propriétés des suites convergentes.

Proposition 1.2: Convergence et bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. □

Cette proposition, bien que très simple ne s'utilise que très rarement. Elle sert surtout à montrer qu'une suite est divergente en utilisant la **contraposée** : *une suite non bornée est divergente*, ce que l'on a pu voir directement avec la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'Exemple 1.6.

Regardons maintenant quelques résultats sur la convergence des suites et les opérations élémentaires (somme et produit)

Proposition 1.3: Suites convergentes vers 0

oient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant toutes deux vers 0 et soit λ un nombre réel. Alors

1. la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
2. la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Démonstration. La preuve consiste à appliquer la définition de limite dans le cas où $L = 0$ sur les deux suites étudiées

1.
2.

$\square$

Ce n'est pas surprenant intuitivement mais regardons quelques exemples pour visualiser ces propriétés.

Exemple 1.7. *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout n par :*

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{2}{n+1}$$

Ces deux suites convergent bien vers 0. Soit également un nombre réel λ. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \times 0 = 0.$$

De la même façon

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n+1}\right) = 0.$$

Ce premier résultat permet d'avoir des les propriétés plus générales suivantes sur les suites convergentes.

Proposition 1.4: Opérations sur les suites convergentes

oit deux suites réelles convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limites respectives L_1 et L_2 et λ un nombre réel. Alors :

1. la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λL_1,
2. la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 + L_2$,
3. la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 L_2$
4. si $L_2 \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{L_1}{L_2}$.

A nouveau cette proposition est plutôt intuitive, elle ne devrait pas choquer le lecteur et généralise ce que l'on a vu précédemment aux suites convergentes (mais pas nécessairement vers 0).

Elle est en revanche très pratique lorsqu'il s'agit de calculer la limite de *somme, produit* ou encore *quotient* de deux suites.

Il se peut parfois que la limite d'une suite soit très difficile à calculer car son expression est trop complexe, il peut donc se révéler utile de trouver une suite majorante dont la limite est plus simple à déterminer. C'est d'ailleurs ce que l'on fait, dans un cadre plus général en employant le **Théorème des Gendarmes**.

On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite majorante** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout entier n, nous avons

$$u_n \leq v_n.$$

On peut également parler de suite *majorante* à partir d'un certain rang. On peut également, de façon analogue, définir la notion de suite minorante.

Proposition 1.5: Convergence et suite majorante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une réelle et supposons qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $|u_n| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La démonstration n'est qu'une simple écriture de la définition de limite. En revanche, noter que l'on étudie la suite des *valeurs absolues* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *i.e.* on étudie une suite dont les valeurs sont *positives*. Cette hypothèse, si elle n'est pas respectée, peut mettre en défaut le résultat précédent.

En effet, considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = -2 + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

On a bien $u_n \leq v_n$ pour tout entier n et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, mais cela n'est pas le cas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers -2.

Proposition 1.6: Théorème des Gendarmes

Soient trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier n, nous avons

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = L$$

Le résultat de cette proposition reste inchangée si l'on a $u_n \leq v_n lew_n$ à partir d'un certain rang n.

Exemple 1.8. *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par*

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$$

et appliquons le théorème des gendarmes pour étudier la limite de cette suite. Notons que pour tout entier n, nous avons

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \iff \frac{-1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = 0$.

On en déduit donc, à l'aide du théorème des gendarmes, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

C'est donc un résultat très intéressant à employer en pratique. On retrouvera un résultat analogue lorsque l'on reviendra sur les études de fonctions.

1.3 Divergence des suites

Toutes les suites étudiées ne sont pas forcément convergentes et nous avons pu en voir quelques exemples dans la section précédente. Dans la présente section, on cherchera simplement à définir proprement une suite divergente ainsi qu'une proposition utile en pratique

Définition 1.7: Suite divergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

Dans les deux cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente*.

Nous avons déjà rencontré un exemple d'une telle suite lorsque dans l'Exemple [?], notamment à travers la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $w_n = 2^n$.

Si on reprend la définition, nous avons bien pour tout $A \in \mathbb{R}$, $2^n \geq A$ pour tout $n \geq \dfrac{\ln(A)}{2}$. Ainsi la définition est bien vérifiée pour tout $n \geq n_0 = \dfrac{\ln(A)}{2}$.

