Analyse I

Correction des TD
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Les exercices proposés dans cette fiche constituent une bonne base d'entraînement pour mettre en application les différentes notions vues en cours. Les exercices sont essentiellement triés par thème mais il n'est pas impossible qu'il faille avoir recours à des notions vues ultérieurement afin de pouvoir le traiter.

Les exercices proposés sont également séparés en deux catégories, une partie dite "Applications" constituée des exercices simples que vous devez savoir faire dans le cadre de ce cours. D'autres exercices sont proposés dans une partie "*Pour aller plus loin*". Ces exercices là présentent des difficultés supplémentaires : parfois plus complexes en terme de calculs, plus théoriques ou nécessitent de faire des démonstrations en revenant aux définitions donnés dans le cours. Bien que je ne demande pas, dans le cadre de ce cours, à ce que vous sachiez résoudre ce type d'exercices, ils restent très formateurs.

En cas de problème dans la résolution de ces exercices, vous pouvez toujours me solliciter par mail.

Tous les exercices ne pourront pas être traités en TD, il est donc important que vous vous entraîniez chez vous pour maîtriser ces notions et que vous refassiez les exercices traités en cours.

Table des matières

1 Suites de nombres réels

Exercice 1.1 (Vérifier ses connaissances)**.**
Les questions suivantes sont des questions de cours pour vérifier vos connaissances.

1. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez ou donner un contre-exemple*
   (a) *Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$, alors $u_n \geq L$ à partir d'un certain rang.*
   (b) *Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L < 0$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.*
   (c) *Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$ et que $u_n \geq 0$, alors $L \geq 0$.*
   (d) *Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$ et que $u_n < 0$, alors $L < 0$.*
   (e) *Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{R}$ et si $K > L$, alors $u_n \leq K$ à partir d'un certain rang.*
   (f) *Toute suite monotone est convergente.*
2. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?*
   (a) *A : u est bornée,*
   B : u est convergente.
   (b) *A : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$,*
   B : u diverge
   (c) *A : u converge,*
   B : u est stationnaire
3. *Soient deux suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?*
   (a) *A : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$,*
   B : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)$.
   (b) *A : $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang,*
   B : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) < \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)$.
4. *On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{2-n^2}{n^3}$$

   (a) *Déterminer un équivalent de ces deux suites lorsque $n \to +\infty$.*
   (b) *Faire de même avec les suites $u_n v_n$, $\dfrac{u_n}{v_n}$, $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.*

Correction

1. (a) Faux. En effet, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 et pour tout n, $u_n < 2$.
   (b) Vrai. C'est la conséquence d'un résultat vu en cours.
   (c) Vrai. C'est à nouveau la conséquence d'un résultat vu en cours.
   (d) Faux. En effet, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout n, $u_n < 0$ et la limite de cette suite est égale à 0.
   (e) Vrai. C'est à nouveau une conséquence de la définition de limite d'une suite.
   (f) Faux. Si on ne précise pas que cette suite est bornée.
2. (a) Si la suite est convergente alors elle est bornée. En revanche, la réciproque est fausse, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

(b) On a clairement A implique B, en revanche la réciproque est fausse à nouveau. On peut reprendre la même suite que précédemment.

(c) Si u est stationnaire, elle est convergente car constante au bout d'un certain rang (on passe à nouveau par la définition de limite). En revanche la réciproque est fausse, on peut prendre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{2^n}$.

3. (a) Nous avons bien sûr B implique A en revanche la réciproque est fausse. Considérons les suites u et v définies pour tout n par

$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n - \frac{1}{n+1}.$$

La suite $u - v$ converge vers 0 en revanche, les deux suites divergent.

(b) A nouveau, nous avons B implique A. En revanche la réciproque est fausse. Considérons les suites u et v définies pour tout n par

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2}{n}.$$

On a bien $u_n < v_n$ pour tout entier n mais les deux suites admettent la même limite.

4. (a) Lorsque n tend vers $+\infty$ les deux suites sont respectivement équivalentes à $\frac{1}{n}$ et $\frac{-1}{n}$.

(b) Etudions les trois équivalents

- **équivalent de $u_n v_n$:** le calcul d'équivalents est compatible avec la multiplication. On peut donc reprendre les calculs de la question précédente et on en déduit que

$$u_n v_n \sim -\frac{1}{n^2}.$$

- **équivalent de $u_n + v_n$:** l'équivalence n'est en revanhce pas compatible avec la somme où la différence, on va donc de voir calculer la somme avant de déterminer un équivalent. Ce qui nous donne

$$u_n + v_n = \frac{n-1}{n^2} + \frac{2-n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}(2-n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \breve{}\frac{1}{n^2}.$$

- **équivalent de $u_n - v_n$:** de la même façon que précédemment, nous avons

$$u_n - v_n = \frac{n-1}{n^2} + \frac{2-n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}(2n^2 - n - 2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Exercice 1.2 (Variations d'une suite).
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles croissantes ou décroissantes ?

1. $u_n = n^2 + 5n + 4$.

2. $u_n = \frac{-2n+3}{n+1}$.

3. $u_n = \sqrt{2n+5}$.

4. $u_n = \frac{2^n}{n}$.

Correction

Pour étudier les variations d'une suite, on peut étudier le signe de la différence entre deux termes consécutifs, *i.e.* le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou encore le quotient entre deux termes consécutifs, *i.e.* la valeur du ratio $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 5(n+1) + 4 - n^2 - 5n - 4, \\ &= 2n + 6, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

La suite est donc croissante $n \in \mathbb{N}$.

2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+3}{n+2} + \frac{2n-3}{n+1}, \\ &= \frac{-2(n+1)^2 + 3(n+1) + (2n-3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}, \\ &= \frac{-2n^2 - 4n - 2 + 3n + 3 + 2n^2 + n - 6}{(n+1)(n+2)}, \\ &= \frac{-5}{(n+1)(n+2)}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante $n \in \mathbb{N}$.

3.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2n+7}}{\sqrt{2n+5}}, \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

La suite est donc croissante pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}, \\ &= \frac{2n}{n+1}, \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

La suite est donc croissante pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 1.3 (Suite arithmético-géométrique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1. *Calculer u_1, u_2 et u_3.*
2. *On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 3$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.*
3. *Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.*
5. *Calculer $S_n = v_0 + v_1 + + \ldots + v_n$ et en déduire la valeur de la somme $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.*

Correction

On rappelle que nous avons $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1. On applique simplement la relation de récurrence, ce qui nous donne successivement

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 10 + 1 = \frac{23}{3}.$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{23}{3} + 1 = \frac{55}{9}.$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{55}{9} + 1 = \frac{137}{27}.$$

2. On considère maintenant $v_n = u_n - 3$, les premiers termes sont alors égaux à

$$v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7 = 7\left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

$$v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{14}{3} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^1.$$

$$v_2 = u_2 - 3 = \frac{55}{9} - 3 = \frac{28}{9} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

$$v_3 = u_3 - 3 = \frac{137}{27} - 3 = \frac{56}{27} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

3. Les calculs précédents, montrent que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 7$. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3}, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise la définition par récurrence de } u_n \\
&= \frac{\frac{2}{3}u_n + 1 - 3}{u_n - 3}, \\
&= \frac{2u_n - 6}{3u_n - 9}, \\
&\quad \downarrow \text{ on factorise par 2 au numérateur et 3 au dénominateur} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

On a donc bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

4. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime comme

$$v_n = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On en déduit donc une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant le fait que $v_n = u_n - 3$

$$u_n = v_n + 3 = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

5. Il s'agit de calculer la somme des termes d'une suite géométrique. Nous avons donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 21\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Pour le calcul de S'_n, on va utiliser le lien entre v_n et u_n, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
S'_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k, \\
&\downarrow \text{ on utilise le fait que } u_k = v_k + 3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (v_k + 3), \\
&\downarrow \text{ on reconnaît la définition de } S_n \text{ en séparant la somme en deux} \\
&= S_n + \sum_{k=0}^{n} 3, \\
&= 21\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1).
\end{aligned}$$

Exercice 1.4 (Etude d'une suite).
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$ pour tout entier naturel n. On définit également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout entier naturel n.

