Analyse I

Licence 1 - Informatique
Parcours - Science des Données

Guillaume Metzler

Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC, UR 3083, Lyon

guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Printemps 2023

Présentations des enseignants

- **Chargé de CM :** Guillaume METZLER - MCF Informatique - Enseignant à l'ICOM et rattaché au Laboratoire ERIC (Batîment K - Bureau K073)
- **Intervenant en TD :**
  - Il n'y aura que moi x)

Déroulement du cours

Programme :

- 5 séances de CM portant sur l'Analyse des fonctions à une variable. Le but est de consolider les acquis du lycée mais aussi de vous donner du matériel supplémentaire pour la suite de vos études dans ce parcours.

- 5 séances de TD sur le contenu du cours afin de mettre en pratique les résultats présentés en cours mais aussi des exercices plus abstraits pour former votre esprit à la réflexion.

En réalité ... ce n'est pas gravé dans le marbre pour le déroulement des séances ... on en discute ensemble.

Evaluations

Ce cours sera évalué via trois travaux qui sont uniquement théoriques (le bon goût du papier-stylo) :

- Une première évaluation de 1h lors de la troisième séance de TD sur les notions abordées jusqu'au jour J. Le but est de pouvoir vous rendre copie et correction la fois suivante pour que vous ayez un feedback.
- Une deuxième évaluation de 2h, à la fin des séances de TD, *i.e.* la semaine après la cinquième séance de TD afin de vous donner le temps de réviser et de nous donner le temps de nous exercer ensemble.
- Un devoir maison qui sera à rendre le jour du dernier examen.

En fonction de vos souhaits, on pourra éventuellement planifier deux séances de TD supplémentaires pour les volontaires afin d'aller plus loin ou de consolider les connaissances.

Cours et Supports

Le cours se compose :

- des planches pour la présentation des cours magistraux
- d'un polycopié qui reprend de façon détaillée le contenu des slides (pas pour cette année, il n'est que très voire trop partiel)
- d'un petit poly avec des exercices

L'ensemble de ces supports sont disponibles à l'adresse suivante (les slides seront régulièrement mis à jour) :

https://guillaumemetzler.github.io/courses/analyse.html

Attention : présence aux TD obligatoires ! Aucune correction ne sera mise en ligne après les séances.

C’est parti !

Sommaire

1 Introduction

2 Suites réelles

3 Fonctions générales

4 Continuité et Régularité

5 Dérivabilité

6 Primitive et Intégrale

Introduction

Science des des Données : Motivations I

- Fournir les outils Mathématiques (Analyse, Algèbre Linéaire) mais aussi Statistiques qui vous permettront, à terme, de comprendre et manipuler des algorithmes d'analyses de données et construire des modèles prédictifs.
- Ces compétences mathématiques sont aussi essentielles sur le plan purement informatique, notamment dans la gestion et la manipulation des données ou encore étudier la complexité d'un algorithme pour évaluer le temps de la procédure et donc trouver des solutions rapides et efficaces.
- Cela permet aussi de faire travailler un peu votre réflexion et votre abstraction quant à la résolution de certaines tâches.

Science des des Données : Motivations II

Pour l'Analyse de Données

- Apprendre des techniques permettant de dégager les informations présentes dans un jeu de données $\rightarrow$ en dégager la substantifique moelle !
- Partir de la représentation la plus classique d'un jeu de données, *i.e.* sous forme d'un tableau, et en apprendre une représentation synthétique sous forme de graphiques.
- Nous verrons aussi quelles techniques adopter en fonction de la nature de nos données.
- On va donc voir comment synthétiser l'information à des fins d'**interprétations** mais aussi de **visualisation**.

Science des des Données : Motivations III

Les applications sont nombreuses dans le domaine des sciences (sociales) :

- **Marketing :** déterminer des profils clients dans un panel - identifier les cibles prioritaires et les meilleurs arguments dans des campagnes publicitaires
- **Sociologie :** identifier les profils d'individus les plus sensibles aux fake news dans la population - détecter des communauté d'individus dans les réseaux sociaux
- **Economie** : identification des facteurs clefs pour la prise de décision dans un but commercial
- ...

On retrouve également des applications dans le domaine médical, biologique, de détection de fraudes, ...

Science des des Données : Motivations IV

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Individu 1	3	3	3	5	5
Individu 2	2	3	1	5	4
Individu 3	2	3	3	4	5
Individu 4	1	1	1	1	1
Individu 5	5	5	4	3	3
Individu 6	4	5	5	2	3
Individu 7	5	5	5	3	3
Individu 8	1	1	1	1	1

Table – Résultats du questionnaire sur un ensemble de 8 individus.

Science des des Données : Motivations V

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Individu 1	3	3	3	5	5
Individu 2	2	3	1	5	4
Individu 3	2	3	3	4	5
Individu 4	1	1	1	1	1
Individu 5	5	5	4	4	3
Individu 6	4	5	5	2	3
Individu 7	5	5	5	3	3
Individu 8	1	1	1	1	1

Table – Création de groupes en fonction des réponses des individus. On identifie trois profils différents en fonction de la nature des réponses, identifiés en marron, gris et blanc.

Science des des Données : Motivations VI

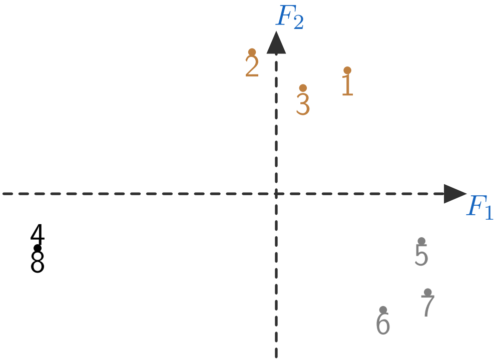


Figure – Représentation des individus, *i.e.* des réponses fournies au questionnaire, dans un espace à deux dimensions obtenu par l'ACP.

Science des des Données : Motivations VII

Pour la construction et l'Analyse de modèles

Lorsque l'on cherche à résoudre un problème à l'aide de données, la première étape consiste souvent à modéliser le problème que l'on cherche à résoudre avec quantités mathématiques.

Cela se traduit très souvent par l'utilisation de fonctions mathématiques dont les propriétés sont connues et simples à étudier et qui vont permettre de relater un phénomène observé dans les données ou ce que l'on cherche à faire : *chercher à prédire la valeur du cours d'une action en fonction du temps, trouver une solution la moins coûteuse possible, déterminer le meilleur arrangement possible lorsque l'on dispose de différentes contraintes, etc.*

Science des des Données : Motivations VIII

Pour l'apprentissage

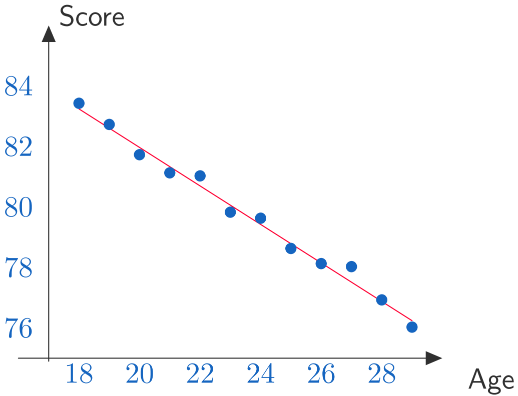
Il faudra donc connaître des **propriétés sur la fonction comme la continuité, la dérivabilité** voire déterminer des intégrales dans certains cas :**analyse de survie** qui seront au coeur de ce cours.

En réalité, il y a plusieurs facettes de la Sciences des Données qui sont à prendre en compte :

- L'analyse de données pure dont on a évoqué le but précédemment
- Combiner les outils mathématiques et statistiques pour construire des **modèles prédictifs** afin d'effectuer des tâches de régression ou encore de classification
- Etudier les propriétés de tels modèles pour avoir des garanties sur les performances ou encore étudier la convergence des algorithmes étudiées.

Science des des Données : Motivations IX

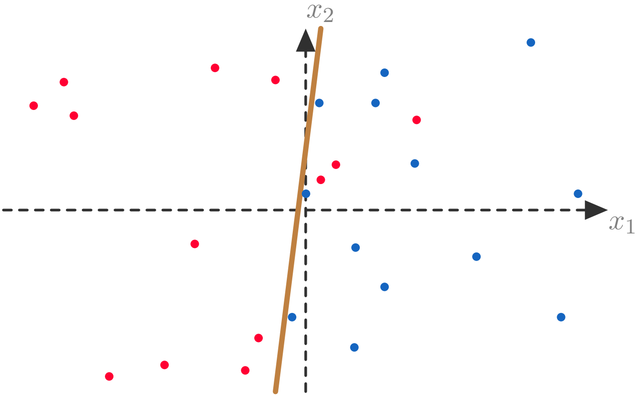
Un exemple pour de la régression



Minimiser l'erreur quadratique moyenne : $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(\mathbf{x}_i) - y_i)^2$

Science des des Données : Motivations X

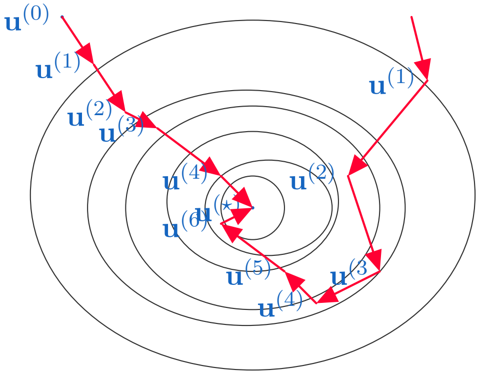
Un exemple en classification



Minimiser l'erreur moyenne : $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \ell(h(\mathbf{x}_i, y_i))$

Science des des Données : Motivations XI

Convergence d'un algorithme



Descente de Gradient : $\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} - \eta \nabla f(\mathbf{u}^{(n)})$.

