Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Devoir Personnel
Licence 2 MIASHS (2021-2022)

Guillaume Metzler
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC EA3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Pour rappel, ce devoir est facultatif et permettra de modifier votre note en fonction de ce que vous avez pu traiter dans ce devoir.
Les deux exercices qui composent ce devoir sont indépendants et ne traitent que de la partie Algèbre Linéaire.
La qualité de la rédaction et la clarté des explications sera prise en compte dans l'évaluation de votre travail.
Bien évidemment, vous avez le droit d'utiliser tous les résultats qui ont été démontrés en cours sans démonstration, sauf si on vous demande explicitement de le montrer.

Quelques informations sur les exercices :

1. **Exercice 1 :** plutôt classique et calculatoire, ce premier exercice permet de mobiliser un large champ des notions en algèbre linéaire et géométrie euclidienne. Il ne présente pas de difficultés majeures et consiste à mobiliser des résultats du cours et à effectuer une quantité de calculs. Par sa nature, c'est un bon exercice pour réviser mais aussi s'assurer que vous connaissez les techniques vues en cours.

2. **Exercice 2 :** il se décompose en deux parties. La première partie de ce problème est relativement calculatoire et se concentre sur la notion de diagonalisation, valeurs propres, vecteurs propres. Il nécessitera de connaître les notions de noyaux et d'image ainsi que les propriétés des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
La deuxième partie est plus théorique dans le sens où vous n'aurez pas de valeurs sur les objets, ces derniers sont ainsi plus *abstraits*. Les deux premières questions peuvent se traiter aisément. La difficulté est ensuite croissante à partir de la question 3.
L'exercice 2 cherche à montrer une condition pour que deux matrices qui commutent possède ce que l'on appelle un vecteur sparse,i.e. qui contient au moins un 0.

Travail à rendre pour le dernier CM afin que ce dernier puisse être pris en compte.

Exercice 1 : Etude d'une forme quadratique

On considère la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Peut-on dire que la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$?

2. On note V la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$, *i.e.*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) La matrice V est-elle inversible ?
   (b) On note u l'application linéaire associée à V. Donner l'expression de l'application u.
   (c) Déterminer son application réciproque.
   (d) Soit $\mathbf{w} = (-1, 1, -1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image de $\mathbf{w}$ par l'application u.

3. On considère maintenant l'espace E des matrices de $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \text{ tel que } b = f, \ c = e, \text{ et } a = g \right\}.$$

   On considère également l'application

$$\phi : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

   en posant, pour tous $A, B \in F$,

$$\phi(A, B) = tr(AVB).$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.
   (c) Quelle est la dimension de F ?
   (d) Montrer que l'application ϕ est une forme bilinéaire ? Est-elle symétrique [1] ?
   (e) Montrer que l'expression de la forme quadratique q, donnée par $q(A) = \phi(A, A)$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in F$ est de la forme

$$q(A) = 2(a(a + b) + ca + cd + b(c + d)).$$

4. On admettra que la représentation matricielle Q de la forme quadratique q est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On pourra par exemple considérer la matrices $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et une matrice B_0 diagonale telle que $c = 0$.

(a) On admettra que le q voit son noyau réduit à la matrice nulle. En déduire le rang de cette forme quadratique.

(b) La forme quadratique q est-elle définie ?

(c) La matrice Q est-elle diagonalisable ?

(d) On admet (mais vous pouvez essayer de le montrer) que le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_Q$ associé à Q est donné par

$$\mathcal{X}_Q(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Peut-on dire que la forme quadratique q est (définie) positive ou négative[2] ?

(e) Déterminer la forme polaire ϕ' associée à forme quadratique q.

5. On considère maintenant l'espace G défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ \text{tel que } a = b \text{ et } b = c \right\}.$$

(a) G est-il un sous-espace de F ? Un sous-espace de E ? Quelle est la dimension de G ?

(b) Déterminer le sous-espace $G^\perp$ orthogonal à G dans F pour le produit scalaire ϕ'.

(c) Quelle est la dimension de $G^\perp$ et expliquez pourquoi.