1. *Calculer u_1, u_2 et u_3*
2. *Montrer que $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique et donner des précisions.*
3. *Exprimer v_n en fonction de n.*
4. *En déduire une expression de u_n.*

Correction

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égaux à

$$u_1 = \frac{2u_0+3}{u_0+4} = \frac{3}{4}.$$

$$u_2 = \frac{2u_1+3}{u_1+4} = \frac{2\frac{3}{4}+3}{\frac{3}{4}+4} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{19}{4}} = \frac{18}{19}.$$

$$u_3 = \frac{2u_2+3}{u_2+4} = \frac{2\frac{18}{19}+3}{\frac{18}{19}+4} = \frac{\frac{93}{19}}{\frac{94}{19}} = \frac{93}{94}.$$

2. On considère maintenant $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{-1}{3}$. En effet

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}, \\
&\quad \downarrow \text{ relation de récurrence de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} + 3}, \\
&= \frac{u_n - 1}{5(u_n+3)}, \\
&\quad \downarrow \text{ on factorise} \\
&= \frac{1}{5}\frac{u_n-1}{u_n+3}, \\
&= \frac{1}{5}v_n.
\end{aligned}$$

3. Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{-1}{3}$, alors pour tout entier n, on a

$$v_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

4. On exploite la relation entre les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} &\iff v_n(u_n+3) = u_n - 1, \\
&\iff 1 + 3v_n = u_n(1 - v_n), \\
&\iff u_n = \frac{1+3v_n}{1-v_n}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc $u_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.

Exercice 1.5 (Variation d'une suite)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

1. *Montrer que pour tout n, $u_{n+1} \geq 1$.*
2. *Montrer que pour tout entier n, on a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}.$$

3. *En déduire les variations de $(u_n)_{n\in N}$.*

Correction

Etudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.

1. On va montrer le résultat par récurrence, en utilisant le fait que $u_0 = 2$. On a donc
$$u_1 = \frac{1+3u_0}{3+u_0} = \frac{7}{5} \geq 1.$$
La relation est donc vraie pour $n = 1$. Supposons que cette dernière soit vraie pour un certain entier n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1+3u_n}{3+u_n}, \\ &\downarrow \text{ en réécrivant le quotient} \\ &= \underbrace{\frac{3+u_n}{3+u_n}} + \frac{2u_n-2}{3+u_n}, \\ &\geq 1 + \frac{2u_n-2}{3+u_n}, \\ &\downarrow \text{ en utilisant le fait que } u_n \geq 1 \\ &\downarrow \text{ on a alors } 2u_n - 2 \geq 0 \text{ donc } \frac{2u_n-2}{3+u_n} \geq 0 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

2. On va se contenter de faire le calcul.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n, \\ &\downarrow \text{ on réduit au même dénominateur et on simplifie} \\ &= \frac{1 + \cancel{3u_n} - \cancel{3u_n} - u_n^2}{3+u_n}, \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}. \end{aligned}$$

3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geq 1$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Exercice 1.6 (Une suite arithmético-géométrique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer le signe de la limite de cette suite.*
2. *Trouver un point fixe de la suite $(u_n)_{n\in N}$. On le notera s.*
3. *Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_n = u_n - s$.*
4. *En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et sa limite.*

Correction

1. On va calculer les trois premiers termes de cette suite
$$u_1 = -\frac{3}{4}u_0 + 3 = 3 + 3 = 6.$$
$$u_2 = -\frac{3}{4}u_1 + 3 = -\frac{18}{4} + 3 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$u_3 = -\frac{3}{4}u_2 + 3 = \frac{9}{8} + 3 = \frac{33}{8}.$$

Il est donc difficile de prévoir le signe de la limite de cette suite. On peut simplement noter l'alternance du signe à chaque itération.

2. Un point fixe ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\ell = -\frac{3}{4}\ell + 3$$

qui admet comme solution $\ell = \dfrac{12}{7}$ (qui sera donc un candidat à la limite de cette suite).

3. On considère $v_n = u_n - \dfrac{12}{7}$. On a alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{12}{7}, \\
&\quad \downarrow \text{ on applique la définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \\
&= -\frac{3}{4}u_n + 3 - \frac{12}{7}, \\
&= -\frac{3}{4}u_n + \frac{9}{7}, \\
&\quad \downarrow \text{ on factorise par } -3/4 \\
&= -\frac{3}{4}\left(u_n - \frac{12}{7}\right), \\
&= \frac{-3}{4}v_n.
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{-3}{4}$.

4. En exploitant la relation $u_n = v_n + \dfrac{12}{7}$, nous avons

$$u_n = v_0\left(-\frac{3}{4}\right)^n + \frac{12}{7},$$

où $v_0 = -\dfrac{16}{7}$.

La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $\dfrac{12}{7}$.

Exercice 1.7 (Calculs de Racines Carrées)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On considère également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $n \geq 0$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. *Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$.*
2. *Calculer v_n en fonction de v_0 et montrer que $|v_0| < 1$. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
3. *Exprimer u_n en fonction de v_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.*
4. *Calculer les trois premiers termes de la suite, pour $u_0 = 1$ et $a = 2$.*

Correction

1. Faisons les calculs en partant de la définition de v_{n+1}

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}}, \\
&\downarrow \text{ définition de } u_{n+1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)+\sqrt{a}}, \\
&= \frac{u_n^2+a-2\sqrt{a}u_n}{u_n^2+a+2\sqrt{a}u_n}, \\
&\downarrow \text{ on reconnaît une identité remarquable} \\
&= \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{(u_n+\sqrt{a})^2}, \\
&= v_n^2.
\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, on peut montrer par une récurrence simple que l'on a $v_n = (v_0)^{2^n}$. De plus nous avons

$$|v_0| = \left|\frac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}}\right| \leq \left|\frac{u_0}{u_0+\sqrt{a}}\right| < 1.$$

La dernière inégalité est vraie car $a > 0$. Comme pour tout n, nous avons $v_n = (v_0)^{2^n}$ et que $|v_0| < 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0/$

3. On repart de la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}} &\iff v_n(u_n+\sqrt{a}) = u_n-\sqrt{a}, \\
&\iff u_n(1-v_n) = \sqrt{a}(1+v_n), \\
&\iff u_n = \sqrt{a}\frac{1+v_n}{1-v_n}, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise l'expression de } v_n \text{ en fonction de } n \\
&\iff u_n = \sqrt{a}\frac{1+(v_0^2)^n}{1-(v_0^2)^n}.
\end{aligned}$$

Or $|v_0| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

4. On considère $u_0 = 1$ et $a = 2$, les trois premiers termes sont donc égaux à

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0+\frac{a}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}.$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1+\frac{a}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}.$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2+\frac{a}{u_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{537}{408}.$$

Exercice 1.8 (Etude de la convergence d'une suite)**.**
Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}.$$

1. (a) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.*
   (b) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. Peut)on préciser sa limite sans calcul supplémentaire.*
2. (a) *A l'aide du théorème des acroissements finis, encadrer $\ln(n+1)-\ln(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*
   (b) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et préciser sa limite.*

Correction

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{p(n+1)} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}\right), \\ &= \frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + \cdots + \frac{1}{p(n+1)} - \frac{1}{n}, \\ &\leq \frac{p}{pn+1} - \frac{1}{n}, \\ &= -\frac{1}{n(pn+1)}. \end{aligned}$$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante d'après la question précédente. Par définition cette suite est positive, *i.e.* $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ étant décroissante et minorée, elle est donc convergente. En revanche, sans plus d'informations, nous ne pouvons pas dire qu'elle est la limite de cette suite.