Science des des Données : Motivations XII

Bien évidemment, vous serez confrontés à des problèmes qui seront très complexes et qui nécessitent des outils parfois sophistiqués pour pouvoir les résoudre.

Si dans ce cours, on se limitera à l'étude de fonctions ou d'objets qui ne dépendent que d'une seule variable ... il faut être conscient que l'usage de données va souvent impliquer à travailler dans des espaces plus grands, *i.e.* à *plusieurs dimensions* et donc à travailler avec **plusieurs variables simultanément**.

Fort heureusement, sur le plan mathématique, les définitions ou les outils ne changent que très peu qu'ils dépendent de une ou plusieurs variables. On va donc commencer par l'analyse à une seule variable réelle afin de présenter un large spectre des outils que vous rencontrerez.

Pour finir

Avant de démarrer

Avant de s'attaquer à l'analyse de fonctions à proprement parlé avant d'abord apprendre à étudier le comportement d'une *suite de nombres réels* : qui seront des éléments essentiels à l'étude de la convergence de nos algorithmes d'optimisation qui auront pour but de trouver une solution, de façon itérative, à un problème donné en utilisant les propriétés d'une fonction.

Suites réelles

Généralités sur les suites I

Avant de démarrer

Dans cette section, nous aborderons les points suivants sur les suites :

- retour sur les suites classiques
- suites bornées
- convergence et divergence d'une suite
- limite d'une suite
- relations de comparaisons entre les suites

Les suites peuvent être vues comme des cas particuliers des fonctions.

Généralités sur les suites II

Définition 3.1: Suites réelles

On appelle *suite réelle* tout famille de nombres réels indexés par $\mathbb{N}$. On notera $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$ est le terme de rang n de la suite u.

Les suites u, v w définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n + 3, \quad v_n = 4n, \quad \text{et} \quad w_n = 2^n$$

sont des suites réelles au sens définit précédemment. Dans cet exemple, les suites u et v sont des suites **arithmétiques** et la suite v est une suite **géométrique**.

Généralités sur les suites III

Définition 3.2: Suite arithmétique

On appelle *suite arithmétique* de raison k, une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous ayons la relation

$$u_{n+1} = u_n + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

L'expression générale d'une suite arithmétique est donc

$$u_n = u_0 + kn.$$

La suite définie pour tout entier n par $u_n = 3n + 5$ est une suite **arithmétique**.

Généralités sur les suites IV

Définition 3.3: Suite géométrique

On appelle *suite géométrique* de raison k, une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous ayons la relation

$$u_{n+1} = k \times u_n \; k \in \mathbb{R}.$$

L'expression générale d'une suite arithmétique est donc

$$u_n = u_0 \times k^n.$$

La suite définie pour tout entier n par $u_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^n$ est une suite **géométrique**.

Généralités sur les suites V

En revanche, toutes les suites ne sont pas forcément arithmétique ou géométrique. Elles peuvent mélanger ces deux notions voir aucune des deux.

$$u_n = 3 \times 2^n + 6, \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n).$$

La définition de suite suppose que cette dernière est définie pour tout entier naturel n, mais il n'est pas rare que l'on souhaite définir une suite à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ afin que les objets soient bien définies.

$$w_n = \sqrt{2n - 6}.$$

Cette suite est définie pour tout entier $n \geq 3$.

Généralités sur les suites VI

On pourra également introduire des suites plus *exotiques* dont la définition pourrait varier selon la parité de n, comme cela serait le cas avec la suite u définie pour tout entier n par :

$$u_n = \begin{cases} -2n-3 & \text{si n est pair,} \\ n+3 & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

On remarque d'ailleurs que selon la valeur de n, plus précisément la parité de n, la suite n'évolue pas de la même façon (notion de variations d'une suite que nous aborderons juste après).

Généralités sur les suites VII

On pourra également effectuer des opérations sur les suites, tout comme on peut effectuer des opérations sur les nombres réels.

Définition 3.4: Opérations sur les suites

Soient deux suites de nombres réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit λ un nombre réel quelconque. On peut alors définir :

1. la suite $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. la suite $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
3. la suite $u \times v = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
4. la suite $\dfrac{u}{v} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, à condition que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit non nulle pour tout entier n

Généralités sur les suites VIII

Exemple

Considérons les suites u et v définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n + 3 \quad \text{et} \quad v_n = 2^n$$

et λ un nombre réel quelconque. Alors les suite $u + v$ et $u \times v$ sont définies pour tout entier naturel n par

$$u_n + v_n = 2^n + n + 3 \quad \text{et} \quad u_n \times v_n = 2^n(n + 3).$$

Variations et convergence d'une suite I

Après avoir défini les suites, nous pouvons maintenant nous intéresser à l'évolution de leurs valeurs et plus précisément à leurs variations.

Définition 3.5: Variations

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq u_n$,
2. décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$,
3. constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n$.

On pourra également reprendre cette définition pour introduire les notions de monotonie stricte en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Variations et convergence d'une suite II

Exemple

On considère les suites $u, v\ w$ définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 2n, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{et} \quad w_n = (-1)^n.$$

sont des suites réelles au sens défini précédemment.
Alors la suite u est strictement croissante pour tout n. En effet $u_{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2 > 2n = u_n$. De la même façon on remarque que la suite v est strictement décroissante (car la raison de cette suite géométrique est inférieure à 1. Enfin, la suite w n'est ni croissante, ni décroissante.

Variations et convergence d'une suite III

Etudier les valeurs successives des suites revêt d'un enjeu important dans l'étude de certains algorithmes afin d'étudier d'éventuelles propriétés de convergence de ces derniers. Pour étudier cette convergence, nous avons donc besoin de connaître le comportement de la suite mais aussi de savoir si cette dernière prend des valeurs bornées.
En effet, la monotonie d'une suite et son caractère bornée vont nous permettre d'affirmer que cette dernière est convergente.

Variations et convergence d'une suite IV

Définition 3.6: Suites minorées, majorées et bornées

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors cette suite est dite :

1. *minorée* s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$,
2. *majorée* s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M \geq u_n$,
3. *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition 3.1: Suite bornée

Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors la suite u est bornée si et seulement si la suite $|u| = (|u|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Variations et convergence d'une suite V

Démonstration La proposition se démontre en montrant les deux implications.

- Supposons que $|u|$ soit majorée, il existe donc un réel M tel que pour tout n, $|u_n| \leq M$. En utilisant la définition de la valeur absolue, on a pour tout entier n

  $$-M \leq u_n \leq M.$$

  Ainsi la suite u est donc bien minorée et majorée, elle est donc bornée.

Variations et convergence d'une suite VI

- Supposons que la suite u soit bornée, il existe donc des réels m, M tels que pour tout n

$$m \leq u_n \leq M.$$

En posant $K = max\left(|m|, |M|\right)$, nous avons, pour tout entier n

$$-K \leq m \leq u_n \leq M \leq K.$$

Ainsi, en utilisant la définition de la valeur absolue, nous avons $|u_n| \leq K$ pour tout n, ce qui montre bien que la suite $|u|$ est majorée.

Regardons maintenant la notion de convergence d'une suite.

Variations et convergence d'une suite VII

Définition 3.7: Convergence

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* L si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |u_n - L| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = L$.

Dit autrement, une suite admet pour limite $L \in \mathbb{R}$, si tous les termes de la suite, peuvent être aussi proche de L qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang.

On peut montrer que, lorsqu'elle existe, **la limite d'une suite est unique**.

Variations et convergence d'une suite VIII

Définition 3.8: Suite convergente

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que cette suite est *convergente* s'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = L.$$

Dans le cas contraire, elle est dite *divergente*.

Regardons quelques exemples pour illustrer des cas de suite convergentes et divergentes.

Variations et convergence d'une suite IX

Exemple suite convergente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Notons que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 en appliquant nos connaissances sur les calculs de limites. En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
Si nous devions employer la définition, cela nous donnerait

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |1 + \frac{1}{n+1} - 1| \leq \varepsilon.$$

Il faudrait donc montrer l'existence d'un tel n_0 qui dépendrait donc de ε.

Variations et convergence d'une suite X

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Ainsi, la définition est vérifiée en prenant $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1.$

Bien évidemment, nous n'utilisons pas la définition, en pratique, pour montrer qu'une suite converge. On se contente d'appliquer ce que l'on connaît pour le calcul de limites ou, quand cela est moins visible, d'utiliser des propriétés que nous verrons plus tard.

Regardons maintenant un autre exemple.

Variations et convergence d'une suite XI

Exemple suite divergente

Considérons les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes

$$v_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad w_n = 2^n$$

Ces deux suites divergent. En effet, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterne entre deux valeurs -1 et 1 selon la parité de n et ne peut donc pas être convergente (cela contredirait l'unicité de la limite).

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également divergente car elle peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite.

Variations et convergence d'une suite XII

Proposition 3.2: Convergence et bornée

Toute suite convergente est bornée.

Son usage en pratique est très limité. Elle sert surtout à montrer qu'une suite est divergente en utilisant la **contraposée** : *une suite non bornée est divergente*, ce que l'on a pu voir directement avec la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'exemple précédent.

Regardons maintenant quelques résultats sur la convergence des suites et les opérations élémentaires (somme et produit)

Variations et convergence d'une suite XIII

Proposition 3.3: Suites convergentes vers 0

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant toutes deux vers 0 et soit λ un nombre réel. Alors

1. la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
2. la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Variations et convergence d'une suite XIV

Exemple

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout n par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2}{n+1}$$

Ces deux suites convergent bien vers 0. Soit également un nombre réel λ. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \times 0 = 0.$$

De la même façon

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n+1}\right) = 0.$$

Variations et convergence d'une suite XV

Proposition 3.4: Opérations sur les suites convergentes

Soit deux suites réelles convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limites respectives L_1 et L_2 et λ un nombre réel. Alors :

1. la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λL_1,
2. la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 + L_2$,
3. la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 L_2$
4. si $L_2 \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{L_1}{L_2}$.