Remarque Une suite divergente ne doit pas forcément tendre vers $+\infty$, il faut simplement qu'elle ne tende pas vers une valeur fixe. Donc les suites
$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n)$$
ne tendent pas vers $\pm\infty$ mais elles divergent pour autant.

Proposition 1.7: Divergence et Relation d'ordre

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout entier n, $u_n \leq v_n$ alors

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Cette proposition reste valide si l'hypothèse $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Ces premières définitions et résultats ne permettant pas forcément de trouver la limite d'une suite ou encore de prouver que cette dernière converge.

Le seul théorème qui nous permis de faire cela est celui des gendarmes, mais on ne dispose pas toujours de tels moyens pour déterminer la convergence d'une suite. En revanche, lorsque la suite possède de bonne propriété comme le fait d'être *monotone*, *i.e.* croissante ou décroissante, on peut alors montrer sa convergence.

1.4 Limite d'une suite monotone

Lorsque que l'on étudie des suites monotones, ce qui arrivent souvent lorsque l'on regarde l'évolution des solutions d'un problème au cours des itérations d'un algorithme, nous sommes capables de montrer la convergence de ces dernières. C'est ce que nous allons voir avec les deux résultats suivants.

Proposition 1.8: Existence limite suite croissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Alors

1. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée*, alors elle converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n} \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *pas majorée*, alors elle diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On en déduit un résultat analogue pour les suites qui sont décroissantes

Proposition 1.9: Existence limite suite minorée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **décroissante**. Alors

1. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée*, alors elle converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n} \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *pas minorée*, alors elle diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Ainsi, pour étudier la convergence d'une suite, il suffit parfois de montrer qu'elle est croissante et majorée ou encore décroissante et minorée pour montrer qu'elle converge.

Ces deux résultats ne montrent que l'existence de la limite pour une suite, mais on ne dispose pas de moyens pour la calculer pour le moment. La plupart pas du temps, il faudra se laisser guider par l'énoncé ou les hypothèses dont on dispose sur la suite.

On termine cette présentation sur les suites en abordant un point important qui est la notion de *relation d'ordre* et d'*équivalences* entre des suites.

1.5 Relations de comparaison

Pour calculer des limites de suite, plus précisément pour lever une indétermination, on a parfois besoin de savoir quelles sont les suites prépondérantes, négligeables ou encore équivalentes à d'autres suites, à l'aide de suites de références.

Si l'intérêt est très limité dans le cadre de ce cours. Cela se révélera particulièrement intéressant de disposer de ce genre de notions, notamment lorsque l'on cherchera à évaluer la *complexité* d'un algorithme, *i.e.* la complexité d'une opération effectuée ou la complexité globale pour la résolution d'un problème.
Connaître cet ordre pour certaines opérations, permettra de sélectionner l'algorithme le plus efficace pour la résolution d'une tâche.

Ces aspects algorithmes sont particulièrement intéressants à prendre en compte dans un cadre industriel avec des contraintes de temps lors de l'apprentissage de modèles en Machine Learning.

Mais commençons par définir ces relations de comparaisons.

1.5.1 Suite négligeable

Définition 1.8: Suite négligeable

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que $u_n = v_n \times w_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n = o(v_n)$.

Regardons tout de suite une proposition plus concrète pour caractériser une suite négligeable devant une autre.

Proposition 1.10: Caractérisation négligeable

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

Ainsi, pour savoir si une suite est négligeable devant une autre, il suffit simplement d'étudier le quotient de ces deux suites. On pourra, par la suite, utiliser les comparaisons de références ci-dessous dans un cadre pratique

Comparaison des suites de référence Si on considère des nombres réeles α, β et γ strictement positifs, alors :

$$\ln(n)^\alpha = o(n^\beta), \quad n^\beta = o(e^{\gamma n}) \quad \text{et} \quad e^{\gamma n} = o(n!).$$

Ces relations son normalement déjà connues, mais on va les montrer afin de pouvoir les utiliser par la suite. Dans les trois cas, on va s'intéresser au quotient entre les deux suites

- $\ln(n)^\alpha = o(n^\beta)$ **:** ...