2. (a) Il faut trouver un moyen de faire apparaître ce terme $\ln(n+1) - \ln(n)$ en utilisant un terme proche de la suite u_n qui, elle, fait apparaître des termes en $\frac{1}{x}$.
   Notons que pour tout $x \in [n, n+1]$, la fonction ln est dérivable sur $[n, n+1]$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

   L'inégalité des accroissement finis assure nous donne alors (ce que l'on peut aussi faire en intégrant entre n et $n+1$ dans l'inégalité précédente et en utilisant la croissance de l'intégrale) :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

   (b) On va maintenant utiliser l'inégalité précédente pour encadrer chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. On peut borner ces termes inférieurement comme suit

$$\begin{aligned} u_n &\geq (\ln(n+1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) + \cdots + (\ln(pn+1) - \ln(pn)), \\ &\geq \ln(pn+1) - \ln(n), \\ &= \ln\left(p + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

   On fait la même chose pour borner la suite supérieurement cette fois-ci. Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
u_n &\leq \frac{1}{n} + (\ln(n+1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) + \cdots + (\ln(pn) - \ln(pn-1))\,, \\
&\geq \frac{1}{n} + \ln(pn) - \ln(n), \\
&= \frac{1}{n} \ln(p)\,.
\end{aligned}
$$

Pour tout $n > 0$, nous avons donc

$$\ln\left(p + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n} + \ln(p).$$

En prenant la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente et en appliquant le théorème des gendarmes, on trouve alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(p).$$

Exercice 1.9 (Suite de Fibonacci)**.**
L'histoire des Mathématiques est parfois surprenante, et décidément toujours inattendue. Le vieux nombre d'or (qui sera l'objet de cet exercice), à l'origine géométrique, s'apparenta des siècles plus tard avec des fractions issues d'une suite purement arithmétique. L'artisan de cette union fut le plus remarquable mathématicien du Moyen Âge, Leonardo Pisano, plus connu sur le nom de Fibonacci[1]*. Le plus célèbre de tout les problèmes qui fait apparaître ce nombre d'or se trouve certainement dans le* ***Livre de l'abaque****. Il s'agit du fameux problème des lapins, dont la solution est la suite aujourd'hui connue sous le nom de Fibonacci.*

Le problème est posé de la façon suivante : combien de couples de lapins aurons-nous à la fin de l'année si nous commençons avec un couple qui engendre chaque mois un autre couple qui procrée à son tour au bout de deux mois de vie ?

L'objectif de cet exercice est alors d'étudier les solutions de ce problème et plus largement la suite de Fibonacci $(F_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et $F_2 = 1$ et pour tout $n \geq 1$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. *On s'intéresse à l'équation $x^2 = x + 1$.*
   (a) *Montrer que cette équation possède une solution positive que l'on notera φ. Ce nombre est appelé nombre d'or. L'autre solution, négative, sera notée ϕ*
   (b) *Montrer les égalités*
   $$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 1}.$$
   (c) *Montrer que l'on a $\varphi = \dfrac{-1}{\phi}$.*

1. **Leonardo Pisano, Fibonacci (1170 - 1250)**. Il naquit à Pise en 1170. Son surnom renseigne sur son origine familiale : Fibonacci signifie tout simplement «fils de Bonacci» (figlio di Bonacci). Cependant, ce nom est d'origine moderne ; on ne dispose d'aucne preuve permettant d'affirmer qu'il était connu sous le patronyme de Fibonacci. Il s'initia aux Mathématiques à partir de la comptabilité, car son père était un marchand italien qui avait des activités commerciales internationales. Rapidement, Leonardo montra un vif intérêt pour les mathématiques qui allait bien au-delà de leurs applications mercantiles. Ses voyages marchands en Afrique du Nord lui offrirent l'opportunité de s'initier aux mathématiques arabes aux côtés de maîtres musulmans. Il connut ainsi le système de numérotation arabo-hindou et en comprit immédiatement les énormes avantages. En Europe, il en devint le défenseur le plus zélé et tenta de le vulgariser. C'est à lui que nous devons apparition dans notre culture.

2. *On considère à présent les termes de la suite de Fibonacci.*
   (a) *Calculer les valeurs de F_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.*
   (b) *En utilisant le fait que $F_{n+2} \geq 2F_n$, donner une borne inférieure sur F_n pour entier naturel n.*
3. *Soient deux réels α et β. On considère, pour tout entier n, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$f_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   (a) *Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation de récurrence*

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

   (b) *Déterminer les valeurs de α et β telles que $f_0 = f_1 = 1$.*
   (c) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un entier naturel.*
   (d) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{f_{n+1}}{f_n}\right) = \varphi$. On pourra résoudre cette question de deux façons différentes.*

Correction

1. On s'intéresse à l'équation à $x^2 = x + 1$ dont on va étudier les solutions.
   (a) Il s'agit d'une simple équation du second degré dont le discriminant est égal à 5. Elle admet donc deux solutions qui sont

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ et } \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

   (b) On va d'abord calculer $1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\varphi} &= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \\
&\downarrow \text{ réduire au même dénominateur} \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}+2\right), \\
&\downarrow \text{ on multiplie par le conjugué} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\left(3+\sqrt{5}\right), \\
&= \frac{-3-5-2\sqrt{5}}{-4}, \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

   On va se concentrer sur la deuxième égalité maintenant.

$$\frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1} = \frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+1}{\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, \\
&\quad \downarrow \text{ en multipliant numérateur et dénominateur par } \sqrt{5} \\
&= \frac{10\sqrt{5}+10}{20}, \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

(c) On va maintenant montrer le lien entre ϕ et φ.

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{\phi} &= -\frac{2}{1-\sqrt{5}}, \\
&= -\frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}, \\
&= -\frac{2+2\sqrt{5}}{-4}, \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

2. On s'intéresse maintenant à la suite de Fibonacci

(a) Les premiers termes sont

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5$$

$$F_5 = 8,\ F_6 = 13,\ F_7 = 21 \text{ et } F_8 = 34.$$

(b) On va utiliser le fait que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour donner une borne inférieure de F_n.

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \\
&\quad \downarrow\ (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\geq 2F_{n-2} \\
&= 2(F_{n-3} + F_{n-4}), \\
&\quad \downarrow\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\geq 4A_{n-4}, \\
&= 4(F_{n-5} + F_{n-6}), \\
&\quad \downarrow\ (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\geq 8F_{n-6}, \\
&\geq \ldots, \\
&\geq 2^k F_{n-2k}. \geq \qquad \ldots, \\
&\geq 2^{n/2}
\end{aligned}$$

Notons que le cas traité ci-dessous correspond au cas où n est pair. Si n est impair, on devra alors s'arrêter à F_1 au lieu de F_0.