Variations et convergence d'une suite XVI

Ce résultat n'est qu'une simple généralisation de ce qui précède au cas où les suites convergent ailleurs que vers 0. Il arrive cependant que certains suites soient plus compliquées à étudier, notamment en ce qui concerne la convergence de ces dernières. C'est pourquoi on va parfois chercher à encadrer ces suites par des suites dont la convergence est simple à étudier. C'est d'ailleurs ce que l'on fait, dans un cadre plus général en employant le **Théorème des Gendarmes**.

Variations et convergence d'une suite XVII

On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite majorante** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout entier n, nous avons

$$u_n \leq v_n.$$

On peut également parler de suite *majorante* à partir d'un certain rang. On peut également, de façon analogue, définir la notion de suite minorante.

Proposition 3.5: Convergence et suite majorante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une réelle et supposons qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $|u_n| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Variations et convergence d'une suite XVIII

La démonstration n'est qu'une simple écriture de la définition de limite. En revanche, noter que l'on étudie la suite des *valeurs absolues* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *i.e.* on étudie une suite dont les valeurs sont *positives*. Cette hypothèse, si elle n'est pas respectée, peut mettre en défaut le résultat précédent.
En effet, considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = -2 + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

On a bien $u_n \leq v_n$ pour tout entier n et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, mais cela n'est pas le cas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers -2.

Variations et convergence d'une suite XIX

Proposition 3.6: Théorème des Gendarmes

Soient trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier n, nous avons

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = L$$

Le résultat de cette proposition reste inchangée si l'on a $u_n \leq v_n lew_n$ à partir d'un certain rang n.

Variations et convergence d'une suite XX

Exemple

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$$

et appliquons le théorème des gendarmes pour étudier la limite de cette suite. Notons que pour tout entier n, nous avons

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \iff \frac{-1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+1} = 0.$

On en déduit donc, à l'aide du théorème des gendarmes, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Divergence des suites I

Définition 3.9: Suite divergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

Dans les deux cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente*

Divergence des suites II

Exemple et remarque

Considérons la suite $w_n = 2^n$ que nous avons vu plus tôt.
Si on reprend la définition, nous avons bien pour tout $A \in \mathbb{R}$, $2^n \geq A$ pour tout $n \geq \dfrac{\ln(A)}{\ln(2)}$. Ainsi la définition est bien vérifiée pour tout $n \geq n_0 = \dfrac{\ln(A)}{\ln(2)}$.

Remarque Une suite divergente ne doit pas forcément tendre vers $+\infty$, il faut simplement qu'elle ne tende pas vers une valeur fixe. Donc les suites

$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n)$$

ne tendent pas vers $\pm\infty$ mais elles divergent pour autant.

Divergence des suites III

Proposition 3.7: Divergence et Relation d'ordre

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout entier n, $u_n \leq v_n$ alors

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Il nous faut maintenant regarder comment on peut étudier la convergence de ces suites en pratique, en considérant la monotonie de ces dernières.

Limite des suites monotones I

Lorsque que l'on étudie des suites monotones, ce qui arrivent souvent lorsque l'on regarde l'évolution des solutions d'un problème au cours des itérations d'un algorithme, nous sommes capables de montrer la convergence de ces dernières. C'est ce que nous allons voir avec les deux résultats suivants.

Proposition 3.8: Existence limite suite croissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Alors

1. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée*, alors elle converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n} \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *pas majorée*, alors elle diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Limite des suites monotones II

On en déduit un résultat analogue pour les suites qui sont décroissantes

Proposition 3.9: Existence limite suite minorée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **décroissante**. Alors

1. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée*, alors elle converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_n \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *pas minorée*, alors elle diverge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Ainsi, pour étudier la convergence d'une suite, il suffit parfois de montrer qu'elle est croissante et majorée ou encore décroissante et minorée pour montrer qu'elle converge.

Comparaisons des suites I

Pour calculer des limites de suite, plus précisément pour lever une indétermination, on a parfois besoin de savoir quelles sont les suites prépondérantes, négligeables ou encore équivalentes à d'autres suites, à l'aide de suites de références.

Cela est par exemple le cas lorsque l'on souhaite étudier les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{6n+3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(6n^2+3n\right)}{2n-4}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2n}}{\frac{1}{n}}.$$

Comparaisons des suites II

Suites négligeables

Définition 3.10: Suite négligeable

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que $u_n = v_n \times w_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n = o(v_n)$.

Cette définition n'est pas très utile en pratique, la proposition suivante en donnera une version beaucoup plus pratique.

Comparaisons des suites III

Proposition 3.10: Caractérisation suite négligeable

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=0$.

Ainsi, pour savoir si une suite est négligeable devant une autre, il suffit simplement d'étudier le quotient de ces deux suites.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = n+2$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = 2^n$. On pourra, par la suite, utiliser les comparaisons de références ci-dessous dans un cadre pratique

Comparaisons des suites IV

Comparaison de suites de références

Si on considère des nombres réels α, β et γ strictement positifs, alors :

$$\ln(n)^{\alpha} = o(n^{\beta}), \quad n^{\beta} = o(e^{\gamma n}) \quad \text{et} \quad e^{\gamma n} = o(n!).$$

Ces relations son normalement déjà connues car vous avez employé les mêmes lorsque vous deviez lever une indétermination au moment de l'étude de fonctions.
Il est donc important d'avoir ces comparaisons en tête.

Comparaisons des suites V

Suites dominées

Définition 3.11: Suite dominée

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = v_n \times w_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Regardons tout de suite une proposition plus concrète pour caractériser une suite négligeable devant une autre.

Comparaisons des suites VI

Proposition 3.11: Caractérisation domination

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si le quotient $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est borné à partir d'un certain rang.

Ainsi, pour savoir si une suite est dominée devant une autre, il suffit simplement d'étudier le quotient de ces deux suites et de montrer que ce quotient reste borné.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = 6n + 2$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = 7n + 4$.

Comparaisons des suites VII

Suites équivalentes

Il s'agit d'un dernier point à étudier et qui sera aussi très utile au moment de l'analyse de fonctions. Cette notion d'équivalence est importante lorsque l'on cherche à faire des approximations asymptotiques des suites ou même des fonctions.

Définition 3.12: Suites équivalentes

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que les deux suites sont équivalentes s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 telle que $u_n = v_n \times w_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n \sim v_n$.

Comparaisons des suites VIII

Noter que la relation d'équivalence entre deux suites est une relation symétrique. Ainsi si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pourra également dire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui n'était pas le cas avec les notions *dominées* et *négligeables*).

Comparaisons des suites IX

Proposition 3.12: Caractérisation équivalence

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est non nulle à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Sur le plan pratique, il est important d'avoir les équivalents de référence suivants en tête.

Comparaisons des suites X

Equivalents de références

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0. On a alors alors les équivalents suivants :

1. $\sin(u_n) \sim u_n$,
2. $\cos(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$,
3. $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$,
4. $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$,
5. $\ln(1+u_n) \sim u_n$,
6. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
7. $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

On va maintenant regarder comment on peut trouver certains de ces équivalents là en utilisant les connaissances à votre disposition sur ces fonctions et leur dérivée.

Comparaisons des suites XI

Pour toutes les démonstrations, on se rappelle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0.

Pour $\sin(u_n) \sim u_n$ **:**

On utilisera la définition du nombre dérivée en une valeur. Plus précisément, on utilisera le fait que f est une fonction dérivable en a, on alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

En appliquant cette définition à la fonction $f = \sin$ et en prenant $a = 0$ et $x = u_n$, nous avons alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)-\sin(0)}{u_n - 0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Comparaisons des suites XII

On retrouve ici la définition d'équivalence de deux suites.

Pour $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$ **:**

On pourrait être tenté de refaire la même procédure que précédemment vu que $\cos(0) = 1$, en écrivant

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(u_n) - \cos(0)}{u_n - 0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(u_n) - 1}{u_n} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

Mais on remarque cette limite tend vers 0 et nous n'avons pas montré une quelconque équivalente entre les deux suites. Il va donc falloir travailler un peu et notamment ... utiliser quelques relations trigonométriques.

Pour cela, on se rappelle que pour tout x nous avons

Comparaisons des suites XIII

$$\begin{aligned}\cos(2x) =&\ \cos(x)^2 - \sin(x)^2,\\ &\downarrow\ \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \text{ soit } \cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2\\ =&\ 1 - 2\sin(x)^2,\\ \cos(2x) - 1 =&\ -2\sin(x)^2.\end{aligned}$$

En prenant $x = \frac{u_n}{2}$ et en utilisant l'équivalence démontrée précédemment, nous avons

$$\cos(u_n) - 1 = \ -2\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)^2,$$

Comparaisons des suites XIV

$$\begin{aligned} &\downarrow \ \sin(u_n) \sim u_n \\ &\sim -2\frac{u_n^2}{4}, \\ &\sim -\frac{u_n^2}{2}. \end{aligned}$$

Le principe est exactement le même pour les fonctions sh et ch. En revanche, nous ne savez pas comment elles sont définies actuellement donc on s'en occupe pas (on les manipuleras peu dans le cadre de ce cours).

Pour $\ln(1+u_n) \sim u_n$ **:**

On se sert à nouveau de la définition du nombre dérivé dans ce cas pour trouver notre équivalent. On veut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$, or

Comparaisons des suites XV

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)-\ln(1)}{(1+u_n)-1} = \ln'(1) = 1.$$

D'où notre équivalence.

Pour $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ **:**

C'est exactement pareil dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}-1}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}-e^0}{u_n-0} = e'^0 = 1.$$

On retrouve à nouveau notre proposition concernant deux suites équivalentes.

Comparaisons des suites XVI

Pour $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ **:**

A nouveau, on va employer notre définition du nombre dérivé et on se rappelle que la dérivée de $(1+x)^{alpha}$ est donnée par $\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ dont la valeur est égale àα lorsque $x=0$.
D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+u_n)^\alpha - 1}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+u_n)^\alpha - 1^\alpha}{(1+u_n)-1} = \alpha.$$

Comparaisons des suites XVII

Quelques remarques importantes pour finir sur ces notions d'équivalents.

