

# **Algèbre Linéaire** et **Analyse de Données**

Licence 2 - MIAHS

Guillaume Metzler

Université Lumière Lyon 2  
Laboratoire ERIC, UR 3083, Lyon

[guillaume.metzler@univ-lyon2.fr](mailto:guillaume.metzler@univ-lyon2.fr)

Printemps 2022

# Introduction

# Motivations

- Apprendre des techniques permettant de dégager les informations présentes dans un jeu de données → en dégager la substantifique moelle !
- Partir de la représentation la plus classique d'un jeu de données, *i.e.* sous forme d'un tableau, et en apprendre une représentation synthétique sous forme de graphiques.
- Nous verrons aussi quelles techniques adopter en fonction de la nature de nos données.
- On va donc voir comment synthétiser l'information à des fins d'**interprétations** mais aussi de **visualisation**.

# Motivations

- On va s'éloigner de la simple statistique descriptive pour se plonger dans l'étude de variables dites **multidimensionnelles**.
- Pourquoi multidimensionnelles ? Parce qu'un objet ou un individu pourra être représenté par une multitude d'informations ou **caractéristiques**.
- Toutes ces informations sont structurées dans des **tableaux/matrices** dont les éléments peuvent à la fois être des **chiffres** ou du **texte**.

# Motivations

Les applications sont nombreuses dans le domaine des sciences sociales :

- **Marketing** : déterminer des profils clients dans un panel - identifier les cibles prioritaires et les meilleurs arguments dans des campagnes publicitaires
- **Sociologie** : identifier les profils d'individus les plus sensibles aux fake news dans la population - détecter des communauté d'individus dans les réseaux sociaux
- **Economie** : identification des facteurs clefs pour la prise de décision dans un but commercial
- ...

On retrouve également des applications dans le domaine médical, biologique, de détection de fraudes, ...

# Comment faire cela ?

Nos données sont représentées sous une forme structurée, *i.e.* des tableaux ou des matrices de taille  $n \times p$ .

$$X = \begin{matrix} & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k & \cdots & \mathbf{v}_p \\ \mathbf{x}_1 & \left( \begin{array}{ccccc} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_i & \begin{array}{ccccc} x_{i1} & \cdots & x_{ik} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_n & \begin{array}{ccccc} x_{n1} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{array} \end{array} \right), \end{matrix}$$

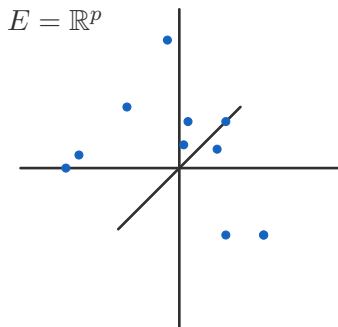
Chaque ligne  $i$  représentera un **individu** qui sera décrit par un ensemble de  $p$  **caractéristiques** ou **attributs**  $\mathbf{v}_j$  que l'on appellera également **variables** (ou **features**).

**Individu**  $\rightarrow$  un vecteur de taille  $p$ , *i.e.*  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$ .

**Variables**  $\rightarrow$  un vecteur de taille  $n$ , *i.e.*  $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n$ .

# Deux visualisation possibles

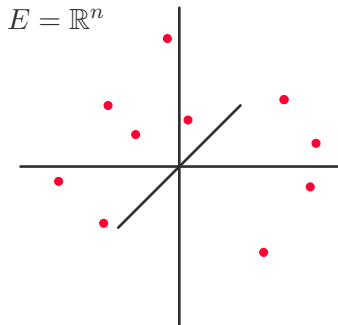
La tableau précédent suggère deux visualisation possibles de notre jeu de données



Une première représentation dans l'**espace des variables**, ainsi chaque individu est représenté par un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

# Deux visualisation possibles

On peut également faire le choix de représenter les **variables** dans l'espace des **individus**.



Ainsi chaque **variable** est représenté par un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .



# Motivations

Nous verrons que les deux représentations permettent de dégager des informations différentes dans notre jeu de données : on pourra, par exemple, détecter d'éventuelles **corrélations** entre des variables ou des **groupes d'individus**.

D'un point de vue technique nous verrons également que ces deux représentations là sont très liées et qu'en étudiant simplement l'une de ces représentations nous sommes capables d'en déduire des informations sur l'autre représentation.

# Objectifs

- Il est difficile d'interpréter et de synthétiser des informations se trouvant dans des espaces à **grande dimension**. Notre vision humaine nous limite à la visualisation en 3 dimension.
- Il va donc falloir développer des techniques qui permettant la synthèse et la visualisation de ces résultats dans des espaces de dimension faible (2 ou 3 en général) tout en préservant l'information qui était présente dans la représentation initiale.
- La quantité d'informations sera représentée par les notions de **variance** (quand on étudiera les variables) ou encore par la notion de **distances entre les individus** (si on étudie les individus et non les variables).

# Un exemple pour motiver ce cours I

Nous demandons aux étudiants qui suivent ce cours s'ils sont satisfaits, à travers 5 critères sur lesquels ils doivent se positionner sur une échelle de 1 à 5, 1 correspondant à "très insatisfait" et 5 à "très satisfait". Voici ces 5 critères :

1. Clarté du cours écrit
2. Fluidité de la lecture du cours écrit
3. Facilité à comprendre les exemples du cours
4. Clarté des vidéos
5. Satisfaction vis à vis de l'enseignant dans la vidéo

# Un exemple pour motiver ce cours II

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Individu 1	3	3	3	5	5
Individu 2	2	3	1	5	4
Individu 3	2	3	3	4	5
Individu 4	1	1	1	1	1
Individu 5	5	5	4	3	3
Individu 6	4	5	5	2	3
Individu 7	5	5	5	3	3
Individu 8	1	1	1	1	1

TABLE – Résultats du questionnaire sur un ensemble de 8 individus.

# Un exemple pour motiver ce cours III

Les outils statistiques de statistiques descriptives nous permettent simplement de décrire un individu *moyen*.

Il laisse à penser que l'échantillon est globalement moyennement satisfait vis à vis de l'ensemble des critères étudiés.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Moyenne	2.875	3.25	3	3	3.125

TABLE – Réponse moyenne sur les différents critères vis à vis des réponses fournies au questionnaire et présentées dans la Table 1.

En réalité, différents profils peuvent être extraits de cette table...

# Un exemple pour motiver ce cours IV

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Individu 1	3	3	3	5	5
Individu 2	2	3	1	5	4
Individu 3	2	3	3	4	5
Individu 4	1	1	1	1	1
Individu 5	5	5	4	4	3
Individu 6	4	5	5	2	3
Individu 7	5	5	5	3	3
Individu 8	1	1	1	1	1

TABLE – Création de groupes en fonction des réponses des individus. On identifie trois profils différents en fonction de la nature des réponses, identifiés en marron, gris et blanc.

# Un exemple pour motiver ce cours V

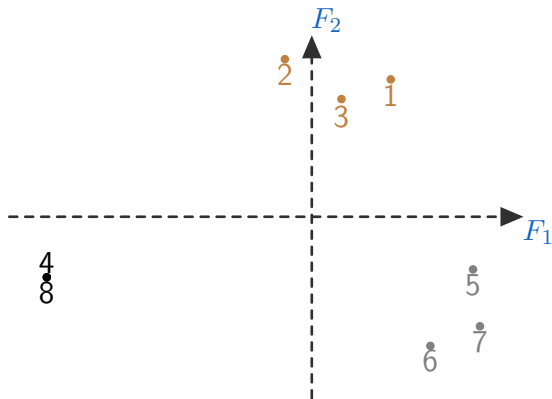


FIGURE – Représentation des individus, *i.e.* des réponses fournies au questionnaire, dans un espace à deux dimensions obtenu par l'ACP.

# Quels outils ?

Pour cela on aura besoin de techniques basées sur l'**Algèbre Linéaire** et nous allons, entre autre, mobiliser ce que vous avez pu voir sur les matrices :

- Propriétés des matrices
- Représentation des vecteurs dans une base
- Réduction des endomorphismes

Mais aussi d'outils géométriques pour mieux appréhender et utiliser les notions de distances :

- Espace euclidien
- Projections
- Produit scalaire - norme



# Quelles techniques ?

Les techniques d'**analyse de données** que nous allons étudier vont mobiliser les outils d'algèbre linéaire qui seront présentés.

D'un point de vue technique ou d'un point de vue mathématique, il n'y aura rien de nouveau, il faudra simplement comprendre et interpréter les résultats obtenus avec nos outils mathématiques.


Enfin, nous verrons bien sûr quels outils employés et dans quelles circonstances ainsi que l'interprétation des résultats en fonction du type de données.

# Présentations des enseignants

- **Chargé de CM :** Guillaume METZLER - MCF Informatique - Enseignant à l'ICOM et rattaché au Laboratoire ERIC (Batiment K - Bureau K73)
- **Intervenants en TD :**
  - Mickaël LALLOUCHE - PRAG en Mathématiques - Spécialité en Géométrie Algébrique - UFR ASSP
  - Martial AMOVIN - Doctorant en 3<sup>ème</sup> année en Mathématiques Appliquées - Laboratoire ERIC (Bâtiment K - Bureau K69)
  - Moi-même

# Déroulement du cours

## Programme :

- 12 séances de CM portant sur l'Algèbre Linéaire et l'Analyse de Données.  
Une séance est également réservée pour effectuer un partiel de 1h45 sur la première partie du cours, consacrée à l'Algèbre Linéaire
- 6 séances de TD sur la partie Algèbre Linéaire puis 5 séances de TIC/TP sur la partie Analyses de Données (sur machine avec ).  
La dernière séances de TIC/TP sera évaluée à nouveau.

Au total, vous aurez donc deux évaluations de 1h45.

# Summary

## 1 Introduction

## 2 Algèbre Linéaire

- Espaces vectoriels et applications linéaires
- Espaces vectoriels de dimension finie
- Matrices et calcul matriciel
- Systèmes linéaires
- Réduction des endomorphismes
- Formes quadratiques et espaces euclidiens

## 3 Analyses de Données

- Généralités et Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)
- Analyse en Composantes Principales (ACP)
- Généralisation des méthodes
- Analyse Factorielle des Correspondances (AFC)
- Analyse factorielle des Correspondances Multiples (ACM)

# Cours et Supports

Le cours se compose :

- des planches pour la présentation des cours magistraux
- d'un polycopié qui reprend de façon détaillée le contenu des slides
- d'un petit poly avec des exercices

L'ensemble de ces supports sont disponibles à l'adresse suivante (les slides seront régulièrement mis à jour) :

[https://guillaumemetzler.github.io/aladd\\_lyon2.html](https://guillaumemetzler.github.io/aladd_lyon2.html)

**Attention** : présence aux TD obligatoires ! Aucune correction ne sera mise en ligne.

# Algèbre Linéaire

# Contenu

Une première partie plutôt *mathématiques* mais qui n'ira pas dans les détails des démonstrations (elles sont disponibles dans le poly).

- Présentation de la notion d'espace vectoriels et des applications linéaires - fondamentaux en algèbre linéaire
- Algèbre linéaire en dimension finie - bases - représentation des vecteurs et applications linéaires dans une base
- Rappels sur le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires (pivot de gauss)
- Diagonalisation (ou réduction) des endomorphismes diagonalisables - valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice
- Etude des formes quadratiques - géométrie euclidienne - produit scalaire

A voir comme une présentation des outils.

# Algèbre Linéaire

Espaces vectoriels et applications linéaires

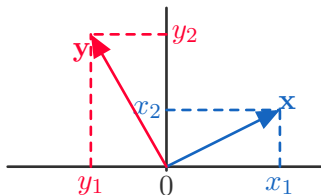


# Introduction

En algèbre linéaire nous manipulons essentiellement des **vecteurs**, en général notés  $\mathbf{x}$ , qui vivent dans un certain espace que l'on nomme **espace vectoriel**.

$$E = \mathbb{R}$$

$$E = \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C}$$



Dans de tels espaces, les objets, comme  $\mathbf{x}$ , sont décrits par des *coordonnées*, i.e.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

# Introduction

Ces objets se retrouvent dans différents contextes

- dans différentes branches des mathématiques : *algèbre linéaire* - *analyse avec l'études des fonctions* - **probabilités** - *statistiques* - *optimisation*
- en physique quantique ou probabiliste par exemple : lorsque l'on étudie certains opérateurs qui peuvent décrire le mouvement d'une particule.
- en machine learning : pour la construction de modèles de prévisions ou qui peuvent servir à effectuer des tâches de façon automatique
- ...

Mais qu'est-ce qu'un espace vectoriel d'un point de vue mathématique ?