- $n^\beta = o(e^{\gamma n}$ **:** Il suffit simplement de réécrire le quotient comme suit

$$\frac{n^\beta}{e^{\gamma n}} = e^{\beta \ln(n) - \gamma n}.$$

Or la suite $u_n = n$ croit plus rapidement que la suite $v_n = \ln(n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta \ln(n) - \gamma n) = -\infty$. On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta}{e^{\gamma n}} = 0$.

- $e^{\gamma n} = o(n!)$ **:** Soit n_0 un entier tel que $n_0 \geq 2e^\gamma$, alors pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{e^{\gamma n}}{n!}\right| = \frac{e^{\gamma n}}{n!} = \frac{e^{\gamma n_0}}{n_0!} \times \frac{e^\gamma}{n} \times \frac{e^\gamma}{n-1} \times \ldots \times \frac{e^{\gamma n}}{n_0+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \frac{e^{\gamma n_0}}{n_0!}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\gamma n}}{n!} = 0$.

1.5.2 Suite dominée

Définition 1.9: Suite dominée

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = v_n \times w_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Regardons tout de suite une proposition plus concrète pour caractériser une suite négligeable devant une autre.

Proposition 1.11: Caractérisation négligeable

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si le quotient $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est borné à partir d'un certain rang.

1.5.3 Suites équivalentes

Dans la suite, c'est surtout cette notion d'équivalence qui sera largement étudiée et employée à travers des exercices.

2 Fonctions usuelles

2.1 Logarithme

On commence par présenter le logarithme népérien et on présentera rapidement la définition du logarithme en base quelconque, qui présentera un intérêt dans l'étude ultérieure de certains algorithmes.

Logarithme Népérien

Définition 2.1: Logarithme népérien

La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est l'unique primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Par définition, pour tout $x \in]0,+\infty[$ nous avons

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

De cette même définition, on peut déduire que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout x dans ce même intervalle, nous avons

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

On se rappelle de la définition de fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, cette fonction est **strictement** positive sur $]0,+\infty[$. Ceci implique la fonction ln est **strictement** croissante sur ce même intervalle.

Avant de poursuivre sur l'étude de la fonction en elle même, regardons quelques unes de ses propriétés, notamment vis-à-vis du produit et du quotient. Ces propriétés sont résumées par la proposition suivante :

Proposition 2.1: Propriétés logarithme népérien

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

ii) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,

iii) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,

iv) $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstration. On va uniquement démontrer le premier point de cette proposition. En effet, les trois autres points n'en sont que des conséquences.

Pour tout $y \in]0, +\infty[$ on considère la fonction $f : x \mapsto \ln(xy)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur ce même intervalle. Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$, nous avons

$$f'(x) = \frac{y}{yx} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, $f'(x) = \ln'(x)$ pour tout réel $x \in]0, +\infty[$. Comme les fonctions f et $\ln$ ont la même dérivée sur cet intervalle, elles sont donc **égales à une constante près sur ce même intervalle**. On en déduit

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \ln(x) + c,$$

où c est une certaine constante. Cependant, pour $x = 1$, nous avons $f(1) = \ln(y) = \ln(1) + c = c$.

On en déduit que $c = \ln(y)$, donc

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

□

Nous avons vu que la fonction ln était strictement croissante entre $]0, +\infty[$, il nous reste donc pas à voir quelles sont les limites de cette fonction en les bornes de cet intervalle. Ces limites sont données par le résultat suivant :

Proposition 2.2: Limites

La fonction ln admet des limites en 0 et $+\infty$ qui sont :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Démonstration. Pour montrer ces deux résultats, on va utiliser la croissante de la fonction ln ainsi que la quatrième propriété de cette fonction énoncée dans la Proposition 2.1.

La croissante stricte de la fonction ln implique $\ln(2) > \ln(1) = 0$.
Ainsi, en utilisant la quatrième partie, on a

$$\lim_{n\to +\infty} \ln(2^n) = \lim_{n\to +\infty} n\ln(2) = +\infty.$$

La fonction ln est une fonction croissante qui n'est donc pas majorée, on a donc

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to +\infty} -\ln(t) = -\lim_{t\to +\infty} \ln(t) = -\infty.$$

$\square$

Ce dernier résultat nous permet d'affirmer que la fonction ln réalise une bijection croissante et continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On pourra également dresser le tableau de variation de cette fonction ln et en donner une représentation graphique (voir Figure 1).