- Il est possible de faire le produits de deux équivalents, *i.e.* si $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $a_n u_n \sim b_n v_n$
- Cela reste également valable si on souhaite faire le quotient de deux équivalents.
- On peut également prendre la puissance de deux équivalents (c'est d'ailleurs ce que nous utilisé à un moment), *i.e.* si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a aussi $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Comparaisons des suites XVIII

En revanche de façon générale, la notion d'équivalents n'est pas compatible avec la somme ou la différence.

En effet si on considère $u_n = \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n}$, alors $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{-1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Si on somme les deux équivalents, nous trouverions un équivalent à 0, ce qui est absurde ! En réalité, nous avons $u_n + v_n = \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour finir

En conclusion

Dans cette section, nous avons étudier comment se comportent les suites réelles a travers la notion de monotonie, de convergence et en étudiant le caractère borné de ces suites.

Nous avons fait quelques rappels sur les suites arithmétiques et géométriques et la notion de suite définie par récurrence.

Enfin, nous avons étudier les liens pouvant exister entre des suites à travers des relations de dominations ou encore d'équivalences entre des suites pour de grandes valeurs de n.

On va maintenant s'intéresser aux fonctions de façon plus générale, *i.e.* non plus aux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ mais aux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Fonctions Générales

Objectifs

Dans cette partie, on revient sur quelques éléments de bases sur les fonctions que l'on verra ensuite dans le cadre des différents exercices. Les éléments qui sont présentés ici sont des éléments spécifiques sur les limites, variations des fonctions étudiées. Des généralités (indépendantes de la fonction considérée) seront présentées dans les prochaine sections. Plus précisément, on va s'intéresser aux fonctions :

- logarithme népérien et exponentielle
- puissance
- circulaires
- hypoerboliques (dans une moindre mesure)

Fonction Logarithme I

Définition 4.1: Logarithme népérien

La fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$, est l'unique primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Par définition, pour tout $x \in]0,+\infty[$ nous avons

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

De cette même définition, on peut déduire que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Fonction Logarithme II

De plus, pour tout réel $x > 0$, nous avons :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

On se rappelle de la définition de fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, cette fonction est **strictement** positive sur $]0, +\infty[$. Ceci implique la fonction $\ln$ est **strictement** croissante sur ce même intervalle.

Fonction Logarithme III

Quelques propriétés du logarithme

Proposition 4.1: Propriétés logarithme népérien

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

ii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,

iii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,

iv) $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Fonction Logarithme IV

Démonstration On va uniquement démontrer le premier point de cette proposition. En effet, les trois autres points n'en sont que des conséquences.
Pour tout $y \in]0, +\infty[$ on considère la fonction $f : x \mapsto \ln(xy)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur ce même intervalle. Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$, nous avons

$$f'(x) = \frac{y}{yx} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, $f'(x) = \ln'(x)$ pour tout réel $x \in]0, +\infty[$. Comme les fonctions f et $\ln$ ont la même dérivée sur cet intervalle, elles sont donc **égales à une constante près sur ce même intervalle**. On en déduit

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \ln(x) + c,$$

Fonction Logarithme V

où c est une certaine constante. Cependant, pour $x = 1$, nous avons $f(1) = \ln(y) = \ln(1) + c = c$.
On en déduit que $c = \ln(y)$, donc

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Les autres point se démontrent de façon analogue ou sont une conséquence de cette première propriété, ils sont donc laissés à titre d'exercices.

Fonction Logarithme VI

Après l'étude de ces quelques propriétés, il nous reste à étudier les limites de cette fonction.

Proposition 4.2: Limites

La fonction $\ln$ admet des limites en 0 et $+\infty$ qui sont :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Démonstration Pour montrer ces deux résultats, on va utiliser la croissante de la fonction $\ln$ ainsi que la quatrième propriété de cette fonction énoncée dans la Proposition 4.1.
La croissante stricte de la fonction $\ln$ implique $\ln(2) > \ln(1) = 0$.
Ainsi, en utilisant la quatrième partie, on a

Fonction Logarithme VII

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty.$$

La fonction $\ln$ est une fonction croissante qui n'est donc pas majorée, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = \lim_{x\to0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} -\ln(t) = -\lim_{t\to+\infty} \ln(t) = -\infty.$$

Fonction Logarithme VIII

Ce dernier résultat nous permet d'affirmer que la fonction $\ln$ réalise une bijection croissante et continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On pourra également dresser le tableau de variation de cette fonction $\ln$ et en donner une représentation graphique (voir Figure slide suivant).

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\Vert$		$+$		0
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fonction Logarithme IX

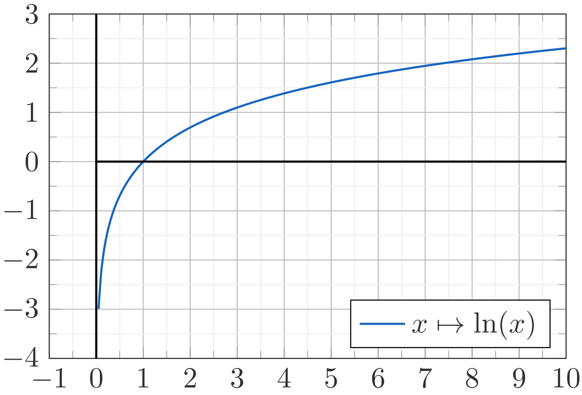


Figure – Représentation de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+\star}$

Fonction Logarithme X

Logarithme en base quelconque

Définition 4.2: Logarithme en base a

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle *logarithme de base* a, que l'on note $\log_a$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Fonction Exponentielle I

Définition 4.3: Exponentielle

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la fonction réciproque de la fonction $\ln$. Elle est donc bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Remarque : il est également possible de définir la fonction exponentielle comme la seule solution de l'équation différentielle avec la condition suivante :

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1 \implies \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

Fonction Exponentielle II

En tant que fonction réciproque de la fonction $\ln$ nous avons donc les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ \exp(\ln(x)) = x.$$

On peut alors dresser le tableau suivant et représenter la fonction exponentielle ainsi que sa fonction réciproque (voir Figure suivante). En tant que fonction réciproque l'une de l'autre, il est important de garder à l'esprit que ces deux fonctions sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction Exponentielle III

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp$	0	1	$+\infty$

Fonction Exponentielle IV

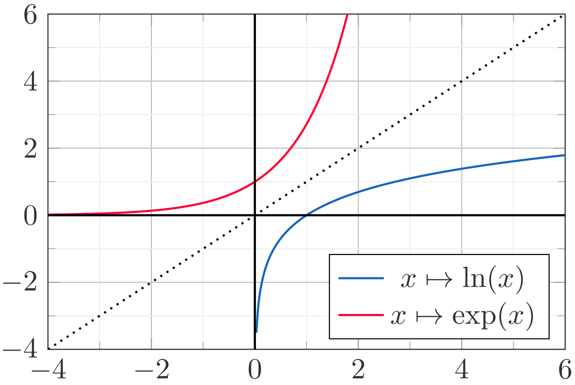


Figure – Représentation de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Le graphique met également le caractère réciproque des fonctions logarithme et exponentielle via la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction Exponentielle V

Les limites de la fonction exponentielle se déduisent directement des limites du logarithme népérien par symétrie avec la droite d'équation $y = x$. Tout comme nous l'avons fait pour le logarithme, nous pouvons également donner quelques propriétés de la fonction exponentielle.

Fonction Exponentielle VI

Proposition 4.3: Propriétés de l'exponentielle

Pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $\exp$ vérifie les propriétés suivantes

i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,

ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$,

iii) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$,

iv) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Fonction Exponentielle VII

Démonstration Pour démontrer les différents points, on utilisera le fait que l'exponentielle se définit comme la fonction réciproque du logarithme népérien.

$i)$ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y = \ln(\exp(x+y)).$$

En utilisant la bijectivité de $\ln$, on en déduit la relation :
$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
Les points $ii), iii)$ et $iv)$ sont des conséquences immédiates du point $i)$.
En effet

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$$

et on déduit directement la relation $ii)$.

Pour obtenir la relation $iii)$, il suffit d'écrire

Fonction Exponentielle VIII

$$\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Enfin, pour la relation $iv)$, on va à nouveau utiliser la fonction $\ln$. Ce qui nous donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\ln\left(\exp(x)^n\right) = n\ln(\exp(x)) = nx = \ln(\exp(nx)).$$

Fonction Puissance I

Maintenant que l'on a définit les fonctions $\exp$ et $\ln$, nous sommes capables de définir en tout généralité les fonctions *puissances*.

Jusqu'à présent, les fonctions puissances $f(x) = x^n$, ont été définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ voir pour des entiers $n \in \mathbb{Z}$.
Or, nous avons vu que pour tout entier n, $x^n = e^{n\ln(x)}$ qui est donc définie pour tout $x > 0$.
On pourra naturellement étendre cette définition au cas où n est un nombre réel, mais uniquement sur $]0, +\infty[$

Fonction Puissance II

Définition 4.4: Fonction puissance α

Soit α un nombre réel. On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction *puissance* α par :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Fonction Puissance III

Proposition 4.4: Propriétés de la fonction puissance

Soient α et β deux nombres réels, alors pour tout $x, y > 0$, nous avons

i) $1^\alpha = 1$,

ii) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$,

iii) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$,

iv) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$,

v) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Fonction Puissance IV

Variations et graphes

On considère maintenant, pour tout réel α, la fonction $f_\alpha(x)$ définie pour tout réel x strictement positif. On a donc

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On en déduit que la fonction f_α est dérivable pour tout $x > 0$ et que sa dérivée est donnée par

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

On va maintenant distinguer trois cas selon le signe de α.