3. On s'intéresse maintenant à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) On va montrer qu'elle vérifie la même relation de récurrence que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que l'on peut réécrire cette suite comme

$$f_n = \alpha\phi^n + \beta\varphi^n.$$

On va ensuite exploiter les relations que l'on connaît sur φ afin de démontrer l'égalité. Pour cela on va d'abord noter que l'on a

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \iff \varphi^2 = 1 + \varphi.$$

De la même façon

$$\phi = -\frac{1}{\varphi}, \text{ donc } -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi \iff \phi - \phi^2 = -1 \iff \phi^2 = 1 + \phi.$$

$$\begin{aligned}
f_{n+2} &= \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}, \\
&\quad \downarrow \text{ en exploitant les premières questions} \\
&= \alpha\phi^{n+2} + \beta\varphi^{n+2}, \\
&= \alpha\,\underbrace{\phi^2}\,\phi^n + \beta\,\underbrace{\varphi^2}\,\varphi^n, \\
&\quad \downarrow \text{ on exploite nos relations ci-dessus} \\
&= \alpha(1+\phi)\phi^n + \beta(1+\varphi)\varphi^n, \\
&= \alpha\phi^n + \beta\varphi^n + \alpha\phi^{n+1} + \beta\varphi^{n+1}, \\
&\quad \downarrow \text{ définition de } f_n \\
&= f_n + f_{n+1}.
\end{aligned}$$

(b) Il suffit de résoudre un petit système dans ce cas là.

$$\begin{cases} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta &= 1, \\ \alpha\phi+\beta\varphi &= 1, \end{cases}$$

De la première équation, nous avons $\alpha = 1 - \beta$. En injectant dans la deuxième équation, on trouve alors $\phi(1-\beta) + \varphi\beta = 1$ soit

$$\beta = \frac{1-\phi}{\varphi-\phi} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

On en déduit que $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$.

(c) Le résultat est immédiat en utilisant la relation de récurrence démontrée à la question (a).

(d) Deux possibilités pour déterminer la limite

- **en exploitant la définition de f_n :** on peut tout d'abord noter que $|\phi| = \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta\varphi^{n+1}}{\beta\varphi^n} = \varphi.$$

- **en utilisant la relation de récurrence :**
remarquons que tout les termes de la suite $\left(\dfrac{f_{n+1}}{f_n}\right)$ sont positifs et supposons que la suite converge[2] et notons L sa limite.
En remarquant que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\dfrac{f_n}{f_{n-1}}}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette expression. On trouve que la limite L vérifie l'équation $L^2 = L + 1$, qui est notre équation du second degré étudié au tout début et dont la racine positive est φ.

on peut tout d'abord noter que $|\phi| = \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f}{} = 0$$

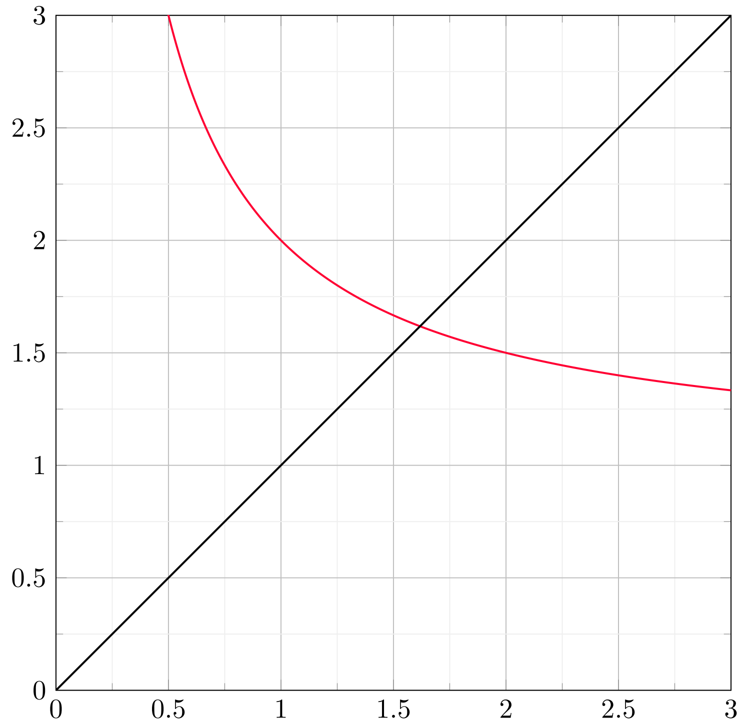
Exercice 1.10 (Approximations du nombre d'or)**.**
On rappelle que l'on a posé $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $a_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* n *par* $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$.
   (a) *Pour tout entier* $n \geq 0$*, montrer que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que l'on a*

   $$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2.$$

   (b) *Etudier la fonction* $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$*, notamment ses variations et déterminer un point fixe de la fonnction* f.
   (c) *A l'aide de l'étude précédente, déterminer graphiquement les premières valeurs de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en vous aidant du graphique ci-dessous.*

2. On ne cherchera pas à le montrer explicitement car les variations de cette suite dépendent de la parité de l'indice n. Mais la première possibilité nous a permis de montrer que cette suite converge.



(d) *Pour tout entier naturel* $n \geq 0$, *montrer l'inégalité* $|a_{n+1} - \varphi| \leq \dfrac{4}{9}|a_n - \varphi|$.

(e) *En dédure que pour tout entier naturel* $n \geq 0$,

$$|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(f) *Que dire du comportement de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$?

2. *Soit* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $c_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* n, $c_{n+1} = \dfrac{c_n^2+1}{2c_n - 1}$. *On note* f *la fonction définie pour tout* $x \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ *par*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

(a) *Etudier les variations de* f *sur son intervalle de définition. En particulier, calculer* $f(\varphi)$ *et montrer que, pour tout nombre réel* $x > \dfrac{1}{2}$, $f(x) > \dfrac{1}{2}$.

(b) *En déduire que pour tout entier naturel* n, c_n *existe et* $c_n > \dfrac{1}{2}$, *c'est-à-dire que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*

(c) *En déduire que pour tout entier naturel* n, $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

(d) *Montrer que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

(e) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $c_{n+1} - \varphi \leq \dfrac{1}{2}(c_n - \varphi)^2$.

(f) *En déduire, pour tout entier naturel* $n \geq 0$, *l'inégalité*

$$c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

(g) *En déduire la limite de la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. (a) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout entier n, $a_n > 0$ ce que l'on peut montrer par une récurrence simple sur a_n en remarquant que $a_0 > 0$ et que $a_{n+1} > 1$ par définition.

On souhaite maintenant voir si cette suite est bornée, on va à nouveau le montrer par récurrence sur n. On a bien sûr

$$\frac{3}{2} \leq a_0 \leq 2.$$

Supposons maintenant que la relation est vraie pour un entier n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. En utilisant la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2 &\iff \frac{2}{3} \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2}, \\
&\qquad \downarrow \text{ on ajoute 1} \\
&\iff \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{a_n} \leq \frac{5}{3} \leq 2, \\
&\iff \frac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq 2.
\end{aligned}$$

La relation reste vraie au rang $n+1$ et est donc vraie pour tout entier n.

