Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Corrections des TD
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Ce document contient la correction des exercices proposées pour la première partie de ce cours,*i.e.* sur la partie relative à l'algèbre linéaire et à la géométrique euclidienne.

Il est uniquement à destination des enseignants pour cet enseignement. Merci de ne pas le diffuser aux étudiants.

1 Espaces vectoriels et Applications linéaires

1.1 Applications du cours

Exercice 1.1. *Soit E un ensemble, typiquement $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une loi interne, notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$ définies pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \textit{et} \quad \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2) = (0, \lambda x_2).$$

L'ensemble $(E, +, \cdot)$ a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Correction

On peut montrer qu'il ne s'agit pas d'un espace vectoriel. En effet, rappelons que nous devons montrer que les différents points

1. $(E, +)$ est un groupe abélien (*i.e.* commutatif)
2. $\forall \mathbf{x} \in E,\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E,\ \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}'$.
5. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$.

1. (a) Il est clair que la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ reste un élément de $\mathbb{R}^2$.
   (b) La loi $+$ est associative, nous avons bien $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
   (c) Elle admet un élément neutre qui est le vecteur $(0, 0)$.
   (d) L'existence d'un inverse pour tout élément $\mathbf{x}$ défini par $-\mathbf{x}$ pour lequel on a $-\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = 0$.
   (e) La loi $+$ est bien commutative, on a bien $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
2. L'existence d'un élément neutre pour la loi externe, noté 1, pour lequel nous devons avoir $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ Or, pour tout $\mathbf{x}$, nous avons $1\mathbf{x} = 1 \cdot (x_1, x_2) = (0, x_2) \neq \mathbf{x}$ sauf lorsque $x_1 = 0$. Ce qui met en défaut ce point là.
3. La distributivité par rapport à la loi interne : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = &\ (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2), \\ = &\ (0, (\alpha + \beta) x_2), \\ = &\ (0, \alpha x_2) + (0, \beta x_2), \\ = &\ \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}\end{aligned}$$

4. On vérifie aisément la distributivité par rapport à la loi externe. Pour cela $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$,

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = &\ \lambda \cdot (x_1 + x_1', x_2 + x_2'), \\ = &\ (0, \lambda(x_2 + x_2')), \\ = &\ (0, \lambda x_2 + \lambda x_2'), \\ = &\ (0, \lambda x_2) + (0, \lambda x_2'), \\ = &\ \lambda \cdot (x_1, x_2) + \lambda \cdot (x_1', x_2'), \\ = &\ \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{x}'.\end{aligned}$$

5. On vérifie l'associativitié par rapport à la loi externe $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\mathbf{x}\in E$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{x}) &= \alpha\cdot(0,\beta x_2),\\ &= (0,(\alpha\beta)x_2),\\ &= (\alpha\beta)\cdot\mathbf{x}\end{aligned}$$

L'espace ainsi étudié n'est donc pas un espace vectoriel.

Exercice 1.2. *Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré n, i.e. si P est un élément de E, alors il existe des coefficients $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et $a_n\neq 0$ tels que*

$$P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k.$$

L'ensemble E muni des lois internes et externes, respectivement définies, pour tout $P,Q\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ par

$$P(X)+Q(X)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k \quad \textit{et} \quad \lambda\cdot P(X)=\sum_{k=0}^{n}\lambda a_kX^k$$

a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Sans chercher à justifier votre réponse, quelle est une base de cet espace vectoriel et quelle est sa dimension ?

Correction

On refait exactement les mêmes vérifications que pour l'exercice précédent

1. (a) Il est clair que la somme de deux éléments de E reste un élément de E, *i.e.* la somme de deux polynôme reste un polynôme.
   (b) La loi + est associative nous avons bien $P+(Q+R)=(P+Q)+R$. En effet

$$\begin{aligned}P(X)+(Q(X)+R(X)) &= \sum_{k=0}^{n}a_iX^i+(\sum_{k=0}^{n}b_iX^i+\sum_{k=0}^{n}c_iX^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}a_iX^i+\sum_{k=0}^{n}b_iX^i+\sum_{k=0}^{n}c_iX^i,\\ &= (\sum_{k=0}^{n}a_iX^i+\sum_{k=0}^{n}b_iX^i)+\sum_{k=0}^{n}c_iX^i,\\ &= (P(X)+Q(X))+R(X).\end{aligned}$$

   (c) Elle admet un élément neutre qui est le polynôme nul $P=0$.
   (d) L'existence d'un inverse pour tout élément P défini par $-P$ pour lequel on a $-P+P=P-P=0$.
   (e) La loi + est bien commutative, on a bien $P+Q=Q+P$.
2. L'existence d'un élément neutre pour la loi externe, noté 1, pour lequel nous devons avoir $1\cdot P=P$ Or, pour tout P, nous avons $1\cdot P(X)=\sum_{k=0}^{n}1a_kX^k=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k=P(X)$.

3. La distributivité par rapport à la loi interne : $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall P\in E$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot P &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha+\beta)a_iX^i,\\ &= \sum_{k=0}^{n}\alpha a_iX^i+\sum_{k=0}^{n}\beta a_iX^i,\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{n}a_iX^i+\beta\sum_{k=0}^{n}a_iX^i,\\ &= \alpha\cdot P+\beta\cdot P\end{aligned}$$

4. On vérifie aisément la distributivité par rapport à la loi externe. Pour cela $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall P,Q\in E$,

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(P+Q) &= \lambda\cdot(\sum_{k=0}^{n}(a_i+b_i)X^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}\lambda(a_i+b_i)X^i,\\ &= \sum_{k=0}^{n}\lambda a_iX^i+\sum_{k=0}^{n}\lambda b_iX^i,\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{n}a_iX^i+\lambda\sum_{k=0}^{n}b_iX^i,\\ &= \lambda\cdot P+\lambda Q.\end{aligned}$$

5. On vérifie l'associativitié par rapport à la loi externe $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\mathbf{x}\in E$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot P) &= \alpha\cdot(\sum_{k=0}^{n}\beta a_iX^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}\alpha(\beta a_iX^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha\beta)a_iX^i,\\ &= (\alpha\beta)\cdot P\end{aligned}$$

Exercice 1.3. *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathbf{v}_1=(1,1)$ *et* $\mathbf{v}_2=(2,0)$ *forme une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Correction

Pour cet exercice, on se rappelle simplement qu'une famille de E *est dite génératrice si tout élément* $\mathbf{x}$ *de* E *peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille.*

Considérons $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ et exprimons $\mathbf{x}$ comme une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, *i.e.* trouver des valeurs α_1 et α_2 telles que

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2 \quad\text{soit}\quad \begin{cases}x_1=\alpha_1+2\alpha_2\\ x_2=\alpha_1\end{cases}$$

La deuxième équation nous conduit à $\alpha_1 = x_2$ et avec la première équation on a

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\alpha_2 + \alpha_1, \\ &\downarrow \text{ en isolant } \alpha_2 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Exercice 1.4. *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ *et* $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 2)$ *forme une famille libre de* $\mathbb{R}^3$.

Correction

On rappelle qu'une famille est dite libre si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs conduisant au vecteur nul est la combinaison triviale.

Nous devons donc vérifier que l'équation

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = 0$$

admet pour une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On remarque que $\mathbf{v}_2$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On va donc se concentrer sur les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ et montrer qu'ils forment une famille libre. Plus précisément, on va se concentrer sur les deux premières composantes de ces vecteurs.
Il est très facile de voir qu'ils forment deux "vecteurs" linéairement indépendants.

Exercice 1.5. *Montrer que la famille* $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *forme une base de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *où*

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 5, 2) \quad \textit{et} \quad \mathbf{v}_3 = (-2, -2, 1).$$

Correction

La famille $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une base de l'espace $\mathbb{R}^3$. En effet, il nous suffit de montrer qu'elle forme une famille libre et/ou génératrice de $\mathbb{R}^3$ (on pourra alors conclure à l'aide d'un argument portant la dimension de l'espace étudié).
On décide de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des nombres réels tels que $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Montrons alors alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -2\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

En remontant de bas en haut dans le système, on montre bien que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la familleest donc libre.
Ayant une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, cette famille constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.6. *On considère une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *définies par*

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0), \ \mathbf{v}_2 = (0,0,1,1) \quad et \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0-1, -2).$$

Cette famille est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$ *? Compléter cette famille en une base de l'espace* $\mathbb{R}^4$.

Correction

On procède comme à l'exercice précédent, considère λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Montrons alors alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

La deuxième équation implique que $\lambda_1 = 0$, la première équation va alors montrer que $\lambda_3 = 0$ et la dernière équation (ou la troisième) permettra de conclure que λ_3 est nul.

Regardons comment compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on va représenter la famille de vecteurs sous forme de matrice et appliquer la méthode du pivot de gauss pour obtenir une matrice triangulaire supérieure (l'ordre des vecteurs importe peu).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1}$$

Pour compléter cette forme triangulaire, on peut donc prendre un vecteur $\mathbf{v}_4$ de la forme $(0,0,0,\alpha)$ où $\alpha \neq 0$.

Exercice 1.7. *Montrer que le noyau d'une application linéaire* ϕ *de* E *forme un sous-espace de* E*, i.e.*

$$Ker(\phi) = \{\mathbf{x} \in E : \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

muni des lois internes et externes de E *(addition et multiplication) est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Correction

$Ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, il suffit de montrer deux choses :

— que cet ensemble est non vide
— qu'il est stable par combinaison linéaire

Il est clair que $Ker(\phi)$ est non vide car nous avons $\mathbf{0} \in Ker(\phi)$ car ϕ est une application linéaire. Il nous reste alors à montrer que $Ker(\phi)$ est stable par combinaison linéiare. Pour cela, considérons $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ deux éléments du noyau de ϕ et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous devons montrer que $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}' \in Ker(\phi)$.

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}') &= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\alpha\mathbf{x}'), \\
&\quad \downarrow \text{ linéarité de } \phi \\
&= \phi(\mathbf{x}) + \alpha\phi(\mathbf{x}'), \\
&\quad \downarrow\ \mathbf{x} \in Ker(\phi) \text{ et } \mathbf{x}' \in Ker(\phi) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Donc $Ker(\phi)$ est bien un sous-espace de E.

Exercice 1.8. *On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E.*

Montrer que les ensembles P et I, munis des structures induites par celle de E sont des sous-espaces vectoriels de E. Que peut-on dire de l'intersection de ces deux sous-espaces.

Correction

On commence par rappeler qu'une fonction paire est une fonction f qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

De même, une fonction g est dite impaire si elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = -g(x).$$

Pour montrer que P et I sont des sous espaces de E, il faut à nouveau montrer que les ensembles sont non vides et qu'ils sont stables par combinaisons linéaires.

- **Espace P :** cet espace est clairement non vide car la fonction nulle, $f = 0$, vérifie bien $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x. Soient maintenant $f, g \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
(f + \lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x), \\
&\quad \downarrow\ f \text{ et } g \text{ appartiennent à } P \\
&= f(-x) + \lambda g(-x), \\
&= (f + \lambda g)(-x)
\end{aligned}$$

  Donc P est bien un sous-espace de E.

- **Espace I :** cet espace est clairement non vide car la fonction nulle, $f = 0$, vérifie bien $-f(x) = f(-x)$ pour tout réel x. Soient maintenant $f, g \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
(f + \lambda g)(-x) &= f(-x) + \lambda g(-x), \\
&\quad \downarrow\ f \text{ et } g \text{ appartiennent à } I \\
&= -f(x) - \lambda g(x), \\
&= -(f + \lambda g)(x)
\end{aligned}$$

  Donc I est bien un sous-espace de E.

Il est aussi évident que l'intersection de ces deux sous-espaces est nul. En effet, soit $h \in P \cap I$, alors la fonction h vérifie les relations suivantes

$$\begin{aligned} h(x) - h(-x) = 0 \quad \forall x \text{ car } h \in P, \\ h(-x) + h(x) = 0 \quad \forall x \text{ car } h \in I. \end{aligned}$$

En sommant les deux relations, nous avons $2h(x) = 0$ pour tout réel x, donc $h = 0$.

On pourrait aller plus loin dans cet exercice en montrant que P et I sont en somme directe, il nous resterait à montrer que toute fonction h de E peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Ce que l'on peut vérifier facilement en écrivant :

$$h(x) = \underbrace{\frac{h(x) + h(-x)}{2}}_{f \in P} + \underbrace{\frac{h(x) - h(-x)}{2}}_{g \in I}.$$

Exercice 1.9. *Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\phi(x_1, x_2) = (3x_1 + 6x_2, -2x_1)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Est-ce que cette application est injective ? Est-elle surjective ?

Correction

Commençons par montrer qu'il s'agit d'une application linéaire. Considérons $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) =& \phi(x_1 \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2), \\ & \downarrow \text{ définition de } \phi \\ =& (3x_1 + 6x_2 + \lambda(3y_1 + 6y_2), -2x_1 - \lambda y_1), \\ =& (3x_1 + 6x_2, -2x_1) + \lambda(3y_1 + 6y_2, -2y_1), \\ =& \phi(\mathbf{x}) + \lambda\phi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Etudions maintenant le noyau de cette application. Considérons $\mathbf{x}$ un élément du noyau de ϕ, nous avons alors $\phi(\mathbf{x}) = 0$, ce qui nous conduit au système

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 &= 0, \\ -2x_1 &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation implique $x_1 = 0$, ce qui, répercuter dans la première, implique $x_2 = 0$. L'application ϕ est donc bien injective.

Pour voir si elle est surjective, considérons un élément $\mathbf{y}$ et montrons qu'il existe $\mathbf{x} \in E$ tel que $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Cela nous amène à considérer le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 &= y_1, \\ -2x_1 &= y_2. \end{cases} \to \begin{cases} x_2 &= \frac{1}{6}(y_1 + \frac{y_2}{4}), \\ x_1 &= -\frac{y_2}{2}. \end{cases}$$

qui admet une solution, l'application est donc bien surjective. L'application ϕ est donc bijective !

Exercice 1.10. *On considère l'application $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, i.e. une application de l'espace des polynômes dans l'espace des polynômes (de degré quelconque), définie par*

$$\phi(P(X)) = XP(X).$$

Montrer que cette application définie un endormorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{K}[X]$.

Correction

Il faut d'abord montrer que l'application ϕ est linéaire.