# Espaces Vectoriels

## Définition 2.1: Espace vectoriel

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi de composition interne notée "+" et d'une loi externe notée "·" définie sur  $\mathbb{K} \times E$  par

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\alpha, \mathbf{x}) &\rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x}.\end{aligned}$$

On dit que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (e.v.) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- i)  $(E, +)$  est un groupe abélien (i.e. commutatif)
- ii)  $\forall \mathbf{x} \in E, 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$
- iii)  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall \mathbf{x} \in E, (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}.$
- iv)  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E, \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}'.$
- v)  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall \mathbf{x} \in E, \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}.$

# Espaces Vectoriels

Un groupe abélien est défini par les points suivants :

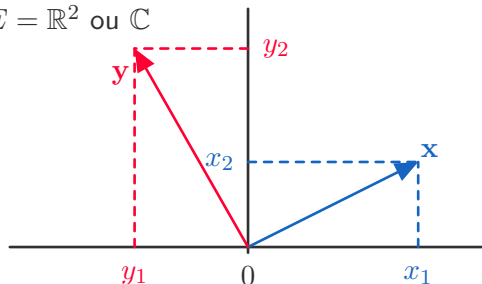
1.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ ,  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ , c'est l'*associativité*.
2.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ , c'est la *commutativité*.
3. il existe un élément, noté  $\mathbf{0}$  qui vérifie, pour tout  $\mathbf{x} \in E$  :  $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .
4.  $\forall \mathbf{x} \in E$ , il existe un élément  $\mathbf{x}' \in E$  qui vérifie  $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ . C'est l'existence d'un *inverse*, en général noté  $-\mathbf{x}$ .

Dans le cadre de ce cours, les lois " + " et " . " évoquées font références aux lois additive et multiplicative que l'on connaît.

# Quelques exemples

L'espace  $\mathbb{R}^2$  est un espace vectoriel

$$E = \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C}$$



Les éléments s'écrivent  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et l'origine de cet espace est le point  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . En particulier, nous aurons aussi

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

On fait la somme composante par composante.

# Exemples

Ce que l'on vient de voir dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  se généralise à  $\mathbb{R}^n$ .

On peut également considérer l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2, i.e.  $\mathcal{M}_2(nset R)$  :

- $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix}$
- $\lambda \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix}$

Quel serait, selon vous, l'élément neutre pour la loi "+" et l'opposé pour cette même loi ?

On pourrait aussi étudier l'espace vectoriel des fonctions.

# Sous-espace vectoriel

## Définition 2.2: Sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel soit  $F$  une partie de  $E$  (on peut aussi dire, un sous ensemble de  $E$ ).  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si  $F$  est lui même doté d'une structure d'espace vectoriel pour les lois induites par les lois définies par  $E$ .

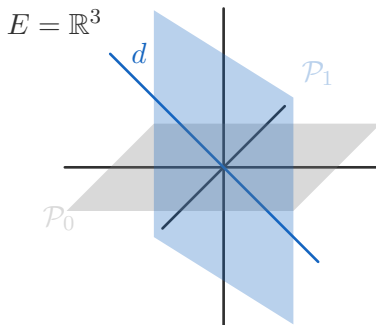
## Proposition 2.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ .  $F$  est un **sous-espace** vectoriel de  $E$  *si et seulement si* les deux propriétés suivantes sont vraies :

- i)  $F \neq \emptyset$ , i.e.  $F$  est non vide,
- ii)  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}' \in F$ , i.e.  $F$  est stable combinaison linéaire.

# Exemples

Prenons un exemple concret avec  $E = \mathbb{R}^3$ , alors toutes les *droites* et tous les *plans* qui passent par l'origine sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .



Dans cet exemple, les *plans vectoriels*  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$  et la droite vectorielle  $d$  sont des sous espaces de  $E = \mathbb{R}^3$ .



# Exemples

Plus formellement :

- une droite vectorielle, *i.e.* un espace de la forme  $\lambda \mathbf{x}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- un plan vectoriel (ou hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  dans ce cas) est un espace de la forme :  $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$ , est un sous espace vectoriel.
- plus généralement, les espaces définis comme une combinaisons linéaire d'un ensemble de vecteur de  $\mathbb{R}^n$  sont des sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$ , *i.e.*

$$F = \left\{ \mathbf{x} \in E \mid \exists \lambda_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ tel que } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}_i \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E = \mathbb{R}^n$ .

# Propriétés des sous-espaces vectoriels

## Proposition 2.2: Sous-espace vectoriel et intersection

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel, et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors  $F \cap G$  est un sous-espace-vectoriel de  $E$ .

**Preuve :** La démonstrations est laissée à titre d'exercice. Il suffit de montrer que  $0$  appartient à cet espace et qu'il est stable par combinaison linéaire.

On pourra aussi montrer que l'**union** de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$  et que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de  $E$  n'est pas un sous-espace vectoriel.

# Espaces supplémentaires

## Définition 2.3: Espaces supplémentaires

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont dits **supplémentaires** si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

i)  $F \cap G = \{0_E\},$

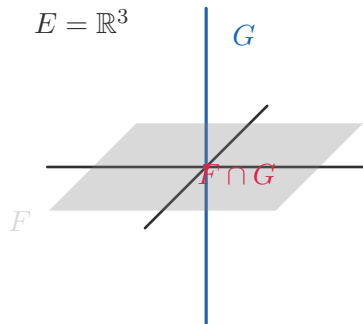
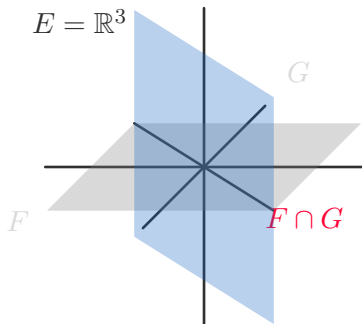
ii)  $F + G = E,$

où  $F + G$  désigne le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs de  $F$  et  $G$ .

On notera alors  $E = F \oplus G$ .

# Espaces Supplémentaires

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces de  $E$ . Considérons les deux graphes ci-dessous :



Gauche : deux sous-espaces vectoriels de  $E$  mais ces derniers ne sont pas supplémentaires, l'intersection (en jaune) n'est pas réduite à  $\{0_E\}$ .

Droite : deux sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  (une droite et un plan).

# Espaces supplémentaires

## Proposition 2.3: Somme Supplémentaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ , alors  $E = F \oplus G$  si et seulement si  $\forall \mathbf{x} \in E \mid \exists! (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in F \times G$ , tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ .

Cette notion sera importante lorsque l'on va chercher à décomposer en éléments indépendants l'information présente dans un jeu de données. On la retrouvera plus tard lorsque l'on va aborder la réduction des endomorphismes, *i.e.* des applications linéaires d'un espace dans lui même.

Regardons de suite de quoi il s'agit !!

# Applications linéaires

## Définition 2.4: Application linéaire

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E'$ . On dit que  $f$  est une application linéaire si :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in E^2, f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}') = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{x}').$$

On peut résumer la définition d'application linéaire de la façon suivante :  
*l'image d'une combinaison linéaire par cette application est la combinaison linéaire des images de cette application.*

Cette définition se généralise (par récurrence) pour une combinaison linéaire de  $n$  vecteurs.

# Exemple

On considère l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3).$$

Cette application est bien linéaire. En effet, pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = f(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)),$$

↓ on développe

$$= (\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), \alpha(y_1 + y_2) + \beta(y_1 + y_3)),$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \alpha x_3 + \beta y_1 + \beta y_3),$$

↓ on décompose

$$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_3) + (\beta y_1 + \beta y_2, \beta y_1 + \beta y_3),$$

$$= \alpha(x_1 + x_2, x_1 + x_3) + \beta(y_1 + y_2, y_1 + y_3),$$

$$= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}).$$

# Noyau et image d'une application linéaire

## Définition 2.5: Noyau et Image

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E'$ . On appelle :

- *noyau de  $f$* , noté  $\text{Ker}(f)$ , le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par :

$$\text{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) = 0_{E'}\}.$$

- *image de  $f$* , notée  $\text{Im}(f)$ , le sous espace vectoriel de  $E'$  défini par :

$$\text{Im}(f) = \{\mathbf{y} \in E' \mid \exists \mathbf{x} \in E \text{ tel que } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}.$$

Cette définition cache aussi le fait que l'image et le noyau d'une application linéaire sont aussi des sous-espaces vectoriels.



# Nature d'une application

## Définition 2.6: Nature d'une application

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Alors :

- $f$  est dite **injective** si tout élément de  $Y$  admet **au plus** un antécédent dans  $X$ . Ce que l'on peut aussi formuler :

$$\forall x, x' \in X, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

ou encore

$$\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

- $f$  est dite **surjective** si tout élément  $Y$  admet *au moins* un antécédent dans  $X$ , i.e. :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

- $f$  est dite **bijective** si elle est à la fois *injective et surjective*, ce que l'on peut écrire :

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

# Exemples I

Considérons l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1.$$

L'application n'est pas injective, car les vecteurs  $(0, 1)$  et  $(0, 2)$  ont la même image par l'application  $f$ .

On peut en revanche montrer que l'application est surjective. En effet, quelque soit  $x_1$ , le vecteur  $(x_1, t)$  est bien un antécédent de  $x_1$  par l'application  $f$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Cette application n'est pas bijective.

## Exemples II

Considérons maintenant l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2).$$

Pour montrer que l'implication est injective, on considère deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  tels que  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$  et montrons que  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}),$$

↓ définition de  $f$

$$(x_1, 2x_2) = (y_1, 2y_2),$$

$$(x_1 - y_1, 2(x_2 - y_2)) = (0, 0).$$

Cette dernière égalité implique que  $x_1 = y_1$  et  $x_2 = y_2$ , donc  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

# Exemples III

Pour la surjectivité, on considère un vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  et on montre que le vecteur  $\mathbf{x} = (y_1, \frac{1}{2}y_2)$  vérifie bien  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ .

L'application linéaire étant surjective et injective, elle est donc bijective.

# Point vocabulaire

Soient  $E$  et  $E'$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E'$ , i.e.  $f \in \mathcal{L}(E, E')$  : ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E'$ . De plus :

- dans le cas où  $E = E'$ ,  $f$  est appelée *endomorphisme de  $E$*  et notera  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ ,
- dans le cas où  $E' = K$ ,  $f$  est appelée *forme linéaire sur  $E$* .

De plus :

- si  $f$  est bijective, alors  $f$  est appelée *isomorphisme de  $E$  dans  $E'$* ,
- enfin, si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans lui même (donc un endomorphisme bijectif), alors  $f$  est appelée *automorphisme de  $E$*  et on note  $\mathcal{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .  $f$  est alors inversible et on note  $f^{-1}$  son inverse. Il vérifie
$$f(f^{-1}(\mathbf{x})) = f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

# Caractérisation des applications linéaires

La vérification des définitions peut parfois se révéler complexe. Heureusement, il existe une caractérisation simple des applications linéaires injectives.

## Proposition 2.4: Caractérisation de l'injectivité

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E'$ , alors  $f$  est injective *si et seulement si*  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , i.e. si son noyau est réduit au vecteur nul.

En dimension finie (prochaine section) on verra comment caractériser simplement les applications en raisonnant sur la **dimension** des espaces.

# Pourquoi ces notions ?

L'étude de ces sous-espaces est très important pour étudier les caractéristiques de certaines applications.

- On pourra essayer d'exprimer plus simplement nos applications linéaires.
- On pourra par exemple en déduire plus tard, si des variables sont corrélées et ainsi réduire naturellement la dimension de l'espace de représentation de nos données.

Afin de compléter et terminer cette première section, on va s'intéresser plus précisément à une application linéaire en particulier : **les projections**.

# Projecteurs

## Définition 2.7: Projecteur

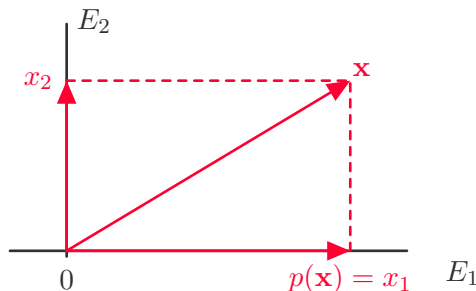
Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soient  $E_1$  et  $E_2$  des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . On appelle **projecteur sur  $E_1$  parallèlement  $E_2$** , l'application  $p : E \rightarrow E$  qui, à un vecteur  $\mathbf{x} \in E$  se décomposant comme  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  avec  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in E_1 \times E_2$ , associe le vecteur  $\mathbf{x}_1$ .

Si la définition paraît abstraite, elle est en fait très simple à comprendre avec un exemple.