(b) La fonction f est définie et dérivable pour tout réel x non nul. Sa dérivée est $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ qui est une fonction négative pour tout x non nul et la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^\star$, donc en particulier sur $\mathbb{R}^\star_+$. Son tableau de variation est le suivant :

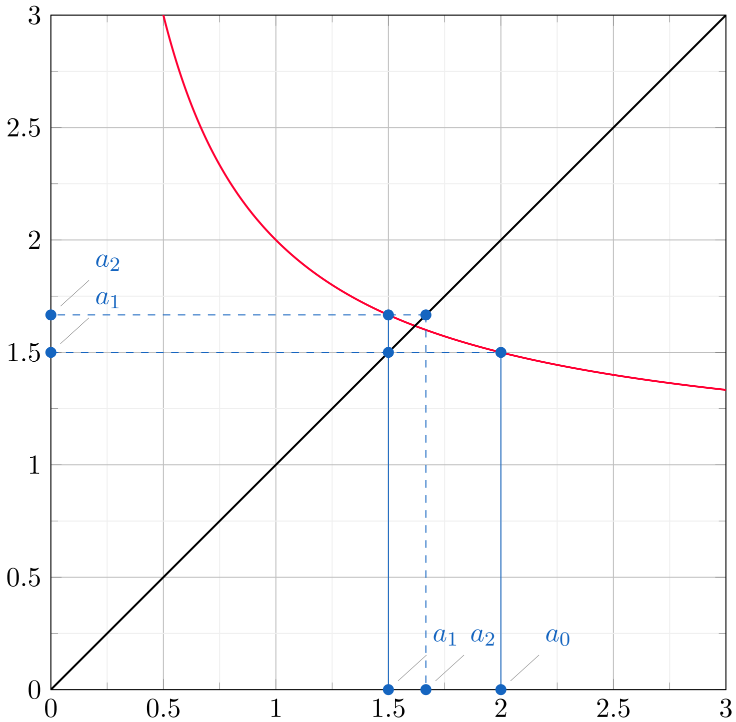
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -1$

Un point fixe de la fonction f est donnée en résolvant l'équation

$$f(x) = x \iff x = 1 + \frac{1}{x}, \iff x^2 = x + 1.$$

Nous avons déjà vu que les racines de cette équation sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Mais on s'intéresse uniquement à la racine positive ici.

(c) On se contente de représenter les premières termes de la suite, de façon graphique



(d) Pour cette question, on utilisera le fait que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - \varphi| &= \left| 1 + \frac{1}{a_n} - \varphi \right|, \\
&\downarrow \text{ en utilisant le fait que } \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= \left| 1 + \frac{1}{a_n} - 1 - \frac{1}{\varphi} \right|, \\
&= \left| \frac{\varphi - a_n}{a_n \varphi} \right|, \\
&\downarrow \text{ pour tout } n,\ a_n \geq \frac{3}{2} \text{ et } \varphi \geq \frac{3}{2} \\
&= \frac{4}{9} \left| a_n - \varphi \right|.
\end{aligned}
$$

(e) On va montrer la relation par récurrence.

- au rang $n = 0$, nous avons $|a_0 - \varphi| = \left| 2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \dfrac{1}{2}|3 - \sqrt{5}| \leq \dfrac{3}{4} \leq 1$ car $\dfrac{3}{2} \leq \sqrt{5} \leq 3$.
- soit $n \geq 0$ pour lequel la relation est vérifiée. Montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. C'est plutôt immédiat.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - \varphi| &\leq \frac{4}{9}|a_n - \varphi|, \\
&\downarrow \text{ hypothèse de récurrence} \\
&\leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n, \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

La relation reste donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, nous avons

$$|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(f) D'après la question précédente, vu $\frac{4}{9} \leq 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |\, a_n - \varphi| = 0$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ.

2. On considère $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \frac{c_n^2+1}{2c_n-1}$.

On note f la fonction définie pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

(a) La fonction f est définie et dérivable pour tout $x > \frac{1}{2}$ et sa dérivée est égale à

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2}, \\ &\downarrow \text{ on va simplifier l'expression} \\ &= \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}, \\ &= 2\frac{x^2-x-1}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur dont les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La dérivée est donc positive à l'extérieur de l'intervalle des racines et négative dans l'intervalle défini par les racines.

Remarquons également que $f(\varphi) = \varphi$ On dresse le tableau de variation suivant

$$\begin{array}{|c|c|ccccc|} \hline x & \frac{1}{2} & & \varphi & & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & & \\ \hline f & \| & +\infty & \searrow & \varphi & \nearrow & +\infty \\ \hline \end{array}$$

Le minimum est atteint en $x = \varphi$ pour lequel la fonction f est égale à $\varphi > \frac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente, nous avons montré que pour tout $x > \frac{1}{2}$, nous avons $f(x) > \frac{1}{2}$. Or $c_{n+1} = f(c_n)$ et $c_0 = 2\frac{1}{2}$. Une récurrence simple montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout entier n, $c_n > \frac{1}{2}$.

(c) On va à nouveau monter ce résultat par récurrence sur n.

- au rang $n=0$, nous avons $c_0=2,\ c_1=\dfrac{5}{3}$, donc
$$\varphi \leq c_1 \leq c_0 \leq 2.$$
- soit n un entier naturel pour lequel la relation est vraie. Montrons que cela reste vrai au rang $n+1$.
Au rang n, nous avons
$$\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2.$$
En utilisant la croissance de f sur $]\varphi,+\infty[$ nous avons
$$f(\varphi) \leq f(c_{n+1}) \leq f(c_n) \leq f(2) \iff \varphi \leq c_{n+2} \leq c_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2.$$
La propriété reste donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

(d) D'après la question précédente, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

(e) On va utiliser la définition de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
c_{n+1}-\varphi &= \frac{c_n^2+1}{2c_n-1}-\varphi,\\
&= \frac{c_n^2-2c_n\varphi+1+\varphi}{2c_n-1},\\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \varphi^2=1+\varphi\\
&= \frac{c_n^2-2c_n\varphi+\varphi^2}{2c_n-1},\\
&\quad \downarrow \text{ on reconnaît une identité remarquable}\\
&= \frac{(c_n-\varphi^2)^2}{2c_n-1},\\
&\quad \downarrow\ \varphi \leq c_n \text{ donc } 2c_n-1\geq 2, \text{ on peut minorer le dénominateur par } 2\\
&\leq \frac{1}{2}(c_n-\varphi^2)^2.
\end{aligned}$$

(f) Le plus simple reste de montrer ce résultat par récurrence sur n.

- pour $n=0$, nous avons bien $c_0-\varphi=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq\dfrac{1}{2}$.
- soit n un entier naturel pour lequel la relation est vraie et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. On repart directement de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
c_{n+1}-\varphi &\leq \frac{1}{2}(c_n-\varphi)^2,\\
&\quad \downarrow \text{ hypothèse de récurrence}\\
&\leq 2^{-1}2^{-2\sum_{k=0}^{n}2^k},\\
&\leq 2^{-1}2^{-\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}},\\
&\quad \downarrow \text{ on change les indices de la somme, en posant } k'=k+1\\
&\leq 2^{-1}2^{-\sum_{k'=1}^{n+1}2^{k'}},\\
&\leq 2^{-1-\sum_{k'=1}^{n+1}2^{k'}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } 1 = 2^0 \\ &\leq 2^{-\sum_{k'=0}^{n+1} 2^{k'}}. \end{aligned}$$

La propriété reste vraie au rang $n+1$.