Soient P et Q deux polynômes et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha P(X) + \beta Q(X)) &= X(\alpha P(X) + \beta Q(X)), \\
&\quad \downarrow \text{ on développe} \\
&= \alpha XP(X) + \beta XQ(X), \\
&\quad \downarrow \text{ on applique la définition de } \phi \\
&= \alpha\phi(P(X)) + \beta\phi(Q(X)),
\end{aligned}$$

L'application ϕ est donc linéaire et on vérifie facilement qu'elle transforme tout polynôme en polynôme. c'est donc un endomorphisme.

Pour montrer que l'endomorphisme est injectif, on va montrer que $\phi(P(X)) = 0$ implique que P est le polynôme nul.

Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\phi(P(X)) = 0$, on a alors $XP(X) = 0$ pour tout X. Or X n'est pas nul pour tout X, nécessairement

Pour montrer que l'application n'est pas surjective, il suffit d'observer que le polynôme constant n'appartient pas à l'image de ϕ.

Pour cela, considérons $a \in \mathbb{R}^\star$ et supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\phi(P(X)) = a$ pour tout X Pour tout X nous aurions donc $XP(X) = a$. En particulier, pour $X = 0$ nous aurons $0 = a$, or $a \neq 0$, donc ϕ n'est pas surjective.

Exercice 1.11. *On considère l'application $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, i.e. une application de l'espace des polynômes dans l'espace des polynômes (de degré quelconque), définie par*

$$\phi(P(X)) = P'(X),$$

où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé. Montrer que cette application définie un endormorphisme surjectif mais non injectif de $\mathbb{K}[X]$.

Correction

Il faut d'abord montrer que l'application ϕ est linéaire.

Soient P et Q deux polynômes et α et β deux élements de $\mathbb{K}$, alors

$$\phi(\alpha P(X) + \beta Q(X)) = (\alpha P(X) + \beta Q(X))',$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \downarrow \text{ la dérivation est linéaire} \\
&= \alpha P'(X) + \beta Q'(X), \\
&\quad \downarrow \text{ on applique la définition de } \phi \\
&= \alpha\phi(P(X)) + \beta\phi(Q(X)),
\end{aligned}
$$

L'application ϕ est donc linéaire et on vérifie facilement qu'elle transforme tout polynôme en polynôme. C'est donc un endormorphisme.

Pour montrer que l'endomorphisme est surjectif, on va montrer que tout polynôme appartient à l'image de ϕ à l'aide d'une construction explicite

Soit Q un élément de $\mathbb{K}[X]$, alors Q peut s'écrire sous la forme

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

Considérons maintenant le polynôme P défini par

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}.$$

On vérifie immédiatement que l'on a bien $\phi(P) = P' = Q$.

Pour montrer que l'application n'est pas injective, on va montrer que son noyau n'est pas réduit au polynôme nul, mais plutôt aux polynômes constants.

Supposons que l'on a $\phi(P(X)) = P'(X) = 0$. Donc P est un polynôme dont la première dérivée est nulle, or les seuls polynômes dont la dérivée est nulle sont les polynômes constants qui ne se limitent donc pas au polynôme nul (pour tout réel a, $\phi(a) = 0$). ϕ n'est donc pas injective.

Exercice 1.12. *On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\phi(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 8x_1 + 2x_3).$$

Déterminer le noyau de l'application linéaire ϕ. Quelle est sa dimension ?

Correction

Le noyau de l'application linéaire ϕ est défini comme l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ de $E = \mathbb{R}^3$ vérifiant $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

On va donc chercher à résoudre un système linéaire homogène de trois équations à trois inconnues.

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 8x_1 + 2x_3 &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} -4x_1 &= x_3 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 & \\ 0 &= 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_3 &= -4x_1 \\ x_2 &= -6x_1 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Le noyau de ϕ est donc déterminé par l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ de la forme $\begin{pmatrix} t \\ -6t \\ -4t \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$

Le noyau de ϕ est donc engendré par un vecteur, il forme donc une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un espace de dimension 1.

Exercice 1.13. *Déterminer une base du noyau de l'application linéaire ϕ dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Pour déterminer une base du noyau de cette matrice, on considère un élément $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de ce noyau, ce dernier doit vérifier

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0, \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont identiques, cela nous ramène donc à un système à deux équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_3 + 2x_4, \\ x_2 & = & -2x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

On en déduit que le système admet pour solutions les éléments suivants

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base du noyau de cette application.

Exercice 1.14. *Déterminer une base de l'image de l'application linéaire ϕ dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

On rappelle que l'image d'une application est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice représentant cette application.

On peut déjà se douter, à l'aide du théorème du rang, de la dimension de l'espace image étant donné l'exercice précédent où l'on a a travaillé sur le noyau.

Ainsi déterminer une base de l'image de cette application, revient à déterminer une famille libre des vecteurs colonnes de la matrice.

Si les vecteurs étaient linéairement indépendants, alors le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ admettrait $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ comme unique solution, *i.e.*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ici on va chercher à exploiter le travail effectué sur le noyau en exploitant les relations obtenues à l'exercice précédent :

$$\begin{cases} x_1 &= \quad x_3 + 2x_4, \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

Posons $x_3 = -1$ et $x_4 = 0$ dans notre relation principale, on en déduit, en utilisant notre système précédent que $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. D'où :

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet d'exprimer la troisième colonne de notre matrice comme une combinaison linéaire des deux premières. De la même façon, posons $x_3 = 0$ et $x_4 = -1$ dans notre relation principale, on en déduit, en utilisant notre système précédent que $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. D'où :

$$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a exprimé la quatrième colonne de notre matrice comme une combinaison linéaire des deux premières. De plus, les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes (cela se voir très facilement), donc une base de l'image de notre application est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nous aurions également pu faire cela uniquement en nous ramenant à une matrice échelonnée réduite en travaillant sur les colonnes de la matrice, ce qui aurait été beaucoup plus rapide ! Je vous le laisse à titre d'entraînement

Exercice 1.15. *On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3).$$

Déterminer le noyau de cette application. Peut-on dire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Correction

Pour la première question, on procédera de la même manière que les fois précédentes.

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \quad L_1 \leftarrow L_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2x_2 - 5x_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ -5x_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

On en déduit que la solution de ce système est le vecteur nul. Ainsi l'application ϕ est injective. Or il s'agit d'un endomorphisme (c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) de $\mathbb{R}^3$, elle est donc aussi surjective. In fine, l'application ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.16. *Considérons une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3).$$

Supposons que $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$.

1. *Déterminer la représentation matricielle de l'application ϕ.*
2. *Déterminer l'image du vecteur $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3$ avec **et** sans l'aide de la représentation matricielle.*

Correction

1. La représentation matricielle de cette application nous donnera une une matrice A de 2 lignes et 3 colonnes, dont les colonnes correspondent aux images des vecteurs de bases dans cette même base, *i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Commençons par la forme algébrique, c'est-à-dire en passant par la définition de la fonction ϕ.
On commence par noter que les image des vecteurs de base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ sont données par les relations

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{e}'_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \phi(\mathbf{e}'_2) &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \phi(\mathbf{e}'_3) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

On peut alors calculer l'image du vecteur $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3$ par l'application ϕ

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}) &= \phi(2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3), \\ &\downarrow \ \phi \text{ est une application linéaire} \\ &= 2\phi(\mathbf{e}'_1) - 2\phi(\mathbf{e}'_2) - \phi(\mathbf{e}'_3), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\downarrow \text{ on calcule les images des vecteurs de base}\\
&= 2(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),\\
&= 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\\
&= 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

Avec la représente matricielle il suffit de faire le calcul suivant :

$$
A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2.
$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

1.2 Pour aller plus loin

Exercice 1.17 (Images et Noyaux)**.** *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les équivalence suivantes sont vraies*[1] *:*

1. $Ker(f^2) = Ker(f) \iff Ker(f) \cap Im(f) = \{\mathbf{0}\}$.
2. $Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f) + Im(f) = E$.

Correction

L'exercice ne suppose pas de grandes connaissances, il suffit simplement de se rappeler des définitions d'image et de noyau :

$$\mathbf{x} \in Ker(f) \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

et

$$\mathbf{x} \in Im(f) \iff \exists \mathbf{z} \in E, \mathbf{x} = f(\mathbf{z}).$$

Il faudra ensuite traiter chaque égalité entre les ensembles en montrant les inclusions réciproques, *i.e.* pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il nous faut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

1. Comme il s'agit d'une équivalence, il va falloir démontrer l'implication dans les deux sens.

   - On suppose que $Ker(f^2) = Ker(f)$

     (i) Il est clair que le vecteur nul $\mathbf{0}$ est un élément de $Im(f)$ et de $Ker(f)$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E. On en déduit que $0 \in Ker(f) \cap Im(f)$.
     (ii) Soit maintenant $\mathbf{x}$ un élément de $Ker(f) \cap Im(f)$, on a donc $f(\mathbf{x}) = 0$ et on sait qu'il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$. On en déduit que $f(f(\mathbf{z})) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ainsi $\mathbf{z} \in Ker(f^2) = Ker(f)$, ce qui signifie que $\mathbf{x} = f(\mathbf{z}) = 0$.

   - On suppose que $Ker(f) \cap Im(f) = \mathbf{0}$

     (i) Il est à nouveau évident que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$. En effet, soit $\mathbf{x} \in Ker(f)$, alors $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et $f(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Donc $\mathbf{x} \in Ker(f^2)$.
     (ii) Soit $\mathbf{x} \in Ker(f^2)$, on a alors $f(f(\mathbf{x})) = 0$. Cela signifie que $f(\mathbf{x}) \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors cette intersection est réduite au vecteur nul, donc $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Cette dernière égalité montre bien que $\mathbf{x}$ est un élément du noyau de f, *i.e.* $\mathbf{x} \in Ker(f)$.

2. Comme précédemment, nous devons démontrer l'implication dans les deux sens
   - Supposons que $Im(f^2) = Im(f)$

     (i) L'inclusion $Im(f) + Ker(f) \subset E$ est évidente car ce sont des sous-espaces vectoriels de E.
     (ii) Soit $\mathbf{x}$ un élément de E, par hypothèse on sait que $f(\mathbf{x}) \in Im(f^2)$, donc il existe un vecteur $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{z}))$. On en déduit que $f(f(\mathbf{z}) - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{x} - f(\mathbf{z}) \in Ker(f)$. En écrivant $\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x} - f(\mathbf{z})}_{\in Ker(f)} + \underbrace{f(\mathbf{z})}_{\in Im(f)}$, nous obtenons le résultat demandé.

1. Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il nous faut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

- Supposons que $Ker(f) + Im(f) = E$

  (i) L'inclusion $Im(f^2) \subset Im(f)$ est évidente. En effet, soit $\mathbf{x} \in Im(f^2)$, alors il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(f(\mathbf{z})) = \mathbf{x}$, par conséquente $\mathbf{x} = f(\mathbf{y})$ où $\mathbf{y} = f(\mathbf{z})$. On a bien écrit $\mathbf{x}$ comme l'image par f d'un vecteur de E.
  (ii) Considérons maintenant $\mathbf{x} \in Im(f)$, alors il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$. On doit maintenant utiliser notre hypothèse, on peut donc écrire $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ où $\mathbf{a} \in Ker(f)$ et $\mathbf{b} \in Im(f)$. Or comme $\mathbf{b} \in Im(f)$, on sait qu'il existe $\mathbf{c} \in E$ tel que $f(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$. Ainsi

  $$\mathbf{x} = f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{a} + f(\mathbf{c})) = f(\mathbf{a}) + f(f(\mathbf{c})) = f(f(\mathbf{c})) \in Im(f^2),$$

  ce qui termine la démonstration.

Exercice 1.18 (Images et noyaux en dimension finie)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer les équivalences suivantes*

$$Ker(f) \oplus Im(f) = E \iff Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f) = Ker(f^2)$$

Correction

Cela fonctionne comme pour l'exercice précédent, mais certaines démonstrations seront grandement simplifiées. On va ici démontrer les implications de gauche à droite : (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3) et (3) $\implies$ (1)

- Montrons que (1) $\implies$ (2)

  Aucune spécificité liée à l'étude d'un espace de dimension finie, on procèdera donc comme à l'exercice précédent.

- Montrons que (2) $\implies$ (3)

  (i) On a bien $Ker(f) \subset Ker(f^2)$. En effet, soit $\mathbf{x} \in Ker(f)$, alors $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et donc $f(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
  (ii) Comme $Ker(f) \subset Ker(f^2)$, pour que les deux ensembles soient égaux, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension ! Pour cela, on va utiliser le théorème du rang

  $$dim(Ker(f^2)) = n - dim(Im(f^2)) = n - dim(Im(f)) = dim(Ker(f)).$$

  On en déduit que $Ker(f) = Kerf(^2)$.

- Montrons que (3) $\implies$ (1)
  Il s'agit de démontrer que les espaces $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires dans E.
  (i) Soit $\mathbf{x} \in Ker(f) \cap Im(f)$, il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ d'où $f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{z})) = \mathbf{0}$. Donc $\mathbf{z} \in Ker(f^2) = Ker(f)$, ainsi $\mathbf{x} = f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Finalement

  $$Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}.$$

  (ii) Il suffit maintenant de démontrer que la somme des dimensions de ces deux sous-espaces est égale à n. Mais c'est une conséquence directe du théorème du rang, qui énonce

  $$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E) = n.$$

Exercice 1.19 (Homothéties)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. On appelle homothétie, une application linéaire h_a de la forme*

$$\begin{aligned} h_a : \quad & E \to E, \\ & \mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où a est un nombre réel.