# Exemple

Soit  $E$  un espace vectoriel, disons  $E = \mathbb{R}^2$  et considérons le vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (5, 3) = (5, 0) + (0, 3) \in E$ . Soit la projection  $p$  qui consiste à conserver uniquement la première composante de ce vecteur, alors  $p(\mathbf{x}) = (5, 0)$ .



# Propriétés des projecteurs

On peut résumer cette définition par le schéma suivant

$$\begin{aligned}
 p : \quad E = E_1 \oplus E_2 &\rightarrow E. \\
 \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in E_1} + \underbrace{\mathbf{x}_2}_{\in E_2} &\mapsto \mathbf{x}_1
 \end{aligned}$$

La proposition suivante montre que les projecteurs ont des images et noyaux qui sont faciles à déterminer à partir de leur définition.

## Proposition 2.5: Propriété projecteur

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ . Soit  $p$  le projecteur sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ . Alors  $p$  est un endomorphisme de  $E$  dont le noyau et l'image sont :

$$\text{Ker}(p) = E_2 \text{ et } \text{Im}(p) = E_1.$$

# Pour finir

Que pensez-vous de l'application  $p \circ p$  ? Autrement dit, si je prends un vecteurs  $x$  que lui applique un projecteur et que j'applique à nouveau cette projection sur le résultat obtenu par la première projection ?

Jusqu'ici nous n'avons jamais pris en compte la taille de nos espaces, *i.e.* on n'a jamais fixé la taille de nos vecteurs dans tous les résultats qui précèdent.

Que deviennent nos résultats si on étudie des objets avec une taille déterminée ?

# Algèbre Linéaire

Espaces vectoriels de dimension finie

# Famille libre et famille liée

## Définition 2.8: Familles libres, liées

Soit  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Cette famille est dite :

- **libre** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k = 0 \implies \lambda_k = 0 \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

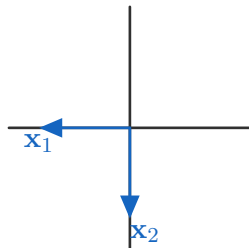
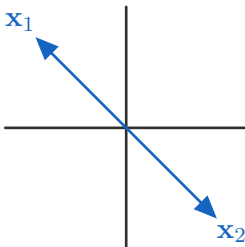
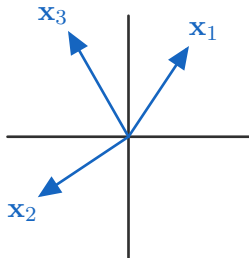
- **liée** si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}^n \text{ tel que :}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k = 0_E.$$

# Exemples

Soit  $E = \mathbb{R}^2$  un espace vectoriel et considérons les graphes ci-dessous avec des familles de vecteurs  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  ou  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ .



A votre avis, dans quel(s) cas les vecteurs forment une famille libre ou liée ?

# Exemples I

On va simplement regarder s'il existe un lien entre les différents vecteurs.

- Dans le premier cas, nous avons trois vecteurs distincts dans un espace à deux dimensions, on peut donc écrire l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres, la **famille n'est donc pas libre, elle est liée**
- Dans le deuxième cas, les vecteurs sont *colinéaires* et on a la relation  $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2$ , à nouveau, **la famille est liée**.
- Dans le dernier cas, **la famille est bien libre** car les deux vecteurs sont orthogonaux.

On verra plus tard que le troisième exemple montre le cas d'une famille de vecteurs que l'on appellera **base** de l'espace vectoriel.

# Exemples II

On considère la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 0)$  et  $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 1)$  de  $\mathbb{R}^4$ .

On montre que cette famille est bien une famille libre. En effet, considérons  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on concentre sur la deuxième et la dernière équation, on trouve directement que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .



## Exemples III

On considère la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$  et  $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ . On montre qu'il s'agit d'une famille libre. En effet, considérons  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On doit alors résoudre le système formé par les deux équations

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

La somme de ces deux équations implique  $\lambda_1 = 0$  et la différence de ces deux équations implique  $\lambda_2 = 0$ .

# Exemples IV

On considère la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, -2)$  et  $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Que peut-on dire de cette famille de vecteurs ?

# Exemples V

On considère la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, -2)$  et  $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Cette famille de vecteur n'est pas libre. En effet, on vérifie aisément que l'on

$$\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3.$$

Nous verrons plus tard que nous aurions pu directement écrire que cette famille de vecteurs est liée sans effectuer de calculs. Pourquoi selon vous ?

# Caractérisation des familles liées

## Proposition 2.6: Caractérisation famille liée

Soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille d'au moins deux vecteurs de  $E$ , cette famille est *liée* si et seulement si l'un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de cette même famille.

Remarquons, par contraposée, qu'une famille est dite *libre* si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de ses autres vecteurs (on parle d'*indépendance linéaire*).

# Exemples I

Reprenons la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$  et  $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$  et montrons qu'ils s'agit d'une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour cela, on considère un vecteur quelconque  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et on va montrer que ce vecteur peut s'écrire comme une combinaison des vecteurs de  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , *i.e.*

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2.$$

On cherche donc les valeurs  $\alpha_1, \alpha_2$  telles que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On montre qu'une solution est donnée par

$$\alpha_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

# Exemples II

Que peut-on dire des familles de vecteurs suivantes ?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Famille génératrice

## Définition 2.9: Famille génératrice

Soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ , cette famille est *génératrice* si  $\text{Vect}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = E$ . C'est-à-dire, si tout élément  $\mathbf{x}$  de  $E$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille :

$$\forall \mathbf{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \text{tel que} \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

# Exemples I

On pourra par exemple montrer que la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$  est une famille de vecteurs génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, pour tout vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple est plutôt simple, on va en prendre un autre.



## Exemples II

Considérons la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$  et  $\mathbf{v}_3 = (-1, 1)$ .

On peut facilement voir qu'il s'agit d'une famille de vecteurs liée.

On peut aussi montrer qu'il s'agit d'une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

Considérons à nouveau un vecteur quelconque  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et montrons qu'il peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de notre famille. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 - x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Exemples III

Nous aurions également pu écrire ce vecteur de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_2 + x_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_2 - x_1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc trois façons d'exprimer notre vecteur  $\mathbf{x}$  à l'aide de vecteurs de cette famille !

Ce n'est donc pas très pratique dans l'absolu, il faut peut-être être plus exigeant sur cette famille de vecteurs afin de simplifier les choses.

# Base

## Définition 2.10: Base

On appelle base de  $E$  toute famille d'éléments de  $E$  à la fois libre et génératrice.

Cette définition va nous servir à introduire la notion qui est coeur de cette section, la notion de *dimension* d'un espace vectoriel.

# Exemples I

- Dans  $\mathbb{R}^2$ , les vecteurs  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  forment une famille libre et génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet :

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \iff (\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{0},$$

*i.e.* si seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

De plus tout vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

## Exemples II

- La famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$  et  $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$  forme également une base de  $\mathbb{R}^2$ . En effet

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \iff (-\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = \mathbf{0}.$$

En résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

On en déduit  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . De plus si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , alors il peut s'écrire

$$\mathbf{x} = \frac{x_2 - x_1}{2} \mathbf{v}_1 + \frac{x_1 + x_2}{2} \mathbf{v}_2$$

# Exemples III

- On pourra en revanche vérifier que la famille de vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (-2, 2) \text{ et } \mathbf{v}_2 = (-1, 1)$$

ne forment pas une famille libre de  $\mathbb{R}^2$ . Ce n'est donc pas une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- De la même façon, on pourra vérifier que la famille

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1) \text{ et } \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$$

ne forme pas une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

# Caractérisation des bases

## Proposition 2.7: Caractérisation base

Soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ , cette famille est une base de  $E$  si et seulement si

$$\forall \mathbf{x} \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \text{tel que} \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

Remarquez bien la différence avec la définition de famille génératrice !  
Quelle est cette différence à votre avis ?

# Caractérisation des bases

## Proposition 2.8: Caractérisation base

Soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ , cette famille est une base de  $E$  si et seulement si

$$\forall \mathbf{x} \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \text{tel que} \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

Remarquez bien la différence avec la définition de famille génératrice !  
L'écriture de tout élément de  $\mathbf{x}$  de  $E$  s'exprime de façon **unique** comme élément d'une base de  $E$ , alors que cette décomposition n'est pas unique pour une famille génératrice.



# Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'espace  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, \dots, x_n)$  où pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k \in \mathbb{R}$ . On définit alors la famille  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ , par :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1).\end{aligned}$$

Tout vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  se décompose alors de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique :

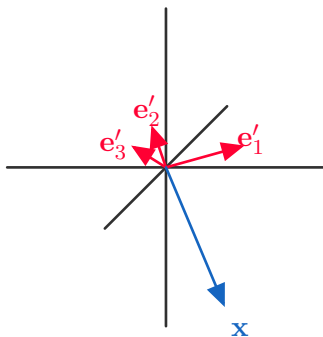
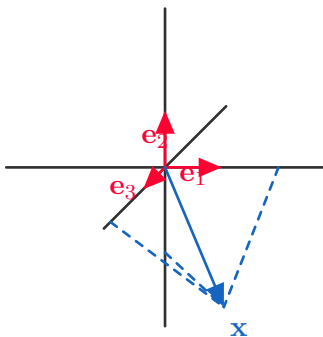
$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Les éléments  $(x_1, \dots, x_n)$  sont donc appelées coordonnées du vecteur  $\mathbf{x}$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , cette base est appelée *base canonique* de  $\mathbb{R}^n$ .

# Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définir un vecteur dans  $\mathbb{R}^n$  revient donc à déterminer exactement ses coordonnées dans la base de  $E$ .

Dans l'exemple de gauche, nous avons  $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 1.5\mathbf{e}_2 + 2.5\mathbf{e}_3$  et dans l'exemple de droite, les coordonnées sont plus complexes à déterminer car nous n'utilisons pas la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .



# Base incomplète

## Théorème 2.1: Théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie, alors toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base de  $E$ .

Prenons par exemple la famille de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$  et  $\mathbf{v}_2 = (2, 5, 0)$ .

On montre que deux vecteurs forment une libre de  $\mathbb{R}^3$  mais n'est pas une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

On peut cependant lui ajouter le vecteur  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$  afin que cette famille libre devienne une base de  $\mathbb{R}^3$ .

# Espace vectoriel de dimension finie

## Définition 2.11: Dimension finie

Un espace vectoriel  $E$  est dit de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Un point très important est que **tout espace vectoriel de dimension finie admet une base (qui est finie)**.

## Théorème 2.2: Définition de la dimension

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie, alors toutes les bases de  $E$  ont le même nombre fini d'éléments, ce nombre d'éléments est appelé *dimension de l'espace vectoriel  $E$* , il est noté  $\dim(E)$ .

# Exemples

L'exemple présenté précédemment permet de montrer que les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  sont des espaces vectoriels de dimension  $n$ . Nous avons également exhibé une base pour de tels espaces vectoriels comme la base canonique.

Dans le cas où  $E$  est réduit à  $0_E$ , on dira que  $E$  est un espace vectoriel de dimension 0 (réduit à un point). Cela revient à considérer que la famille vide  $\emptyset$  est la seule base de  $E$ .

L'espace des matrices carrées d'ordre 2 est un espace de dimension 4 dont une base est donnée par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Dimension des sous-espaces

## Proposition 2.9: Dimension sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous espace vectoriel  $F$  de  $E$  est aussi de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ . De plus, on a l'équivalence  $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$

## Proposition 2.10: Dimension espaces supplémentaires

Soit un  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces supplémentaires de  $E$ , alors  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ .

# Dimension des sous-espaces

La proposition précédente est un cas particulier du résultat suivant qui est valable quelque soit la nature des sous-espaces  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$ .

## Proposition 2.11: Dimension somme de sous-espaces

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

# Hyperplans

## Définition 2.12: Hyperplan

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . On appelle *hyperplan* de  $E$  tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

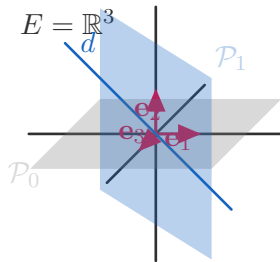
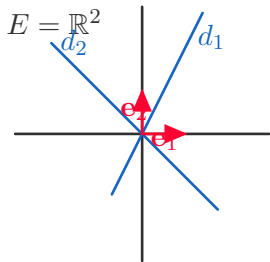
En tant que sous-espace vectoriel, les hyperplans doivent donc nécessairement contenir le vecteur nul, *i.e.* le vecteur  $0_E$ .

On peut montrer que les hyperplans sont les noyaux d'une forme linéaire. Qu'est-ce qu'une forme linéaire et ... pourquoi selon vous ? On peut commencer à répondre à cette question mais on pourra conclure un peu plus tard.



