Complexité
TD 1 - Correction

Master 1 Informatique (2022-2023)

Serge Miguet, Guillaume Metzler, Tess Masclef
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2

serge.miguet@univ-lyon2.fr guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

tess.masclef@univ-lyon2.fr

Problème du Crêpier

Un cuisinier a préparé des crêpes de tailles différentes, qui sont disposées en désordre sur une pile. Il souhaite les empiler par taille décroissante, en laissant apparaître vers le haut la face colorée. La seule opération à laquelle il a droit est de glisser sa spatule dans la pile, et de retourner d'un seul coup les crêpes de la partie supérieure (situées au-dessus de la spatule), pour les placer à l'envers sur crêpes de la partie inférieure (situées en dessous de la spatule).

Un premier algorithme On se propose de réfléchir à un algorithme permettant de faire en sorte que les crêpes soient empilées de la plus grande à la plus petite (la plus grande crêpe se trouvant à la base de la pile) en utilisant uniquement les déplacements autorisés. On ne se préoccupe pas des faces colorées dans cette question.

Avant de s'attaquer à cette question, il est préférable de jouer un peu en prenant des piles de crêpes plus petites au départ afin de comprendre le processus à appliquer.

- avec une crêpe : il n'y a aucun mouvement a effectué
- avec deux crêpes : soit elles sont dans le bon ordre, soit il faut inverser les deux crêpes, ce qui impliquer d'effectuer un mouvement.
- avec trois crêpes : plusieurs situation sont possibles, n'hésitez pas à tester !!

Remarquez que dans tous les cas, il faudra ramener la plus grande crêpe sur la face supérieure (un mouvement) avant de retourner la pile (un deuxième mouvement). On procédèrera de la même façon avec la deuxième crêpe la plus grande, on commence par la ramener sur la face supérieure de la pile (un mouvement) avant de retourner toute la pile, sauf la dernière crêpe ! On répète le process jusqu'à ce que l'on ait mis toutes les crêpes dans le bon ordre.

Plus formellement, supposons que l'on dispose de n crêpes. Pour en ranger une seule, il faudra effectuer 0 (meilleure situation) ou 2 (pire situation) mouvements. On en déduit que le nombre de mouvements à effectuer peut varier entre 0 et $2(n-1)$ pour ranger notre pile de crêpes.

Pourquoi $n-1$? Parce qu'une fois que l'avant dernière crêpe est rangée, la dernière l'est automatiquement !
On en déduit que la complexité de notre algorithme est en $\mathcal{O}(2(n-1))$ donc un $\mathcal{O}(2n)$ (la constante n'a aucune importance).

En fait, on peut observer que le nombre d'étapes nécessaires au rangement de n crêpes est au plus égal à : $2n-3$ pour $n \geq 1$.

Un deuxième algorithme On souhaite faire la même chose que dans la première question mais cette fois-ci, on impose que les faces colorées se trouvent sur les faces supérieures de la pile, *i.e.* on voudrait que la partie "brûlée" se trouve face inférieure.

On peut utiliser le même raisonnement que lors de la précédente étude. Il va simplement falloir ajouter une étape supplémentaire.

En effet, lorsque l'on souhaite ranger une crêpe nous devrons cette fois-ci effectuer les manipulations suivantes :

- ramener la crêpe sur le haut de la pile
- retourner la crêpe si la face colorée (ou brûlée) se trouve vers le haut.
- renverser la pile en prenant garde à ne pas toucher aux crêpes déjà rangées.

Avec cette nouvelle contrainte, nous devrons donc effectuer entre 0 et 3 opérations par crêpe. Ainsi, si l'on dispose à nouveau de n crêpes, nous devrons effectuer au plus $3(n-1)+1$ opérations pour ranger toutes les crêpes. Cette fois, on ajoute une manipulation supplémentaire car il se peut que la dernière crêpe à ranger ne soit pas dans le bon sens.

Notre algorithme a donc une complexité en $\mathcal{O}(3n)$.

En fait, on peut observer que le nombre d'étapes nécessaires au rangement de n crêpes est au plus égal à : $3n-2$ pour tout n.

Une implémentation Vous pouvez consulter un code commenté avec le quel nous vous conseillons de jouer afin de mettre en avant le nombre de manipulations en fonction de la taille de la pile de crêpes..
Vous pourrez ensuite représenter le temps d'exécution de l'algorithme en fonction de la taille de pile de crêpe afin de voir si la complexité reste linéaire ou non.

Code Commenté

Une autre implémentation Elle est disponible à l'adresse suivante[1] :

Code proposé par un étudiant

[1] Merci à Yanis pour sa contribution à l'élaboration de ce code.