1. *Soit f un endomorphisme de E. Supposons que, quelque soit $\mathbf{x} \in E$, il existe $a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$f(\mathbf{x}) = a_{\mathbf{x}}\mathbf{x}.$$

   (a) *Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ deux vecteurs linéairements indépendants. Montrer que $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$. On pourra chercher à calculer $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ de deux façons différentes.*

   (b) *Montrer que f est une homothétie.*

2. *On appelle centre de $\mathscr{L}(E)$ (i.e. centre de l'ensemble des endomorphismes de E) l'ensemble des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant*

$$\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f,$$

   i.e. il s'agit des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

   (a) *Soit $\mathbf{x} \in E$. Montrer qu'il existe un projecteur $p_{\mathbf{x}}$ de E dont l'image est égale à $Vect(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \rangle$.*

   (b) *Déterminer le centre de $\mathscr{L}(E)$.*

Correction

1. Soit f un endomorphisme de E. Supposons que, quelque soit $\mathbf{x} \in E$, il existe $a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(\mathbf{x}) = a_{\mathbf{x}}\mathbf{x}.$$

   (a) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ deux vecteurs linéairements indépendants. On va utiliser le fait que f est linéaire pour écrire : $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.
   Ce qui nous donne

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = a_{\mathbf{x}}\mathbf{x} + a_{\mathbf{y}}\mathbf{y}.$$

   Ce qui nous donne :

$$(a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_{\mathbf{x}})\mathbf{x} + (a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_{\mathbf{y}})\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

   Or les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ forment une famille libre, ce qui signifie que $a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_{\mathbf{x}} = 0$ et $a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_{\mathbf{y}} = 0$. Par suite, on déduit que $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$.

   (b) Pour montrer que f est une homothétie il faut montrer que pour tout $\mathbf{x}$, f peut s'écrire sous la forme $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$ pour un certain réel a.
   Dans la définition actuelle de f, le rapport de l'homothétie dépend du vecteur $\mathbf{x}$ considéré, l'objectif de est montrer que $a_{\mathbf{x}} = a$ quel que soit $\mathbf{x}$.

   Pour cela on va considérer deux vecteur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et montrer que l'on a $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$ dans tous les cas.

La question précédente nous a permis de montrer que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont indépendants, alors $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$. Il reste à étudier le cas où les deux vecteurs sont liés. Deux vecteurs sont liés s'il existe un réel λ tel que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ (on va considérer $\mathbf{x}$ non nul). On alors

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{y}}\mathbf{y} &= f(\mathbf{y}) \\ &= f(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) \\ &= \lambda a_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \\ &= a_{\mathbf{x}}\lambda\mathbf{x} \\ &= a_{\mathbf{x}}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

On a donc $a_{\mathbf{y}}\mathbf{y} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$, ce qui montre que $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$ quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

2. On appelle centre de $\mathscr{L}(E)$ (*i.e.* centre de l'ensemble des endomorphismes de E) l'ensemble des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f,$$

i.e. il s'agit des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

(a) Pour cela il suffit de définir le projecteur $p_{\mathbf{x}}$ qui projette sur la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{x}$, notée D, parallèlement à un supplémentaire de D.

(b) On doit maintenant déterminer l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les autres. La question précédente suggère qu'il s'agit des homothéties. On peut donc commencer par montrer que ce sont bien des éléments du centre de $\mathscr{L}(E)$.

Soit f une homothétie de E. f est donc de la forme $h_a = aId$ pour un certain réel a. Considérons maintenant g un endomorphisme de E, alors pour tout $\mathbf{x} \in E$ nous avons

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(f(\mathbf{x})) \\ &= g(a\mathbf{x}) \\ &= ag(\mathbf{x}) \\ &= f(g(\mathbf{x})) \\ &= (f \circ g)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Il faut maintenant montrer qu'il n'y pas d'autres endomorphimes qui appartiennent au centre de $\mathscr{L}(E)$ que les homothéties.

Pour cela, considérons f un élément du centre de $\mathscr{L}(E)$ et soit $\mathbf{x} \in E$. D'après la question a) il existe un projecteur $p_{\mathbf{x}}$ qui projette sur la droite vectorielle $D = Vect(\mathbf{x})$ et parallèlement à un supplémentaire de D. Comme f appartient au centre de $\mathscr{L}(E)$, on a

$$(f \circ p_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}) = (p_{\mathbf{x}} \circ f)(\mathbf{x}).$$

Ce qui montre que f laisse stable l'image du projecteur $p_{\mathbf{x}}$. Donc l'image d'un vecteur de $Vect(\mathbf{x})$ par l'application f est de la forme $\alpha_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{\star}$. La question 1.$b$) permet de conclure que f est une homothétie. Ce qui achève la démonstration de cette question.

2 Matrices, changements de bases, et équations linéaires

2.1 Applications du cours

Exercice 2.1. *Déterminer le rang des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

On peut montrer que ces matrices sont de rang 3 et 2 respectivement.

En effet, en appliquant la méthode du pivot de Gauss sur la matrice A, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les lignes ainsi obtenues sont toutes indépendantes. Faisons de même sur la matrice B, ce qui nous donne

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

On remarque que les deux dernières lignes sont proportionnelles.

Exercice 2.2. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant et déterminer à quelle(s) condition(s) la matrice A est inversible.

Correction

La matrice A est inversible si les conditions suivantes sont toutes réunies

— a, b et c sont des réels distincts,

— $a + b + c \neq 0$.

En effet

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a^2+b^2+ab \\ 1 & a^2+c^2+ac \end{vmatrix}$$

Soit

$$det(A) = (b-a)(c-a)(c^2-b^2+a(c-b)) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

Exercice 2.3. *Déterminer l'inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction

Nous avons $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

En effet, commençons par montrer que A est inversible en montrant qu'elle est de rang plein ou en calculant son déterminant avec la règle de Sarrus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières lignes ne sont pas colinéaires et elles sont indépendantes de la troisième. La matrice est donc de rang plein et inversible. On utilise ensuite le pivot de Gauss pour déterminer l'inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & -14 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{-1}{8} L_2 \\ \\ \end{array}$$

Exercice 2.4. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{pmatrix}$$

Calculer leur déterminant et déterminer à quelle(s) condition(s) les matrices A et B sont inversibles.

Correction

La matrice A est inversible si et seulement si a, b et c sont trois réels distincts. En effet

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-b & c-a \\ a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix}$$

Soit

$$det(A) = (c-b)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & b\end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a).$$

La matrice B est inversible si et seulement si $a+b+c \neq 0$. En effet

$$det(B) = \begin{vmatrix}2a & 2a & a-b-c\\ 2b & b-c-a & 2b\\ c-a-b & 2c & 2c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+b+c & a+b+c & a+b+c\\ 2b & b-c-a & 2b\\ c-a-b & 2c & 2c\end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2b & b-c-a & 2b\\ c-a-b & 2c & 2c\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2b & -b-c-a & 0\\ c-a-b & c+a+b & c+a+b\end{vmatrix} = -(a+b+c)^3.$$

Exercice 2.5. *On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle inversible ? Déterminer son inverse.*
2. *Déterminer une matrice N telle que $A = (I_3 + N)$.*
3. *Calculer N^2 et N^3. Que remarquez vous ?*
4. *Exprimer A^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.*
5. *En déduire l'expression de A^p pour tout entier $p > 0$* [2].

Correction

1. La matrice A est inversible. En effet, A est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont non nuls.
   On peut également dire que son déterminant (qui est ici égal au produit des éléments diagonaux) est égal à 1.
2. On a directement

$$N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

   En effet, pour une telle matrice, on a directement la relation $A = N + I_3$.
   Une remarque très importante : les matrices I_3 et N commutent !
3. Calculons les produits N^2 et N^3, nous avons

$$N^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

   On remarque qu'à partir du degré 3, toutes les puissances de N supérieures à 3 sont nulles.
   La matrice N est dite *nilpotente de degré 3* [3].

2. On utilisera le fait que les matrices I_3 et N commutent et la formule du binôme

3. Les matrices *nilpotentes* sont des matrices N pour lesquelles il existe un entier n tel que $N^n = 0$. n est alors appelé l'*indice* ou le *degré* de nilpotence.

4. Cette question est un peu plus difficile et repose sur ce qui précède. On va montrer que $A^{-1} = I_3 - N + N^2$.
   En effet, pour tout élément a et b qui commutent, nous avons
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k.$$
   Si on pose $a = I_3$ et $b = N$ dans cette dernière relation, nous avons :
$$I_3 = I_3^3 - N^3 = (I_3 - N)\sum_{k=0}^{2} I_3^{3-k}N^k = (I_3 - N)\sum_{k=0}^{2} N^k.$$
   On en déduit que l'inverse de la matrice $I_3 - N$ est $\sum_{k=0}^{2} N^k$. En remplaçant N par $-N$, on en déduit que l'inverse de $I_3 + N$ est $\sum_{k=0}^{2}(-1)^k N^k = I_3 - N + N^2$.
5. Pour tout entier $p > 0$, nous avons
$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2+2p \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   En effet, rappelons que $A^p = (I_3 + N)^p$. En utilisant la formule du binôme, nous obtenons
$$\begin{aligned} A^p &= (I_3+N)^p, \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I_3^{n-k}, \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k, \\ &= I_3 + pN + \frac{p(p-1)}{2} N^2. \end{aligned}$$
   On réutilise ensuite les résultats de la question 2 pour conclure.

Exercice 2.6. *Soit* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *une base de* $\mathbb{R}^3$ *et on considère les vecteurs* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ *et* $\mathbf{e}'_3$ *définis par*
$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

1. *Déterminer la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *vers la base* $\mathscr{B}'$.
2. *Montrer que* $\mathscr{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer la matrice de passage de* $\mathscr{B}'$ *vers la base* $\mathscr{B}$.
4. *Soit* ϕ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la représentation matricielle* A *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *est donnée par*
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice de ϕ *dans la base* $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$.

Correction

1. La matrice de passage P est donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   En effet, cette dernière s'obtient en écrivant, en colonne dans le base de départ $\mathscr{B}$, les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$, ce qui se fait directement en lisant la définition de la base $\mathscr{B}'$. Mais regardons cela d'un peu plus près cette matrice de passage.

   Pour cela, considérons un vecteur $\mathbf{x} = \alpha_1'\mathbf{e}_1' + \alpha_2'\mathbf{e}_2' + \alpha_3'\mathbf{e}_3'$ et en exploitant la relation entre les vecteurs des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ on a

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \alpha_1'(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + \alpha_2'(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \alpha_3'(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \\ &= (\alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3')\mathbf{e}_1 + (\alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3')\mathbf{e}_2 + (-\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')\mathbf{e}_3, = \quad \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

   On obtient donc les relations suivantes entre les coordonnées

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3', \\ \alpha_2 &= \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3', \\ \alpha_3 &= -\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3'.\end{aligned}$$

   Ce que l'on peut exprimer de façon matricielle, obtenant ainsi les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base. Cette matrice est la matrice de passage P

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix}$$

2. Pour montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, nous pourrions montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice ... ou alors montrer que la matrice de passage est inversible !
   On peut montrer que la matrice de passage est inversible et que son inverse est donnée par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

3. Voir question précédente.
4. On rapelle que pour un endomorphisme A, la relation de changement de base est donnée $A' = P^{-1}AP$, où A' est la représentation matricielle de l'endomorphisme dans la nouvelle base, A celle dans l'ancienne base et P la matrice de passage de l'ancienne vers la nouvelle base.

   On a directement

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.7. *Soit u un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice, relativement à la base canonique, est donnée par :*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le noyau et l'image de u.*
2. *Montrer que $Ker(u) + Im(u) = E$.*
3. *Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $Ker(u) + Im(u) = E$.*
4. *Déterminer la matrice de l'endomorphisme de u relativment à la base $\mathscr{B}'$.*
5. *Quelle la nature de u ?*

Correction

1. Le noyau de u est composé de l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vérifiant $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Les triplets sont donc solutions du système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 & = & 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ 3x_1 - 3x_3 & = & 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \\ 0 & = & 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \end{cases}$$

Des deux premières équations, on voit que $\mathbf{x} \in Ker(u)$ si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3$, donc $Ker(u)$ est le sous-espace engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Pour déterminer l'image deux u, nous avons deux méthodes possibles.

- **Première méthode :** elle repose sur le fait que l'image de u est engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A.
La question précédente nous a montré que la matrice était de rang 2 (conséquence du théorème du rang), donc il suffit de sélectionner deux vecteurs colonnes indépendants de la matrice A pour que ces derniers constituent une base de l'espace image. On pourra ainsi écrire que $Im(u)$ est l'espace engendré par les vecteurs $(2, -1, -1)$ et $(-1, 2, -1)$.

- **Deuxième méthode :** on peut faire le choix de revenir à la définition. On prendra $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ et on dit que ce dernier appartient à $Im(u)$ si et seulement s'il existe un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $u(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, *i.e.* le système $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ admet au moins une solution.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 3y_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3y_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 3y_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - x_2 & = & y_1 - y_2 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow \frac{1}{3}(L_1 - L_2)} \\ x_1 - x_3 & = & y_1 - y_3 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow \frac{1}{3}(L_1 - L_3)} \\ 0 & = & y_1 + y_2 + y_3 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3)} \end{cases}$$

Le système admet au moins une solution si et seulement si $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ (car, alors $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, par exemple, est solution).
Donc l'ensemble des vecteurs solutions, *i.e.* appartenant à l'image de u, sont ceux définissant le plan d'équation $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, dont les vecteurs les vecteurs $(2, -1, -1)$ et $(-1, 2, -1)$ forment bien une base.

2. Le théorème du rang nous permet déjà de conclure que la dimension du noyau et celle de l'espace image somme bien à 3 qui est la dimension de E. Pour montrer que les espaces sont supplémentaires, il nous faut alors montrer que l'intersection de ces deux ensembles est réduite au vecteur nul.
Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(u) \cap Im(u)$. Comme $\mathbf{x}$ appartient à $Ker(u)$, nous avons $x_1 = x_2 = x_3$. De plus $\mathbf{x}$ appartenant à l'image de u, nous avons $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ce qui assure que $3x_1 = 0$ et donc $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$.
L'intersection des deux ensembles est bien réduite au vecteur nul, ils sont donc supplémentaires.

Nous aurions également pu montrer que les vecteurs de bases de ces deux ensembles forment une famille libre, et donc une base de E. Mais c'est l'objet de la questions suivante.

3. Nous venons de voir que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont supplémentaires. Pour obtenir une base de E, on peut alors appliquer le principe de **recollement des bases**. Connaissant une base de $Ker(u)$ et $Im(u)$ une base de E est alors donnée par la famille de vecteurs

$$\mathscr{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = ((1,1,1),(2,-1,-1),(-1,2,-1)).$$

4. A nouveau deux méthodes s'offrent à nous

- **Première méthode :** on dispose d'une relation permettant d'exprimer un endomorphisme dans une base différente

$$A' = P^{-1}AP,$$

où P est la matrice de passage permettant de passer de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Elle est formée par les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ exprimés, en colonne, dans la base $\mathscr{B}$. Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il nous faut maintenant déterminer la matrice inverse P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \end{array}$$

On a donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit matriciel, pour lequel on trouve $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Deuxième méthode :** elle consiste à calculer les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ par l'endomorphisme u.