Fonction Puissance V

Cas où $\alpha = 0$

Dans ce cas, pour tout réel x, nous avons $f_0(x) = 1$ et la fonction puissance est donc la fonction constante égale à 1.
La dérivée est également constante et égale à 0 pour tout réel x.

Fonction Puissance VI

Cas où $\alpha > 0$

Dans ce deuxième cas, la dérivée $f'_\alpha(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$, et la fonction f_α est donc strictement croissante. De plus

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty, \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) = 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty. \end{cases}$$

Remarquons que l'on peut même prolonger la fonction par continuité en 0 en lui attribuant la valeur 0. On en déduit alors directement le tableau des variations de cette fonction.

Fonction Puissance VII

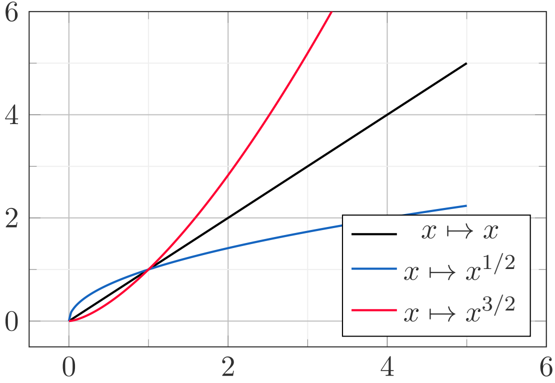


Figure – Représentation de la fonction puissance α pour différentes valeurs de α.

Fonction Puissance VIII

Cas où $\alpha < 0$

Dans ce troisième cas, la dérivée $f'_\alpha(x) < 0$ pour tout réel $x > 0$, et la fonction f_α est donc strictement décroissante. De plus

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln(x) = -\infty, \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0. \end{cases}$$

Fonction Puissance IX

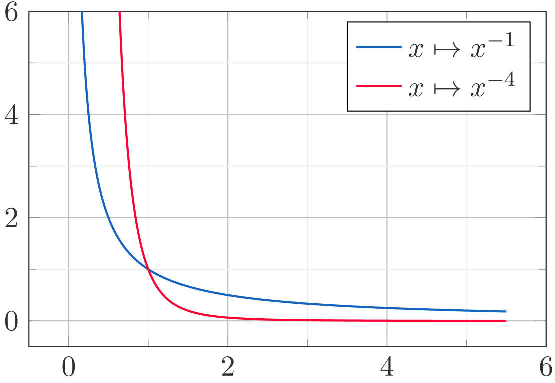


Figure – Représentation de la fonction puissance α pour différentes valeurs de α.

Fonction Puissance X

Comparaison des fonctions

Pour le calcul pratique de limites, nous avons besoin de connaître quelques critère de comparaisons de fonctions de bases.

Proposition 4.5: Comparaison des fonctions

Nous avons les limites suivantes :

i) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = 0,$

ii) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0,$

iii) $\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0,$

iv) $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0.$

Fonction Puissance XI

Démonstration :

i) Pour tout $t \geq 1$, nous avons

$$\sqrt{(t)} = t^{1/2} = e^{\ln(t)/2} \leq e^{\ln(t)} = t.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 1$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_{t=1}^{t=x} = 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 1$ nous avons : $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x} \leq 2\dfrac{\sqrt{x}}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

Fonction Puissance XII

ii) Pour tout $x > 0$

$$\frac{x}{e^x} = \frac{e^{\ln(x)}}{e^x} = e^{\ln(x)-x} = e^{x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} - 1 = -1$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$.

Mais comme $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)} = 0$.

Fonction Puissance XIII

iii) Pour tout réel $x > 0$, $x \ln(x) = -x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Mais comme $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$, on a $\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$.

iv) Pour tout réel x, nous avons $xe^x = -\frac{-x}{e^{-x}}$.

Or $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$, donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$ et ainsi $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Fonction Puissance XIV

La proposition précédente peut se généraliser à n'importe quelle puissance positive des fonctions précédemment considérées

Proposition 4.6: Comparaison des fonctions

Soient deux réels strictement positifs α et β, alors nous avons les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)^{\alpha}}{x^{\beta}}\right) = 0,$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}}\right) = 0,$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} x|\ln(x)|^{\beta} = 0,$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^{\alpha} e^{\beta x} = 0.$

Fonctions Circulaires I

Les fonctions circulaires sont des fonctions déjà rencontrées dans des contextes géométriques et notamment lors de mesures d'angles dans un triangle à partir des côtés *adjacent*, *opposé* ou encore de l'*hypoténuse*. On se rappelle que dans un triangle rectangle, nous pouvions obtenir ces différentes mesures d'un angle α par les relations :

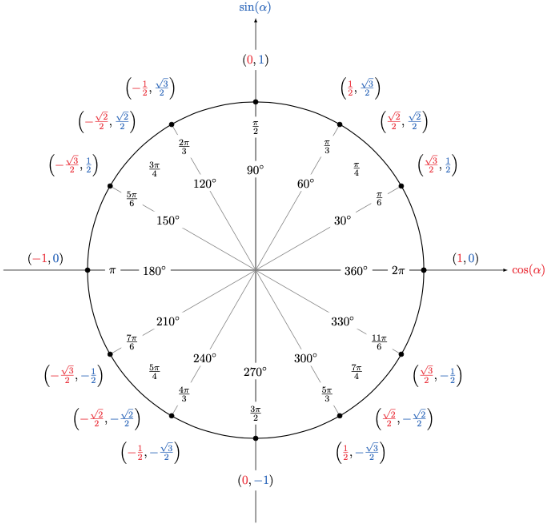
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

Fonctions Circulaires II

De ces définitions vous avez également pu étudier, de ces relations découlez le théorème de Pythagore ou une version généralisée appelée le théorème d'Al-Kashi.

Vous vous souviendrez également de quelques valeurs particulières de ces fonctions en fonction de l'angle étudié, ces différentes valeurs sont rappelées sur la Figure juste après.

Fonctions Circulaires III



Fonctions Circulaires IV

Nous mettons de côté, ici, l'aspect géométrique pour nous focaliser sur l'aspect analytique. On rappelle que les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π-périodiques, ce qui signifie que pour tout réel x

$$\sin(2\pi + x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(2\pi + x) = \cos(x).$$

La fonction cosinus est une fonction *paire* et la fonction sinus est fonction impaire et vérifient donc pour tout réel x

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = \cos(-x).$$

Fonctions Circulaires V

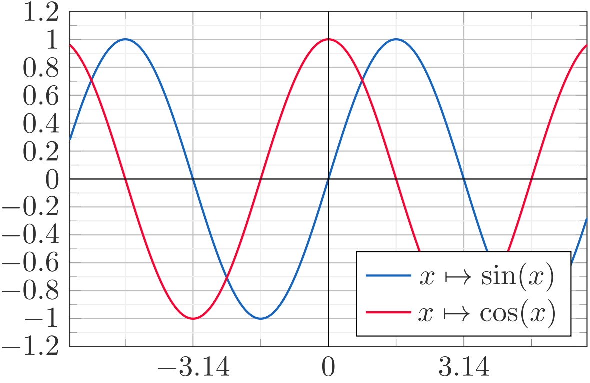


Figure – Représentation graphique des fonctions trigonométriques sinus et cosinus dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Fonctions Circulaires VI

Elles sont également dérivables pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\sin'(x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Ce qui permet directement d'en déduire les variations de ces deux fonctions.

Si ces formules de dérivées paraissent pour le moment sortir de nul part, elles sont en fait issues d'une autre définition de ces fonctions circulaires en utilisant l'*exponentielle complexe*.

Fonctions Circulaires VII

Définition 4.5: Fonctions circulaire

Les fonctions *sinus* et *cosinus* peuvent se définir à l'aide de l'exponentielle complexe, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i},$$

où i est le nombre vérifiant $i^2 = -1$.

S'il ne s'agit pas là de l'unique définition de ces deux fonctions circulaires, elles seront amplement suffisantes ici et suffiront à démontrer ce que sont les dérivées des fonctions $\sin$ et $\cos$.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1. \tag{1}$$

Fonctions Circulaires VIII

Etude de la fonction tangente : $\tan$

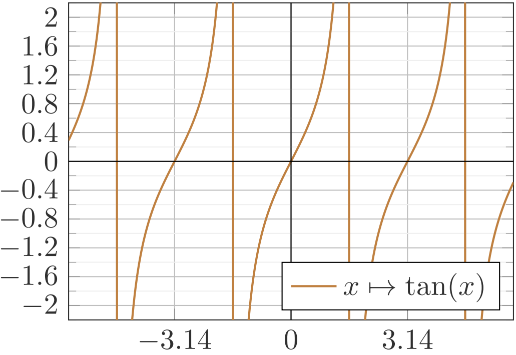
Elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

La fonction $\tan$ est donc par définition une fonction impaire et elle est également dérivable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Pour ces même réels x, sa dérivée est donnée par $\tan'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. La deuxième égalité est donnée par la relation (1).