# Exemple

L'exemple le plus simple de sous-espace vectoriel que l'on puisse imaginer est **une droite dans un plan**. En effet, un plan est un espace de dimension 2 et la droite est un espace de dimension 1. Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont des sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ .



Même chose avec les plans dans  $E = \mathbb{R}^3$ , les plans  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont des hyperplans de  $\mathbb{R}^3$ ; en revanche la droite  $d$  n'est pas un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ .

# Retour sur les familles de vecteurs

On se rappelle qu'un espace vectoriel est engendré par une famille de vecteurs. On peut définir une caractéristique de cette dernière qui permet de faire le lien entre l'espace engendré par la famille de vecteurs et la dimension de l'espace engendré par cette même famille.

## Définition 2.13: Rang d'une famille

Soit un espace vectoriel et  $\mathcal{F} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle *rang* de la famille  $\mathcal{F}$ , noté  $\text{rang}(\mathcal{F})$  ou encore  $\text{rg}(\mathcal{F})$ , la dimension de l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{F}$ , i.e.

$$\text{rg}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \dim(\text{Vect}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)).$$

# Rang d'une famille de vecteurs

Cette notion de rang est fondamentale et reviendra lorsque nous reviendrons sur les applications linéaires et leurs représentations avec le théorème du rang mais aussi lorsque nous introduirons les matrices dans la prochaine section.

## Proposition 2.12: Propriétés rang d'une famille

Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ , alors :

- $rg(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \leq n$ ,
- $rg(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = n$  si et seulement si  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  est libre.

# Applications linéaires I

On considère un espace vectoriel  $E$  de dimension finie qui admet une base  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ,  $F$  un autre espace vectoriel et considérons  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire.

Soit  $\mathbf{x}$  un élément de  $E$  alors  $\mathbf{x}$  peut s'écrire de façon unique

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

Si on applique la fonction  $f$  au vecteur  $\mathbf{x}$ , on a

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\mathbf{x}_k).$$

L'application linéaire est donc entièrement déterminée par les images  $(f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_n))$  des vecteurs de bases  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  de  $E$ .

# Applications linéaires II

Réciproquement, pour  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  une famille de vecteurs de  $F$ , on définit l'application  $f$  de  $E$  dans  $F$  par :  $\forall \mathbf{x} \in E$  tel que  $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k$ ,  $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{y}_k$ .

On a alors,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ . De plus  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Ainsi, on peut définir une application linéaire  $f$  en fixant les images  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  des vecteurs de la base  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  de  $E$ .

# Applications linéaires III

On peut résumer tout cela par la proposition suivante :

## Proposition 2.13: Application et image d'une base

Soit  $E$  un espace vectoriel qui admet une base  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  et soit  $F$  un espace vectoriel.

Alors  $\forall (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \in F^n, \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ .

# Applications linéaires IV

On peut résumer cette proposition de la façon suivante :

- étant donnée une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , il suffit de connaître l'image des vecteurs de bases de  $E$  par cette application pour la déterminer entièrement.
- ou encore, si l'on connaît  $n$  vecteurs de  $F$ , il est possible de construire une (unique) application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ .

Après avoir vu comment construire une telle application, on va voir que l'on est aussi capable de caractériser les propriétés des morphismes en fonction de l'image des vecteurs de bases.

# Caractérisation des applications linéaires

## Proposition 2.14: Caractérisation morphisme et famille

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  muni d'une base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Soit  $E'$  un espace vectoriel de soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E'$ , alors :

- i)  $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n))$  est une famille libre de  $E'$ .
- ii)  $f$  est surjective si et seulement si  $(f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n))$  est une famille génératrice de  $E'$ .
- iii)  $f$  est bijective si et seulement si  $(f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n))$  est une base de  $E'$ .



# Retour à la notion de rang

Revenons maintenant à la dimension de rang. Nous avons précédemment introduit la notion de rang d'une famille de vecteurs. On va voir qu'il est également possible de définir le rang d'une application linéaire en regardant le rang de l'image des vecteurs d'une base de  $E$  par cette application linéaire.

## Définition 2.14: Rang application linéaire

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, et  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ . On appelle *rang de  $f$* , noté  $\text{rang}(f)$  ou  $\text{rg}(f)$ , la dimension de l'espace  $\text{Im}(f)$ .

# Théorème du rang

Nous pouvons même relier le rang d'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, E')$  à la dimension de l'espace de départ  $E$  et la dimension du noyau, c'est ce nous donne le **théorème du rang**.

## Théorème 2.3: Théorème du rang

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ , alors  $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$ .

# Quelques remarques

- Sa démonstration est relativement compliquée (technique) on ne va donc pas la présenter
- C'est un outils très puissant pour déterminer rapidement la dimension du noyau (resp. de l'espace image) lorsque l'on connaît la dimension de l'espace de départ ou de l'image d'une application linéaire (resp. de son noyau).
- Surtout ... on va pouvoir donner une caractérisation super simple des endomorphismes.

# Retour sur les Hyperplans

## Définition 2.15: Hyperplan

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ . On appelle *hyperplan* de  $E$  tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

En tant que sous-espace vectoriel, les hyperplans doivent donc nécessairement contenir le vecteur nul, *i.e.* le vecteur  $0_E$ .

On peut montrer que les hyperplans sont les noyaux d'une forme linéaire. Qu'est-ce qu'une forme linéaire et ... pourquoi selon vous ? On peut y répondre maintenant !

# Caractérisation morphismes

## Proposition 2.15: Morphismes et dimension

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels de dimensions finies tels que  $\dim(E) = \dim(E')$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ , il y a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- i)  $f$  est injective
- ii)  $f$  est surjective
- iii)  $f$  est bijective

Preuve : Ce résultat découle immédiatement du théorème du rang.

Ce résultat se révèle cependant très utile lorsque l'on cherche à montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de même dimension réalise un isomorphisme. En effet, il suffira simplement de montrer qu'elle est injective **ou** surjective.

# Pour finir

On a vu quelques résultats théoriques sur les espaces vectoriels de dimension finie pour finir sur l'étude des applications linéaires dans de tels espaces.

L'étude des familles de vecteurs a été point clef de cette section mais son utilité est restée très abstraite.

Dans la prochaine section, nous allons voir comment les propriétés de ces familles de vecteurs avec des objets plus pratiques : les **matrices**.

# Algèbre Linéaire

Matrices et calcul matriciel

# Définition

## Définition 2.16: Matrice

On appelle *matrice* à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , toute application de  $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\mathbb{K}$ .

Une telle matrice, notée  $A$ , se note alors

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est également appelée matrice de type  $(n, p)$  pour dire qu'elle comporte  $n$  lignes et  $p$  colonnes.



# Matrice carrée

## Définition 2.17: Matrices carrées

On appelle **matrice carrée** toute matrice de type  $(n, n)$ . Ce type de matrice est dit matrice d'ordre  $n$ .

Une matrice carrée  $A$  est dite **diagonale** si tous les éléments si pour tout  $i \neq j$ ,  $a_{ij} = 0$ .

Une matrice carrée  $A$  est dite **triangulaire supérieure** (respectivement **triangulaire inférieure**) si pour tout  $i > j$  (respectivement pour tout  $i < j$ )  $a_{ij} = 0$ .

Le plus souvent, nous serons amenés à étudier des matrices carrées lorsque nous ferons dans la décomposition en valeurs propres, mais ce n'est pas toujours le cas en réalité comme nous le verrons dans la partie *Analyse de Données*.

## Exemple

Les matrices  $A, B, C$  et  $D$  suivantes sont respectivement des matrices carrées de type  $(3, 3)$  quelconque, diagonale, triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} e & 3 & \ln(2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & \gamma & 0.12 \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonale ne comportant que des 1 est appelée **matrice identité**, elle est notée  $I_n$ .

# Structure de l'espace des matrices I

La définition suivante montre que l'espace des matrices a une structure bien particulière que l'on a déjà rencontré.

## Définition 2.18: Structure de l'espace des matrices

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de type  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est quant à lui noté  $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ .

On en déduit même que l'ensemble des matrices d'ordre  $(n, p)$  muni de la multiplication externe et d'une loi additive interne à une structure d'espace vectoriel.

Cet espace est de dimension  $(n \times p)$ .

# Structure de l'espace des matrices II

## Quelques remarques anecdotiques

On peut même montrer que l'ensemble des matrices a donc une structure de **groupe abélien** pour la loi additive " $+$ " (conséquence du fait d'être un espace vectoriel).

En revanche, il n'y pas de structure de groupe pour la multiplication matricielle ! Pourquoi ?

On peut en revanche montrer que l'ensemble des matrices à une structure d'**anneau unitaire** (ou **unifère**) mais non **intègre**.

- **unifère** : possède un seul et unique élément neutre pour la multiplication matricielle
- **non intègre** : possède des diviseurs de 0, *i.e.* il existe des matrices  $A$  et  $B$  non nulles telles que  $AB = 0$ .

# Propriétés du produit matriciel

## Proposition 2.16: Propriétés

- Le produit matriciel est associatif, *i.e.* pour toute matrice  $A, B$  et  $C$  telles que  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , alors

$$(AB)C = A(BC).$$

- En général, le produit matriciel n'est pas commutatif, *i.e.* si on considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a souvent

$$AB \neq BA$$

On prendra garde à la dimension des matrices lors de la multiplication, il faut vérifier que dimensions concordent !!!

# Transposition

## Définition 2.19: Transposition d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on appelle **transposée de la matrice  $A$** , notée  $A^T$ , la matrice  $A'$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  définie pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$  par  $a'_{ij} = a_{ji}$  :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{alors } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

## Proposition 2.17: Propriétés transposition

Soient  $A, B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $C$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  un scalaire, alors :

- i)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ,
- ii)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,
- iii)  $(AC)^T = C^T A^T$ .

# Matrices symétriques

## Définition 2.20: Matrices symétriques et anti-symétriques

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors :

- i)  $A$  est dite symétrique si  $A^T = A$ ,
- ii)  $A$  est dite anti-symétrique si  $A^T = -A$

En général on note  $S_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $n$  sur le corps  $K$  et  $A_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices anti-symétriques d'ordre  $n$  sur le corps  $\mathbb{K}$ . On pourra même montrer que ces deux ensembles forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , i.e. toute matrice carrée peut s'écrire comme la somme unique d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Quelle est la dimension de ces deux sous-espaces ?

# Exemples

Les matrices  $S$  et  $A$  suivantes sont respectivement des matrices symétriques et anti-symétriques d'ordre 4.

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d \\ b & 0 & -f & -g \\ c & f & 0 & -i \\ d & g & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Quid de la matrice nulle à votre avis (celle ne comportant que des 0) ?  
Noter que le fait d'être anti-symétrique impose nécessairement que la diagonale de la matrice soit nulle.



# Représentation des applications linéaires

Après ces quelques rappels sur les matrices, nous allons maintenant pouvoir faire le lien entre les applications linéaires présentées aux sections précédentes et leur représentation matricielle.

Pour cela, nous allons considérer deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  tout deux de dimension finie  $p$  et  $n$  respectivement. Les espaces  $E$  et  $F$  seront également munis des bases  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  et  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  respectivement. Enfin on désignera par  $u$  (non plus  $f$  comme dans les sections précédentes pour éviter les confusions) une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

Nous avons précédemment que  $u$  est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de la base de  $E$  dans la base de  $F$

# Représentation matricielle

## Définition 2.21: Représentation matricielle

Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $(a_{ij})_{i=1}^n$  les coordonnées de  $u(\mathbf{e}_j)$  dans la base de  $F$ , on a donc :

$$u(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{f}_i.$$

La matrice  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,p}$  obtenue est alors appelée **matrice de  $u$**  relativement aux bases de  $E$  et  $F$ . On la note en générale  $A = \underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{Mat}(u)$  ou encore  $Mat(u)$

lorsque le contexte n'est pas ambiguë.

On peut représenter cette matrice de la façon suivante :

$$\underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{Mat}(u) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{e}_1) & \cdots & u(\mathbf{e}_p) \\ a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi la  $j$ -ème colonne représente l'image du vecteur  $\mathbf{e}_j$  par  $u$  dans la base de  $F$ .

# Interprétation

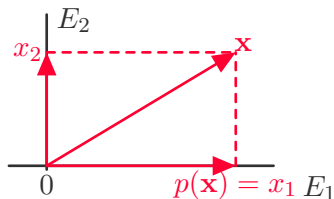
Derrière cette définition, il faut simplement comprendre que derrière chaque matrice se cache une application linéaire.

Regardons maintenant les matrices carrées de plus près, *i.e.* les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , *i.e.* les endomorphismes.

Nous avons vu que certains endomorphismes sont inversibles. Cette inversibilité peut également se caractériser d'un point de vue matriciel, *i.e.* elle implique une certaine propriété sur la matrice.