On en déduit donc que pour tout entier $n \geq 0$, $c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}$.

(g) D'après la question précédente, pour tout entier n, nous avons

$$0 \leq c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

Or $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{n \to +\infty} 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k} = 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n \to +\infty} c_n - \varphi = 0 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} c_n = \varphi.$$

Exercice 1.11 (Autour de la suite de cci)**.**
On considère, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On note à nouveau φ, le nombre d'or, i.e. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|\varphi - u_n| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.*
2. *Montrer, pour tous les entiers pour lesquels cela a un sens, que $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}$.*
3. *En déduire que tous les termes imparirs de la suite de cci sont des nombres entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés de nombres entiers.*
4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ [3]. Quelle est la nature de cette suite ?*
6. *En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Correction

On considère à nouveau notre suite de cci et on continue l'étude des propriétés de cette suite à travers une suite auxiliaire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Cette identité est connue sous le nom de *Identité de Cassini*. Elle est étend d'ailleurs cette relation à tous les entiers relatifs n.

1. On va montrer le résultat par récurrence, en utilisant uniquement la définition de la suite de cci.

   - **Au rang n =1** : on a bien évidemment
   $$|u_1-\varphi| = |1-\varphi| = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi F_1}.$$
   - **Récurrence :** supposons que la relation soit vraie au rang $n \geq 1$, et montrons qu'elle reste valable au rang $n+1$, on alors
   $$|u_{n+1}-\varphi| = \left|\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}-\varphi\right| = \frac{1}{F_{n+1}}\left|F_{n+2}-\varphi F_{n+1}\right| = \frac{1}{F_{n+1}}\left|(1-\varphi)F_{n+1}+F_n\right|.$$
   Or $1-\varphi = -\dfrac{1}{\varphi}$. Donc la dernière égalité est égale à
   $$\left|-\frac{F_{n+1}}{n+1}+\frac{F_n}{F_{n+1}}\right| = \left|-\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{u_n}\right| = \frac{|u_n-\varphi|}{\varphi u_n}.$$
   Or, nous avons $|u_n-\varphi| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.
   D'où
   $$u_{n+1}-\varphi| = \frac{\dfrac{1}{\varphi^n}}{\varphi\dfrac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{1}{\varphi^{n+1}F_{n+1}}.$$

   La relation est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$
2. Le résultat se montre en effectuant une double récurrence, *i.e.* en effectuant une première récurrence sur p en **fixant** n, puis en faisant une récurrence sur n en **fixant** p.

3. De ce résultat, on peut montrer, en prenant $n = p+1$ que l'on a
   $$F_{2p+1} = F_p^2 + F_{p+1}^2.$$
   Donc que les termes impairs de la suite de cci peuvent s'écrire comme une somme de deux carrés.
4. A nouveau, on ne l'écrira pas ici, mais il s'agit de montrer le résultat par récurrence (pour se simplifier la vie).
5. On se le donne en mille ! Encore une récurrence à faire !
   Sinon, on remarque tout de suite que la suite est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme 1.
6. On arrive sur la question la plus compliquée mais ce n'est pas non plus infaisable. Il suffit de se souvenir de la façon dont est définie la tangente d'une somme de deux nombres a et b
   $$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$
   Il ne reste plus qu'à appliquer cette propriété et faire le calcul en se *souvenant* que $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.
   D'où

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)-\arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right) = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)\right)-\tan\left(\arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right)},$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \downarrow \text{ pour tout } x,\ \tan(\arctan(x)) = x\\
&= \frac{\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \dfrac{F_n}{F_{n+3}}}{1 + \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \times \dfrac{F_n}{F_{n+3}}},\\
&\quad \downarrow \text{ on réduit au même dénominateur}\\
&= \frac{F_{n+2}F_{n+3} - F_{n+1}F_n}{F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+2}F_n},\\
&\quad \downarrow \text{ définition de la suite de cci}\\
&= \frac{F_{n+2}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1})}{F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}F_n},\\
&\quad \downarrow \text{ on exploite la question 5.}\\
&= \frac{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2}{F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2} + F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}},\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Les deux nombres ont donc la même tangente, ils sont donc égaux à π près. Or $\dfrac{F_n}{F_{n+3}}$ est compris dans l'intervalle $[0,1]$, alors son arctangente est comprise dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. De la même façon, on a $\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} > 1$, donc son arctangente sera comprise entre $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, donc la différence sera strictement comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ et donc bien égale à $\dfrac{\pi}{4}$.
Qui aurait pu penser qu'en étudiant un simple modèle de reproduction des lapins, on pourrait arriver à une telle propriété !

Exercice 1.12 (Exotisme de cci)**.**
La suite de cci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

possède de nombreuses propriétés. La première propriété est de pouvoir construire un triplet Pythagoricien. Rappelez-vous, un triplet (a,b,c) d'entiers est appelé triplet pythagoricien s'il vérifie la relation

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Cela est par exemple le cas du triplet $(3,4,5)$ pour lequel nous avons

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

1. *Pour tout entier naturel n, nous définissons*

$$a = F_nF_{n+3}, \quad b = 2F_{n+2}F_{n+1} \quad \textit{et} \quad c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2.$$

Montrer que le triplet (a,b,c) forme un triplet Pythagoricien.

D'autres propriétés intéressantes portent sur la somme des termes de la suite de cci. Par exemple, il est facile d'exprimer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite de cci à partir d'un seul de ses termes.

2. *Montrer que pour tout entier n, nous avons*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

3. A l'aide de la relation précédente, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{k'} F_{n+k} = F_{n+k'+2} - F_{n-1}.$$

Enfin, une dernière propriété remarquable est le fait que la somme de dix termes consécutifs de la suite est un multiple de 11. On peut même être plus précis, en disant que cette somme est égale à 11 fois le septième terme de la somme.

3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{9} F_{n+k} = 11F_{n+6}.$$

Exercice 1.13 (Limite d'une suite)**.**
Pour tout entier $n \geq 1$, considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+\ln(1)} + \frac{1}{n+\ln(2)} + \ldots + \frac{1}{n+\ln(n)}.$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite.

Correction

La méthode classique, consiste à montrer que la suite est monotone puis bornée afin de pouvoir montrer sa convergence. Malheureusement, dans le cas présent, on pourra remarque que cette suite ne l'est pas (on peut calculer les premiers termes à l'aide d'un ordinateur.

On va donc plutôt chercher à encadrer les valeurs de cette suite par deux autres suites qui auront la même limite et conclure par Théorème des Gendarmes.

Remarquons que pour tout entier n, nous avons

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc majorée par 1. Il nous reste à montrer qu'elle est minorée par une suite qui converge vers 1 pour montrer sa convergence et en déduire sa limite. Ce que l'on montre facilement, comme suit :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(n)} = \frac{n}{n+\ln(n)} = \frac{1}{1+\dfrac{\ln(n)}{n}}.$$

Or la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1 car $\underset{n\to+\infty}{\dfrac{\ln(n)}{n}} = 0$.

On en déduit donc, par Théorème des Gendarmes, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et converge vers 1.

Exercice 1.14 (Lemme de Cesàro).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle convergente vers un réel* L*. Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *la suite définie pour tout* n *non nul par*

$$v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge vers* L [4].

Correction

On va traiter le cas $L=0$ puis L quelconque comme suggéré par l'énoncé et se servir de la définition de la convergence d'une suite.

