



**INSTITUT  
de la  
communication**



**Algèbre Linéaire et Analyse de Données**

**Examen 2021 - 2022, Durée : 1h45  
Licence 2 MIASHS**

**Guillaume Metzler**

**Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2  
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France**

[guillaume.metzler@univ-lyon2.fr](mailto:guillaume.metzler@univ-lyon2.fr)

**Deux feuilles A4 manuscrites avec vos notes personnelles sont autorisées.**

**En revanche, l'usage de calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.**

### **Résumé**

L'examen est volontairement long afin de donner l'opportunité à chacun de trouver des questions qu'il puisse faire pendant le temps imparti.

En outre, il permettra de faire une meilleure distinction entre les étudiants.

A ce titre, il n'est bien sûr pas attendu à ce que vous traitiez tous les exercices !

Les différents exercices qui composent cet examen sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte de l'évaluation de la copie.

## Exercice 1

On considère la famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivante :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la définition de famille libre.
2. La famille de vecteurs  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  forme-t-elle une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  ? Est-elle une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$  ?
3. On note  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application vérifiant

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1, \phi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2, \text{ et } \phi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3.$$

- (a) Déterminer la matrice associée à l'application  $\phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , on la notera  $Mat(\phi)$ .
  - (b) L'application  $\phi$  est-elle inversible ? Déterminer son inverse.
4. On considère maintenant l'application  $\varphi$  dont la représentation matricielle dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est donnée par

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer une base du noyau de  $\varphi$  et précisez sa dimension.
- (b) Déterminer une base de l'image de  $\varphi$  et préciser sa dimension.

## Exercice 2

On note  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . On considère une application  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$\phi : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2. Déterminer  $E'$ , le sous-espace de l'ensemble des matrices inversibles de  $E$ .
3. Montrer que l'application  $\phi$  est linéaire. Est-elle injective ?
4. L'application  $\phi$  est-elle surjective ?

### Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ , on note  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sa base canonique. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  dont la représentation matricielle dans la base  $\mathcal{B}$ , notée  $A$ , est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

On pose  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  une base de  $E$ .
2. Déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .
3. Déterminer  $u(\mathbf{f}_1)$ ,  $u(\mathbf{f}_2)$  et  $u(\mathbf{f}_3)$  et en déduire une représentation matricielle de  $A$  dans cette nouvelle base  $\mathcal{B}'$ . Elle sera appelée  $D$  dans la suite.
4. Calculer  $D^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. Donner l'expression de  $A^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  en fonction de la matrice  $D^n$ .

### Exercice 4

1. Soit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Considérons la famille de vecteurs  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer un vecteur  $\mathbf{v}_3$  tel que la famille  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  forme une famille orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (b) Déterminer l'espace orthogonal au vecteur  $\mathbf{v}_1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , *i.e.* l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui sont orthogonaux au vecteur  $\mathbf{v}_1$ .
2. On considère l'application  $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$$

- (a) Montrer que l'application  $\phi$  définit un produit scalaire.
- (b) Déterminer la forme quadratique associée et la matrice associée à l'application  $\phi$ .
- (c) La forme quadratique est-elle définie positive ?

### Exercice 5

Soit  $q$  la forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$

1. Donner l'expression analytique de  $q$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  et expliciter sa forme polaire, *i.e.* déterminer l'expression de  $q(\mathbf{x})$  et celle de  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  où  $\phi$  désigne la forme polaire associée.

2. Vérifier que la famille  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  définie par

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

est une base de  $\mathbb{R}^3$  et donner la matrice  $A'$  de  $q$  dans cette base.

3. Expliciter  $q$  dans cette base.  
 4. Déterminer la projection du vecteur  $\mathbf{e}'_2$  sur le vecteurs  $\mathbf{e}'_1$  puis sur le vecteur  $\mathbf{e}'_3$ .

## Exercice 6

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Rappeler le lien entre valeurs propres d'une matrice et sa trace.
2. Déterminer la dimension du noyau de la matrice  $A$ .
3. Quel est le déterminant de  $A$ ? Préciser le rang de la matrice  $A$ .
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $A$ .

*Indication : on pourra effectuer les calculs suivants*

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

## Exercice 7

Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables ou non

1. La matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice  $C$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$