# Exemple I

Soit la projection  $p$  qui consiste à conserver uniquement la première composante de ce vecteur, *i.e.*  $p(x_1, x_2) = x_1$ .



Cette projection peut être représentée par la matrice  $P$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exemple II

Considérons l'application linéaire  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$ , munis de leur base canonique, définie par

$$f(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 3x_3).$$

Pour déterminer sa représentation matricielle, on calcule l'image des vecteurs de base par l'application  $u$

$$u(\mathbf{e}_1) = (2, 0, 1),$$

$$u(\mathbf{e}_2) = (0, 1, -1),$$

$$u(\mathbf{e}_3) = (1, -1, 3).$$

Ainsi la matrice de l'application linéaire  $u$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

# Inverse d'une matrice

## Proposition 2.18: Matrice et inverse d'une application linéaire

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  muni d'une base et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Notons  $A$  la représentation matricielle de  $u$ , alors  $u$  est inversible si et seulement si la matrice  $A$  associée est inversible.

De plus, si  $u$  est inversible on note  $A^{-1} = \text{Mat}(u^{-1})$  la matrice inverse de  $A$ .

On conserve également les mêmes propriétés que pour les endomorphismes inversibles de  $E$ .

On rappellera par la suite comment calculer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre  $n$ .

# Retour famille de vecteurs

La représentation matricielle ne sert pas uniquement à représenter des applications linéaires, elle peut aussi être utilisée pour représenter une famille de vecteurs dans une base.

C'est d'ailleurs cette vision là que nous adoptons lorsque l'on souhaite représenter nos données sous forme de tableaux.

# Lien entre base et inversibilité

## Proposition 2.19: Base et inversibilité

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  muni d'une base  $\mathcal{B}_E$  et considérons une famille de vecteurs  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  de  $E$ , alors cette famille est une base de  $E$  si et seulement si la matrice associée à cette famille est inversible.

Ce résultat est important pour introduire la notion de changement de bases. En effet il est possible que l'on ne souhaite pas forcément travailler avec la base canonique, ce qui est très souvent le cas en analyse de données où l'on préfère regarder les données "sous un autre angle". Il faut alors voir comment faire pour passer d'une base à une autre.



# Lien entre base et inversibilité

## Définition 2.22: Changement de bases

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ , et soient  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}'$  ou de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$**  la matrice  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  définie par :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}} (\mathcal{B}') = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}} (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n).$$

Pour dire les choses plus simplement, les colonnes de la matrice de changement de bases de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  sont formées par les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## Exemple

On va considérer l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^2$  muni de deux bases différentes :

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = ((1, 1), (-1, 1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = ((1, 0), (3, 1))$$

Pour déterminer la matrice de changement de base, il faut alors exprimer les vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

On montre alors que la matrice de changement de base est définie par :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \\ 0.5 & 2 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}.$$

Pour  $\mathbf{e}'_2$  on a bien  $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ . On peut ici trouver les coefficients de tête, mais nous verrons plus tard comment faire cela en résolvant ce que l'on appelle des *systèmes linéaires*.

# Changement de base pour un vecteur

## Proposition 2.20: Changement de base pour un vecteur

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  deux bases de  $E$ , et soit  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ .

Considérons un vecteur  $\mathbf{x} \in E$ , on peut alors écrire

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x'_k \mathbf{e}'_k.$$

Notons alors  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}'} = (x'_1, \dots, x'_n)$ , alors

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = P \mathbf{x}_{\mathcal{B}'}.$$

# Illustration I

Considérons deux bases  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension 2 et un élément  $\mathbf{x}$  de  $E$  dont les coordonnées sont respectivement notées  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2)$  et  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}'} = (x'_1, x'_2)$  les coordonnées du vecteur  $\mathbf{x}$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

Supposons que l'on a également les relations suivantes entre les vecteurs des deux bases

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

On va maintenant chercher à trouver notre matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ . **Pour cela, on prend l'expression de notre vecteur  $\mathbf{x}$  exprimée dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  et on va chercher ces coordonnées dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$ .**

# Illustration II

$$\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2,$$

↓ définition de  $\mathbf{e}'_1$  et  $\mathbf{e}'_2$

$$x'_1 a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + x'_2 a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2,$$

↓ on factorise

$$(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2)\mathbf{e}_1 + ((a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2)\mathbf{e}_2,$$

↓ définition de  $\mathbf{x}$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$$x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

En étudiant les deux dernières égalités, nous aboutissons aux relations suivantes :

# Illustration III

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2, \\x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons la relation  $x_{\mathcal{B}} = Px_{\mathcal{B}'}$  où  $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

# Changement de base d'une application linéaire

Tout comme il existe une relation permettant le changement de base d'un vecteur, on peut aussi le faire pour une application linéaire. En effet sa représentation est identique à celle d'une famille de vecteurs.

## Proposition 2.21: Changement de base pour une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  de dimensions finies  $p$  et  $n$ . Soient  $\mathcal{B}_E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$  et  $\mathcal{B}'_E = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_p)$  deux bases de  $E$  et soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_E$  dans  $\mathcal{B}'_E$ . De même, soient  $\mathcal{B}_F = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  et  $\mathcal{B}'_F = (\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_n)$  deux bases de  $F$  et soit  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_F$  dans  $\mathcal{B}'_F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et notons  $A = \underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{Mat}(u)$  et  $A' = \underset{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}{Mat}(u)$ . Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

# Preuve pour comprendre

Démonstration : Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  les représentations d'un vecteur de  $E$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  et soient  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$  les représentations d'un vecteur de  $E$  dans les bases  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$ .

$A$  est l'unique matrice vérifiant  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$  pour tout vecteur  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $E \times F$ .

$A'$  est l'unique matrice vérifiant  $A'\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$  pour tout vecteur  $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$  de  $E' \times F'$ .

De plus, nous avons les relations  $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y} = Q\mathbf{y}'$ .

Donc

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff AP\mathbf{x}' = Q\mathbf{y}' \iff Q^{-1}AP\mathbf{x}' = \mathbf{y}',$$

ainsi  $A' = Q^{-1}AP$ .

Pour un endomorphisme, on aura la relation  $A' = P^{-1}AP$ .



## Exemple I

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^2$  dont la matrice associée, notée  $A$ , dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît ici l'endomorphisme  $u$  qui pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  est défini par

$$u(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2, -x_1 + 3x_3).$$

On souhaite maintenant exprimer cet endomorphisme dans la base formé par les vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$  et  $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ . Dans un premier temps, il nous faut déterminer la matrice de passage  $P$  de la base canonique vers la nouvelle base définie par  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ .

## Exemple II

On rappelle que la matrice de passage  $P$  est obtenue en exprimant les vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  en fonction des vecteurs de l'ancienne base  $\mathcal{B}$ , cette représentation se faisant en colonne :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et son inverse  $P^{-1}$  est donnée par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à calculer le produit  $P^{-1}AP$ , ce qui nous donne

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

# Retour sur le rang I

Tout comme nous avons défini le rang d'une application linéaire, on peut également définir le rang d'une matrice.

## Définition 2.23: Rang d'une matrice

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on appelle **rang de**  $A$ , noté  $rg(A)$ , le rang de la famille de vecteurs colonnes de  $A$  qui sont des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ .

# Retour sur le rang II

## Proposition 2.22: Rang et base

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  et soit  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ , alors :

$$rg(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = rg(Mat_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)).$$

De ce résultat on en déduit immédiatement que toute matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  est inversible si seulement son rang est égale à  $n$ . De plus, ce que l'on a vu sur les familles des vecteurs restent valables sur les matrices d'applications linéaires.

# Retour sur le rang III

## Proposition 2.23: Rang matrice d'une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  de dimensions finies  $p$  et  $n$  munis de bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  dont  $A = \underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{Mat}(u)$  est la représentation matricielle.

Alors  $rg(u) = rg(A)$ .

## Proposition 2.24: Propriété du rang

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , alors  $rg(A^T) = rg(A)$ . Le rang d'une matrice est donc invariant par transposition.

# Retour sur déterminant I

Une définition à ne pas retenir

## Définition 2.24: Déterminant

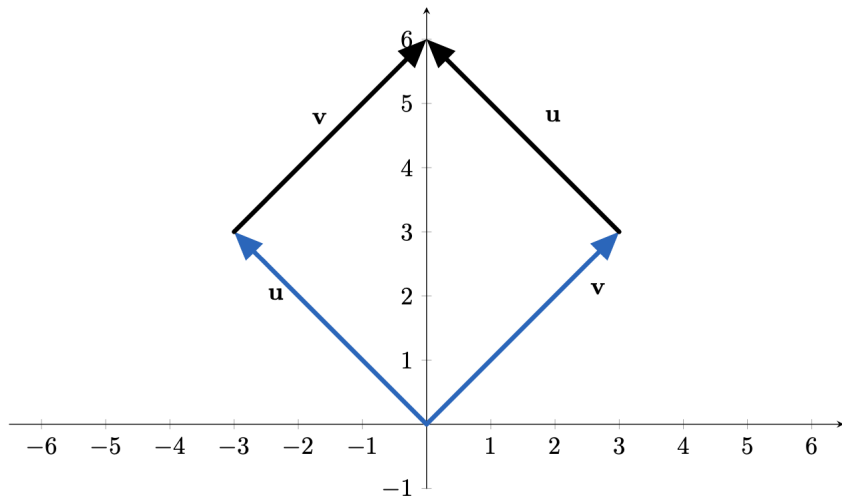
Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les éléments sont notés  $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ . Soit  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , c'est-à-dire l'ensemble des bijections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (comme une transposition qui échange de place deux éléments  $i$  et  $j$ ).

On définit le **déterminant** de la matrice  $A$  par la relation

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i},$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  est appelé **signature de la permutation** et qui vaut  $\pm 1$ .

# Retour sur déterminant II



## Retour sur déterminant III

Dans ce premier exemple la famille de vecteurs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est définie par  $\mathbf{u} = (-3, 3)$  et  $\mathbf{v} = (3, 3)$  ce qui génère un carré avec une surface de 18. Nous aurions donc :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

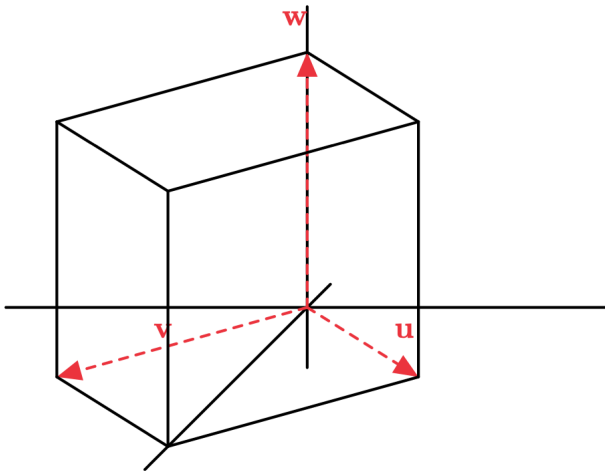
Considérons maintenant les vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  qui sont définis par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet de générer le parallélépipède suivant dans un espace de dimension 3, dont le volume qui n'est rien d'autre que le déterminant de la familles des 3 vecteurs, est égal à  $18\sqrt{18} = 54\sqrt{2}$ .



# Retour sur déterminant IV



# Retour sur déterminant V

En effet :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{18} \end{vmatrix} = 18\sqrt{18}.$$

Nous verrons un peu plus loin comment calculer les déterminants de telles familles de vecteurs. Mais avant cela, regardons quelques propriétés du déterminant.

# Retour sur déterminant VI

## Proposition 2.25: Caractérisation automorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $u$  est un automorphisme, *i.e.* un endomorphisme bijectif si et seulement si  $\det(u) \neq 0$ .

## Proposition 2.26: Inversibilité d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

**Remarque.** Le déterminant n'a de sens que pour les matrices carrées *i.e.* pour les endomorphismes d'espaces vectoriels.

# Retour sur déterminant VII

## Proposition 2.27: Propriétés du déterminant

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors

$$\det(A^T) = \det(A) \quad \text{et} \quad \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Si de plus  $A$  est inversible, i.e. si son déterminant est non nul alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

En revanche il n'y a pas de propriétés particulières concernant le déterminant de la somme de deux matrices ! En général

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

# Inverse d'une matrice I

Il nous reste à définir ce que l'on appelle la comatrice afin de pouvoir fournir une expression de l'inverse d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## Définition 2.25: Mineure et Cofacteur

Soit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors pour tout couple  $(i, j)$

- on appelle **mineur de A relatif à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne**, notée  $\Delta_{ij}$ , le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ ,
- on appelle **cofacteur de A**, notée  $A_{ij}$ , le scalaire défini par  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ .

# Inverse d'une matrice II

## Proposition 2.28: Déterminant et mineurs

Soit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors pour tout  $1 \leq j \leq n$ ,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$ .

# Inverse d'une matrice III

Quelques explications sur cette notion cofacteurs et de déterminant.  
Regardons cette matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Définition 2.26: Comatrice

Soit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle **comatrice de  $A$** , notée  $Com(A)$ , la matrices des cofacteurs de  $A$ , c'est-à-dire  $Com(A) = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ .

# Inverse d'une matrice IV

Un cofacteur  $A_{ij}$  est défini comme la déterminant de la matrice  $A$  à laquelle on aura supprimé la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne.

On verra des exemples concrets à la fin de cette section.

## Proposition 2.29: Inverse d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et supposons que  $A$  est inversible, alors  $Com(A)^T A = A^T Com(A) = \det(A)I_n$ .

On peut également réécrire le résultat de cette proposition comme suit : si  $A$  est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^T.$$

$Com(A)$  est appelée matrice des cofacteurs

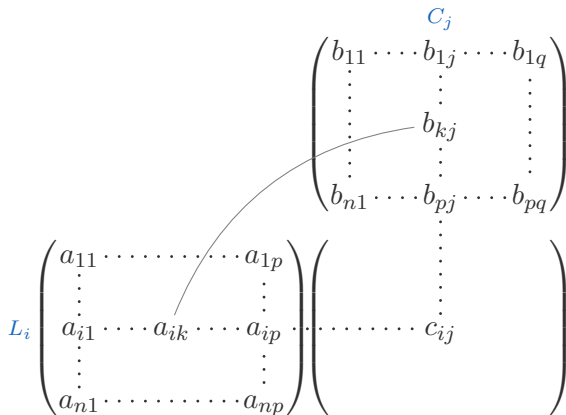


# Quelques calculs explicites I

C'est le moment de mettre un peu de concret sur ce qui é été développé tout au long de cette section. Nous allons voir comment déterminer le rang, calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice en appliquant les définitions, mais aussi en en utilisant quelques petites "*astuces*" pratiques. Avant de faire cela, on rappelle rapidement comment effectuer un produit matriciel.

### Schéma illustrant le calcul matriciel

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$



## Quelques calculs explicites III

Soient  $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors le produit de la matrice  $A$  avec le vecteur  $\mathbf{x}$  (qui revient donc à calculer l'image du vecteur  $\mathbf{x}$  par l'application linéaire associée à la matrice  $A$ ) est

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 4 \times 2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

# Quelques calculs explicites IV

Alors le produit  $C = AB$  est

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 0 - 1 \times 4 + 0 \times 0 + 4 \times 1 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Matrice échelonnée (réduite) I

## Définition 2.27: Matrice échelonnée

Une matrice est dite **échelonnée** en lignes si son nombre de zéros précédant la première valeur non d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à l'éventuelle obtention de lignes ne comportant que des zéros.

## Définition 2.28: Matrice échelonnée réduite

Une matrice échelonnée est dite **réduite** si elle est échelonnée et si les premières non nulles de chaque ligne sont égales à 1. De telles valeurs sont appelées des **pivots**.

# Matrice échelonnée (réduite) II

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  suivantes sont respectivement échelonnée, échelonnée réduite et non échelonnée.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Calcul rang I

Pour déterminer le rang d'une matrice, il n'y a rien de plus simple. Il suffit d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (ou sur les colonnes) afin d'obtenir une matrice échelonnée ou échelonnée réduite. Le rang de la matrice est alors directement égal au nombre de lignes non nulles de la matrice.

Reprenons les matrices de l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit directement que les matrices  $A$  et  $B$  sont de rang 3 et 4.

# Calcul rang II

Le rang est cependant moins évident en ce qui concerne la matrice  $C$ , on va donc effectuer des opérations élémentaires sur les lignes pour déterminer son rang.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

↓ On va se servir de la valeur 2 en

↓ position  $(1, 1)$  pour annuler les autres lignes

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & -10 & 13 & -18 \\ 0 & -21 & 10 & -19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}$$



# Calcul rang III

↓ on se sert ensuite du  $-7$  en position  $(2, 2)$  pour

↓ faire apparaître des 0 dans les deux dernières lignes

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 51 & -96 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{pmatrix},$$

où  $L_3 \leftarrow 7L_3 - 10L_2$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$ .

On peut remarquer que les deux dernières lignes sont indépendantes, la matrice  $C$  est donc de rang 4.

Cet exemple montre bien l'intérêt d'utiliser des matrices échelonnées réduites qui permettent de grandement simplifier les calculs.

# Calcul rang IV

Les calculs que nous avons effectué sur les lignes de la matrice peuvent également être effectués sur les colonnes de cette dernière !

C'est d'ailleurs le plus naturel ! En effet, on se rappelle que les colonnes d'une matrice d'un endomorphisme représente l'image des vecteurs de base par cet endomorphisme.

Ainsi, pour étudier l'espace image d'un endomorphisme  $u$ , noté  $Im(u)$ , on va alors regarder **le sous-espace engendré** par les colonnes de  $Mat(u)$ .

On verra un petit peu plus loin une petite "technique" qui permet aussi de calculer directement **une base de l'image et du noyau d'un endomorphisme  $u$  simultanément**.

# Calcul déterminant I

Le calcul du déterminant est en général très complexe sauf pour des matrices très particulières. En revanche, ce calcul est très simple dans des espaces à faibles dimensions, comme en dimension 2 et 3 où des formules nous permettent de calculer très facilement le déterminant.

- **En dimension 2** : le déterminant d'une matrice  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$  est donné par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

# Calcul déterminant II

- **En dimension 3** : le déterminant d'une matrice  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$  est donné par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Cette règle s'appelle la *règle de Sarrus*.

Elle consiste à faire la *somme du produit des éléments diagonaux moins la somme du produit des éléments anti-diagonaux*.

# Calcul déterminant III

- **Matrice diagonale** : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale, i.e.  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i \neq j$ , alors  $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .  
On peut aussi le voir comme :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

De ce résultat, on voit tout de suite qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit inversible est que ses éléments diagonaux soient non nuls.

# Calcul déterminant IV

- **Matrice triangulaire** soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire supérieure (le résultat reste identique dans le cas des matrices triangulaires supérieures), i.e.  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i > j$ , alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

On peut aussi le voir comme :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

A nouveau, une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont non nuls.

# Calcul déterminant V

On se propose de calculer le déterminant de la matrice  $A$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

à l'aide de transformation sur les colonnes et en développant sur les colonnes (ou les lignes). Nous avons donc

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

↓ le déterminant reste inchangé par combinaison linéaires de lignes

# Calcul déterminant VI

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix},$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

↓ on développe selon la première colonne

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

↓ on développe selon la deuxième ligne

$$= 3 \times (-2) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix},$$

↓ on développe le déterminant de taille 2

$$= 3 \times (-2) \times (5 \times (-3) - 1 \times 2) = 102.$$



# Calcul de l'inverse d'une matrice I

Une fois que l'on a calculé le déterminant, il reste à déterminer l'expression de la comatrice, i.e. la matrice des cofacteurs.

On rappelle que  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T$ .

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  inversible nous avons directement :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Pour les matrices carrées de taille 2, la transposée de la matrice des cofacteurs consiste simplement à échanger de place les éléments diagonaux et à changer le signe des éléments anti-diagonaux.

# Calcul de l'inverse d'une matrice II

Reprenons notre matrice  $A$  précédente.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme nous avons déjà calculé son déterminant ( $\det(A) = 102$ ), il nous reste simplement à déterminer la matrice des cofacteurs  $A_{ij}$ . Une fois cette matrice obtenue, il ne faudra pas oublier de la transposer afin de déterminer l'inverse de la matrice  $A$ . On se contentera de calculer les valeurs de la première ligne de la comatrice.

# Calcul de l'inverse d'une matrice III

- $A_{11} = (-1)^2 \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 10.$

On aura développer selon la deuxième ligne pour calculer le déterminant de notre matrice carrée de taille 3.

- $A_{12} = (-1)^3 \Delta_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

C'est immédiat car notre matrice comprend une ligne avec des zéros uniquement, son déterminant est donc nul.

- $A_{13} = (-1)^4 \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6.$

On aura développer selon la première ligne pour obtenir notre nouveau déterminant de taille 2.

## Calcul de l'inverse d'une matrice IV

- $A_{14} = (-1)^5 \Delta_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -5 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 30.$

On aura développé selon la première ligne à nouveau.

En calculant tous les coefficients, on montre alors que la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$Com(A) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -6 & 30 \\ -4 & 0 & 18 & 12 \\ -127 & 51 & -15 & 75 \\ 44 & 0 & 6 & -30 \end{pmatrix}.$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice $V$

Il nous restera alors à appliquer la définition

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T,$$

où  $\det(A)$  a été précédemment calculé.

Il faut bien admettre que de passer ainsi par cette définition est loin d'être pratique car elle implique de calculer un nombre important de déterminants ...

On va regarder comment calculer l'inverse d'une matrice de façon beaucoup plus simple en effectuant des opérations sur une matrice **étendue** !

# Calcul de l'inverse d'une matrice VI

Il existe aussi une méthode plus pratique pour calculer l'inverse d'une matrice qui repose sur le fait que *les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes sont des automorphismes, ils ne changent donc pas le caractère inversible d'une matrice donnée.*

On peut se servir de cela pour trouver une suite d'opérations élémentaires qui va permettre de transformer une matrice  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  inversible en la matrice identité. Si on applique, en parallèle, les mêmes transformations à la matrice identité, on sera mesure de déterminer la matrice inverse de la matrice  $A$ .

Deux choix s'offrent à nous en terme d'écriture, mais ce choix va conditionner le travail à effectuer et inversement :

# Calcul de l'inverse d'une matrice VII

- si on souhaite effectuer des opérations élémentaires sur **les lignes de la matrice de  $A$** , on travaillera sur la *matrice étendue* suivante

$$(A \mid I_n) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right),$$

afin d'aboutir, via **une succession de manipulations sur les lignes** à une matrice étendue de la forme

$$(I_n \mid A') = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{array} \right),$$

où  $A' = A^{-1}$  désigne l'inverse de la matrice  $A$ .

# Calcul de l'inverse d'une matrice VIII

- si on souhaite effectuer des opérations élémentaires sur **les colonnes de la matrice de  $A$** , on travaillera sur la *matrice étendue* suivante

$$\left( \frac{A}{I_n} \right) = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}.$$

afin d'aboutir, via **une succession de manipulations sur les colonnes** à une matrice étendue de la forme



# Calcul de l'inverse d'une matrice IX

$$\left( \frac{I_n}{A'} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{array} \right),$$

où  $A' = A^{-1}$  désigne l'inverse de la matrice  $A$ .

On va à nouveau regarder cela sur un exemple pour illustrer la méthode.

# Calcul de l'inverse d'une matrice $X$

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice que l'on admettra inversible (vous pourrez calculer son déterminant afin de vous en convaincre), définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est triangulaire supérieure dans cet exemple, on se propose de déterminer son inverse en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes. On considère la matrice étendue suivante :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice XI

On commence par se servir de la valeur 1 en bas à droite de notre matrice à inverser.

On oubliera pas de répercuter les mêmes transformations sur la matrice identité !

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3. \end{array}$$

On va ensuite faire apparaître la valeur 1 dans la deuxième ligne et deuxième colonne. On garde à l'esprit que l'on doit faire apparaître la matrice identité à gauche et on itère ce même type d'opérations.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 / 3,$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice XII

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \end{array},$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/5 \\ \\ \end{array}.$$

On a donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/15 & 4/15 \\ 0 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Bonus : obtention bases noyau et image I

Nous avons vu précédemment que l'on pouvait déterminer une base du noyau de l'image d'une application linéaire  $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$  par les méthodes suivantes :

- **Noyau** : on cherche les vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  qui vérifient  $u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , ce qui nous amène à résoudre un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues (objet de la prochaine section !)
- **Image** : on a vu que l'image d'une application linéaire  $u$  est l'espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice de représentation de  $u$ . Pour déterminer une base de  $Im(u) \subset \mathbb{R}^p$ , on va donc chercher une sous famille des  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  qui soit libre et engendre l'espace  $Im(u)$ , i.e. la plus grande sous-famille libre des vecteurs colonnes de  $Mat(u)$ .

## Bonus : obtention bases noyau et image II

Cela mène souvent à faire le travail en deux étapes ce qui peut se révéler fastidieux, mais on va voir que l'on peut tout faire d'un coup, sans résoudre de système et en considérant à nouveau une matrice étendue !