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\Vert$		$+$		0
ln	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

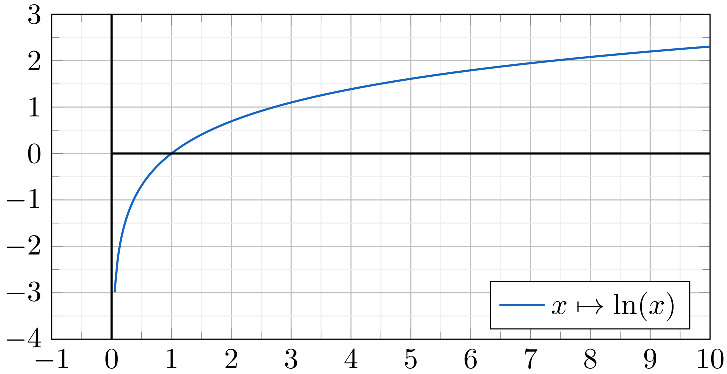

FIGURE 1 – Représentation de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+\star}$

Logarithme en base quelconque

Définition 2.2: Logarithme en base a

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle *logarithme de base a*, que l'on note $\log_a$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Exemple 2.1. *Mettre quelques exemples d'utilisation du logarithme en base quelconques*

2.2 Fonction exponentielle

Définition 2.3: Exponentielle

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est donc bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Remarque : il est également possible de définir la fonction exponentielle comme la seule solution de l'équation différentielle avec la condition suivante

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$

Mais nous n'aborderons pas le thème des équations différentielles dans le cadre de ce cours. On gardera cependant en tête que la dérivée de la fonction exponentielle est elle même, *i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

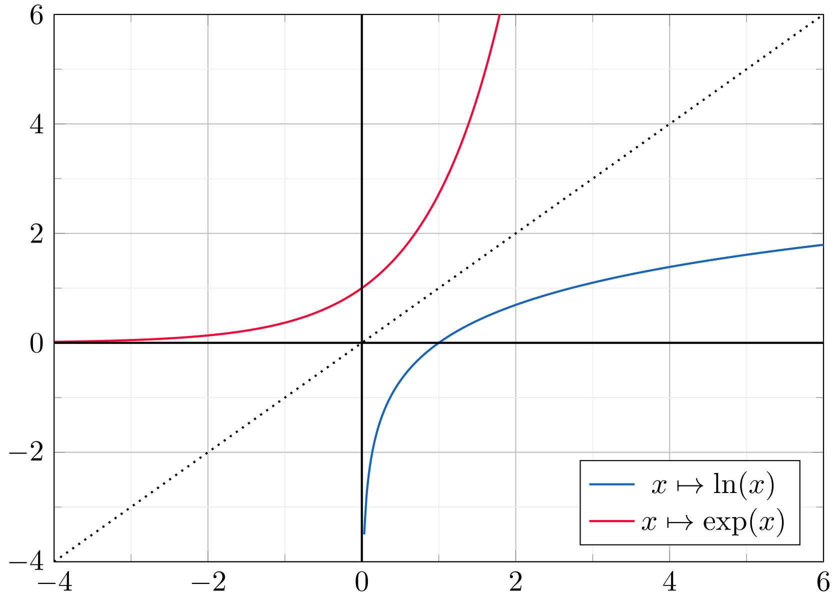

FIGURE 2 – Représentation de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Le graphique met également le caractère réciproque des fonctions logarithme et exponentielle via la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ecrire la preuve ou pas ?

En tant que fonction réciproque de la fonction ln nous avons donc les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[,\ \exp(\ln(x)) = x.$$

On peut alors dresser le tableau suivant et représenter la fonction exponentielle ainsi que sa fonction réciproque en Figure 2. En tant que fonction réciproque l'une de l'autre, il est important de garder à l'esprit que ces deux fonctions sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

Les limites de la fonction exponentielle se déduisent directement des limites du logarithme népérien par symétrie avec la droite d'équation $y = x$. Tout comme nous l'avons fait pour le logarithme, nous pouvons également donner quelques propriétés de la fonction exponentielle.