Exercice 2 : Diagonalisation

Partie I : Quelques calculs de valeurs propres

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on définit également les vecteurs $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. On commence par étudier la matrice A.

(a) Déterminer le spectre de la matrice A, *i.e.* les valeurs propres de A.

(b) Vérifier que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs propres de A.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(d) Montrer qu'aucun élément de $\mathscr{F}$ n'est un vecteur propre commun aux matrices A et B.

2. On s'intéresse maintenant à la matrice B.

(a) Déterminer le spectre de B, *i.e.* les valeurs propres de la matrice B.

(b) Montrer que $Im(B - 2I_3) = Vect(\mathbf{v}_4)$ et que $dim(Ker(B - 2I_3)) = 2$.

2. On pourra évaluer le polynôme χ_q en deux valeurs très simples.

(c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

3. Etude des matrices A et B.
   (a) Montrer que $Ker(A - I_3) \cap Ker(B - 2I_3) = Vect(\mathbf{v}_5)$.
   (b) Montrer que $\mathbf{v}_5$ est le seul vecteur propre commun aux matrices A et B [3].

Partie II : Un peu de théorie

Remarque : cette deuxième partie est plus abstraite et donc moins calculatoire d'un point de vue numérique. Elle nécessite de s'être bien approprié les notions vues en cours.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace

$$\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \mid \exists i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i = 0 \right\}.$$

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A. On dit que X est *sparse* si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

i) $\mathbf{x} \in \mathscr{N}$,
ii) il existe μ dans le spectre de A et $\mathbf{u} \in \mathscr{N}$ tel que $\mathbf{x} = (A - \mu I_n)\mathbf{u}$.

On notera également $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices anti-symétriques, *i.e.* l'espace des matrices qui vérifient $A^T = -A$.

Enfin, pour tout $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\phi(M) = AM + MA^T \quad \text{et} \quad \psi(M) = AMA^T.$$

1. On suppose que μ est une valeur propre de A telle que la dimension du sous-espace propre associé est supérieure ou égale à 2. Montrer que A admet un vecteur propre *sparse* associé à la valeur propre μ [4].

2. On cherche maintenant étudier les applications ϕ et ψ.
   (a) Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est non trivial, *i.e.* ne contient pas que la matrice nulle.
   (b) Montrer que les colonnes d'une matrice $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des éléments de $\mathscr{N}$.
   (c) Montrer que les applications ϕ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que ϕ et ψ commutent.

3. On suppose maintenant que A possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2. On notera également $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ les vecteurs propres associés.

   On considère enfin la matrice $B = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T$.
   (a) Montrer ou justifier que la matrice B vérifie les propriétés suivantes

3. On pourra considérer le deuxième sous-espace propre de A, vérifier que $\mathbf{v}_5$ appartient à ce sous-espace dont on regardera la dimension

4. soit le vecteur propre vérifie la propriété, sinon utilisera le fait que la dimension du sous-espace propre est supérieure à 2 et on considérera deux vecteurs de ce sous-espace.

i. B est anti-symétriques,

ii. B n'est pas la matrice nulle [5],

iii. $AB + B^T A = (\lambda_1 + \lambda_2)B$,

iv. $ABA^T = (\lambda_1 \lambda_2)B$.

(b) En déduire que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0$.

(c) Dans cette question, suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B = 0$.

i. En considérant que la matrice B est formée des vecteurs colonnes $\mathbf{b}_i$, *i.e.* $B = \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{pmatrix}$ montrer que $\mathbf{b}_i$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_2.

ii. En utilisant les propriétés de B vues plus tôt, en déduire qu'au moins un vecteur propre de A est *sparse*.

(d) Dans cette question, suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0$. En utilisant la question 3.b) et ce qui précède, montrer que A admet un vecteur *sparse*.

On pourrait enfin montrer qu'il existe un vecteur *sparse* lorsque la matrice A ne possède qu'une seule valeur propre λ.

5. on utilisera le fait que $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils sont ne sont donc pas colinéaires.