En revanche, **cela nécessitera de travailler obligatoire sur les colonnes de la matrice  $u$  ! Vu que ce sont ces dernières qui engendrent  $Im(u)$ .**

Regardons un exemple pour illustrer le principe et considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que cette matrice n'est pas inversible (calculer son déterminant par exemple), que son noyau est de dimension 1 et que son

## Bonus : obtention bases noyau et image III

rang (dimension de l'espace image) est dimension 2 (conséquence du théorème du rang).

On considère la matrice étendue

$$\left( \frac{A}{I_3} \right) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

On va ensuite effectuer une succession d'opérations sur les colonnes, pour savoir si certaines colonnes la matrice supérieure peuvent s'annuler ou non.

# Bonus : obtention bases noyau et image IV

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2 \leftarrow \tilde{C}_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow \tilde{C}_3 - 5C_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \\ \hline 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \leftarrow \tilde{C}_3 - 2C_2}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \color{red}{0} \\ 2 & -2 & \color{red}{0} \\ 3 & -2 & \color{red}{0} \\ \hline 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et on remarque que les deux premières colonnes de la matrice supérieure sont indépendantes, on va donc s'arrêter là.

In fine, on obtient la matrice étendue suivante



## Bonus : obtention bases noyau et image $V$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

qui nous permet de lire directement une base du noyau et une base de l'image de l'application linéaire étudiée.

# Bonus : obtention bases noyau et image VI

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- **Rouge** : on lit les vecteurs de la base du **noyau** de l'application linéaire, ici  $\text{Vect}(1, -2, 1)$
- **Bleu** : on lit les vecteurs de la base de l'**image** de l'application linéaire, ici  $\text{Vect}((1, 2, 3), (0, -2, -2)) = \text{Vect}((1, 2, 3), (3, 4, 7))$

D'ailleurs, les vecteurs de la base de l'image vérifie l'équation définie par le vecteur de la base du noyau  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$  (on étudie ici le noyau d'une forme linéaire!).

## Bonus : obtention bases noyau et image VII

Dans l'exemple, nous avons étudié un **endomorphisme** donc une matrice **carrée**, mais la méthode reste valable pour des matrice rectangulaires, *i.e.* pour n'importe quelle application linéaire  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  il suffira de considérer la matrice étendue

$$\left( \frac{A}{I_n} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

# Pour finir

Dans cette section nous avons

- fait des rappels élémentaires les matrices que ce soit par la définition de matrices particulières, leurs structures ou encore les opérations sur les matrices
- introduit la notion de changement de base pour un vecteur ou une famille de vecteurs (important en analyse de données !)
- comment calculer quelques caractéristiques simples d'une matrice

Le contexte matriciel, a permis de s'affranchir dans certains cas de la résolution d'un *système linéaire* bien que cette dernière soit toujours présente de façon implicite.

La prochaine section a pour but de revenir sur les méthodes résolutions de ces systèmes linéaires et complétera les rappels des notions vues l'année passée.

# Algèbre Linéaire

## Systèmes linéaires

# Système linéaire

## Définition 2.29: Système linéaire

On appelle *système d'équations linéaires* de  $n$  équations à  $p$  inconnues tout système  $S$  de la forme

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

où

- les scalaires  $x_1, \dots, x_p$  sont les inconnues du système d'équations,
- les coefficients  $(a_{ij})_{i,j=1}^{n,p}$  sont les coefficients du système,
- le vecteur  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  est le second membre du système.

# Lien avec les matrices I

Si l'on note  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice associée aux coefficients  $a_{ij}$ ,  $\mathbf{x}$  le vecteur des inconnues  $x_j$  et  $\mathbf{b}$  le vecteur des scalaires qui constituent le second membre de notre système, nous pouvons réécrire  $S$  sous la forme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tout comme on a introduit la notion de rang pour une matrice, on peut aussi parler de rang pour un système d'équations linéaires. Ainsi, le rang de la matrice  $A$  est égal au rang du système  $S$ .

## Lien avec les matrices II

Dans le cas où le second membre est nul ( $=\mathbf{0}$ ), le système  $S$  est dit homogène et s'écrit

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Si le second membre n'est pas nul ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ), le système  $S_0$  défini par  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  est appelé système homogène associé à  $S$ . On va voir qu'étudier un tel système va permettre de définir l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.



# Interprétation I

On se rappelle qu'à toute matrice  $A$  est associée une application linéaire, disons  $u$ . Ainsi le système  $S$  peut aussi s'écrire sous la forme  $u(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  et le système d'équation homogène associé  $S_0$  s'écrira  $u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

Cela permet de faire un premier lien avec l'algèbre linéaire et les solutions d'un système homogène :

Les solutions d'un système homogène  $S_0$  sont exactement les éléments de  $Ker(u)$ .

# Interprétation II

De plus, la nouvelle écriture du système  $S$  nous indique que ce dernier admet une solution si et seulement si  $\mathbf{b} \in \text{Im}(u)$ . Si tel est le cas, notons  $\mathbf{x}_0$  une solution *particulière* du système  $S$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) &\iff u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \\ &\iff \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \text{Ker}(u) \iff \exists K \in \text{Ker}(u) \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + K. \end{aligned}$$

On peut donc faire la remarque suivante :

L'ensemble des solutions du système  $S$  est donc  $\{\mathbf{x}_0 + K \mid K \in \text{Ker}(u)\}$ . On peut dire que les solutions de  $S$  sont obtenues en trouvant une solution particulière à laquelle on ajoute une solution du système homogène associée.

# Remarques anecdotiques

Cette observation est également valable dans d'autres contextes en mathématiques :

- lorsque l'on cherche à déterminer les solutions d'une équation séquentielle de la forme

$$av_{n+1} + bv_n + cv_{n-1} = d(n),$$

- ou encore lorsque l'on cherche à déterminer les solutions d'une équation différentielle (ce qui arrive très souvent en physique) :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t).$$

# Dimension espace des solutions I

On va maintenant regarder comment déterminer les solutions d'un système linéaire pour des systèmes dits de *Cramer* et pour des systèmes d'équations linéaires quelconques. Pour de tels systèmes, trois cas se présentent à nous en ce qui concerne l'espace des solutions :

- Le système peut ne pas avoir de solutions (sauf si c'est un système *homogène*, auquel cas le vecteur nul est toujours solution !)
- le système admet une unique solution
- le système admet une infinité de solutions

Sans informations supplémentaire sur la nature du système, il est difficile de savoir si le système admet ou non des solutions.

On peut cependant être plus précis pour les systèmes homogènes d'**équations linéaires indépendantes**. Dans ce cas :

# Dimension espace des solutions II

- le système admet une seule et unique solution s'il y a autant d'inconnues que d'équations
- le système admet une infinité de solutions lorsque le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre d'inconnues.

Cette dernière remarque est très intéressante car elle permet de déterminer si un système d'équations linéaires homogènes admet des solutions ou non uniquement en regardant le *rang de la matrice  $A$  associée au système d'équations linéaires homogènes*.

Il est également possible de caractériser la dimension de l'espace des solutions pour un système linéaire non homogène, c'est le résultat du **Théorème de Rouché-Fontené**.

# Dimension espace des solutions III

## Théorème 2.4: Théorème de Rouché-Fontené

Soit  $S$  un système d'équations linéaires à  $n$  variables, de la forme  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Ce système possède une solution, si et seulement si le rang de la matrice  $A$  est égal à celui de la matrice augmentée  $(A \mid \mathbf{b})$ . Si des solutions existent, elles forment un sous-espace **affine** de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - rg(A)$ .

De plus :

- si  $n = rg(A)$ , alors  $S$  admet une unique solution
- sinon, il existe une infinité de solutions.

# Résolution système de Cramer I

## Définition 2.30: Système de Cramer

On appelle **système de Cramer** tout système de  $n$  équations à  $n$  inconnues de rang  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Un système de Cramer est donc un système  $S$  de la forme  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible. Comme la matrice  $A$  est inversible, on peut définir son inverse  $A^{-1}$  qui vérifie

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Cette relation montre que tout système de Cramer admet une seule et unique solution définie par la relation précédente. De plus, la matrice  $A$  étant inversible, le système homogène associé n'admet pour solution que la solution triviale  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

# Résolution système de Cramer II

Nous avons vu comment déterminer  $A^{-1}$  dans la section traitant des matrices, ce qui nous suffirait pour résoudre un tel système.

Mais il existe un résultat qui permet aussi de donner immédiatement les solutions d'un tel système. Plus précisément :



# Résolution système de Cramer III

## Proposition 2.30: Solutions(s) d'un Système de Cramer

Considérons le système de Cramer  $S$  suivant :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  où  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors l'unique solution de  $S$  est le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  défini par :

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

où  $A_k$  est la matrice  $A$  dans laquelle on a remplacé la  $k$ -ème colonne par le vecteur  $\mathbf{b}$ .

## Exemple d'application I

On considère le système d'équations linéaires suivant que l'on se propose de résoudre.

$$S : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 - 5x_2 = 1 \end{cases}$$

On commence par montrer que ce système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est un système de Cramer donc que la matrice  $A$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

est inversible. Cela se vérifie facilement en calculant le déterminant qui est ici égal à  $-13$ . On peut donc utiliser le résultat de la proposition précédente pour déterminer la solution de ce système.

## Exemple d'application II

$$\begin{aligned}\bullet \quad x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-13} = 1, \\ \bullet \quad x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-13} = 0.\end{aligned}$$

# Résolution système de Cramer triangulaire I

Il s'agit là d'un cas particulier de Système de Cramer où la matrice  $A$  associée est triangulaire (triangulaire supérieure par exemple). Notre système s'écrit alors

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n-1,1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

# Résolution système de Cramer triangulaire II

C'est un système particulier qui peut se résoudre "de bas en haut". En effet, il s'agit d'un système de Cramer, la matrice  $A$  est donc inversible. Or elle est triangulaire supérieure, cela implique que tous éléments diagonaux de la matrice sont non nuls. La résolution donne :

- $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

- $x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)$

⋮

•

- $x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n).$

Ce type de système est donc très simple à résoudre car il suffit d'utiliser les lignes du "bas vers le haut" pour déterminer les différentes valeurs de  $x_i$ .

# Exemple d'application I

Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$S : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 7 \\ -2x_2 + 3x_3 & = & -1 \\ 7x_3 & = & -7 \end{cases}$$

On va donc déterminer  $x_3$  à l'aide de la troisième équation puis  $x_2$  et enfin  $x_1$ , ce qui nous donne :

$$x_3 = -1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(-1 - 3x_3) = -\frac{1}{2}(-1 + 3) = -1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(7 - 3x_2 + x_3) = \frac{1}{2}(7 + 3 - 1) = \frac{9}{2}.$$

# Pivot de Gauss I

Considérons un système d'équations linéaires indépendantes suivant :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases},$$

où  $(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ . D'après la remarque en début de section nous avons vu que :

- si  $p < n$ , alors le système n'admet pas de solutions
- si  $p = n$ , alors le système admet une seule et unique solution
- si  $p > n$ , alors le système admet une infinité de solutions

# Pivot de Gauss II

On va se placer dans le cas où  $p = n$  et on va donc essayer de se ramener à un système triangulaire supérieur à l'aide de la **méthode du pivot de Gauss**. On va donc effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice  $A$  associée au système :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir un tel système triangulaire, on va servir de  $a_{11}$  comme pivot afin d'annuler tous les éléments se trouvant dans la même colonne que  $a_{11}$ , i.e. tous les éléments de la forme  $a_{k1}$ . Concrètement on va effectuer les opérations :



# Pivot de Gauss III

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 \\ \\ \\ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}L_1 \end{matrix}.$$

Notre objectif est faire apparaître des 0 sur tous les éléments de la colonne se trouvant sous le pivot afin de se ramener à une matrice échelonnée.

On va ensuite appliquer ce principe colonne par colonne mais en n'oubliant de descendre d'une ligne à chaque fois. En effet, si nous ne faisons pas cela, nous risquons de refaire apparaître des valeurs non nulles !

# Pivot de Gauss IV

Ensuite, on va donc se servir de la première valeur non nulle, *i.e.*

$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}$ , comme nouveau pivot pour annuler toutes les autres valeurs se trouvant dans la même colonne mais pour des indices de lignes supérieurs à la ligne du pivot. Et on continue ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire, ce qui nous donne :

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} - \gamma \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \gamma = \frac{a_{n2} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}} \left( a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \right).$$

# Pivot de Gauss V

Dans le cas où le système n'est pas homogène, les opérations effectuées sur les lignes doivent aussi s'effectuer sur les lignes du vecteur !