Proposition 2.3: Propriétés de l'exponentielle

Pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction exp vérifie les propriétés suivantes

i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,

ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$,

iii) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$,

iv) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Démonstration. Pour démontrer les différents points, on utilisera le fait que l'exponentielle se définit comme la fonction réciproque du logarithme népérien.

i) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y = \ln(\exp(x+y)).$$

En utilisant la bijectivité de ln, on en déduit la relation : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Les points ii), iii) et iv) sont des conséquences immédiates du point i). En effet

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$$

et on déduit directement la relation ii).

Pour obtenir la relation iii), il suffit d'écrire

$$\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Enfin, pour la relation iv), on va à nouveau utiliser la fonction ln. Ce qui nous donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\ln\left(\exp(x)^n\right) = n\ln(\exp(x)) = nx = \ln(\exp(nx)).$$

□

2.3 Fonctions puissances

2.4 Fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sont des fonctions déjà rencontrées dans des contextes géométriques et notamment lors de mesures d'angles dans un triangle à partir des côtés *adjacent*, *opposé* ou encore de l'*hypoténuse*. On se rappelle que dans un triangle rectangle, nous pouvions obtenir ces différentes mesures d'un angle α par les relations :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

De ces définitions vous avez également pu étudier, de ces relations découlez le théorème de Pythagore ou une version généralisée appelée le théorème d'Al-Kashi.

Vous vous souviendrez également de quelques valeurs particulières de ces fonctions en fonction de l'angle étudié, ces différentes valeurs sont rappelées en Figure 3.

Nous mettons ici de côté l'aspect géométrique pour nous focaliser sur l'aspect analytique. On rappelle que les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π-périodiques, ce qui signifie que pour tout réel x

$$\sin(2\pi + x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(2\pi + x) = \cos(x).$$

La fonction cosinus est une fonction *paire* et la fonction sinus est fonction impaire et vérifient donc pour tout réel x

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = \cos(-x).$$

Ces deux propriétés peuvent facilement se voir sur les graphiques de ces fonctions présentées en Figure 4. Elles sont également dérivables pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\sin'(x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

A partir de ces relations là, on peut dresser les tableaux de variations de ces deux fonctions circulaires

Si ces formules de dérivées paraissent pour le moment sortir de nul part, elles sont en fait issues d'une autre définition de ces fonctions circulaires en utilisant l'*exponentielle complexe*.

Notre objectif n'étant d'étudier les nombres complexes dans ce cours, on se contentera de donner les définitions. Ainsi