Fonctions Circulaires IX



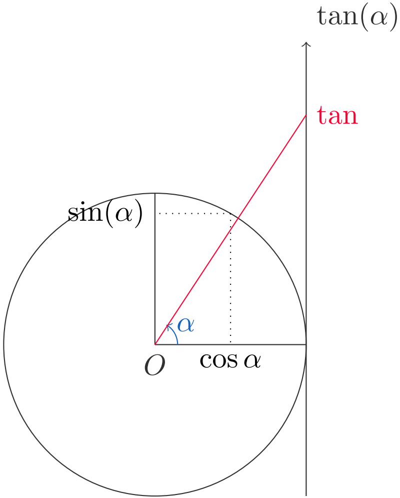


Figure – Représentation de la fonction tangente, $\tan$, à gauche

Fonctions Hyperboliques I

Définition 4.6: Fonctions hyperboliques

Les fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperolique*, notées respectivement sh et ch, sont définies pour tout réel x par les relations

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

A partir de ces fonctions, nous pouvons également introduire la fonction *tangente hyperbolique*, notée th, définie pour tout réel x par la relation

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}.$$

Fonctions Hyperboliques II

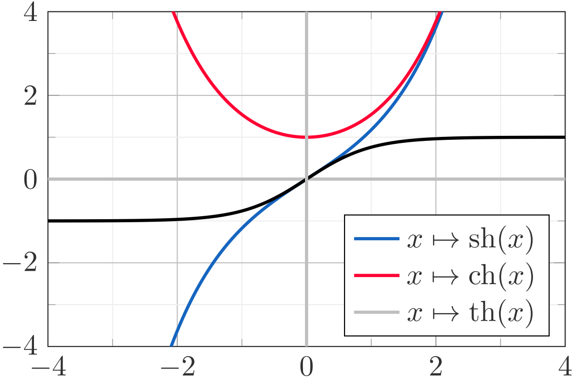


Figure – Représentation des fonctions *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*

Fonctions Hyperboliques III

De ces définitions, on peut directement décrire quelques liens entre ces fonctions hyperboliques, tout comme nous l'avons fait pour les fonctions circulaires. Par exemple, pour tout réel x nous avons les relations

$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1. \tag{2}$$

Fonctions Hyperboliques IV

Concernant le signe

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction ch est positive comme somme de deux fonctions positives. La fonction sh est positive pour tout $x \geq 0$ et négative sinon.

En effet, $\mathrm{sh}(x) \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x}$ et cette dernière inégalité est vérifiée si et seulement si $x \geq 0$. Enfin, tout comme la fonction sh, la fonction th est positive pour tout $x \geq 0$ et négative dans le cas contraire.

Fonctions Hyperboliques V

Concernant la dérivabilité

Ces différentes fonctions circulaires sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme la somme ou le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En effet, nous avons vu plus tôt que la fonction $\exp$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.7: Dérivées fonctions hyperboliques

Les fonctions ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Fonctions Hyperboliques VI

Concernant les limites

Les limites de ces fonctions s'obtiennent à partir des limites de la fonction exponentielle. Ainsi :

- $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{ch}(x)} = \underset{x\to-\infty}{\mathrm{ch}(x)} = +\infty.$
- $\underset{x\to-\infty}{\mathrm{sh}(x)} = -\infty$ et $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{sh}(x)} = +\infty.$
- $\underset{x\to-\infty}{(x)} = -1$ et $\underset{x\to+\infty}{(x)} = 1.$

Fonctions Hyperboliques VII

Fonction réciproque de sh

La fonction sh est une fonction strictement strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive et s'annule qu'en un seul point.
Elle est donc *bijective* et admet une fonction réciproque qui est également définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est notée argsh pour *argument sinus hyperbolique*.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}(x) = \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big).$$

Fonctions Hyperboliques VIII

Fonction réciproque de ch

La fonction ch est une fonction strictement strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ car sa dérivée est positive et s'annule qu'en un seul point. Elle est donc *bijective* de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ et admet une fonction réciproque qui est également définie de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$. Elle est notée argch pour *argument cosinus hyperbolique*.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 - 1}\Big).$$

Fonctions Hyperboliques IX

Fonction réciproque de

La fonction th est une fonction strictement strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ car sa dérivée est positive et s'annule qu'en un seul point. Elle est donc *bijective* et admet une fonction réciproque qui est également définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est notée argth pour *argument tangente hyperbolique*.

$$\forall x \in]-1,1[, \ \mathrm{argsh}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Fonctions Hyperboliques X

Quelques exercices intéressants

- démontrer les expressions de argsh, argch et argth,
- déterminer les dérivées de ces fonctions de deux façons différentes,
- les représenter graphiquement.

Pour finir

En conclusion

Nous avons revus plusieurs fonctions élémentaires ainsi que leurs propriétés :

- ensemble de définition
- ensemble de dérivation et variations
- limites
- fonctions réciproques

Ces fonctions interviendront naturellement dans certains contextes en Apprentissage Machine et il est donc important de connaître leurs propriétés de bases.

Continuité et Régularité

Continuité et Régularité

Objectif

On revient sur quelques généralités sur les fonctions :

- variations d'une fonction et monotonie
- parité d'une fonction, périodicité
- les notions de continuité
- équivalence des fonctions

Généralités I

Définition 5.1: Variations et Monotonies

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite :

- croissante si $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$,
- décroissante si $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$,
- strictement croissante $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \implies f(x) < f(y)$,
- strictement décroissante
  $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \implies f(x) > f(y)$.

Généralités II

On pourra aussi caractériser les fonctions constantes en disant que ce sont des fonctions à la fois croissantes et décroissantes.

Généralités III

Pourquoi s'intéresser aux variations d'une fonction ?

- Comprendre l'évolution d'une quantité en fonction d'une autre (ex : capacité de stockage nécessaire en fonction de la volumétrie des données, étude de l'évolution d'une variable en fonction d'une autre variable sur le plan statistique).
- Utile pour construire des algorithmes dont le but sera de trouver le minimum (ou maximum) d'une fonction (sous réserves de bonnes propriétés de cette dernière).
- Etude de la convergence, comme pour les suites.

Généralités IV

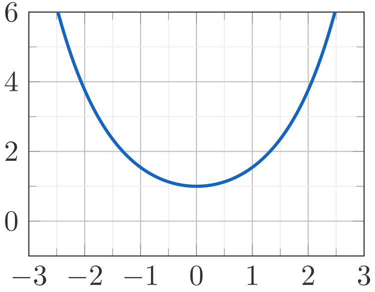
On pourra également s'intéresser à d'autres propriétés comme les notions de parité ou de périodicité des fonctions : utiles pour le calcul d'intégrale ou encore pour simplifier certains calculs (utiles aussi sur le plan théorique).

Définition 5.2: Parité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite :

- **paire** si pour tout $x \in I,\ f(x) = f(-x)$,
- **impaire** si pour tout $x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Généralités V



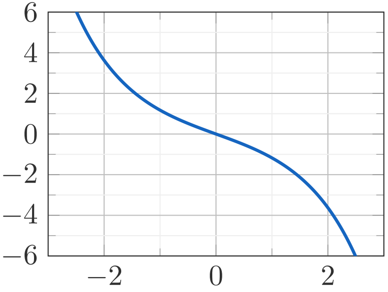


Figure – Exemple d'une fonction paire (à gauche) et d'une fonction impaire (à droite)

Généralités VI

Quelques exemples de fonction paire

Les fonctions $f : x \mapsto x^2, x^4$ ou plus généralement $f : x \mapsto x^{2n}$. Les fonctions $\cos$ et ch ou encore toute fonction qui s'écrit comme une somme de ces dernières.

Quelques exemples de fonction paire Les fonctions $f : x \mapsto x, x^3$ ou

plus généralement $f : x \mapsto x^{2n+1}$. Les fonctions $\sin$ et sh ou encore toute fonction qui s'écrit comme une somme de ces dernières.

Généralités VII

Définition 5.3: Périodicité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, T un nombre réel tels que pour tout $x \in I$, $x + T \in I$. Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est **périodique** de période T (ou encore que f est T-périodique) si pour tout $x \in I,\ f(x + T) = f(x)$.

Cette notion de périodicité est importante en *Analyse de Fourier* lorsque l'on cherche à étudier des signaux notamment (etude d'un ECG, EEG, traitement du signal, speech recognition, technique de débruitage, ...).

Généralités VIII

Quelques exemples de fonction périodique

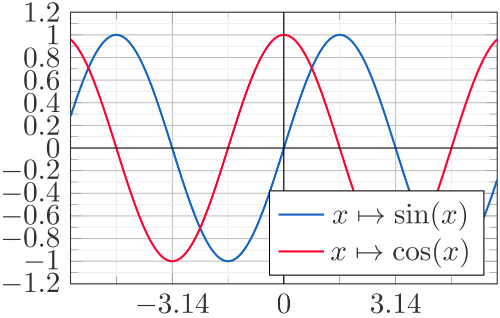


Figure – Exemples de fonctions qui sont 2π-périodiques.

Généralités IX

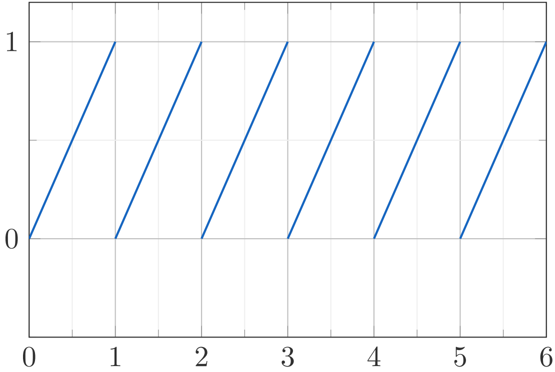


Figure – Exemple d'une fonction qui est 1-périodique.

Continuité I

Définition 5.4: Continuité en un point

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Lorsque la fonction f est définie en a, si f admet une limite en a, cette limite ne peut pas être différente de $f(a)$.
Ainsi **f est continue en** a **si et seulement si elle admet une limite** a **qui est égale à** $f(a)$.

Quid si la fonction n'est pas définie en un point ? Ou encore si la fonction admet des limites différentes ?

Continuité II

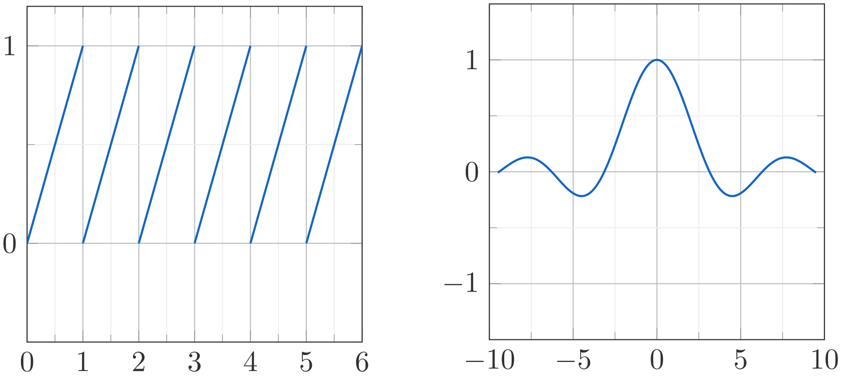


Figure – Exemples de fonctions discontinues

Continuité III

On peut définir des notions de limite à gauche et de limite à droite.

