Analyse I

Devoir Maison
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Travail à rendre pour le ...

Résumé

A compléter

1 Etude de la fonction de Lambert

Dans ce premier problème, on se propose d'étudier la fonction de Lambert ainsi que certaines de ses propriétés. Plus précisément, on va d'abord étudier la fonction réciproque de la fonctionsde Lambert afin de prouver son existence puis on étudiera une approximation de cette dernière. Une grande particularité de cette fonction est qu'elle n'admet pas d'expression analytique.

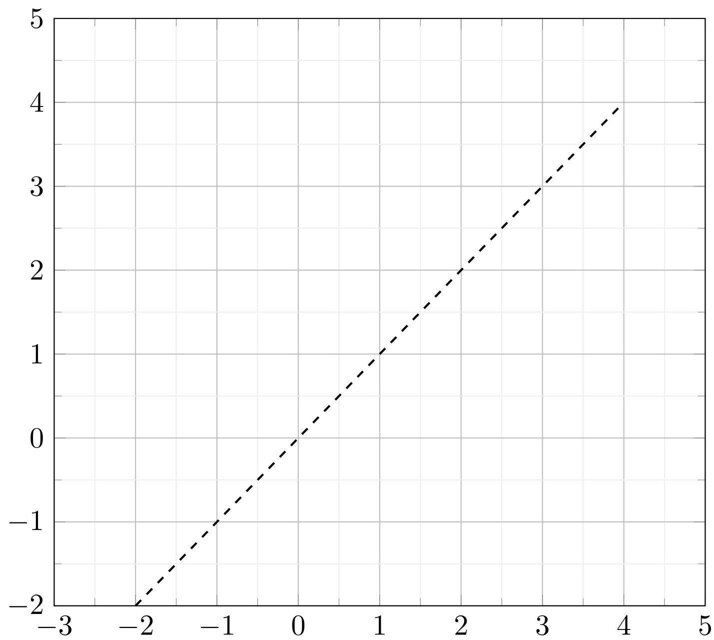
1.1 Fonction de Lambert

On commence par étudier la fonction de Lambert. Pour cela on considère d'abord la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que cette fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$.
2. Etudier la convexité de la fonction f ?

Dans la suite, on notera W la fonction réciproque de cette bijection. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geq -e^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$. On peut aussi écrire que pour tout réel $x \geq -e^{-1}$, nous avons $f(W(x)) = x$.

2. Justifier que la fonction W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et qu'elle est de classe C^∞ sur ce même intervalle.
3. Montrer que la fonction W est croissante.
4. Donner les valeurs de $W(0)$ et de $W'(0)$.
5. Montrer que W est concave sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
   Indication : on utilisera le fait que pour tout $a, b \geq -1$, la fonction f est convexe et on posera ensuite $a = W(x)$ et $b = W(y)$.
6. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que l'on équivalent suivant au voisinage de 0 pour la fonction W
$$W(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$$
7. En utilisant le fait que pour tout $x > -1$, nous avons $x = f(W(x))$. Déterminer un équivalent de W au voisinage de $+\infty$ et en déduire que la limite W en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
8. A l'aide des questions précédentes, donner une représentation graphique de f et de W.



1.2 Approximation de la fonction de Lambert

On considère maintenant une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On cherchera à étudier la convergence de cette suite vers la fonction W définie précédemment.
Pour tout réel x positif, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x(t) = xe^{-xe^{-t}}$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_n$ telle que pour tout réel $x \geq 0, w_0(x) = 1$ et $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$.

1. Montrer que pour tout réel x positif, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x, *i.e.* que $W(x)$ est solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.
2. Démontrer que, pour tout réel x positif, la fonction ϕ_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \phi'_x(t) \leq \frac{x}{e}.$$

   Indication : on pensera à utiliser l'inégalité des accroissements finis
3. En déduire que

$$\forall x \in [0, e], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|$$

   et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers W pour tout $x \in [0, e]$.

2 Etude de suites d'intégrales

Dans ce deuxième problème, on s'intéresse à l'étude de deux fonctions qui sont définies par des intégrales. L'objectif est de faire une étude plus poussée de l'intégrale de Wallis étudiée en TD.

2.1 Intégrale de Wallis

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx.$$

(a) Calculer W_0, W_1 et W_2.

(b) Démontrer la relation $W_n = myint_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

(c) Vérifier que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de nombres réels strictement positifs.

(a) Soit n un entier naturel. Etablir la relation $W_{n+2}(n+2) = (n+1)W_n$.
Indication : on fera une intégration par parties.

(b) En déduire que W_{n+2} est équivalent à W_n lorsque n tend vers $+\infty$ et que pour tout entier naturel n, on a

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : on cherchera à montrer que $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constant pour tout entier n.

(c) Vérifier que W_{n+1} est équivalent à W_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) En déduire que W_n est équivalent à $\sqrt{\pi/(2n)}$ lorsque n tends vers $+\infty$.

2.2 Etude d'une suite d'intégrales

Pour entier naturel n, on considère la fonction numérique réelle f_n définie dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$f_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2}\, dt.$$

Par exemple $f_n(3) = \displaystyle\int_0^3 t^n e^{-t^2}\, dt$.

1. Préciser la parité de f_n en fonction de l'entier naturel n.
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, on a

$$0 \leq f_0(x) \leq 1 + \int_1^x e^{-t}\, dt.$$

   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, f_n admet une limite en $+\infty$ et que celle de f_0 est finie.
3. Déterminer une relation de récurrence entre f_{n+2} et f_n.
   Indication : on procédera à une intégration par parties.
4. (a) Calculer $f_1(x)$ en fonction du nombre réel x, puis la limite de f_1 en $+\infty$.
   (b) En déduire une expression simple de la limite de f_{2n+1} en $+\infty$ en fonction de l'entier naturel n.

2.3 Lien avec l'intégrale de Wallis

On va maintenant chercher à faire le lien entre la fonction f_n étudier dans la précédente section et l'intégrale de Wallis étudiée en première partie.

1. Soit x un nombre réel tel que $0 \leq x < 1$. Démontrer que l'on a

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

2. Soit n un entier naaturel non nul.
   (a) Etablir la relation

$$\int_0^n e^{-x^2}\, dx = n \int_0^1 e^{-n^2 t^2}\, dt$$

   puis la double inégalité

$$n \int_0^1 (1-t^2)^{n^2}\, dt \leq \int_0^n e^{-x^2}\, dx \leq n \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n^2}}\, dt.$$

   Indication : pour la première égalité,on procédera à un changement de variable.
   (b) Vérifier que

$$W_{2n^2+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n^2}\, dt.$$

   Indication : on effectuera le changement de variable $t = \cos(u)$.

(c) Démontrer l'inégalité

$$W_{2n^2-2} \geq \int_0^1 (1+t^2)^{-n^2}\, dt.$$

Indication : on procédera au changement de variable $t = \tan(u)$

3. (a) Démontrer que la limite de f_0 en $+\infty$ est égale à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (b) En déduire la limite de f_{2n} en $+\infty$ en fonction de n.