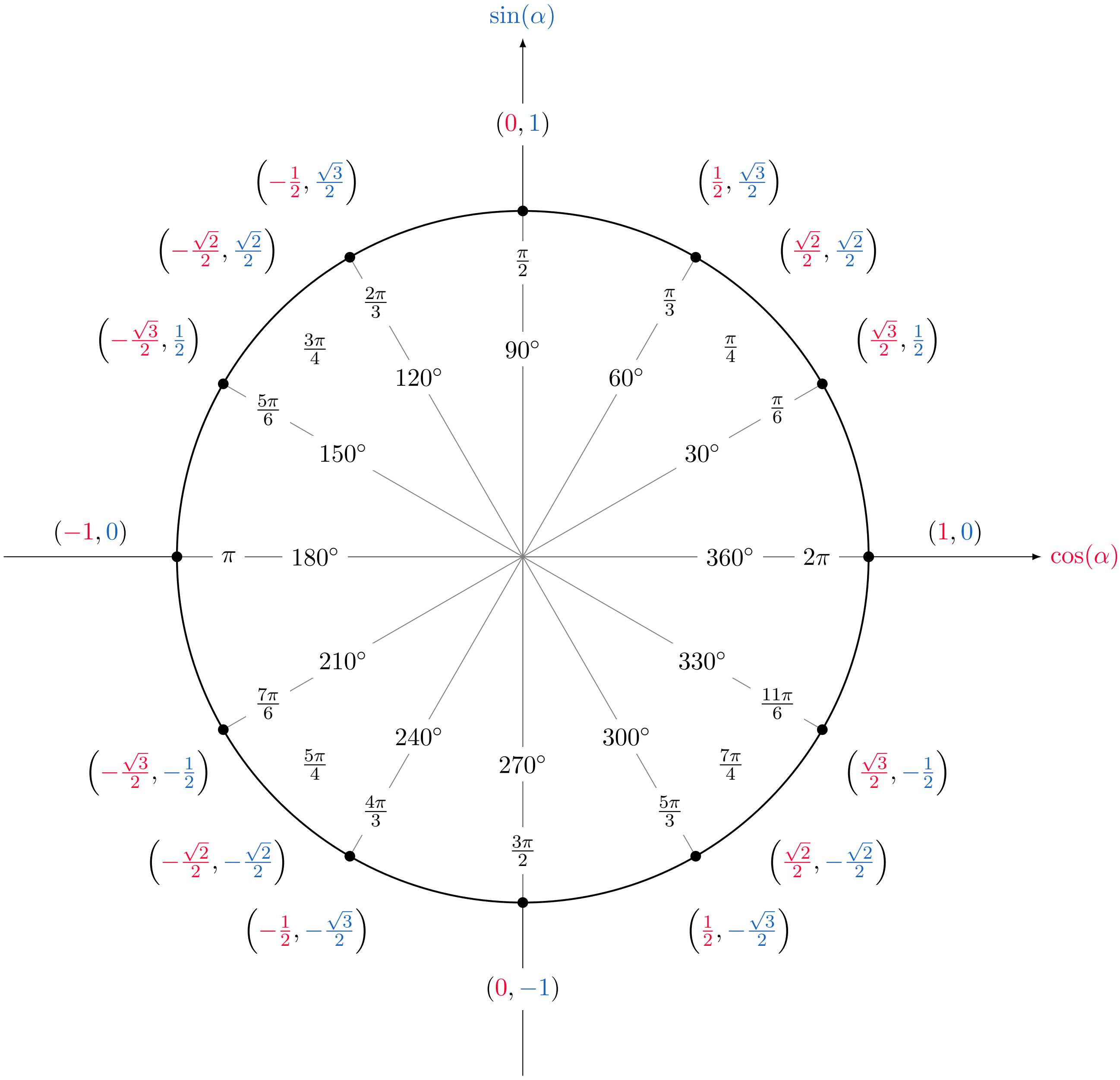

FIGURE 3 – Cercle trigonométrique. On lit abscisse le cosinus de l'angle α (première coordonnée) et en ordonnée le sinus de ce même angle α (deuxième coordonnée)

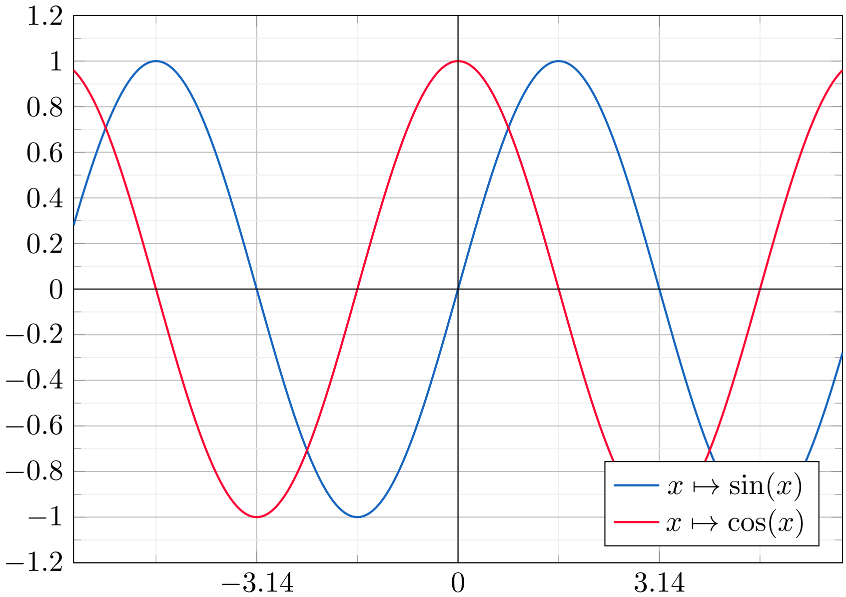

FIGURE 4 – Représentation graphique des fonctions trigonométriques sinus et cosinus dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Définition 2.4: Fonctions circulaire

Les fonctions *sinus* et *cosinus* peuvent se définir à l'aide de l'exponentielle complexe, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i},$$

où i est le nombre vérifiant $i^2 = -1$.