On sait déjà que $u(\mathbf{e}'_1) = \mathbf{0}$ car $\mathbf{e}'_1$ est un élément du noyau de u.

$$u(\mathbf{e}'_2) = A\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}'_2$$

et

$$u(\mathbf{e}'_3) = A\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}'_3$$

On retrouve bien $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Si on observe bien la matrice A' on remarque qu'elle laisse invariante les éléments de l'image de u. A' est donc la matrice d'un projecteur sur $Im(u) = Vect(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ parallèlement à $Ker(u) = Vect(\mathbf{e}'_1)$.

Exercice 2.8. *On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sa base canonique. Soit u un endomorphisme de E dont la représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$, notée A, est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.

1. *Montrer que $\mathscr{B}' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ une base de E.*
2. *Déterminer $u(\mathbf{f}_1), u(\mathbf{f}_2)$ et $u(\mathbf{f}_3)$ et en déduire une représentation matricielle de A dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$. Elle sera appelée D dans la suite.*
3. *Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.*
4. *Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ en fonction de la matrice A^n.*

Correction

1. On procède toujours de la même, on va regarder si la matrice formée par les vecteurs écrits dans la base canonique forme est inversible, *i.e.* on va étudier la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   On peut voir très facilement que cette matrice est inversible ! On peut par exemple voir une forme échelonnée réduite en ajoutant la première colonne à la troisième.

2. On va simplement procéder au calcul

$$u(\mathbf{f}_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{f}_1$$

$$u(\mathbf{f}_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{f}_2$$

$$u(\mathbf{f}_3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{f}_3$$

   On a donc $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. La matrice D étant diagonale, on a trivialement :

$$D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. A l'aide de la formule de changement de base reliant les représentations du même endomorphisme U dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, nous avons

$$A = PDP^{-1}$$

soit

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Il reste alors à calculer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ ainsi que son inverse. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et son inverse (après calcul) est donné par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à faire le calcul !

Exercice 2.9 (Projection et symétrie)**.** *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Soient les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}_1 = (1,1,2) \quad \mathbf{b}_2 = (-2,-1,3) \quad \textit{et} \quad \mathbf{b}_3 = (0,-3,-1).$$

Notons alors E l'espace engendré par les vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ et F l'espace engendré par le vecteur $\mathbf{b}_3$.

(a) *Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
Que peut-on dire des espaces E et F.

(b) *Soit p la projection sur E parallèlement à F. Calculer la matrice M de p dans la base $\mathscr{B}$.*

(c) *Notons $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice N de p dans la base $\mathcal{E}$.*

(d) *Calculer la matrice P de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathscr{B}$.*
Quelle relation existe-t-il entre les matrices M, N et P.

2. *Soient les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{c}_1 = (1,-1,-3) \quad \mathbf{c}_2 = (1,0,3) \quad \textit{et} \quad \mathbf{c}_3 = (2,-1,1).$$

Notons alors G l'espace engendré par le vecteur $\mathbf{c}_1$ et F l'espace engendré par les vecteurs $\mathbf{c}_2$ et $\mathbf{c}_3$.

(a) *Montrer que la famille $\mathscr{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
Que peut-on dire des espaces G et H.

(b) *Soit s la symétrie par rapport à G parallèlement à H. Calculer la matrice S de s dans la base $\mathscr{C}$.*

(c) *Notons $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice Q de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathscr{C}$ ainsi que son inverse.*

(d) *En utilisant la question précédente, calculer la matrice T de s dans la base $\mathcal{E}$.*

Correction

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}_1 = (1,1,2) \quad \mathbf{b}_2 = (-2,-1,3) \quad et \quad \mathbf{b}_3 = (0,-3,-1).$$

(a) Pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. On considère la matrice formée des vecteurs inscrits en colonne et on va montrer que cette matrice est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

On peut s'arrêter là car les deux dernières lignes sont indépendantes et la première ligne est indépendante des deux suivantes. On peut donc affirmer que $\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

A partir de ces éléments, on peut affirmer les espaces E et F sont supplémentaires.

(b) Comme p est le projecteur sur E parallèlement à F, nous avons $p(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$, $p(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_2$ et $p(\mathbf{b}_3) = 0$. D'où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Pour déterminer l'expression de la projection p dans la base $\mathcal{E}$ nous devons d'abord exprimer les vecteurs de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathscr{B}$. Cela revient à inverser la matrice nous donnant l'expression des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathcal{E}$, *i.e.* nous devons inverser la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -7 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -7/20 & 1/20 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3/20.$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/20 & 3/20 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -7/20 & 1/20 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/20 & 3/20 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -7/20 & 1/20 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

On a donc

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{b}_3,$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{-1}{10}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{20}\mathbf{b}_2 - \frac{7}{20}\mathbf{b}_3,$$
$$\mathbf{e}_3 = \frac{3}{10}\mathbf{b}_1 - \frac{3}{20}\mathbf{b}_2 - \frac{1}{20}\mathbf{b}_3.$$

Ce système permet de définir la matrice de passage P^{-1} de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathcal{E}$ Pour obtenir l'expression de la matrice N de p dans la base $\mathcal{E}$, nous pouvons soit

- utiliser la formule de changement de base d'un endomorphisme et calculer

$$N = PMP^{-1}$$

et il faudrait faire le calcul pour obtenir $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/20 & 3/20 \\ 1/4 & -7/20 & 21/10 \end{pmatrix}$.

- ou se rappeler que la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base par ce même endomorphisme. On peut donc calculer l'image des vecteurs de base par l'application p :

$$p(\mathbf{e}_1) = p\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{b}_3\right) = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_3$$
$$p(\mathbf{e}_2) = p\left(\frac{-1}{10}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{20}\mathbf{b}_2 - \frac{7}{20}\mathbf{b}_3\right) \frac{-1}{10}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{20}\mathbf{b}_2 = -\frac{1}{20}\mathbf{e}_2 - \frac{7}{20}\mathbf{e}_3$$
$$p(\mathbf{e}_3) = p\left(\frac{3}{10}\mathbf{b}_1 - \frac{3}{20}\mathbf{b}_2 - \frac{1}{20}\mathbf{b}_3\right) = \frac{3}{10}\mathbf{b}_1 - \frac{3}{20}\mathbf{b}_2 = \frac{3}{20}\mathbf{e}_2 + \frac{21}{20}\mathbf{e}_3.$$

On obtient la même expression de la matrice M.

(d) Nous avons répondu de façon indirecte à cette question en traitant la question précédente.

2. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{c}_1 = (1, -1, -3) \quad \mathbf{c}_2 = (1, 0, 3) \quad et \quad \mathbf{c}_3 = (2, -1, 1).$$

(a) On procédera de la même façon que précédemment en montrant les vecteurs sont bien linéairement indépendants, ou en montrant que la matrice associée est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

On peut s'arrêter là car les deux dernières lignes sont indépendantes et la première ligne est indépendante des deux suivantes. On peut donc affirmer que $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

A partir de ces éléments, on peut affirmer les espaces G et H sont supplémentaires.

(b) s est la symétrie par rapport à G parallèlement à H, elle laisse donc invariant les vecteurs de base de G et transforme tout vecteur de base de H en son opposé. Sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Comme pour la question précédente, nous devons exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{E}$ pour obtenir l'expression de Q. Pour cela, il suffit d'écrire, en colonne, les vecteurs de la base de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{E}$ qui n'est rien d'autre que la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il ne nous reste plus qu'à inverser cette matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

On a donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) On se rappelle la formule de changement de base d'un endomorphisme qui, dans le cas présent nous donne

$$T = QSQ^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 \\ -6 & -11 & 2 \\ -18 & -30 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2 Pour aller plus loin

Exercice 2.10 (Déterminant de Vandermonde)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.*
Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On commencera par calculer ce déterminant pour $n = 2$ et $n = 3$ et on procédera par récurrence.

Correction

L'énoncé nous suggère de commencer par calculer le déterminant de cette matrice pour les premières valeurs de n :

- pour $n = 1$, le déterminant est égal à 1.
- pour $n = 2$, le déterminant est égal à :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

- pour $n = 3$, il va falloir faire quelques transformations pour faire apparaître des zéros sur une ligne ou une colonne de notre matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \overset{C_2 \leftarrow C_2 - a_3C_1}{\downarrow} & \overset{C_3 \leftarrow C_3 - a_3C_2}{\downarrow} \\ 1 & a_1 - a_3 & a_1^2 - a_3a_1 \\ 1 & a_2 - a_3 & a_2^2 - a_3a_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut alors développer par rapport à la dernière ligne, puis factoriser la première ligne par $a_1 - a_3$ et la deuxième ligne par $a_2 - a_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_3 & a_1^2 - a_3a_1 \\ 1 & a_2 - a_3 & a_2^2 - a_3a_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_1^2 - a_3a_1 \\ a_2 - a_3 & a_2^2 - a_3a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Finalement nous avons

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_3 & a_1^2 - a_3a_1 \\ 1 & a_2 - a_3 & a_2^2 - a_3a_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_2 - a_1) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1).$$

- En procédant ainsi, on refait apparaître notre déterminant de Vandermonde pour $n = 2$. Ce suggère qu'il y a bien une relation de récurrence entre les différentes valeurs de n. Essayons de mettre cette relation en évidence.

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_n \leftarrow C_n - a_n C_{n-1} \\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - a_n C_{n-2} \\ \vdots \\ C_2 \leftarrow C_2 - a_n C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1^2 - a_1 a_n & \cdots & a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n \\ 1 & a_2 - a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \cdots & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} - a_n & a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_{n-1}^{n-2} a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe à nouveau selon la dernière ligne, ce qui nous donne

$$V_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1^2 - a_1 a_n & \cdots & a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n \\ a_2 - a_n & a_2^2 - a_1 a_n & \cdots & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_{n-1}^{n-2} a_n \end{vmatrix}$$

A nouveau on va extraire les différentes valeurs communes à chaque ligne, *i.e.* on peut factoriser chaque ligne L_k par le facteur $(a_k - a_n)$ pour k allant de 1 à $n-1$. D'où

$$\begin{aligned} V_n &= (-1)^{n+1}(a_1 - a_n)(a_2 - a_n)\cdots(a_{n-1} - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}, \\ & \quad \downarrow \text{ on reconnaît } V_{n-1} \\ &= (-1)^{n+1}(a_1 - a_n)(a_2 - a_n)\cdots(a_{n-1} - a_n) V_{n-1}, \\ & \quad \downarrow \text{ on change le signe de chaque différence} \\ &= (-1)^{n+1+n-1}(a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) V_{n-1}, \\ &= (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) V_{n-1} \end{aligned}$$

Cela montre la relation liant V_n à V_{n-1}. Il nous reste à déterminer la valeur. Pour $n = 3$ nous avions

$$V_3 = (a_3 - a_1)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_j - a_i).$$

- Montrons alors par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, nous avons $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ et notons H_n cette hypothèse de récurrence.

  On a montré que cette hypothèse est vraie pour $n = 3$. Supposons maintenant que la relation est vraie au rang $n-1$ et montrons qu'elle reste vraie au rang n, nous avons

$$\begin{aligned} V_n &= (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) V_{n-1}, \\ &= (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i), \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

  La relation reste donc vraie au rang n. On en déduit H_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 2.11 (Système linéaire)**.** *Résoudre le système (S) suivant en discutant selon les valeurs du réel m*

$$(S) : \begin{cases} (1-m)x + (2m+1)y + (2m+2)z & = & m \\ mx + my & = & 2m+2 \\ 2x + (m+1)y + (m-1)z & = & m^2 - 2m + 9 \end{cases},$$

Correction

Commençons par réécrire matriciellement notre système (S). Pour tout réel m, le système (S) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1-m & 2m+1 & 2m+2 \\ m & m & 0 \\ 2 & m+1 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 2m+2 \\ m^2-2m+9 \end{pmatrix}$$

Nous avons vu qu'un tel système peut avoir une unique solution si la matrice associée est de rang plein. Dans les autres cas, le système peut admettre une infinité ou aucune solution. On va donc regarder pour quelles valeurs de m notre endomorphisme n'est pas inversible. Pour cela calculons le déterminant.

$$\begin{aligned} det(A) = \begin{vmatrix} 1-m & 2m+1 & 2m+2 \\ m & m & 0 \\ 2 & m+1 & m-1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} & \begin{vmatrix} 1-m & 3m & 2m+2 \\ m & 0 & 0 \\ 2 & m-1 & m-1 \end{vmatrix}, \\ & \downarrow \text{ on développe selon la deuxième ligne} \\ = & -m \begin{vmatrix} 3m & 2m+2 \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix}, \\ & \downarrow \text{ on développe notre déterminant d'ordre 2} \\ = & \, m(1-m)(3m-2m-2), \\ & \downarrow \text{ on simplifie} \\ = & \, m(1-m)(m-2). \end{aligned}$$

Ainsi, le système (S) admet une unique solution pour tout $m \notin \{0,1,2\}$. Commençons par regarder ce cas là, pour cela nous utiliserons les formules dites de Cramer :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} m & 2m+1 & 2m+2 \\ 2m+2 & m & 0 \\ m^2-2m+9 & m+1 & m-1 \end{vmatrix} \\ & \downarrow \text{ on effectue le transformation } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &= \frac{1}{m(1-m)(m-2)} \begin{vmatrix} m & 2m+1 & 2m+2 \\ 2m+2 & m & 0 \\ (m-1)(m-5) & -m+1 & m-1 \end{vmatrix}, \\ & \downarrow \text{ on factorise la dernière ligne par } m-1 \\ &= \frac{-1}{m(m-2)} \begin{vmatrix} m & 2m+1 & 2m+2 \\ 2m+2 & m & 0 \\ (m-5) & -1 & 1 \end{vmatrix}, \\ & \downarrow \text{ on développe selon la dernière ligne} \\ &= \frac{-1}{m(m-2)} (m^2 - (2m+1)(2m+2) - (2m+2)^2 - (m-5)m(2m+2)), \\ &= \frac{1}{m(m-2)} (2m^3 - m^2 + 4m. + 6). \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} 1-m & m & 2m+2 \\ m & 2m+2 & 0 \\ 2 & m^2-2m+9 & m-1 \end{vmatrix},$$