Remarque : on remarque que dans la présentation effectuée de la méthode du pivot de Gauss, on essaie de faire intervenir des matrices échelonnées. Il est parfois d'usage de faire apparaître des matrices échelonnées réduites, *i.e.* la première valeur non nulle d'une ligne donnée est un 1. Cela permet de simplifier les calculs dans certaines situations. Cela donnerait :

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1/a_{11}$$

# Pivot de Gauss VI

↓ on sert maintenant de la valeur 1 comme pivot

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \\ \\ L_n \leftarrow L_n - a_{n1}L_1 \end{array}$$

Et ainsi de suite ... regardons cela sur quelques exemples

# Exemples d'application I

On se propose de résoudre le système  $S$  défini par :

$$S : \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -2 \end{cases}$$

On peut réécrire notre système sous la forme :

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 5 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & -2 \end{array} \right).$$

On peut vérifier qu'il s'agit d'un système d'équations indépendantes de trois équations à trois inconnus, c'est donc bien un système de Cramer. On va appliquer la méthode du pivot de Gauss afin de transformer la matrice  $A$  en une matrice triangulaire supérieure

## Exemples d'application II

$$A \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2.5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 0.5L_1 \end{array}$$

↓ on sert ensuite de la valeur 8 comme pivot

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & -21 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{37}{8} \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{8}L_2$$

Notre système  $S$  est donc équivalent au système

$$S : \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 & = & 8 \\ 8x_2 + 8x_3 & = & -21 \\ 5x_3 & = & \frac{37}{8} \end{cases}$$

## Exemples d'application III

que l'on peut alors résoudre " de bas en haut".  
Ce qui nous donne le triplet solution suivant

$$S : \begin{cases} x_1 &= -\frac{435}{200} \\ x_2 &= -\frac{71}{20} \\ x_3 &= \frac{37}{40} \end{cases}$$

Dans cet exemple l'espace des solutions est un **point** dans un espace de dimension 3.

## Exemples d'application IV

On se propose de résoudre le système  $S$  défini par :

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

On peut facilement voir que les deux équations sont linéairement indépendantes. On va se servir de la valeur 1 comme pivot et on obtient le système équivalent

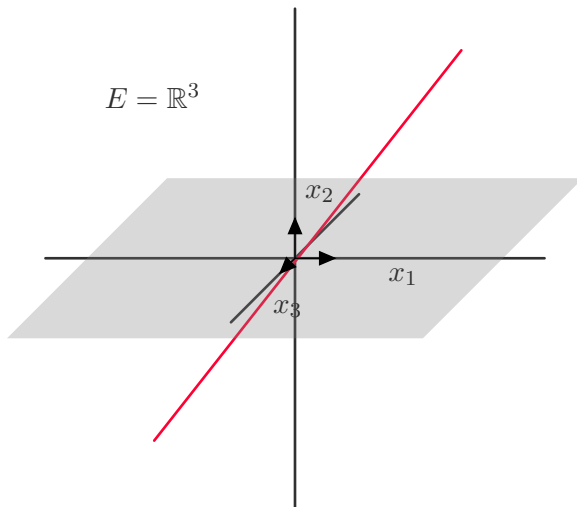
$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ x_2 + 9x_3 & = & 5 \end{cases} : L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

La deuxième équation comporte deux inconnues, on va fixer  $x_3 = t \in \mathbb{R}$  qui sera donc un paramètre. On aura donc :

$$S : \begin{cases} x_1 & = & -1 + 2t + x_2 \\ x_2 & = & 5 - 9t \end{cases}, \longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 4 - 7t \\ x_2 & = & 5 - 9t \end{cases}$$



# Exemples d'application V



# Algèbre Linéaire

## Réduction des endomorphismes

# Motivations I

Etude des endomorphismes  $u$  d'espaces vectoriels  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  muni d'une base  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ .

Représentation matricielle de  $u$ , notée  $A = \text{Mat}(u)$

$$A = \begin{pmatrix} u(\mathbf{e}_1) & u(\mathbf{e}_2) & \dots & u(\mathbf{e}_n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{e}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{e}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{e}_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a vu comment représenter ce même endomorphisme dans des bases différentes  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  dont les représentations sont notées  $A$  et  $A'$  respectivement et on note  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ . Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

# Motivations II

Dans cette section, nous allons chercher une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle la matrice  $A'$  se présente sous la forme d'une matrice diagonale, comme suit :

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

# Valeurs propres et vecteur propres I

## Définition 2.31: Vecteur et valeur propres

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$  et soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit qu'un vecteur  $\mathbf{x} \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Dans ce cas, le scalaire  $\lambda$  est appelé **valeur propre** de l'endomorphisme  $u$ .

Si  $\mathbf{x}$  est un vecteur propre, il existe une et une seule valeur propre  $\lambda$  associée telle que  $u(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ .

# Valeurs propres et vecteur propres II

Si  $\lambda$  est une valeur propre, l'ensemble des vecteurs propres associés est l'ensemble des vecteurs non nuls de l'espace  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ . En effet :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre} &\iff \exists \mathbf{x} \neq 0 \text{ t.q. } u(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \iff \\ &\iff \exists \mathbf{x} \neq 0 \text{ t.q. } (u - \lambda \text{Id})(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}).\end{aligned}$$

Si les vecteurs propres sont non nuls par définition, rien n'empêche la valeur propre d'être nulle, dans ce cas les vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda = 0$  sont exactement les vecteurs non nuls de  $\text{Ker}(u)$ .

On peut aussi dire que 0 est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $u$  n'est pas injectif.

# Diagonalisation

## Définition 2.32: Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$  est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base de  $E$  formée des vecteurs propres de  $u$ .

Sisi  $\mathbf{x}_i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  alors  $u(\mathbf{x}_i) = \lambda \mathbf{x}_i$ .

$$A = \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}_1) & u(\mathbf{x}_2) & \dots & u(\mathbf{x}_n) \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

# Recherche de valeurs propres I

Rappelons que  $\lambda$  est une valeur propre d'un endomorphisme  $u$  si l'application  $u - \lambda Id$  n'est pas injective, *i.e.* non bijective et son déterminant est donc nul.

C'est ce que nous allons utiliser pour déterminer les valeurs propres de notre application. Ainsi  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si

$$\det(u - \lambda Id) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient un polynôme de degré  $n$  dont les racines sont les valeurs propres de  $u$ .



# Recherche de valeurs propres II

## Proposition 2.31: Valeurs propres d'un endomorphisme

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Alors les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines du polynôme  $P_u$  défini par :

$$P_u(\lambda) = \det(u - \lambda Id).$$

Ce polynôme est appelé **polynôme caractéristique** de  $u$ . Il est de degré  $n$  en  $\lambda$ .

# Recherche de valeurs propres III

Considérons l'endomorphisme  $u$  dont la représentation dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  est donné par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 3 = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Ainsi les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 4$ .

# Recherche de valeurs propres IV

Considérons l'endomorphisme  $u$  dont la représentation dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure, on peut donc directement lire les valeurs propres sur la diagonale de matrice.

En effet, on se souvient que le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit des éléments diagonaux.

Ainsi les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 2$ . **On dira aussi que l'endomorphisme n'admet qu'une seule valeur propre mais de multiplicité 2.**

# Recherche de valeurs propres V

## Définition 2.33: Spectre d'une matrice ou d'un endomorphisme

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme  $u$  est appelé **spectre de  $u$** , noté  $Spec(u)$  ou encore  $Spec(A)$ , si  $A$  est la représentation matricielle de  $u$ .

## Proposition 2.32: Somme et produit des valeurs propres

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres, c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique associé à  $A$ . Alors :

- $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et
- $det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

# Recherche de valeurs propres VI

La démonstration de ce résultat est compliquée, elle nécessite de repasser par la définition de déterminant et comprendre ce qu'est une permutation. Je ne la présente donc pas, mais vous pourrez la retrouver dans le poly.

Je vais plutôt vous montrer un exemple qui illustre ce résultat en étudiant un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

# Recherche de valeurs propres VII

Considérons l'endomorphisme  $u$  dont la représentation dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pourrait alors utiliser le résultat précédent pour calculer les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  !

En effet, d'après la proposition précédente, le polynôme caractéristique de  $A$  s'écrit :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

On a donc le système suivant :

# Recherche de valeurs propres VIII

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = 5 \end{cases},$$

dont l'unique solution est donnée par  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 4$ .

# Recherche de vecteurs propres I

Il s'agit maintenant de déterminer *les vecteurs propres associés à chaque valeur propre*. Cette étape s'effectue donc *après avoir déterminé les valeurs propres d'un endomorphisme*.

Pour cela nous devons déterminer les éléments  $\mathbf{x}$  tels que  $\mathbf{x} \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ . Cela peut se faire en résolvant le système d'équations linéaires homogène :

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0,$$

pour toutes les valeurs de  $\lambda$  appartenant au spectre de  $A$ .

La connaissance de ces vecteurs propres va permettre de définir une base dans laquelle la nouvelle matrice représentant  $u$  sera diagonale mais aussi la matrice de passage associée de la base courante vers la base de vecteurs propres.



# Recherche de vecteurs propres II

Considérons l'endomorphisme  $u$  dont la représentation dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu que cet endomorphisme possède deux valeurs propres qui sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 4$ . Déterminons maintenant les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres en cherchant éléments de  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ .

- **Pour**  $\lambda = \lambda_1 = 2$  :

Nous devons résoudre le système linéaire  $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

# Recherche de vecteurs propres III

Les deux équations sont dépendantes, on peut donc se concentrer sur la première équation dont une solution est donnée par  $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ .

- **Pour**  $\lambda = \lambda_2 = 4$  :

Nous devons résoudre le système linéaire  $(A - 4I)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$

A nouveau, les deux équations sont dépendantes, on peut donc se concentrer sur la première équation dont une solution est  $(x_1, x_2) = (-1, 3)$ .

On a donc deux vecteurs propres et on peut vérifier qu'ils forment une base de  $E = \mathbb{R}^2$  en calculant le déterminant :

# Recherche de vecteurs propres IV

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

Ainsi la matrice  $A$  est diagonalisable et elle est semblable à la matrice

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  et la matrice de passage  $P$  vers la vers base des

vecteurs propres est défini par  $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On peut ensuite facilement vérifier que  $A' = P^{-1}AP$

# Recherche de vecteurs propres $V$

Considérons l'endomorphisme  $u$  dont la représentation dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu que cette matrice admet une seule valeur propre  $\lambda = 2$  dont la multiplicité est égale à 2. Déterminons les vecteurs propres associés en cherchant les solutions du système  $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$  :

$$\begin{cases} -x_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution le vecteur de la forme  $(x_1, x_2) = (1, 0)$  et ... c'est tout ! On ne trouve ici qu'un seul vecteur propre ... la matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable a priori car on ne trouve pas une base de vecteurs propres de  $\mathbb{R}^2$ .

# Caractérisation des endomorphismes diagonalisables I

## Définition 2.34: Espace propre

On appelle **sous-espace vectoriel propre** associé à une valeur propre  $\lambda$ , le sous-espace vectoriel

$$E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}).$$

Un tel sous espace vectoriel est au moins de dimension 1. Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $u$ , alors cet espace est de dimension 0 (il est réduit au vecteur nul).

# Caractérisation des endomorphismes diagonalisables II

## Proposition 2.33: Propriétés des sous-espaces propres

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les vecteurs propres, deux à deux distincts, d'un endomorphisme  $u$ . Alors la famille des sous-espaces propres  $\{E_{\lambda_i}(u)\}_{i=1}^n$  est en somme directe.

Ce premier résultat est important car si on dispose de  $n$  sous-espaces de dimension au moins égale à 1 qui sont en somme directe dans un espace vectoriel de dimension  $n$ . Cela signifie que les vecteurs propres forment une base de cet espace vectoriel, donc l'endomorphisme est diagonalisable.

# Caractérisation des endomorphismes diagonalisables III

## Théorème 2.5: Diagonalisation et sous-espaces propres

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres (pas nécessairement distinctes). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $u$  est diagonalisable
- ii)  $E$  est la somme directe de ses sous-espaces vectoriels propres.

Ce théorème a deux conséquences immédiates :

# Caractérisation des endomorphismes diagonalisables IV

## Corollaire 2.1: Diagonalisation et valeurs propres

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  qui admet  $r \leq n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Alors :

- l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si la somme  $\sum_{k=1}^r \dim(E_{\lambda_k}(u))$  est égale à  $n$ .
- l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , nous avons

$$\dim(E_{\lambda_k}(u)) = m(\lambda_k),$$

où  $m(\lambda_k)$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_k$ .



# Algèbre Linéaire

Formes quadratiques et espaces euclidiens

# Analyses de Données

## Généralités et Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

# Analyses de Données

## Analyse en Composantes Principales (ACP)

# Analyses de Données

## Généralisation des méthodes

# Analyses de Données

## Analyse Factorielle des Correspondances (AFC)

# Analyses de Données

## Analyse factorielle des Correspondances Multiples (ACM)

# The End