S'il ne s'agit pas là de la "vraie" définition de ces deux fonctions circulaires, elles seront amplement suffisantes ici et suffiront à démontrer ce que sont les dérivées des fonctions sin et cos.

En revanche de ces relations, on pourra montrer que pour tout réel x nous avons

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1. \tag{1}$$

Il nous reste à étudier la fonction tangente tan. Elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

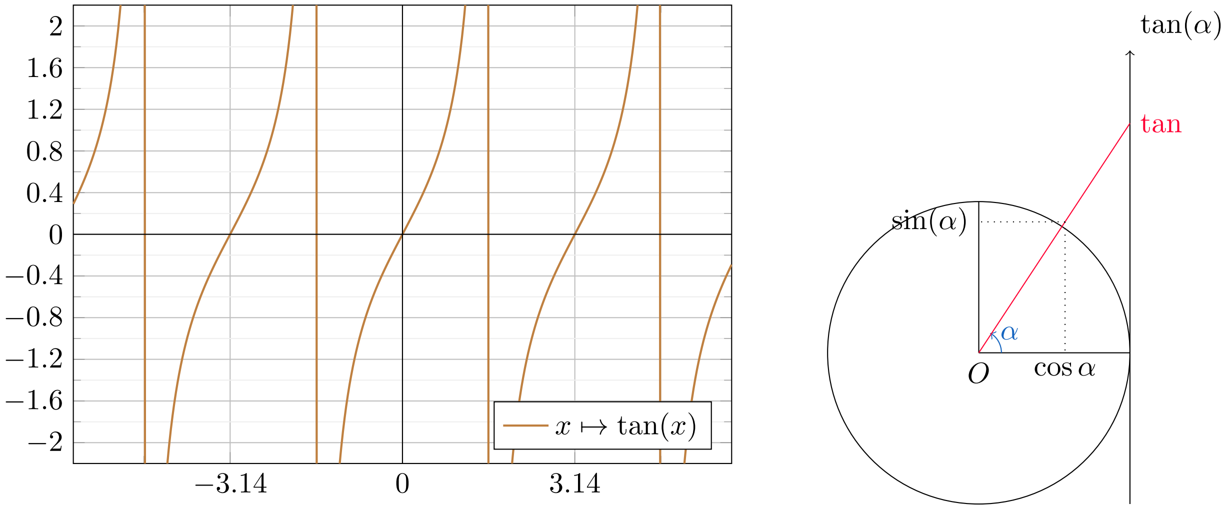

FIGURE 5 – Représentation de la fonction tangente, tan, à gauche et illustration de l'interprétation géométrique de la tangente.

La fonction tan est donc par définition une fonction impaire et elle est également dérivable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. Pour ces même réels x, sa dérivée est donnée par $\tan'(x) = \dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. La deuxième égalité est donnée par la relation (1).

Une représentation graphique de la fonction tangente est donnée en Figure 5. Sur cette même figure, on montre qu'il est également possible de lire graphiquement la valeur de la tangente d'un angle α directement à partir du cercle trigonométrique, en considérant une droite formant un angle α avec l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

2.5 Fonctions hyperboliques

Définition 2.5: Fonctions hyperboliques

Les fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperolique*, notées respectivement sh et ch, sont définies pour tout réel x par les relations

$$sh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad ch(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

A partir de ces fonctions, nous pouvons également introduire la fonction *tangente hyperbolique*, notée th, définie pour tout réel x par la relation

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}.$$

Les fonctions hyperboliques et plus particulièrement la tangente sont définies sur