$\downarrow$ on effectue le transformation $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$= \frac{1}{m(1-m)(m-2)} \begin{vmatrix} 1-m & m & 2m+2 \\ m & 2m+2 & 0 \\ 2-2m & m^2-6m+5 & m-1 \end{vmatrix},$$

$\downarrow$ on factorise la dernière ligne par $1-m$

$$= \frac{1}{m(m-2)} \begin{vmatrix} 1-m & m & 2m+2 \\ m & 2m+2 & 0 \\ 2 & 5-m & -1 \end{vmatrix},$$

$\downarrow$ on développe selon la dernière ligne

$$= \frac{1}{m(m-2)}((2m+2)(m-1) + m(5-m)(2m+2) - 2(2m+2)^2 + m^2),$$

$$= \frac{1}{m(m-2)}(-2m^3 + 3m^2 - 6m - 10).$$

$$z = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} 1-m & 2m+1 & m \\ m & m & 2m+2 \\ 2 & m+1 & m^2-2m+9 \end{vmatrix},$$

$\downarrow$ on effectue le transformation $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$= \frac{1}{m(1-m)(m-2} \begin{vmatrix} 1-m & 2m+1 & m \\ m & m & 2m+2 \\ 2-2m & 1-m & m^2-6m+5 \end{vmatrix},$$

$\downarrow$ on factorise la dernière ligne par $1-m$

$$= \frac{1}{m(m-2} \begin{vmatrix} 1-m & 2m+1 & m \\ m & m & 2m+2 \\ 2 & 1 & 5-m \end{vmatrix},$$

$\downarrow$ on développe selon la dernière ligne

$$= \frac{1}{m(m-2} \left((1-m)m(5-m) + m^2 + 2(2m+1)(2m+2) - 2m^2 \right.$$
$$\left. - (2m+2)(1-m) - m(5-m)(2m+1)\right).$$
$$= \frac{1}{m(m-2}(3m^3 - 6m^2 + 12m + 2).$$

Ainsi les solutions de ce système sont données par

$$\left\{\left(\frac{2m^3 - m^2 + 4m + 6}{m(m-2)}, \frac{-2m^3 + 3m^2 - 6m - 10}{m(m-2)}, \frac{3m^3 - 6m^2 + 12m + 2}{m(m-2)}\right)\right\}.$$

On peut maintenant étudier les solutions dans les cas où $m = 0$, $m = 1$ et aussi $m = 2$.

- Traitons le cas $m = 0$, notre système s'écrit :

$$(S) : \begin{cases} -x + y + 2z &= 0 \\ 0 &= 2 \\ 2x + y + -z &= 9 \end{cases},$$

  La deuxième équation n'admettant aucune solution, il en va de même du système (S).
- Traitons le cas $m = 1$, notre système s'écrit :

$$(S) : \begin{cases} 3y + 4z &= 1 \\ x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 8 \end{cases},$$

Les deux dernières lignes de ce système sont liées. On peut donc se concentrer sur les deux premières. On peut alors écrire :

$$(S) : \begin{cases} z &= \frac{1}{4}(1-3y) \\ x &= 4-y \end{cases},$$

Ainsi les solutions de ce système sont données par

$$\left\{ \left(4-t, t, \frac{1}{4} - \frac{3}{4}t\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- On finit avec le cas $m = 2$, notre système s'écrit :

$$(S) : \begin{cases} -x+5y+6z &= 2 \\ 2x+2y &= 6 \\ 2x+3y+z &= 9 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\leftarrow} \begin{cases} 12y+12z &= 10 \\ 2x+2y &= 6 \\ y+z &= 3 \end{cases}$$

On remarque que les première et la dernière équations forment un système incompatible. On en déduit, dans le cas présent, que le système n'admet pas de solutions.

Exercice 2.12 (Rang de la comatrice)**.** *Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Com(A)$ la comatrice de A, dont les coefficients sont les cofacteurs de A.*

Déterminer le rang de $Com(A)$ en fonction du rang de A, qu'on note $rg(A)$.

Correction

Pour cet exercice, il est important de se rappeler de la définition de la comatrice. On rappelle relation liant une matrice à son inverse pour écrire :

$$det(A)I_n = A^T Com(A)$$

Nous avons alors trois cas à distinguer :

1. supposons que la matrice A est de rang plein (*i.e.* égal à n) alors A est inversible et la relation précédente nous indique immédiatement que la comatrice est également de rang plein.
2. supposons que $rg(A) \leq n-2$, on se rappelle qu'un cofacteur est le résultat d'un calcul de déterminant effectué sur une matrice à laquelle on a supprimé une ligne et une colonne, *i.e.* sur une matrice carrée de taille $n-1$. Cette matrice extraite est au plus de rang $n-2$, elle n'est donc pas inversible, le cofacteur est donc toujours égal à 0. Ainsi $Com(A)$ est nulle donc de rang nul.
3. supposons enfin que la matrice A est de rang égal à $n-1$. Cela signifie qu'il existe au moins un cofacteur non nul. La matrice A n'étant pas inversible, $A^T Com(A)$ est donc nulle. Ce qui signifie que $Im(Com(A)) \subset Ker(A^T)$ donc $rg(Com(A)) \leq dim(Ker(A^T)) = 1$ (c'est une conséquence du théorème du rang).
On en déduit que $Com(A)$ est de rang 1.

Exercice 2.13 (Matrices triangulaires par blocs et inversion)**.** *L'objectif de cet exercice est d'établir un résultat pour une matrice par blocs.*

1. *Soient A, B, C et D des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons la matrice M triangulaire supérieure par blocs de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que $det(M) = det(A)det(D)$.
Indication : on pourra commencer par montrer que $det(M) = det(A)det(D)$ en considérant la décomposition suivante :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

2. *On suppose maintenant que les matrices C et D commutent et que D est inversible. Montrer que l'on a*

$$det(N) = \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = det(DA - CB).$$

Indication : on cherchera multiplier N par une certaine matrice de sorte à ce que le produit des deux donne la matrice $\begin{pmatrix} A - CD^{-1}B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Correction

1. Utilisons directement l'indication pour écrire

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$det(M) = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}.$$

Etudions maintenant chaque déterminant séparément. Commençons par regarder le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Si on développe selon la première ligne (ou la première colonne) on trouve

$$\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix}.$$

On répète ce processus n fois et on trouve finalement que

$$\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = det(D).$$

On effectue le même raisonnement mais en développant à chaque fois selon la dernière ligne (ou la dernière colonne) avec la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et on trouve

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = det(A).$$

On peut également faire de même avec la matrice $\begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et on déduit que son déterminant est égal à 1. Ce qui montre bien que

$$det(M) = det(A)det(D).$$

2. On suppose maintenant D est inversible, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - CD^{-1}B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

A partir de là, on peut utiliser la question précédente pour conclure [4].

4. Le résultat précédent reste bien évidemment applicable lorsque la matrice est triangulaire inférieure par blocs

En effet, à gauche de notre égalité, on retrouve bien le déterminant de la matrice N. Ensuite, il nous faut calculer le déterminant de la matrice du membre de droite, ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A - CD^{-1}B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} &= det(D)det(A - CD^{-1}B), \\
&= det(DA - DCD^{-1}B), \\
&\quad \downarrow \text{ les matrices } C \text{ et } D \text{ commutent} \\
&= det(DA - CDD^{-1}B), \\
&= det(DA - CB).
\end{aligned}
$$

3 Réduction des endomorphismes

3.1 Applications du cours

Exercice 3.1. *Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de u.*
2. *Déterminer ses valeurs propres (sachant que 2 est racine du polynôme caractéristique)*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Correction

1. Le polynôme caractéristique de u, noté P_u est defini par

$$P_u(\lambda) = det(u - \lambda Id) = det(A - \lambda I_3)$$

D'un point de vue matriciel, cela nous donne

$$\begin{aligned}
P_u(\lambda) = &\begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 & -5 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}, \\
&\downarrow \text{ on va développer selon la première ligne} \\
= &(8-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 3-\lambda \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \\
&\downarrow \text{ il ne reste qu'à développer chaque déterminant} \\
= &(8-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 2] + (2\lambda - 2) - 5[-10 + 4\lambda], \\
= &-\lambda^3 + \lambda^2(8+2) + \lambda(-16+2+2-20) - 16 - 2 + 50, \\
= &-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32.
\end{aligned}$$

2. On nous indique que 2 est une valeur propre, c'est donc une racine du polynôme caractéristique P_u, on peut donc écrire

$$P_u(\lambda) = (\lambda - 2)(a\lambda^2 + b\lambda + c),$$

où les coefficients a, b et c sont des nombres réels que l'on peut obtenir par identification en comparant les deux deux expressions de P_u.

$$P_u(\lambda) = a\lambda^3 + \lambda^2(-2a + b) + \lambda(c - 2b) - 2c.$$

On trouve alors $a = -1$, $-2c = -32$ soit $c = -16$ et $c - 2b = -32$, donc $b = 8$. Ainsi

$$P_u(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = (2 - \lambda)(\lambda - 4)^2.$$

Ainsi le spectre de l'endomorphisme u est $Spec(u) = \{2, 4, 4\}$.

3. Pour vérifier si la matrice A est diagonalisable, il nous suffit de vérifier que le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est bien de dimension 2 qui est la multiplicité de la valeur propre.
Il n'est pas nécessaire de vérifier que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur

propre 2 est bien, c'est automatique.

On va donc chercher les solutions du système $(A - 4I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. On peut aussi (vu que l'on ne demande pas d'expliciter les vecteurs propres) se contenter de calculer le rang de la matrice $(A - 4I_3)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

La matrice étant rang de 2, le noyau est donc de dimension 1, ainsi les solutions dy système $(A-4I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ forment un espace de dimension $1 \neq 2$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 3.2. *Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A et déterminer la matrice de passage P permettant de passer de la matrice A à sa version diagonale. A nouveau, on remarquera que 2 est une valeur propre de la matrice A.

Correction

On commence par calculer le polynôme caractéristique $P_u = det(u - \lambda Id)$.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) = & \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ -10 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \\ & \downarrow \text{ on développe selon la première ligne} \\ =&(6-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -10 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \\ & \downarrow \text{ on développe les deux déterminants d'ordre 2} \\ =& \ (6-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) - 2(4 - 2\lambda), \\ =& -\lambda^3 + \lambda^2(6+5) + \lambda(-30 - 6 + 4) + 28, \\ =& -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 32\lambda + 28. \end{aligned}$$

On nous indique que 2 est une valeur propre, c'est donc une racine du polynôme caractéristique P_u, on peut donc écrire

$$P_u(\lambda) = (\lambda - 2)(a\lambda^2 + b\lambda + c),$$

où les coefficients a, b et c sont des nombres réels que l'on peut obtenir par identification en comparant les deux deux expressions de P_u.

$$P_u(\lambda) = a\lambda^3 + \lambda^2(-2a + b) + \lambda(c - 2b) - 2c.$$

On trouve alors $a = -1$, $-2c = 28$ soit $c = -14$ et $c - 2b = -32$, donc $b = 9$. Ainsi

$$P_u(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) = (7 - \lambda)(\lambda - 2)^2.$$

Ainsi le spectre de l'endomorphisme u est $Spec(u) = \{2, 2, 7\}$.

On va maintenant déterminer une base des différents espaces propres E_2 et E_7 associés aux valeurs propres 2 et 7.

- **Espace propre associé à la valeur propre** 7 **:** on va chercher à résoudre le système $(A - 7I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On se concentre sur la matrice $A - 7I_3$ dans un premier temps

$$A - 7I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -10 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & -5 \end{pmatrix}$$

  De la dernière ligne de la matrice découle la relation

$$x_3 = -5x_2.$$

  La première ligne de la matrice implique

$$x_1 = 2x_2$$

  On en déduit que donc les solutions de ce système sont engendrées par le vecteur $(2, 1, -5)$. Ce vecteur constitue une base de l'espace E_7

- **Espace propre associé à la valeur propre** 2 **:** on va chercher à résoudre le système $(A - 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On se concentre sur la matrice $A - 2I_3$ dans un premier temps

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On en déduit que les solutions de ce système sont engendrés par les vecteurs $(-1, 2, 0)$ et $(0, 0, 1)$ qui forment une base de l'espace E_2.

L'espace propre associé à la valeur 2 est bien de dimension 2. On en déduit donc que la matrice est diagonalisable.

La matrice de passage P est formée par la base des vecteurs propres inscrits en colonne, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.3. *Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les puissances de la matrice $A - I_3$*
2. *Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_k = Ker((u - Id)^k)$.*
   (a) *Montrer que $dim(E_k) = k$. Pour cela on utilisera le fait que si f et g sont deux endomorphismes, alors $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ et on pensera au théorème du rang qui fait le lien entre le rang et la dimension du noyau. Aucun calcul n'est nécessaire.*

(b) En déduire une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de E_3 telle que $(\mathbf{e}_1)$ est une base de E_1 et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est une base de E_2.

3. *En déduire l'expression de la matrice de passage P formée par les trois vecteurs précédents. Peut-on dire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale ?*
   Pour rappel, deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Correction

1. On va simplement effectuer les calculs

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -8 & -8 & 4 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -8 & -8 & 4 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On pose $E_k = Ker((u - \lambda Id)^k)$.

   (a) D'après l'énoncé, nous avons du coup l'inclusion suivante

$$Ker(u - Id) \subset Ker((u - Id)^2) \subset Ker((u - Id)^3) = \mathbb{R}^3$$

   Or $(u - Id)^3 = 0$ donc le noyau de cette application est dimension 3 d'après le théorème du rang.

   On remarque que toutes colonnes de $(A - I_3)^2$ sont colinéaires, donc la matrice est au plus de rang 1, or comme $(A - I_3)^2 \neq 0$, elle est donc de rang 1 exactement et son noyau est donc de dimension 2.

   Enfin, la matrice $(A - I_3)$ possède au moins deux colonnes non colinéaires, elle est donc au moins de rang 2, mais elle n'est pas de rang plein ! En effet, si $A - I_3$ était de rang plein, donc inversible, il en serait de même pour toutes ses puissances, en particulier $(A - I_3)^3$ serait inversible, mais ce n'est pas le cas. Donc $(A - I_3)$ est exactement de rang 2 et son noyau et donc de dimension 1.

