Analyse I

Examen - 1ère Partie
Licence 1 Informatique (2023-2024)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h30

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de trois exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les trois exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction sera grandement prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}.$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une site géométrique de raison $\frac{-3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : Encore une suite

On considère u_0, a et b trois réels. On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a = 1$? De même lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particuliers de la question précédente.
3. Dans le cas général, calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}.$$

6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $0 < a < 1$.

Exercice 3 : Etude d'une fonction hyperbolique

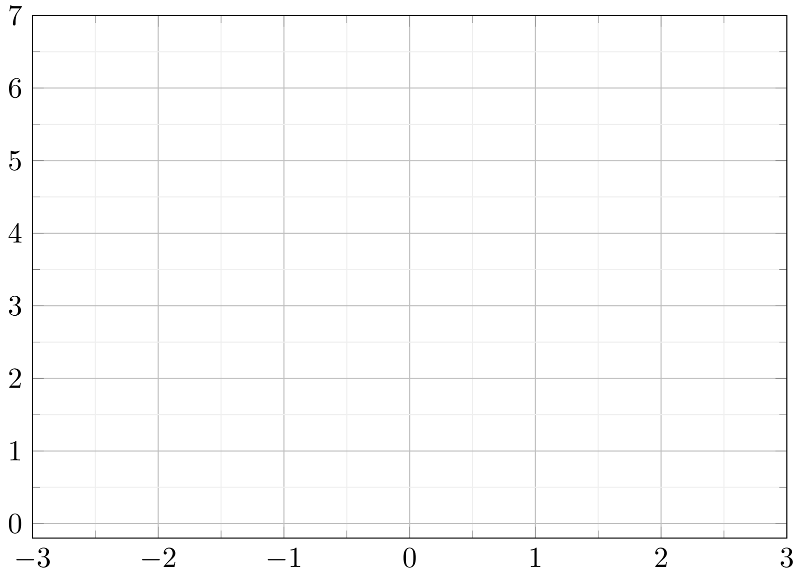
On considère la fonction ch définie par

$$\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Dans cet exercice, on cherchera à étudier cette fonction et montrer quelques relations sur cette dernière.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction ch ainsi que l'ensemble sur lequel elle est dérivable et déterminer sa dérivée.

2. Montrer que pour tout réel x, nous avons
$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x).$$
3. Montrer que, pour tout réel x, nous avons les relations suivantes
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)},$$
où th désigne la fonction *tangente hyperbolique*.
4. Etudier les limites de la fonction ch en les bornes de son intervalle de définition et dresser le tableau de variation.
5. Représenter graphiquement cette fonction ch.



6. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $[1, +\infty[$. On notera argch la fonction réciproque.

7. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, nous avons
$$\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$
Indication : on utilisera un résultat sur la somme $\mathrm{ch} + \mathrm{sh}$ *ainsi que le fait que* $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ *pour tout* $x \geq 1$.

8. Déterminer la dérivée de la fonction argch après avoir donné l'intervalle sur lequel la fonction est dérivable.