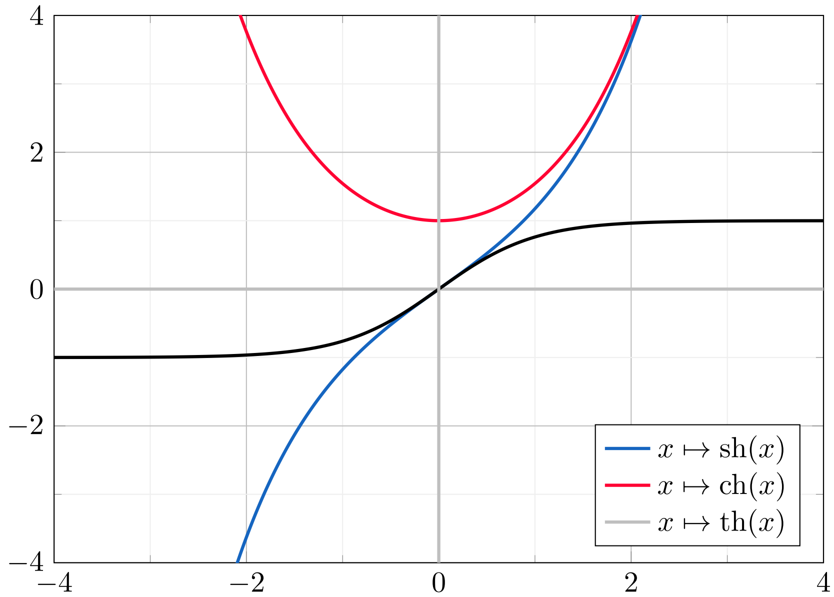

FIGURE 6 – Représentation des fonctions *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*

$\mathbb{R}$ tout entier contrairement à son homologue circulaire. Une représentation graphique de ces fonctions est donnée en Figure 6.

De ces définitions, on peut directement décrire quelques liens entre ces fonctions hyperboliques, tout comme nous l'avons fait pour les fonctions circulaires. Par exemple, pour tout réel x nous avons les relations

$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1. \tag{2}$$

Etudions maintenant ces fonctions d'un peu plus et notamment leurs propriétés.

Concernant le signe Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction *ch* est positive comme somme de deux fonctions positives. La fonction sh est positive pour tout $x \geq 0$ et négative sinon. En effet, $\mathrm{sh}(x) \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x}$ et cette dernière inégalité est vérifiée si et seulement si $x \geq 0$. Enfin, tout comme la fonction sh, la fonction th est positive pour tout $x \geq 0$ et négative dans le cas contraire.

Concernant la dérivabilité Ces différentes fonctions circulaires sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme la somme ou le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En effet, nous avons vu plus tôt que la fonction exp est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par la proposition suivante

Proposition 2.4: Dérivées fonctions hyperboliques

Les fonctions ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

Démonstration. La démonstration est purement calculatoire et est laissée à titre d'exercice. □

On peut également réécrire la dérivée de la fonction th en fonction de la fonction th elle même à l'aide de la relation (2), ce qui nous donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Concernant les limites Les limites de ces fonctions s'obtiennent à partir des limites de la fonction exponentielle. Ainsi :

- $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{ch}(x)} = \underset{x\to-\infty}{\mathrm{ch}(x)} = +\infty$.
- $\underset{x\to-\infty}{\mathrm{sh}(x)} = -\infty$ et $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{sh}(x)} = +\infty$.
- $\underset{x\to-\infty}{(x)} = -1$ et $\underset{x\to+\infty}{(x)} = 1$.

On finit cette présentation des fonctions en étudiant l'existence de fonctions réciproques en se basant sur la représentation graphique des fonctions circulaires données en Figure 6.

La fonction sh est une fonction strictement strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive et s'annule qu'en un seul point. Elle est donc *bijective* et admet une fonction réciproque qui est également définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est notée argsh pour *argument sinus hyperbolique.*

La fonction ch est une fonction strictement strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ car sa dérivée est positive et s'annule qu'en un seul point. Elle est donc *bijective* de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ et admet une fonction réciproque qui est également définie de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$. Elle est notée argch pour *argument cosinus hyperbolique.*

La fonction th est une fonction strictement strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive et s'annule qu'en un seul point. Elle est donc *bijective* et admet une fonction réciproque qui est également définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est notée argth pour *argument tangente hyperbolique.*

En réutilisant le fait qu'une fonction et sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, il est très facile d'obtenir une représentation graphique des fonctions réciproques hyperboliques. Nous pourrions également étudier les dérivées mais nous allons nous arrêter là car elles ne présentent que peu d'intérêt pour la suite et elles sont peut utilisées dans un cadre d'analyse de données.

3 Continuité et dérivabilité

4 Etude des fonctions convexes

5 Intégration