Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Devoir Personnel
Licence 2 MIASHS (2024-2025)

Guillaume Metzler
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Pour rappel, ce devoir est facultatif et permettra de modifier votre note en fonction de ce que vous avez pu traiter dans ce devoir.
Il se compose de deux exercices et d'un problème qui sont indépendants.
La qualité de la rédaction et la clarté des explications sera prise en compte dans l'évaluation de votre travail.
Bien évidemment, vous avez le droit d'utiliser tous les résultats qui ont été démontrés en cours sans démonstration, sauf si on vous demande explicitement de le montrer.

Quelques informations sur les exercices :

1. **Exercices :** Les deux exercices portent sur des applications de la diagonalisation de matrices.
2. **Problème :** Le but de ce problème est de démontrer plusieurs critères qui peuvent servir à prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive.

Travail à rendre pour le dernier CM afin que ce dernier puisse être pris en compte.

Exercice 1 : Autour de la diagonalisation

Cet exercice combine l'étude de matrices et la notion de convergence de suites réelles.

1. Justifier que la matrice $\mathbf{A}$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et déterminer une matrice de passage $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ soit diagonalisable.

2. On souhaite effectuer une application de la question précédente, pour cela on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(uv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} & = & -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + v_n - 3w_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{y}_n$ en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n. A quelle condition sur les valeurs de u_0, v_0 et w_0 les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(uv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Essayer d'expliciter ces suites.

Exercice 2 : Racine cubique d'une matrice

On dit qu'une matrice $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe une matrice $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^3$. Dans ce cas, on dit que $\mathbf{B}$ est une racine cubique de $\mathbf{A}$.

On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

dont on cherchera les racines cubiques.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, telle que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. Montrer qu'une matrice $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de $\mathbf{A}$ si et seulement $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ est une racine cubique de $\mathbf{D}$.
3. Soit $\mathbf{C} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de $\mathbf{D}$. Montrer que les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{C}$ commutent, puis en déuire que la matrice $\mathbf{C}$ est diagonale.
4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de $\mathbf{D}$, puis l'ensemble des racines cubiques de $\mathbf{A}$.

Problème : Caractérisation des matrices définies positives

Le but de ce problème est démontrer et d'utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle, que pour tout entier naturel non nul n, une matrice symétrique $\mathbf{M} \in S_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},\ \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} > 0.$$

1. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente que la matrice $\mathbf{A}$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est définie positive.

Caractérisation spectrale

2. Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.
3. Application : démontrer que le polynome P définie par $P(X) = X^3 - 6x^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes. On ne cherchera pas forcément à les déterminer. Montrer alors que la matrice $\mathbf{B}$ définie par

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est définie positive grâce à la cractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs

4. Démontrer qu'une matrice définie positive $\mathbf{M}$ de taille quelconque a toujours une trace et un déterminant strictement positifs.
5. Démontrer qu'une matrice $\mathbf{M} \in S_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.
6. Le résultat de la question précédente est-il toujours vrai pour les matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
7. Application : utiliser le résultat précédent afin de démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

admet un extremum local et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

Indication : on calculera la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est la dérivée seconde de la fonction f par rapport à la variable x (dans ce cas y est considérée comme une constante), $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est la dérivée de f par rapport à x puis on re-dérive l'expression par rapport à y.
La fonction f sera dite convexe si toutes les valeurs propres de cette matrice sont positives ou nulles et concaves dans le cas contraire.

Le critère de Silvester

Dans cette partie on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension. Pour une matrice carrée quelconque $\mathbf{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et un entier $k \in [\![1, n]\!]$, on définit le k-ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice $\mathbf{M}_k$ qui correspond à la matrice formée par les k premières lignes et colonnes de la matrice $\mathbf{M}$.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont les déterminants des matrices

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante : *une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Silvester.*

8. Soit $n \geq 2$ soit une matrice $\mathbf{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^\top & \alpha \end{pmatrix},$$

   où $\mathbf{M}_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que la matrice $\mathbf{M}_{n-1}$ est définie positive.
   Justifier l'existence d'un colonne $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
   En notant $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $\mathbf{Q}^\top \mathbf{M} \mathbf{Q}$ s'écrit par blocs $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix}$.
9. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.
10. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\mathbf{C}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

   est-elle défnie positive ?

11. La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle définie positive ? Justifier.

12. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

13. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^\star$ la matrice

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} & \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n\mathbb{R}$$

est-elle définie positive ?