Définition 5.5: Limite à gauche (à droite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I. On dit que :

- f est continue à gauche en a si $\lim_{x \to a_-} f(x) = f(a)$,
- f est continue à gauche en a si $\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a)$.

f sera alors continue en a si sa limite à gauche et à droite en a est bien la même.

Continuité IV

Définition 5.6: Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$, f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I, *i.e.* si pour tout $a \in I$, on a bien $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Une telle fonction f sera alors dite C^0 ou plus précisément, on écrira que $f \in C^0(I, \mathbb{R})$.
Bien évidemment, la somme ou encore le produit de fonctions continues reste une fonction continue !

Continuité V

On peut donner une autre définition de la continuité beaucoup plus abstraite mais qui nous sera utile pour caractériser d'autres formes de la continuité pour des fonctions.

Définition 5.7: Continuité (autre)

Soit f une fonction définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction f est alors dite continue en tout point $x \in I$, si

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que}$$
$$\forall y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Théorème des valeurs intermédiaires I

Existence d'un zéro

On souhaite montrer qu'une fonction continue qui change de signe passe forcément par 0, *i.e.* elle s'annule.

Théorème 5.1: Existence

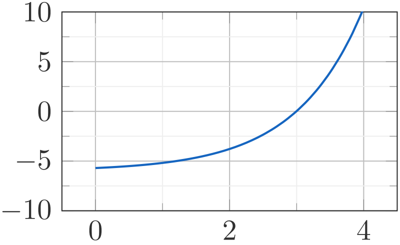
Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, et soient a et b deux points de I tels que $a < b$.
Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

La démonstration se fait par *dichotomie*.
C'est une démonstration *constructiviste* ce qui peut faire un excellent exercice de programmation.

Théorème des valeurs intermédiaires II

Principe de la démonstration

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Par exemple $f(a) > 0 > f(b)$.



Théorème des valeurs intermédiaires III

Dichotomie : On va chercher à couper, itérativement, notre intervalle de recherche en deux. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vont définir les bornes de notre intervalle de recherche, telles que $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

On pose $m_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et on évalue $f(m_1)$. On a donc deux possibilités :

1. $f(m_1)$ et $f(a_0)$ sont de signes contraires,
2. $f(m_1)$ et $f(b_0)$ sont de signes contraires.

Dans le premier cas, cela signifie que la valeur c recherchée se trouve dans l'intervalle $[a_0, m_1]$, sinon, deuxième cas, elle se trouve dans l'intervalle $[m_1, b_0]$.

- Si on est dans le cas $1)$, on posera alors $a_1 = a$ et $b_1 = m_1$
- Si on est dans le cas $1)$, on posera alors $a_1 = m_1$ et $b_1 = b$

Théorème des valeurs intermédiaires IV

Et on recommence le processus ! On posera ensuite $m_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ et on évalue $f(m_2)$ et on applique la même règle que précédemment.
On a donc deux possibilités :

1. $f(m_2)$ et $f(a_1)$ sont de signes contraires,
2. $f(m_2)$ et $f(b_1)$ sont de signes contraires.

Dans le premier cas, cela signifie que la valeur c recherchée se trouve dans l'intervalle $[a_1, m_2]$, sinon, deuxième cas, elle se trouve dans l'intervalle $[m_2, b_1]$ ...

Théorème des valeurs intermédiaires V

L'algorithme de dichotomie est appliqué à chaque fois au sous-intervalle dans lequel on observe un changement de signe. On peut y voir là un algorithme récursif au cours duquel la longeur de l'intervalle étudié est divisée par 2 à chaque itération.

L'erreur absolue de cette méthode ; après n étapes est donc au plus égale à

$$\frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Théorème des valeurs intermédiaires VI

Enfin, si on cherche à approcher la solution avec une erreur au plus égale à $\varepsilon > 0$, on peut alors dénombrer le nombre d'itérations nécessaires pour cela :

$$\frac{b-a}{2^N} \leq \varepsilon \implies N = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil .$$

Remarque : sur le plan algorithmique, ce n'est pas la méthode la plus efficace pour recherche un 0 d'une fonction, sa convergence est lente. Il existe d'autres méthodes (comme la méthode de Newton) qui permet de rechercher des zéros de façon plus efficace.
En revanche cette méthode a l'avantage d'être applicable à beaucoup plus de situations.

Théorème des valeurs intermédiaires VII

Pseudo-code

La procédure peut s'écrire comme suit :

- Tant que $(b-a) \geq \varepsilon$
    - $m = (a+b)/2$
    - si $(f(a) * f(m)) \leq 0$ alors $b = m$
    - sinon $a = m$
- Fin tant que

Théorème des valeurs intermédiaires VIII

Quelques applications

- Montrer que deux fonctions continues sur un même intervalle, et dont la différence change de signe dans ce même intervalle, prennent la même valeur en au moins un point.
  Exemple : $f, g \in C^0([a, b])$ avec $f(a) - g(a) < 0$ et $f(b) - g(b) > 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$. C'est une conséquence du TVI appliqué à la fonction $\varphi = f - g$.
  Cas particulier : Quid si g est la fonction identité ?
- Cela a aussi des applications sur les polynômes. Par exemple, cela assure l'existence d'une valeur c telle que $P(c) = 0$ pour tout polynôme de degré impair.

Théorème des valeurs intermédiaires IX

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.2: Théorème des valeurs intermédiaires

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, l'image $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Ou encore, de façon équivalente :

Pour toute application continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

Image d'un segment par une fonction continue I

Extrema d'une fonction continue sur un segment

Théorème 5.3: Théorème de Weierstrass

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue

Théorème 5.4: Image d'un segment par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$. Alors l'image de l'intervalle I par la fonction

Continuité uniforme et Lipschitz I

Continuité Uniforme et Théorème de Heine

Définition 5.8: Continuité Uniforme

Soit f une fonction définie sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$, f est dite **uniformément continue** sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \text{ tel que}$$
$$\forall (x, y) \in I^2, \ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que la continuité uniforme implique la continuité simple. Pourquoi selon vous ? (Comparer les deux définitions).

Continuité uniforme et Lipschitz II

Théorème 5.5: Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

On ira même plus loin juste après avec la notion de fonction lipschitzienne et cela deviendra intéressant avec les fonctions qui sont dérivables !

Continuité uniforme et Lipschitz III

Fonction Lipschitzienne

Définition 5.9: Fonction Lipschtizienne

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction f définie sur I est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On dit alors que f est k-*lipschitzienne*.

Dans le cas où la fonction f est k-*lipschitzienne* avec $0 \leq k < 1$, la fonction f est dute **contractante**.
En outre, on peut montrer que toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Pour finir

En conclusion

Dérivabilité

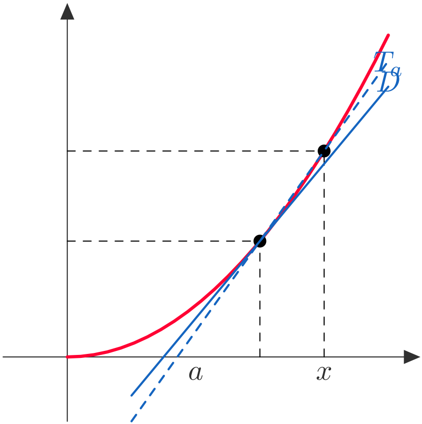
Généralités I

Maintenant que la notion de continuité est abordée, on peut s'intéresser aux propriétés de régularité des fonctions, *i.e.* la notion de dérivation d'une fonction d'une variable réelle sur un intervalle I.

Définition 6.1: Nombre dérivé

Soit une fonction f définie de I dans $\mathbb{R}$, et soit a un point de I. La fonction f est dite dérivable en a si la quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. On appelle alors cette limite *nombre dérivée de f en a* et on la note $f'(a)$.

Généralités II



On compare le graphe de la fonction f, la fonction définissant le nombre dérivée (D) et la tangente de f au point a, T_a.

Plus x est proche de a, plus la droite D et la tangente en a se confondent.

On rappelle que la tangente en a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

où $f'(a)$ traduit le taux d'accroissement de la tangente.

Généralités III

On peut définir la notion de nombre dérivée à gauche et à droite pour une fonction f selon que l'on approche du point a par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.

Ainsi, si la fonction f est définie à **droite de** a et si la quantité $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)}$ admet une limite à droite en a ; on appelle cette limite à droite le *nombre dérivée de f en a à droite* et on le note $f'(a^+)$.

On peut faire exactement la même chose à gauche ! Cette distinction est importante car on peut potentiellement trouver des limites différentes à gauche et à droite pour cette fonction, comme ce fut le cas pour la continuité.

Généralités IV

La notion de dérivabilité est également étroitement liée à celle de la continuité

Proposition 6.1: Lien avec la continuité

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et soit a un point de I. Si la fonction f est dérivable en a, alors elle est continue en a

Démonstration Supposons que f est dérivable en a. Alors la quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite en a et elle est donc bornée au voisinage de a. Ainsi, il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$ et $x \neq a$, nous ayons

Généralités V

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq M.$$

On a alors, pour tout $x \in\in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I,\ |f(x)-f(a)|M|x-a|$.
Or $\lim_{x\to a} |x-a| = 0$, donc $\lim_{x\to a} |f(x)-f(a)| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; la fonction f est donc continue en a.

Quelques théorèmes I

Il s'agit essentiellement de faire quelques rappels sur la dérivation de somme, produit ou de composé de fonctions.

