Mathématiques et Statistiques appliquées à la Gestion

Correction Lab 1
BBA-1 (2021-2022)

Guillaume Metzler
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC EA3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Exercices de la section 2

Exercice 1. La durée de vie d'une ampoule, donnée en en heures, est représentée par une variable aléatoire X dont la distribution est supposée Normale avec un écart-type $\sigma = 400$, le paramètre de la moyenne μ est quant à lui inconnu.
Les mesures de la durée de vie d'un lot de 9 ampoules ont donné les résultats suivants :

$$2000; 1890; 3180; 1990; 2563; 2876; 3098; 2413; 2596.$$

a) Déterminer un intervalle de confiance pour la durée de vie moyenne d'une ampoule au niveau 90%

Nous sommes dans le cas où **nous connaissons l'écart-type σ de la distribution des données**. On nous indique même que les données sont issues d'une distribution gaussienne. Pour construire notre intervalle de confiance, nous aurons alors besoin de la moyenne empirique $\bar{x}$ sur notre échantillon. Pour rappel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Avec les données dont nous disposons, nous avons alors $\bar{x} \simeq 2512$.

L'intervalle de confiance sur la moyenne μ est donné par

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Comme nous souhaitons un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha = 0.9$, nous aurons donc besoin de déterminer le quantile d'ordre $1-\alpha/2 = 0.95$ de la loi normale centrée réduite. D'après la table des Z, nous avons $z_{0.95} = 1.645$.

Ainsi un intervalle de confiance de niveau 0.9 sur la moyenne μ est donné par

$$\left[2512 - 1.645\frac{400}{\sqrt{9}}; 2512 + 1.645\frac{400}{\sqrt{9}}\right].$$

b) Peut-on affirmer, avec un risque d'erreur de 10% que la durée de vie moyenne d'une ampoule est égale à 2500 heures ?

Ici on demande simplement d'interpréter le résultat précédent. A la question précédente nous avons déterminé un intervalle de confiance de niveau 90% sur la moyenne, cela signifie que nous avons 90% de chance que ce paramètre inconnu se trouve dans l'intervalle précédent et 10% de risque qu'il se trouve en dehors.

La valeur 2500 appartenant l'intervalle de confiance, on peut alors affirmer que la durée de vie moyenne d'une ampoule est égale à 2500 heures.

Exercice 2. Une usine spécialisée dans la construction de câble souhaite vérifier la fiabilité de ses produits en évaluant la masse maximale que ses câbles peuvent supporter.
Pour cela, on modélise la masse maximale, en tonnes, supportée par un câble par une variable aléatoire X suivant une loi Normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0.5$. Une étude a été effectuée sur un échantillon de 50 câbles. Il en ressort, en moyenne, que la charge maximale supportée par un câble est de 12.2 tonnes.

a) Déterminer un intervalle de confiance pour μ au niveau 0.99.

On procède de la même manière que dans l'exercice précédent. L'intervalle de confiance sur la moyenne μ est donné par

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Comme nous souhaitons un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha = 0.99$, nous aurons donc besoin de déterminer le quantile d'ordre $1 - \alpha/2 = 0.995$ de la loi normale centrée réduite. D'après la table des Z, nous avons $z_{0.995} = 2.575$.

Ainsi un intervalle de confiance de niveau 0.99 sur la moyenne μ est donné par

$$\left[12.2 - 2.575\frac{0.5}{\sqrt{50}}; 12.2 + 2.575\frac{0.5}{\sqrt{50}}\right].$$

b) Peut-on affirmer que la machine, avec un risque d'erreur de 1% produit bien des câbles capables de supporter une masse d'au moins 11.5 tonnes ?

Pour répondre à cette question, il nous faudrait construire **un intervalle de confiance unilatéral** de la forme

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty\right].$$

Nous aurons donc besoin du quantile d'ordre 0.99 de la normale centrée réduite qui est donné par $z_{0.99} = 2.33$ et notre intervalle de confiance serait alors

$$\left[12.2 - 2.33\frac{0.5}{\sqrt{50}}; +\infty\right] = [12.18; +\infty].$$

Ainsi, nous pouvons affirmer avec une certitude de 99% que la machine produit bien des câbles capables de supporter une masse d'au moins 12.18 tonnes. A fortiori cette même machine bien des câbles capables de supporter une masse d'au moins 11.5 tonnes.

c) Déterminer la taille minimale de l'échantillon étudié pour que la longueur de l'intervalle de confiance au niveau 99% soit inférieure à 0.2.