   (b) Pour la construction d'une base de des espaces E_1, E_2 et E_3, on va utiliser le fait qu'une base de l'espace E_k forme une famille libre de l'espace E_{k+1} (c'est une conséquence des inclusions $E_k \subset E_{k+1}$).

   - **Base de l'espace E_1 :** il s'agit d'un espace de dimension 1, on peut donc choisir n'importe quel vecteur $\mathbf{e}_1 = (x, y, z)$ vérifiant

$$(A - I_3)\mathbf{e}_1 = 0,$$

     ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} -4x-2y &= 0 \\ 6x+2y+z &= 0 \\ 4x+2z &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y &= -2x \\ z &= -2x & L_2 \leftarrow L_3 \\ 6x &= 6x & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

où la dernière ligne est aussi obtenue par substitution avec les deux premières. Au final, nous avons $y = -2x$ et $z = -2x$, on peut donc choisir $x = 1$, ainsi le vecteur $\mathbf{e}_1 = (-1, 2, 2)$ forme une base de E_1.

- **Base de l'espace** E_2 **:** pour cela on utilise que $\mathbf{e}_1$ forme une famille libre dans E_2, il reste à trouver un deuxième vecteur $\mathbf{e}_2 = (x, y, z)$ qui soit indépendant de $\mathbf{e}_1$ et qui vérifie

$$(A - I_3)^2\mathbf{e}_2 = 0.$$

Or cette matrice est de rang 1, on peut donc se contenter de regarder la première équation de ce système, ce qui nous donne

$$4x + 4y - 2z = 0$$

Il ne reste qu'à choisir un bon triplet. On peut prendre $x = -1, y = 1, z = 0$. D'où $\mathbf{e}_2 = (-1, 1, 0)$ et on vérifie facilement que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ forme bien une base de E_2.

- **Base de l'espace** $E_3 = \mathbb{R}^3$ **:** il nous suffit de trouver un vecteur $\mathbf{e}_3$ qui est indépendant des vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$.
Etant donnés les vecteurs précédents, un choix trivial qui s'impose est de prendre $\mathbf{e}_3 = (1, 0, 0)$.

3. La matrice de passage P est donnée par les trois vecteurs précédents inscrits en colonne

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut étant donné cette forme triangulaire déterminer facilement l'inverse de cette matrice (en remontant les lignes du système), on a donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer le produit $P^{-1}AP$ et regarder si cette matrice est diagonale

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3/2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale, en revanche on peut dire qu'elle est **trigonalisable**, *i.e.* qu'elle est semblable à une **matrice triangulaire supérieure**.

Exercice 3.4. *Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

est elle diagonalisable ?

Correction

On peut commencer par déterminer les valeurs propres de cette matrice. Etant donnée que cette dernière est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont exactement ses éléments diagonaux, *i.e.* les valeurs $1, 2$ et d.

On se rappelle que, pour qu'une matrice soit diagonalisable, il est nécessaire que la dimension des sous-espaces propres soit égale à la multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique.
Il va donc falloir étudier le caractère diagonalisable en fonction de la valeur de d :

- **supposons que** $d \notin \{1, 2\}$ **:** dans ce cas, toutes les valeurs propres sont distinctes et la matrice A est alors diagonalisable.

- **supposons que** $d = 1$ **:** il faudrait vérifier que le sous-espace propre

  $$E_1 = Ker(u - Id)$$

  est bien un sous-espace de dimension 2, *i.e.* que le noyau est bien engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont indépendants. On peut aussi étudier le rang de la matrice $A - I_3$ et regarder quelles sont les conditions pour que cette dernière soit de rang 1 (cela impliquera que son noyau est de rang 2).

  $$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est de rang 1 si et seulement si le vecteur (a, b) est colinéaire au vecteur $(1, c)$, *i.e.* si et seulement si $a = \frac{b}{c}$ ou encore $ac = b$.
  Donc A est diagonalisable si et seulement si $ac = b$.

- **supposons que** $d = 2$ **:** il faudrait vérifier que le sous-espace propre

  $$E_1 = Ker(u - 2Id)$$

  est bien un sous-espace de dimension 2, *i.e.* que le noyau est bien engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont indépendants. On peut aussi étudier le rang de la matrice $A - 2I_3$ et regarder quelles sont les conditions pour que cette dernière soit de rang 1 (cela impliquera que son noyau est de rang 2).

  $$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est de rang 1 si et seulement si $c = 0$.
  Donc A est diagonalisable si et seulement si $c = 0$.

Exercice 3.5. *On considère la matrice A suivante*

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 2 \\ 0 & \gamma & 3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où γ est la Constante d'Euler-Mascheroni[5]*. Expliquez, sans calculs, pourquoi cette matrice n'est pas diagonalisable.*

Correction

On peut commencer par regarder les valeurs propres de cette matrice. A nouveau, comme cette dernière est triangulaire supérieure, cela signifie que ces valeurs propres sont exactement ses éléments diagonaux. Ainsi, cette matrice A admet une seule valeur propre γ de multiplicité 3.

Si cette matrice était diagonalisable, il existerait donc une matrice de passage P telle que A et $D = \gamma I_3$ sont semblables, *i.e.*

$$A = PDP^{-1}.$$

Or $D = \gamma I_3$, cette matrice commute donc avec la matrice P et son inverse, nous aurions alors

$$A = DPP^{-1} = D,$$

ce qui est absurde ! Donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3.6. *On considère la matrice réelle A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle inversible ?*
2. *Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.*
3. *Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $A^n = PD^nP^{-1}$.*
4. *En déduire une expression de A^n.*

Correction

1. Il suffit de calculer son déterminant et de montrer que ce dernier est non nul. Ce qui est ici le cas car ce dernier vaut -8, la matrice A est donc inversible.

2. On commence, comme d'habitude, par déterminer le polynôme caractéristique P_A de cette matrice.

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = (\lambda - 4)(\lambda + 2).$$

   Donc les valeurs propres de cette matrice sont -2 et 4.
   Les valeurs propres sont distinctes, donc la matrice A est diagonalisable.

5. C'est une constante qui apparaît naturellement lorsque l'on étudie la *Série Harmonique* et on a $\gamma \simeq 0.577$.

Pour déterminer la matrice de passage P, il nous suffit de déterminer une base des différents sous-espaces propres, *i.e.* une base des sous-espaces $E_\lambda = Ker(A - \lambda I_2)$ pour $\lambda = 2, 4$.

- **Espace propre associé à $\lambda = -2$:**

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donc une base de l'espace E_{-2} est donné par le vecteur $(-1, 1)$.

- **Espace propre associé à $\lambda = 4$:**

$$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donc une base de l'espace E_4 est donné par le vecteur $(1, 1)$.

Ainsi la matrice de passage P et sa matrice inverse sont données par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Cela se montre très facilement, il suffit de voir que

$$A^n = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}}_{n \text{ occurrences}} = PD^nP^{-1},$$

   en simplifiant les différents produits $P^{-1}P = I_2$.

4. En déduire une expression de A^n.
   D'après ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 4^n \\ -(-2)^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & -(-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & (-2)^n + 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.7. *On considère l'endomorphisme u de rang 1 dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de cette matrice est $(-\lambda)^{n-1}(tr(u) - \lambda)$.

Correction

On va simplement appliquer la définition du polynôme caractéristique

$$det(u - \lambda Id) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, on a donc $det(u - \lambda Id) = (-\lambda)^{n-1}(a_1 - \lambda)$, or $tr(u) = a_1$. Ce qui montre le résultat.

3.2 Pour aller plus loin

Exercice 3.8 (Matrice compagnon)**.** *Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u dont la représentation matricielle*[6] *est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Indication : on transformera la première ligne à l'aide d'une transformation de la forme $L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n P_i(\lambda) L_i$ pour un bon choix de P_i. L'idée est de faire apparaître des 0 sur les $n-1$ premières entrées de la matrice

Correction

On rappelle que le polynôme caractéristique est donné par

$$det(u - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}.$$

On va maintenant suivre l'indication et opérer une bonne modification sur la première ligne de la matrice.
On va considérer la transformation

$$L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \cdots + \lambda^{n-1} L_n = \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} L_i.$$

On a donc

$$det(u - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} - \lambda \end{vmatrix},$$

où $P(\lambda) = -\sum_{i=0}^n c_i \lambda^i = -(c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$. Donc avec avec la convention que $c_n = 1$

En développant le déterminant selon la première ligne, on trouve alors

$$(-1)^{n+1} P(\lambda).$$

Remarque : il est parfois plus commode de définir le polynôme caractéristique par la relation $det(\lambda Id - u)$. Cette alternative ne modifie pas les racines du polynôme du caractéristique et est donc sans conséquences sur les valeurs propres de l'endomorphisme.

6. une telle matrice est appelée *matrice compagnon*

Avec cette définition là, nous aurions :

$$det(u-\lambda Id) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & c_{n-1}+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & c_{n-1}+\lambda \end{vmatrix},$$

où $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ avec la même convention que $c_n = 1$.

Exercice 3.9. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geq 1$ et soit u un endomorphisme de E qui commute avec tous les projecteurs de E.*

1. *Montrer que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u*
2. *Montrer que u est une homothétie*[7]

Correction

1. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de E et considérons le projecteur p qui projette sur la droite D engendrée par $\mathbf{x}$ parallèlement à un espace supplémentaire de cette droite (on pourrait même dire un supplémentaire orthogonal). L'image du projecteur est donc l'ensemble des vecteurs $\lambda\mathbf{x}$.

   L'endomorphisme u commute avec tous les projecteurs et donc en particulier avec p, *i.e.*

   $$p \circ u = u \circ p.$$

   Or $(p \circ u)(\mathbf{x})$ appartient à l'image de p,$(Im(p))$. Ce qui signifie, d'après l'égalité précédente que $(u \circ p)(\mathbf{x})$ appartient également à $Im(p)$. Donc u laisse stable l'image de p (qui est de la forme $\lambda\mathbf{x}$) donc $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de u.
2. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux éléments de E, d'après la question précédente ce sont deux vecteurs propres de u. Il existe donc $\lambda_{\mathbf{x}}$ et $\lambda_{\mathbf{y}}$ telles ques

   $$u(\mathbf{x}) = \lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \quad \text{et} \quad u(\mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{y}}\mathbf{y}$$

   Pour montrer que u est une homothétie, il faut nous montrer que $\lambda_{\mathbf{x}} = \lambda_{\mathbf{y}}$. Considérons $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs non nuls de E. On va étudier deux cas, selon que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ soient liés ou non.

   - Supposons que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés. Cela signifie qu'il existe un réel non α tel que $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$. Par hypothèses nous avons

     $$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{y}}\mathbf{y} &= u(\mathbf{y}) \\ & \quad \downarrow \text{ les deux vecteurs sont liés} \\ &= u(\alpha\mathbf{x}) \\ &= \alpha u(\mathbf{x}) \\ & \quad \downarrow \text{ par hypothèse} \\ &= \alpha\lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \\ &= \lambda_{\mathbf{x}}\underbrace{\alpha\mathbf{x}} \\ & \quad \downarrow \text{ les deux vecteurs sont liés} \\ &= \lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{y} \end{aligned}$$

7. Une homothétie est une application linéaire u de la forme $u(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ pour un réel λ fixé pour tout vecteur $\mathbf{x}$.

On en déduit que $\lambda_{\mathbf{x}} = \lambda_{\mathbf{y}}$.

- On suppose maintenant que les deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont indépendants. On se rappelle que u est un endomorphisme qui commute avec tous les projecteurs. En particulier, il commute avec le projecteur p précédemment défini. A partir des relations

$$u(\mathbf{x}) = \lambda_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \quad \text{et} \quad u(\mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{y}}\mathbf{y}$$

On peut donc écrire, en appliquant le projecteur p :

$$(p \circ u)(\mathbf{x}) = \lambda_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad (p \circ u)(\mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}).$$

Et c'est fini ! En effet, on se rappelle que l'image du projecteur p est une droite ! Ainsi les vecteurs $p(\mathbf{x})$ et $p(\mathbf{y})$ se retrouvent sur la même droite vectorielle et sont donc **liés**. Il n'y a plus qu'à appliquer le même procédé que pour le point précédent.

Exercice 3.10 (Diagonalisation par blocs)**.** *Soient A, C et D trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons la matrice M triangulaire supérieure par blocs de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que le spectre de M est l'union des spectres des matrices A et D.

Indication : on pourra commencer par montrer que $det(M) = det(A)det(D)$ en considérant la décomposition suivante :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Correction

Cet exercice ressemble fortement à un exercice que nous avons traité dans la section précédente.

On va à nouveau commencer par suivre l'indication, ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

La question porte sur les valeurs propres de la matrice M. Or ces dernières sont données par les racines du polynôme caractéristique, lui même définit par la relation

$$det(M - \lambda I_{2n}) = \begin{vmatrix} A - \lambda I_n & C \\ 0 & D - \lambda I_n \end{vmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à décomposer cette matrice en utilisant l'indication.

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I_n & C \\ 0 & D - \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D - \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On utilise le fait que $det(M) = det(A)det(D)$ pour écrire que $det(M - \lambda I_{2n}) = det(A - \lambda I_n)det(D - \lambda I_n)$.

Ainsi les racines du polynôme caractéristique de M sont bien l'union des racines du polynôme caractéristique de A avec les racines du polynôme caractéristique de D.
Finalement le spectre de la matrice M est bien l'union des spectres des matrices A et D.

4 Espaces Euclidiens et formes bilinéaires et quadratiques

4.1 Applications du cours

Exercice 4.1. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Est-ce que l'application f définie un produit scalaire ?