Quelques théorèmes II

Proposition 6.2: Opérations sur la dérivation

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et dériables en $a \in I$. Alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,
- la fonction $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- la fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- si $g(a) \neq 0$, la fonction $1/g$ est dérivable en a et $(1/g)'(a) = -g'(a)/g(a)^2$.
- si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est dérivable en a et $$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}.$$

Rolle et Accroissements finis. I

Théorème 6.1: Théorème de Rolle

Soit une fonction f définie dans un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que f soit continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration : On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$.
Cette démonstration repose sur le fait que si f admet un extremum local en $c \in]a, b[$ et que f est dérivable en c, on peut alors conclure que $f'(c) = 0$.

Premier cas : si f est constante, tout point $c \in]a, b[$ est donc un extremum de f, on a donc $f'(c) = 0$ en tout point $c \in]a, b[$.

Rolle et Accroissements finis. II

Deuxième cas : si f n'est pas constante. Comme f est continue sur un segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes (Weierstrass !). Il existe donc un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$. De plus, f n'étant pas constante, l'une au moins des deux valeurs n'est pas égale à $f(a) = f(b)$, elle est l'est alors forcément en une valeur $c \in]a, b[$, où la fonction f admet un extremum, donc $f'(c) = 0$.

Rolle et Accroissements finis. III

Théorème 6.2: Egalité des accroissements finis

Soit une fonction f définie dans un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que f soit continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Cette égalité des accroissements finis permet d'obtenir un encadrement de la variation de f entre a et b à l'aide d'un encadrement de f' sur $]a, b[$. C'est ce que l'on appelle l'inégalité des accroissements finis.

Rolle et Accroissements finis. IV

Corollaire 6.1: Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que f soit continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- si m et M sont des réels tels que pour tout $x \in]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M$, alors on a :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

- si M est un réel tel pour tout $x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leq M$ alors on a

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Dérivées successives I

Définition 6.2: Fonction de classe C^1

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si la fonction f' est continue sur I alors la fonction f est dite *continuement dérivable* sur I, ou encore de classe C^1 sur I.
On notera alors $C^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur I.

Proposition 6.6: Fonction composée

Soient des fonctions $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^1(J, \mathbb{R})$ où J est un intervalle tel que $f(I) \subset J$. Alors la fonction $f \circ g$ est de classe C^1 sur I.

Dérivées successives II

Proposition 6.7: Fonction réciproque

Soit f une bijection de classe C^1 définie de I dans J. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^1 sur J.

On peut également définir, par une relation de récurrence, les dérivées n-ème d'une fonction f si ces dernières existent. Dit autrement, si f est une fonction de classe C^1 et que sa dérivée f' est dérivable, alors on a $f'' = (f')'$. Et de façon générale, si f est une fonction de classe C^n dont la dérivée énième $f^{(n)}$ est dérivable, alors $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Dérivées successives III

Proposition 6.8: Dérivées successives

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose de classe C^n sur I, alors

i) Pour tout réel λ, la fonction λf est de classe C^n sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

ii) La fonction $f+g$ est aussi de classe C^n sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

iii) La fonction $f \times g$ est de classe C^n sur I et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$.

iv) Si la fonction g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe C^n sur I.

Dérivées successives IV

Les trois premiers points de la proposition se démontrent par récurrence dont les deux premiers découlent directement de la linéarité de la dérivation.
Le troisième point (appelé **formule de Leibniz**) est intéressant à démontrer par récurrence mais très calculatoire : il s'agit de démontrer que la fonction $f \times g$ est de classe C^n sur I et que $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$.
Pour cela, on partira de la relation

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n-k)}\right)'.$$

Il s'agit ensuite de connaître les relations entre les coefficients binomiaux pour arriver au résultat souhaité.

Dérivées successives V

$$
\begin{aligned}
(f \times g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n-k)}\right)', \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\right)',
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ on sépare notre somme en deux

$$
= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \times g^{(n-k)}\right) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\right),
$$

$\downarrow$ on réindexe la première somme en posant $j = k+1$

$$
= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \left(f^{(j)} \times g^{(n+1-j)}\right) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\right),
$$

Dérivées successives VI

$\downarrow$ on sépare les termes en $j = n+1$ et $k = 0$

$$= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)},$$

$\downarrow$ on factorise

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$+ \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)},$$

$\downarrow$ propriété des coefficients binomiaux

Dérivées successives VII

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$
$$+ \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)},$$

$\downarrow$ on rassemble

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right).$$

Dérivées successives VIII

On peut, de façon similaire démontrer les résultats suivants

Proposition 6.9: Fonction composée

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient des fonctions $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^n(J, \mathbb{R})$ où J est un intervalle tel que $f(I) \subset J$. Alors la fonction $f \circ g$ est de classe C^n sur I.

Proposition 6.10: Fonction réciproque

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une bijection de classe C^n définie de I dans J. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^n sur J.

Convexité I

Les fonctions convexes sont d'une importance extrême dans le domaine de la Data Science et notamment en Machine Learning lors de la formulation de certains problèmes.

Elles ont des propriétés intéressantes pour une majeure partie des algorithmes d'optimisiation. Plus précisément, lorsque l'on cherche à minimiser une quantité comme une certaine "erreur" que l'on exprime avec une fonction convexe, on est sûr de pouvoir atteindre son minimum, donc de minimiser l'erreur.

On va donc, dans cette partie, essentiellement donner des propriétés et comment caractériser des fonctions convexes dans le cas où l'erreur que l'on cherche à minimiser ne dépend que d'un seul paramètre.

Convexité II

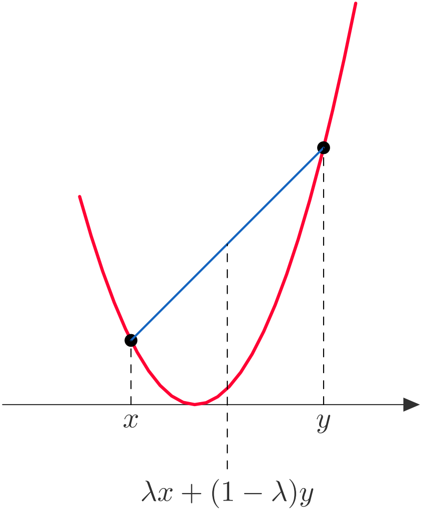
Définition 6.3: Fonction convexe

Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Cette fonction f est dite convexe si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Cette définition peut très facilement se représenter graphiquement et signifie que *les cordes d'une fonction se retrouve au dessus de sa courbe représentative*.

Convexité III



Convexité IV

La définition de convexité peut également être généralisée à l'utilisation de plusieurs points a_k dans notre intervalle I comme le montre la proposition suivante (que vous retrouverez en probabilités)

Proposition 6.11: Inégalité de Convexité

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ telle que f soit convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des élémements de I et $\lambda_1, , \lambda_n$ des nombres réels tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k).$$

Convexité V

On peut également fournir une autre caractérisation de la convexité en étudiant les pentes des sécantes dont une des extrémités est fixée.

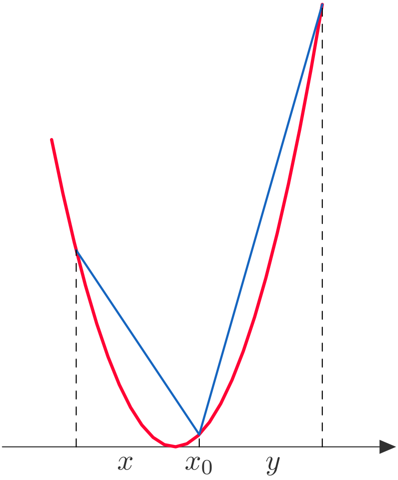
Proposition 6.12: Caractérisation convexité, ordre 0

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes

i) La fonction f est convexe.

ii) Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ par $\varphi_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

Convexité VI



Convexité VII

On peut fournir une deuxième caractérisation des fonctions convexes en étudiant ses tangentes,si la fonction étudiée est dérivable.

Proposition 6.13: Caractérisation convexité, ordre 1

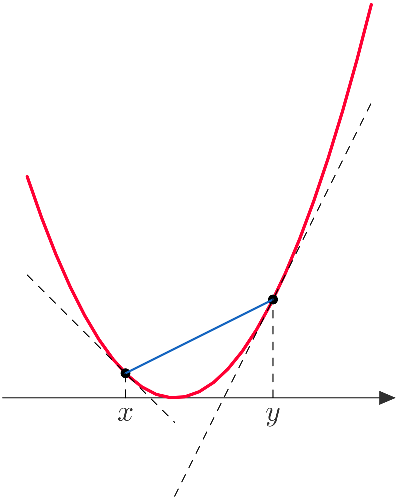
Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Alors la fonction f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante.

Convexité VIII

Proposition 6.14: Caractérisation convexité, ordre 1 bis

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors la courbe représentative de f est au dessus de chacune de ses tangentes.

Convexité IX



Convexité X

Démonstration On considère x_0 un élément de I. La tangente à la courbe C_f, représentative de la fonction f, en x_0 a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Définissons sur I la fonction s pour tout $x \in I$ par

$$s(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette fonction s représente, pour l'abscisse x donnée, la différence entre la courbe et sa tangente. On va montrer que cette quantité est toujours positive. Or, pour tout $x \in I$, $s'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ et, puisque la fonction f est croissante (car f est convexe) on peut alors dresser le tableau de variation suivant

Convexité XI

x		x_0	
$s'(x)$	$-$	0	$+$
s	$\searrow$	0	$\nearrow$

Ainsi $\forall\ x \in I, (x) \geq 0$, donc la courbe de f est toujours au dessus de sa tangente en x_0.

Convexité XII

Ce dernier résultat permet de donner une dernière caractérisation de la convexité en utilisant la dérivée seconde de la fonction f et qui exploite directement le lien entre convexité et croissante de la dérivée.

Corollaire 6.2: Caractérisation des fonctions convexes, ordre 2

Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables sur I. Alors la fonction f est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est positive sur I.

Pour finir

En conclusion

Primitive et Intégrale

Pour finir

En conclusion