Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Examen 2023 - 2024, Durée : 1h30
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Une feuille A4 manuscrite avec vos notes personnelles est autorisée.

En revanche, l'usage de calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.

Résumé

L'examen est volontairement long afin de donner l'opportunité à chacun de trouver des questions qu'il puisse faire pendant le temps imparti.
En outre, il permettra de faire une meilleure distinction entre les étudiants.
A ce titre, il n'est bien sûr pas attendu à ce que vous traitiez tous les exercices !

Les différents exercices qui composent cet examen sont indépendants. La qualité de la rédaction ainsi que les justifications apportées pour répondre aux différentes questions seront en compte de l'évaluation de la copie.

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère un endomorphisme représentée par une matrice A et une matrice P respectivement définies par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ? On notera D la matrice diagonale associée
3. Déterminer une relation entre les matrices A, D et P.
4. En déduire la valeur de A^n pour tout entier n.
5. Exprimer A^3 en fonction de A^2 et A et en déduire que la matrice A n'est pas inversible.
6. Résoudre l'équation matricielle $N^3 = D$ en admettant que les solutions sont nécessairement des matrices diagonales.

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^4$, et on considère la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) définie par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \text{et } u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) forme une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?
3. On pose $F = Vect(u_1, u_2)$ et $G = Vect(u_3, u_4)$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0).$$

   (a) Montrer que f est une application linéaire
   (b) Déterminer le noyau de l'application f (on donnera une base du noyau) et montrer que $Ker(f) = G$.
   (c) Déterminer l'image de l'application f et vérifier que $Im(f) = F$.
   (d) Donner la représentation matricielle de l'application f. On notera A cette matrice.
   (e) Montrer que $A^2 = 2A$.
   (f) En déduire la nature de l'application $f/2$.
   (g) A l'aide du résultat précédent, en déduire la nature de l'application $g = f - Id$.

Exercice 3

On considère la matrice A, représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que cette matrice est diagonalisable.

Remarque : cette question peut se traiter sans passer par la définition de polynôme caractéristique. Trace et rang peuvent être utiles !

Exercice 4

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$. Enfin, on pose

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \text{et} \quad \mathbf{f}'_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2),\ \mathbf{f}'_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2).$$

1. Montrer que les familles $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ et $(\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2 2)$ forment des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.
2. Déterminer la représentation matricielle de l'application linéaire u relativement à ces deux bases.

Exercice 5

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 3u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 - u_2v_1 - u_1v_2 - u_3v_2 - u_2v_3.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire.
2. Soit P la matrice de passage de la base canonique $(\mathbf{e}_i)$ vers une base $(\mathbf{e}'_i)$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer la matrice du produit scalaire associée à l'application f dans la base canonique $(\mathbf{e}_i)$. On notera S cette matrice.

   (b) Déterminer la matrice S' de ce même produit scalaire mais dans la base $(\mathbf{e}'_i)$.
3. On considère les vecteurs $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ et $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ dans la base $(\mathbf{e}'_i)$. Déterminer le produit scalaire de ces deux vecteurs par l'application f et conclure.