Correction

On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Nous devons vérifier ces trois points :

- Bilinéarité

  (i) Linéarité à gauche : soient $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}', \mathbf{y}) &= (x_1 + \alpha x_1')y_1 + 2(x_2 + \alpha x_2')y_2 + 3(x_3 + \alpha x_3')y_3 + (x_1 + \alpha x_1')y_2 + (x_2 + \alpha x_2')y_1 \\ &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + \alpha(x_1'y_1 + 2x_2'y_2 + 3x_3'y_3 + x_1'y_2 + x_2'y_1) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \end{aligned}$$

  (ii) On procède de la même façon à droite : soient $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^3$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \beta\mathbf{y}') &= x_1(y_1 + \beta y_1') + 2x_2(y_2 + \beta y_2') + 3x_3(y_3 + \beta y_3') + x_1(y_2 + \beta y_2') + x_2(y_1 + \beta y_1') \\ &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + \beta(x_1y_1' + 2x_2y_2' + 3x_3y_3' + x_1y_2' + x_2y_1') \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \end{aligned}$$

- la symétrie[8] :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 = y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 + y_1x_2 + y_2x_1 = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

- le caractère définie positif : $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ et $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  On en déduit que $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est nulle si seulement si $(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 = 0$. S'agissant d'une somme de terme positifs ou nuls, il faut donc que les trois termes de la somme soient nuls, d'où $x_3^2 = 0 \implies x_3 = 0$ et $x_2^2 = 0 \implies x_2 = 0$ puis par suite $(x_1 + x_2)^2 = 0 \implies x_1 + x_2 = 0$ or $x_2 = 0$ donc $x_1 = 0$.

  L'application f définie donc bien un produit scalaire.

8. en réalité, il est beaucoup plus judicieux de montrer d'abord la symétrie, comme cela il n'est pas nécessaire de montrer la linéarité à gauche et à droite, l'un des deux suffirait car l'autre s'en déduit par symétrie

Correction bis

On propose ici une deuxième solution qui se base sur la représentation matricielle du produit scalaire.

Regardons la matrice associée à l'application f, on voit que l'on peut réécrire f sous la forme[9]

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La matrice associée symétrique, donc la forme linéaire est symétrique. De plus f est une bien une forme bilinéaire car elle se présente sous la forme d'une somme de monômes $x_i y_j$ où les x_i et y_j sont à la puissance 1 uniquement. Enfin, pour le côté défini positif, il suffira de montrer que toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On remarque que la matrice est constituée de deux blocs, la valeur 3 étant isolée sur la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice, c'est donc une valeur propre de cette matrice. Pour trouver les deux autres valeurs propres, on regarde alors la sous-matrice restant et composée des deux premières lignes et colonnes.
Pour cette dernière, la somme des valeurs propres est égale à 3 et le produit est égal à 1, on en déduit que les valeurs propres sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Toutes les valeurs propres sont positives, donc f est aussi définie positive.

Exercice 4.2. *Soit A une matrice symétrique réelle de taille n, associée à un endomorphisme f, qui possède n valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, et notons $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres associés, on supposera que ces vecteurs ont une norme égale à 1.*

1. *Montrer que les sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux, i.e. montrer que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux*[10]*.*
2. *Montrer que la matrice V dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A (que vérifie*
$$V^{-1} = V^T.$$
3. *En déduire, que dans une base adaptée, la forme quadratique associée au produit scalaire défini par la matrice A peut s'écrire comme la somme de monômes au carré (i.e. sous la forme $\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2$).*

Correction

1. Soient $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}_j$ deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes λ_i et λ_j. Nous avons donc, par définition de valeurs propres - vecteurs propres de la matrice A
$$\lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j \rangle$$

9. Développer l'expression pour s'en convaincre, mais pour le retrouver de façon immédiate, on se rappelle que $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$.

10. On peut étendre ce résultat et montrer que, sans hypothèses sur le caractère distinct des valeurs propres, une matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont des nombres réels. Pour construire cette base orthogonale (ou orthonormale), on montrera que les espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux et au sein d'un espace propre, on peut toujours construire une base orthognale (Gram-Schmidt).

$$\begin{aligned}
&\downarrow \text{ définition produit scalaire}\\
&= \langle A^T \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle\\
&\downarrow \text{ symétrie de } A\\
&= \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle\\
&\downarrow \ \mathbf{v}_i \text{ est un vecteur propre associé à } \lambda_i\\
&= \lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.
\end{aligned}$$

Finalement $(\lambda_i - \lambda_j)\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, or $\lambda_i \neq \lambda_j$ et les deux vecteurs propres sont non nuls, donc $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$.

2. La matrice V est la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres, on a donc $V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$. On rappelle également que, d'après la question précédente, les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont deux à deux orthogonaux. Alors

$$V^T V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n \end{pmatrix}.$$

Or les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont deux à deux orthogonaux et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|\mathbf{v}_i\| = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1$, d'où

$$V^T V = I_n \iff V^T = V^{-1}.$$

3. La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, que l'on note D, dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, *i.e.*

$$A = VDV^T.$$

On peut donc réécrire notre application f sous la forme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T V D V^T \mathbf{x} = (V^T \mathbf{x})^T D V^T \mathbf{x} = \mathbf{z}^T D \mathbf{z},$$

où $\mathbf{z} = V^T \mathbf{x}$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x},\\
&= \mathbf{x}^T V D V^T \mathbf{x},\\
&= \mathbf{z}^T D \mathbf{z},\\
&= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},\\
&= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2.
\end{aligned}$$

Exercice 4.3. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - 2x_2 + 5x_3 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - 2y_2 + 5y_3 \right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 2x_3 y_3.$$

Est-ce que l'application f définie un produit scalaire ?

Correction

Nous pourrions faire comme dans l'Exercice 1 et appliquer la définition (cela est laissé à titre d'exercice). On se propose ici de traiter le problème différemment en remarquant la parfait symétrie entre les transformations linéaires appliquées aux deux vecteurs. Pour cela considérons l'endomorphisme dont la représentation matricielle est donnée par

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut alors réécrire f sous la forme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (U\mathbf{x})^T (U\mathbf{y}).$$

Comme la matrice U est inversible (en effet, c'est une matrice triangulaire supérieur dont les éléments diagonaux sont non nuls), on peut assimiler l'endomorphisme U à une matrice de changement de base ! En notant $\mathbf{x}' = U\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}' = U\mathbf{y}$, f peut être réécrite $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}'^T \mathbf{y}'$. f peut donc être vu comme un produit scalaire dans cette nouvelle base, c'est donc aussi un produit scalaire après changement de repère.

Exercice 4.4. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 3u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 - u_2v_1 - u_1v_2 - u_3v_2 - u_2v_3.$$

1. *Montrer que f est un produit scalaire.*
2. *Soit P la matrice de passage de la base canonique $(\mathbf{e}_i)$ vers une base $(\mathbf{e}'_i)$ définie par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Déterminer la matrice du produit scalaire associée à l'application f dans la base canonique $(\mathbf{e}_i)$. On notera S cette matrice.*

   (b) *Déterminer la matrice S' de ce même produit scalaire mais dans la base $(\mathbf{e}'_i)$.*
3. *On considère les vecteurs $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ et $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ dans la base $(\mathbf{e}'_i)$. Déterminer le produit scalaire de ces deux vecteurs et conclure.*

Correction

1. On doit simplement vérifier les trois points de la définition, comme cela a été fait dans un exercice précédent.

2. On note S la matrice du produit scalaire associé à l'application f dans la base canonique $(\mathbf{e}_i)$.

   (a) Cette matrice S est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Cette matrice s'obtient directement en lisant la définition de l'application f.

(b) On rappelle que si P est la matrice de passage de la base canonique $(\mathbf{e}_i)$ vers une base $(\mathbf{e}'_i)$ alors la matrice du produit scalaire S dans cette nouvelle base, notée S' est donnée par

$$\begin{aligned}
S' &= P^T S P, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Il suffit de calculer $f(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ mais en utilisant la matrice S'. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}', \mathbf{y}') &= \mathbf{x}'^T S' \mathbf{y}', \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que les deux vecteurs sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Exercice 4.5. *Soient* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ *et* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique et considérons l'espace vectoriel* F *engendré par les vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*.*

1. *Quelle est la dimension de* F *?*
2. *Déterminer la matrice de projection orthogonale* P *sur* F*.*
3. *Soit* $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$*.*
   (a) *Après avoir calculer les produits scalaires des vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *avec le vecteur* $\mathbf{w}$*, dire à quel espace appartient le vecteur* $\mathbf{w}$*.*
   (b) *Que peut-on dire du produit* $P\mathbf{w}$ *?*

Correction

1. L'espace vectoriel F est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un espace de dimension 2.

2. On rappelle que la matrice de projection P sur le sous espace F est donnée par [11]

11. Essayer de de remontrer cela est un bon exercice, sinon vous pouvez toujours relire la fin de la Section 6 du cours qui détaille l'obtention de cette matrice de projection.

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T,$$

où A est la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs qui engendrent le sous-espace F, *i.e.*

$$A = \begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice de projection P sur le sous-espace F est

$$\begin{aligned}
P &= A(A^TA)^{-1}A^T,\\
&= \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/6\\ 1/3 & -1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. (a) Un calcul élémentaire montre que les produits scalaires $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$ et $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ sont tous deux nuls. Donc le vecteur $\mathbf{w}$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, il est donc orthogonal à tout vecteur engendré par ces deux là, *i.e.* orthogonal à l'espace F. $\mathbf{w}$ appartient à l'orthogonal de F, noté $F^\perp$.

   (b) Comme $\mathbf{w}$ appartient à l'orthogonal de F et que P est le projecteur sur F, nous avons donc $P\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ce que l'on peut vérifier en faisant le calcul

$$P\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4.2 Pour aller plus loin

Exercice 4.6 (Cauchy-Schwarz pour les formes blinéaires)**.** *Soit ϕ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel E et soit q sa forme quadratique associée.*

1. *Montrer l'identité de Cauchy*

$$q(q(\mathbf{u})\mathbf{v} - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{u}) = q(\mathbf{u})[q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u})].$$

2. *En déduire, si q est définie positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \leq q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}).$$

Correction

1. La formule s'obtient par un calcul direct utilisant la bilinéarité de ϕ. En effet pour tous $\mathbf{u},\mathbf{v} \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
q(q(\mathbf{u})v - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{u}) &= \phi(q(\mathbf{u})\mathbf{v} - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{u}, q(\mathbf{u})\mathbf{v} - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{u}) \\
&= q(\mathbf{u})^2\phi(\mathbf{v},\mathbf{v}) - q(\mathbf{u})\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \\
&= \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})q(\mathbf{u})\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})^2\phi(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\
&= q(\mathbf{u})^2q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{u})\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \\
&= \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})^2q(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})^2q(\mathbf{u}) \\
&= q(\mathbf{u})^2q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{u})\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \\
&= q(\mathbf{u})[q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u})].
\end{aligned}$$

2. Si q est définie positive alors le membre de gauche de l'identité de Cauchy est positif ou nul et donc, pour tout $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$,

$$q(\mathbf{u})[q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u})] \geq 0.$$

Si $\mathbf{u}$ est nul, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est trivialement vérifiée. Supposons $\mathbf{u}$ non nul. Alors $q(\mathbf{u}) > 0$, et l'on déduit encore que pour tout vecteur v,

$$q(u)q(v) - \phi(u,v)\phi(v,u) \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc également vérifiée.

Exercice 4.7 (Etude d'une forme quadratique)**.** *On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.*

$$E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0\right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

On définit l'application

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

en posant, pour tous $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\phi(M,N) = tr(MJN).$$

1. *Montrer que ϕ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?*
2. *Montrer que $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.*
3. *Déterminer la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathscr{B}$. La forme quadratique q est définie, pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $q(M) = \phi(M, M)$. Pour cela, on prendra $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calculera $q(M)$.*
4. *Ecrire la forme quadratique q comme une somme de carrés, i.e. on ne doit plus voir apparaître de termes rectangles.*
5. *Est-elle définie ? Positive ? Négative ?*
6. *En déduire le rang et le noyau de cette forme quadratique.*
7. *Déterminer la forme polaire associée à q.*
8. *On considère maintenant un sous-espace de E défini par*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\}.$$

Déterminer $F^\perp$ l'espace orthogonal à F.

Correction

1. Pour tous $M_1, M_2, N \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \phi(M_1 + aM_2, N) &= tr\left((M_1 + aM_2) JN\right), \\ &= tr\left(M_1JN + aM_2JN\right), \\ &= tr\left(M_1JN\right) + atr\left(M_2JN\right), \\ &= \phi(M_1, N) + a\phi(M_2, N) \end{aligned}$$

et donc ϕ est linéaire à gauche.
D'un autre côté, pour tous $N_1, N_2, M \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \phi(M, N_1 + aN_2) &= tr\left(MJ(N_1 + aN_2)\right), \\ &= tr\left(MJN_1 + aMJN_2\right), \\ &= tr\left(MJN_1\right) + atr\left(MJN_2\right), \\ &= \phi(M, N_1) + a\phi(M, N_2), \end{aligned}$$

et donc ϕ est linéaire à droite. Ceci achève de montrer que ϕ est une forme bilinéaire.

Nous allons montrer que ϕ n'est ni symétrique ni antisymétrique. Pour cela, considérons les matrices $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M_0JN_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la même façon, nous avons :

$$\begin{aligned} N_0 J M_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre ϕ n'est pas une forme bilinéaire symétrique [12].

2. Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in E$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathscr{B}$ engendre E.
D'un autre côté,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à $a = b = c = 0$ et donc $\mathscr{B}$ est libre.
Ainsi $\mathscr{B}$ est une base de E.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in E$. On a

$$\begin{aligned} q(M) &= tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\right) \\ &= tr\left(\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+a & c-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\right) \\ &= tr\left(\begin{pmatrix} a(a+b)+c(a-b) & a(a-b)+c(c-a) \\ a(c+a)+c(c-a) & b(c+a)+a(c-a) \end{pmatrix}\right) \\ &= a(a+b)+c(a-b)+b(c+a)+a(c-a) = 2(ab+ca). \end{aligned}$$

La forme quadratique q s'exprime donc, pour tout $M \in E$ par

$$q(M) = 2(ab + ca).$$

La matrice de q dans $\mathscr{B}$ est donc la matrice [13] $=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Le fait de ne plus faire apparaître de termes rectangles dans l'expression d'une forme quadratique consiste à effectuer ce que l'on appelle une *réduction de Gauss*. Une telle réduction des formes quadratiques permet d'en déduire rapidement si cette dernière est définie, positive ou négative ou si elle ne présente aucune particularité.