- **Cas où** $L=0$ **:** on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe un rang N tel que pour tout $n>N$, $|u_n-L|\leq\varepsilon$.

  On applique cette définition à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ comme suit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{n}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{u_k}{n}+\sum_{k=N}^{n}\frac{u_k}{n}\right|,\\
&\downarrow \text{ inégalité triangulaire}\\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{u_k}{n}\right|+\left|\sum_{k=N}^{n}\frac{u_k}{n}\right|,\\
&\downarrow \text{ inégalité triangulaire}\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k|+\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|u_k|,\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k|+\frac{n-N+1}{n},\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|u_k|+\varepsilon
\end{aligned}$$

  Or la suite $\sum_{k=1}^{N-1}|u_k|$ est indépendant de n, il existe donc une constante N' telle que pour tout $n>N'$ on ait

$$\sum_{k=1}^{N-1}|u_k|\leq\varepsilon.$$

  En prenant $M=\max(N,N')$, on a alors, pour tout $n>M$, $|v_n|\leq 2\varepsilon$. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- **Cas où** L **est quelconque :** ce cas se traite de façon analogue en considérant la suite auxiliaire $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u'_n=u_n-L$. Le résultat précédente s'applique donc à la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u'_k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k-L}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{L}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{n}-L,$$

4. On pourra d'abord commencer par traiter le cas $L=0$

dont la limite est bien nulle. On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = L$.

Exercice 1.15 (Calculs d'équivalents)**.**
Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\underset{n\to\infty}{u_n} = 0$. Justifier les équivalences suivantes

1. $\sin(u_n) \sim u_n$.
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
3. $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$.
4. $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \frac{u_n^2}{2}$.
5. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
6. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
7. *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Correction

L'exercice nous propose de démontrer les équivalents des fonctions au voisinage de 0 en se basant sur diverses définitions.
On rappelle que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On aura notamment besoin de la définition de la dérivée de f en x suivante

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

1. On employer la définition du nombre dérivée pour faire apparaître la définition d'équivalence rappelée précédemment

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n) - \sin(0)}{u_n - 0} = \sin'(0) = 1.$$

   Donc $\sin(u_n) \sim u_n$ lors que u_n tend vers 0.
2. On pourrait être tenté de faire la même chose ici mais ... cela ne fonctionnera pas et nous n'obtiendrions qu'un équivalent à 0 ... ce qui est plus que douteux.
   On va plutôt employer les relations entre les fonctions circulaires. Plus précisément, pour tout réel a

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \iff \cos(2a) - 1 = -2\sin^2(a).$$

   En posant $a = \frac{u_n}{2}$, on a donc $\cos(u_n) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right)$.
   D'après la question précédente, lorsque u_n tend vers 0, $\sin(u_n) \sim u_n$. On a donc directement

$$\cos(u_n) - 1 \sim -2\frac{u_n^2}{4} = -\frac{u_n^2}{2}.$$

3. On emploie, à nouveau, la définition du nombre dérivée pour faire apparaître la définition de quantités équivalentes.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(u_n) - \mathrm{sh}(0)}{u_n - 0} = \mathrm{sh}'(0) = 1.$$

   Donc $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$ lors que u_n tend vers 0.

4. A nouveau une méthode analogue à celle employée avec la fonction cos. On va employer des relations liants les fonctions circulaires sh et ch. Pour tout réel a :

$$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a) = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(a) \iff \mathrm{ch}(2a) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(a).$$

En posant $a = \dfrac{u_n}{2}$, on a donc $\mathrm{ch}(u_n) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.
D'après la question précédente, lorsque u_n tend vers 0, $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$. On a donc directement

$$\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim 2\frac{u_n^2}{4} = \frac{u_n^2}{2}.$$

5. C'est à nouveau une simple application du nombre dérivée. Ici la dérivée du logarithme en 1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(1)}{u_n} = \ln'(1) = 1.$$

6. C'est à nouveau une simple application du nombre dérivée. Ici la dérivée de l'exponentielle en 0.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n} - e^0}{u_n} = e^0 = 1.$$

7. A nouveau pareil, mais cette fois-ci appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ dont la dérivée est $\alpha x^{\alpha-1}$. Plus précisément, on calculera sa dérivée en 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(1+u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(1+u_n) - f(1)}{u_n} = f'(1) = \alpha.$$

On a donc $\dfrac{f(1+u_n) - f(1)}{u_n} \underset{u_n \sim 0}{\sim} \alpha$ donc $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

2 Généralités sur les fonctions

Exercice 2.1 (Etude des fonctions circulaires)**.**
Cet exercice se propose de vous faire travailler autour des fonctions circulaires.

1. *Pour tout réel x, déterminer la valeur de* $\cos(x)^2 + \sin(x)^2$.
2. *Pour tout $x \in [-1, 1]$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\sin(\arcsin(x))$.
   (b) $\cos(\arccos(x))$.
   (c) $\sin(\arccos(x))$.
   (d) $\cos(\arcsin(x))$.
3. *Pour quelles valeurs du réel x a-t-on les égalités suivantes ?*
   (a) $\arcsin(\sin(x)) = x$.
   (b) $\arccos(\cos(x)) = x$.

Correction

On rappelle les définitions des fonctions cos et sin pour tout réel x, *i.e.* les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

1. On va se contenter de faire le calcul

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 + \sin(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2, \\ &\downarrow \text{ on développe} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right), \\ &\downarrow \text{ on simplifie} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. On étudie les liens entre les fonctions circulaires et circulaires réciproques.
   (a) La fonction arcsin est définie de $[-1, 1]$ dans $\left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$. On a donc bien $\sin(\arcsin(x)) = x$.
   (b) La fonction arccos est définie de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$. On a donc bien $\cos(\arccos(x)) = x$.
   (c) Ici on, va utiliser le fait que $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$. Ce qui permet d'écrire $\sin(t)^2 = 1 - \cos(t)^2$. En particulier lorsque $t = \arccos(x)$, nous avons

$$\sin(\arccos(x))^2 = 1 - \cos(\arccos(x))^2 = 1 - x^2 \implies \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

   (d) Comme précédemment, on peut écrire $\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2$. En particulier lorsque $t = \arcsin(x)$, nous avons

$$\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - \sin(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2 \implies \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

3. On étudie les liens entre les fonctions circulaires et circulaires réciproques.
   (a) La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. Donc la relation est vraie pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. Donc la relation est vraie pour tout $x \in [0, \pi]$.

Exercice 2.2 (Etude des fonctions hyperboliques).
Cet exercice se propose de vous faire travailler autour des fonctions hyperboliques.

1. *Pour tout réel x, déterminer la valeur de* $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2$.
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$
   (b) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$
   (b) $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))$
4. *Pour tout $x \in [1, +\infty]$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$
   (b) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$

Correction

L'exercice est analogue au précédent, on va donc être amené à employer les mêmes techniques.

1. On va se contenter de faire le calcul

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2, \\
&\downarrow \text{ on développe} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right), \\
&\downarrow \text{ on simplifie} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. On regarde le lien entre une fonction hyperbolique et sa réciproque.
   (a) La fonction sh étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il en va de même de sa fonction réciproque argsh. Donc pour tout réel x, $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$.
   (b) Ici, il est important de se rappeler que la fonction argch est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel x, $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x)) = |x|$.
3. On regarde maintenant des propriétés de la fonction réciproque argsh avec les autres fonctions hyperboliques.
   (a) Comme précédemment, pour tout réel x, $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$.
   (b) Ici, la relation n'est vraiment pas évidente, sauf si l'on parvient à faire apparaître la fonction sh pour espérer une simplification. Pour cela on va utiliser la question 1.