L'énoncé n'étant pas précis, mais le contexte devrait aider, on va reprendre ici l'intervalle de confiance construit à la question a). On rappelle que notre intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ est donné par

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty\right].$$

On souhaite ici que la longueur de notre intervalle de confiance[1] de niveau $1-\alpha$ n'excède pas 0.2.
Nous devons donc résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned}
2z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq 0.2, \\
&\downarrow \text{ on multiplie par } \sqrt{n} \\
2z_{1-\alpha/2}\sigma &\leq 0.2\sqrt{n}, \\
&\downarrow \text{ on divise par } 0.2 \\
2z_{1-\alpha/2}\sigma/0.2 &\leq \sqrt{n}, \\
&\downarrow \text{ on applique la fonction } x \mapsto x^2 \\
4z_{1-\alpha/2}^2\sigma^2/0.2^2 &\leq n.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que n doit être supérieur à $4 \times 2.575 \times 0.5^2/(0.2^2) = 64.3$, donc $n \geq 65$

Exercices de la section 3

Exercice 2. Une biologiste étudie un type d'algue qui attaque les plantes marines. La toxine contenue dans cette algue est obtenue sous forme d'une solution organique. Le biologiste mesure la quantité de toxine par gramme de solution qui est modélisée par une variable aléatoire X dont l'espérance μ et la variance σ^2 sont inconnues.
Il a obtenu les neuf mesures suivantes, exprimées en milligrammes :

$$1.2; 0.8; 0.6; 1.1; 1.2; 0.9; 1.5; 0.9; 1.0$$

a) Donnez un intervalle de confiance de niveau 0.90 de quantité de toxine.

Nous sommes cette fois-ci dans le cas où **nous ne connaissons pas l'écart-type σ de la distribution des données**. Pour construire notre intervalle de confiance, nous aurons alors besoin de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart-type s sur notre échantillon qui est ici de taille $n = 9$.
On rappelle que l'on a

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

et

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Et notre intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ est défini par

$$\left[\bar{x} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right],$$

où $t_{1-\alpha/2,n-1}$ **est le quantile d'ordre** $1-\alpha/2$ **d'une loi de Student à** $n-1$ **de grés de liberté**.

1. on rappelle que la longueur d'un intervalle $[a, b]$ est $b - a$.

Avec les données dont on dispose, on trouve une moyenne $\bar{x} = 1.02$ et un écart-type $s = 0.26$. Comme nous souhaitons un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha = 0.9$, nous aurons donc besoin de déterminer le quantile d'ordre $1 - \alpha/2 = 0.95$ de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté. D'après la table des T, nous avons $t_{0.95,8} = 1.86$.

Notre intervalle de confiance est alors donné par

$$\left[1.02 - 1.86\frac{0.26}{\sqrt{9}}; 1.02 + 1.86\frac{0.26}{\sqrt{9}}\right] = [0.86; 1.18] \,.$$

b) Peut-on dire, avec un niveau de confiance de 0.80 que la quantité de toxine par gramme de solution μ est égale à 1.3 mg.

On procède comme à la question précédente mais on doit cette fois-ci déterminer le quantile d'ordre 0.9 de la loi de Student à 8 degrés de liberté. On a $t_{0.9,8} = 1.397$ ce qui donne l'intervalle de confiance suivant

$$\left[1.02 - 1.397\frac{0.26}{\sqrt{9}}; 1.02 + 1.397\frac{0.26}{\sqrt{9}}\right] = [0.86; 1.18] = [0.90, 1.14] \,.$$

Etant donné l'intervalle de confiance, on ne peut pas dire que la quantité de toxine par gramme de solution μ est égale à 1.3 mg au risque de 20%.