12. Elle n'est pas non plus, *antisymétrique*, *i.e.* elle ne vérifie pas $\phi(X, Y) = -\phi(Y, X)$.

13. On rappelle que pour la matrice de forme quadratique, une valeur non nulle aux entrées (i, j) et (j, i) correspond à l'existence d'un terme de la forme $x_i x_j$ dans l'expression dans la forme quadratique, un terme de la forme x_k^2 sera à l'origine d'un terme non nul sur le $k-$ème élément de la diagonale.

Prenons l'exemple de la forme quadratique $q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$. On pourra écrire q sous sa forme canonique (si $a \neq 0$)

$$q(\mathbf{x}) = a\left(x_1 + \frac{b}{2a}x_2\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}x_2^2.$$

Cette dernière écriture ne fait intervenir que des sommes de termes quadratiques.

Revenons alors à notre forme quadratique

$$\begin{aligned}
q(M) &= 2(ab + ca), \\
& \quad \downarrow \text{ on reconnaît des termes dans le développement de } (a+b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2 + (-2bc - a^2 - b^2 - c^2), \\
& \quad \downarrow \text{ le terme en rouge ressemble presque à } -(a-b-c)^2 \\
&= (a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 \underbrace{- 2ab - 2ac}, \\
& \quad \downarrow \text{ on reconnaît q(M)} \\
&= (a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 - q(M).
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité implique que $2q(M) = (a+b+c)^2 - (a-b-c)^2$, ainsi

$$q(M) = \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a-b-c)^2.$$

5. De cette dernière expression, on déduit que notre forme quadratique n'est ni positive (prendre un triplet (a, b, c) tel que $a + b + c = 0$) ni négative (prendre un triplet (a, b, c) tel que $a - b - c = 0$), elle n'est donc pas définie non plus.
6. La forme n'étant pas définie, on en déduit que le noyau de cette forme quadratique est au moins de dimension 1. De plus, la forme n'est ni positive, ni négative. Elle possède donc deux valeurs propres de signe opposé, elle est donc au moins de rang 2. Finalement, on en déduit que le noyau de q est de dimension 1 et que $rg(q) = 2$.

   Autre solution : on peut commencer par étudier le noyau de cette forme quadratique. Un élément $M \in E$ appartient au noyau de q si et seulement si $q(M) = 0$, *i.e.*

   $$\frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a-b-c)^2 = 0 \iff \pm(a+b+c) = \pm(a-b-c).$$

   Cette dernière condition est vérifiée si $a + b + c = a - b - c = 0$. Cette dernière égalité est vérifiée si $a = 0$ et $b + c = 0$. Ainsi, le noyau de q est défini par

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Nous aurions également pu utiliser directement la question 3) pour déterminer le rang et le noyau de forme quadratique.
7. La forme polaire associée à q est proche de la forme bilinéaire ϕ. Mais nous avons vu que cette dernière, définie par $\phi(M, N) = tr(MJN)$ n'est pas symétrique. Il suffit donc de la symétriser. Dans ce cas, l'application bilinéaire ϕ' définie par [14]

   $$\phi'(M, N) = \frac{1}{2}tr(MJN) + \frac{1}{2}tr(NMJ)$$

   est une forme bilinéaire symétrique qui vérifie bien $q(M) = \phi'(M, M)$.

14. On appelle cela le processus de symétrisation d'une forme bilinéaire.

8. On peut réécrire F comme étant l'espace des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,*i.e.* c'est l'espace engendrée par la matrice identité I_2.
   Ainsi, une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ appartient à l'orthogonal de F si et seulement si $\phi'(M, I_2) = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\phi'(M, I_2) &= \frac{1}{2}tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\right), \\
&= tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right), \\
&= tr\left(\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+a & c-a \end{pmatrix}\right), \\
&= b + c.
\end{aligned}$$

   Ainsi, on déduit que

$$F^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

5 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1. *On se donne deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (avec n entier naturel non nul) et on se propose de montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.*

1. *Condition suffisante*
   On suppose dans cette question que $MA = BM$ pour une certaine $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle.
   (a) *Montrer, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, que $MP(A) = P(B)M$.*
   (b) *En déduire que A et B ont une valeur propre commune*[15].
2. *Condition nécessaire*
   On suppose dans cette question que A et B ont une valeur propre commune λ.
   (a) *Montrer que $Sp(A^T) = Sp(A)$ (c'est-à-dire que A^T et A ont mêmes valeurs propres). Ainsi, il existe $X \in \mathbb{C}^n$ et $Y \in \mathbb{C}^n$ non nulles telles que $A^T X = \lambda X$ et $BY = \lambda Y$.*
   (b) *À l'aide de X et de Y, construire M non nulle telle que $MA = BM$.*

Correction

Exercice 5.2 (Probabilités et diagonalisation)**.** *Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.*

1. *Montrer que $\mathbb{P}[X = Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = k]$.*

   On suppose à partir de maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[Y = k] = p(1-p)^k$. Enfin, on considère la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

2. *Calculer la probabilité que A soit inversible.*
3. *En déduite la probabilité que la matrice ne soit pas inversible.*
4. *Préciser la loi de la variable aléatoire $rg(A)$ (qui donne le rang de la matrice A) ainsi que son espérance.*
5. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la matrice*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

   soit diagonalisable
6. *Déterminer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.*
   Indication : on utilisera le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = k] = pe^{-\lambda}\left(e^{\lambda(1-p)} - 1\right)$.

Correction

1. La première égalité résulte du fait que les évènements $((Y = k))_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'évènements. Ainsi (par ce que l'on appelle la σ-additivité), noua avons

15. On pourra appliquer le résultat précédent avec P égal au polynôme caractéristique de A.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=Y] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[X=Y, Y=k], \\
& \quad \downarrow \text{ on exploite cette intersection de deux évènements} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[X=k, Y=k], \\
& \quad \downarrow \text{ indépendance des deux variables aléatoires } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[X=k]\,\mathbb{P}[Y=k],
\end{aligned}
$$

On suppose maintenant X suit une loi de Poisson de paramètre λ, *i.e.* sa fonction de densité s'écrit

$$\mathbb{P}[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

et qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[Y=k] = p(1-p)^k$ (on dit que Y suit une loi hyper-géométrique).

2. Pour déterminer la probabilité que A, soit inversible, il faut regarder à quelle condition le déterminant est non nulle. Or $det(A) = XY$, donc la matrice est inversible si $X > 0$ et $Y > 0$, ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[det(A) \neq 0] &= \mathbb{P}[X>0, Y>0], \\
& \quad \downarrow \text{ indépendance entre les deux variables aléatoires} \\
&= \mathbb{P}[X>0]\,\mathbb{P}[Y>0], \\
& \quad \downarrow \text{ on passe au complémentaire} \\
&= (1-\mathbb{P}[X=0])(1-\mathbb{P}[Y=0]), \\
& \quad \downarrow \text{ on utilise les lois de } X \text{ et } Y \\
&= (1-e^{-\lambda})(1-p).
\end{aligned}
$$

3. Il s'agit de déterminer la probabilité que le déterminant soit nul, ce que l'on peut faire de deux façons différentes.

   En exploitant la question précédente on a directement

$$\mathbb{P}[det(A)=0] = 1 - \mathbb{P}[det(A) \neq 0] = 1 - (1-e^{-\lambda})(1-p).$$

   On peut aussi repartir de la définition : le déterminant est nul si $X = 0$ ou $Y = 0$, d'où

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[(X=0)\cup(Y=0)] &= \mathbb{P}[(X=0)] + \mathbb{P}[Y=0)] - \mathbb{P}[X=0, Y=0], \\
& \quad \downarrow \text{ on utilise l'indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \mathbb{P}[(X=0)] + \mathbb{P}[(X=0)] - \mathbb{P}[X=0]\,\mathbb{P}[Y=0], \\
& \quad \downarrow \text{ on utilise les lois de } X \text{ et } Y \\
&= e^{-\lambda} + p - pe^{-\lambda}.
\end{aligned}
$$

4. Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, $rg(A)$ est une variable aléatoire qui peut prendre trois valeurs distinctes : $0, 1$ et 2. On va maintenant déterminer la probabilité de chaque évènement.

   - **Probabilité de $rg(A) = 2$:** cela signifie que la matrice A est inversible. Nous avons déjà déterminé cet évènement là à la question précédente.
   $$\mathbb{P}[rg(A) = 2] = \mathbb{P}[det(A) \neq 0] = (1 - e^{-\lambda})(1 - p)$$
   - **Probabilité de $rg(A) = 0$:** cela signifie que la matrice A est la matrice nulle, *i.e.* X, Y et $X + Y$ sont nulles Ainsi
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}[rg(A) = 2] = {} & \mathbb{P}[X = 0, Y = 0, X + Y = 0],\\ & \quad \downarrow \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont nulles, alors } X + Y \text{ l'est automatiquement et réciproquement}\\ = {} & \mathbb{P}[X = 0, Y = 0],\\ & \quad \downarrow \text{ indépendance des variables aléatoires } X \text{ et } Y\\ = {} & \mathbb{P}[X = 0]\,\mathbb{P}[Y = 0],\\ = {} & pe^{-\lambda}.\end{aligned}$$
   - **Probabilité de $rg(A) = 1$:** cela correspond l'évènement $X = 0$ ou $Y = 0$ et $X+Y \neq 0$, ce que l'on pourra aussi réécrire comme l'union des deux évènements incompatibles suivants :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}[rg(A) = 1] = {} & \mathbb{P}[(X = 0, Y > 0) \cup (Y = 0, X > 0)],\\ & \quad \downarrow \text{ les deux évènements sont incompataibles}\\ = {} & \mathbb{P}[(X = 0, Y > 0)] + \mathbb{P}[(Y = 0, X > 0)],\\ & \quad \downarrow \text{ indépendance des variables aléatoires } X \text{ et } Y\\ = {} & \mathbb{P}[X = 0]\,\mathbb{P}[Y > 0] + \mathbb{P}[Y = 0]\,\mathbb{P}[X > 0],\\ & \quad \downarrow \text{ passage au complémentaire}\\ = {} & \mathbb{P}[X = 0](1 - \mathbb{P}[Y = 0]) + \mathbb{P}[Y = 0](1 - \mathbb{P}[X = 0]),\\ = {} & e^{-\lambda}(1 - p) + p(1 - e^{-\lambda}).\end{aligned}$$
   Nous aurions également pu utiliser le fait que
   $$\mathbb{P}[rg(A) = 1] = 1 - (\mathbb{P}[rg(A) = 2] + \mathbb{P}[rg(A) = 0]).$$

   L'espérance de la variable aléatoire $rg(A)$ est alors
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[rg(A)] &= 0 \times \mathbb{P}[rg(A) = 0] + 1 \times \mathbb{P}[rg(A) = 1] + 2 \times \mathbb{P}[rg(A) = 2],\\ &= e^{-\lambda}(1 - p) + p(1 - e^{-\lambda}) + 2 \times (1 - p)(1 - e^{-\lambda}),\\ &= 2 - p - e^{-\lambda}\end{aligned}$$
5. C'est une question que nous avons traité en cours, la matrice est diagonalisable
   - pour tout c si $a \neq b$
   - si $a = b$, alors $c = 0$.
6. A l'aide de la question précédente, on en déduit que A est diagonalisable si (i) $X \neq Y$ ou (ii) $X = Y$ et $X + Y = 0$. Le deuxième point peut aussi se réécrire $X = Y = 0$. Ainsi
   $$\mathbb{P}[A\ diag] = \mathbb{P}[(X \neq Y) \cup (X = Y = 0)],$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \downarrow \text{ les deux évènements sont incompatibles} \\
&= \mathbb{P}[(X \neq Y)]\,\mathbb{P}[(X = Y = 0)], \\
&\quad \downarrow \text{ passage au complémentaire} \\
&= 1 - \mathbb{P}[(X = Y)]\,\mathbb{P}[(X = 0, Y = 0)], \\
&\quad \downarrow \text{ indépendance et question 1.} \\
&= 1 - \sum k = 0^{+\infty}\,\mathbb{P}[X = k, Y = k] + \mathbb{P}[X = 0]\,\mathbb{P}[Y = 0], \\
&= 1 - \sum k = 1^{+\infty}\,\mathbb{P}[X = k, Y = k] \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise l'indication} \\
&= 1 - pe^{-\lambda}(e^{\lambda(1-p)} - 1), \\
&= 1 - p(e^{-p\lambda} - e^{-\lambda}),
\end{aligned}
$$

Exercice 5.3 (Diagonalisation ? (sans calcul de déterminant))**.** *On considère la matrice*

$$
A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).
$$

1. *Déterminer la dimension du noyau de la matrice A*
2. *Quel est le déterminant de A ? Préciser le rang de la matrice A.*
3. *Déterminer les valeurs propres de la matrice A.*
   Indication : on pourra effectuer les calculs suivants

$$
A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

   La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction

1. On montre que le noyau est de dimension 1. En effet, soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ un élément du noyau de A, alors la première ligne de la matrice impose

$$x_1 = -x_2.$$

   Ce qui, en utilisant la deuxième ligne de la matrice A nous donne

$$x_3 = 0.$$

   De la même façon, en utilisant la troisième ligne de la matrice, on trouve

$$x_4 = 0.$$

   Donc le noyau de A se trouve dans le sous-espace engendré par le vecteur $(1, -1, 0, 0)$.

   Réciproquement, on montre que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le vecteur $\mathbf{x}_\alpha = (\alpha, -\alpha, 0, 0)$ vérifie bien $A\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{0}$.

   Le noyau de A est donc bien un espace de dimension 1.

2. Le noyau étant de dimension 1, on en déduit que la matrice A n'est pas inversible, son déterminant est donc nul.

   De plus, le théorème du rang qui énonce que

   $$dim(\mathbb{R}^4) = dim(Ker(A)) + rg(A)$$

   nous indique le rang de la matrice A est directement égal à 3.

3. Effectuons les opérations demandées

   $$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad et \quad A\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

   Ces deux calculs montrent que 1 et 1/2 sont des valeurs propres de A. La question 1 a montré que 0 est une valeur propre de A, car la matrice A a un noyau non réduit au vecteur nul.

   Il manque donc une valeur propre à déterminer, or $Tr(A) = 3/2$ et la somme des trois valeurs propres actuelles est aussi égale à 3/2, la dernière valeur propre est donc nécessairement égale à 0.
   Pour que A soit diagonalisable, il faudrait que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 soit de dimension 2, or la question 1 a montré que $dim(Ker(A)) = 1$.
   A n'est donc pas diagonalisable.