   D'après cette question, on a, pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t)^2 = 1 + \mathrm{sh}(t)^2$. En particulier pour $t = \mathrm{argsh}(x)$, nous avons

$$\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))^2 = 1 + \mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))^2 = 1 + x^2 \implies \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

4. On regarde maintenant des propriétés de la fonction réciproque argch avec les autres fonctions hyperboliques.

   (a) Comme précédemment, pour tout réel x, $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x)) = x$.

(b) Ici, la relation n'est vraiment pas évidente, sauf si l'on parvient à faire apparaître la fonction ch pour espérer une simplification. Pour cela on va utiliser la question 1.

D'après cette question, on a, pour tout réel t, $\mathrm{sh}(t)^2 = \mathrm{ch}(t)^2 - 1$. En particulier pour $t = \mathrm{argch}(x)$, nous avons

$$\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))^2 = 1\,\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))^2 - 1 = x^2 \implies \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Exercice 2.3 (Etude des fonctions hyperboliques)**.**
Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier la définition de la dérivée et des limites vues en cours

1. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.
2. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.
3. $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

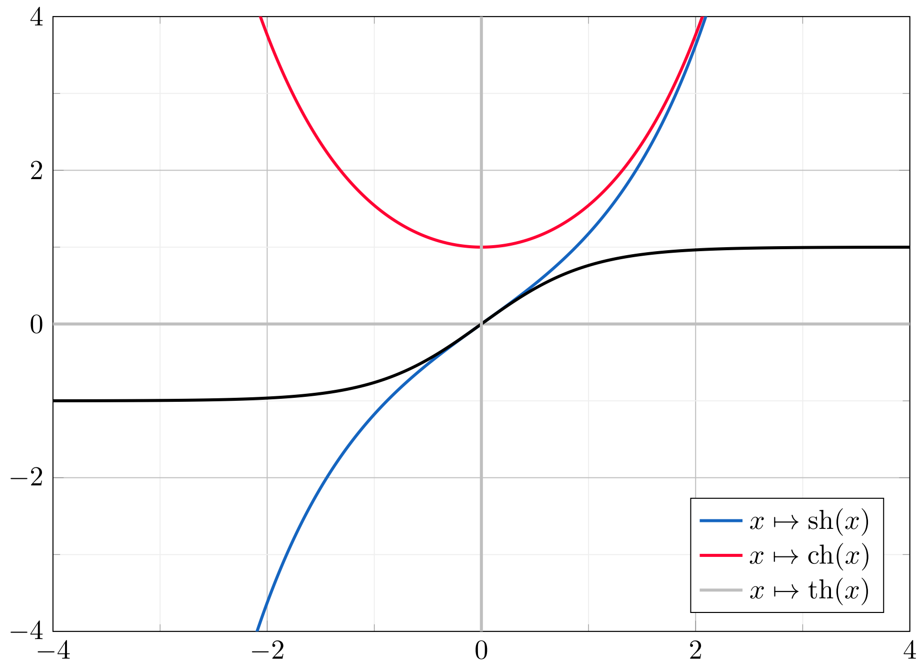
Correction

1. On rappelle que la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est définie pour tout réel x par
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$
Cette fonction est donc définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$. Elle est également de classe C^∞ comme somme de fonctions de classe C^∞.
Ainsi, pour tout réel x, la dérivée est donnée par
$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \mathrm{sh}(x).$$
La fonction ch est ainsi décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Enfin, la fonction admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On rappelle que la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est définie pour tout réel x par
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$
Cette fonction est donc définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$. Elle est également de classe C^∞ comme somme de fonctions de classe C^∞.
Ainsi, pour tout réel x, la dérivée est donnée par
$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$
La fonction sh est ainsi croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin
$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty.$$
3. La fonction th est le rapport entre la fonction ch et sh, *i.e.*
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
Or $\mathrm{ch}(x) \neq 0$ pour tout x, donc la fonction th est définie pour tout réel x à valeurs dans $]-1, 1[$, elle est également dérivable sur ce même ensemble. Pour tout réel x , nous avons
$$th'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}.$$

La fonction th est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

On rappelle les représentations graphiques de ces trois fonctions



Exercice 2.4 (Etude de la cotangente)**.**
On considère la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Cette fonction est la fonction inverse de la fonction tan *et s'appelle la cotangente, notée* cotan. *A ne pas confondre avec la réciproque de la fonction* tan *qui est l'arctangente, notée* arctan.

1. *Donner le domaine de définition de cette fonction u*
2. *Exprimer la dérivée de cette fonction.*
3. *Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son intervalle de définition.*

Correction

On se propose d'étudier l'inverse de la fonction tan dans le cadre de cet exercice.

1. La fonction cotan est définie pour tout réel x tel que $\sin(x) \neq 0$, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{pi\mathbb{Z}\}$.
2. La fonction u est également dérivable pour tout réel x qui n'est pas un multiple de π. Nous avons

$$u'(x) = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -1 - u(x)^2 = \frac{-1}{\cos(x)^2}.$$

3. On va étudier les limites de cette fonction en 0 et en π, pour en déduire les limites à chaque bornes.

- **Limite en** 0 **:** lorsque x tend vers 0, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ tend vers 1 et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ tend vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 0} u(x) = +\infty.$$

- **Limite en** π **:**
lorsque x tend vers π, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ tend vers -1 et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ tend vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 0} u(x) = -\infty.$$

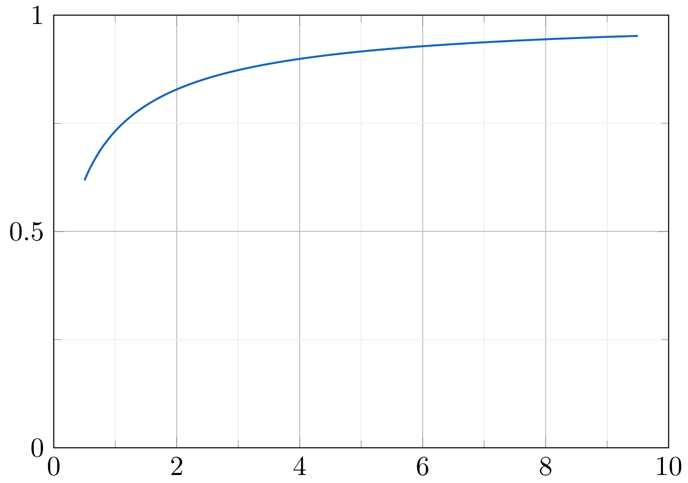
Exercice 2.5. *Déterminer les limites des fonctions suivantes*

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + x - 3}{2x^2 - 3x^3}$ *en* $+\infty$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} - x$ *en* $+\infty$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$ *en* $+\infty$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\tan(3x)}$ *en* 0.
5. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x \ln(x))}{x}$ *en* 0.
6. $f : x \mapsto \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^x$ *en* $+\infty$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$ *en* 0.
8. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2 + x - 2}$ *en* 1.
9. $f : x \mapsto \left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ *en* $+\infty$.
10. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$ *en* $+\infty$.

Correction

Toutes les limites suivantes sont des formes indéterminées, il va donc falloir raisonner sur le comportement asymptotique des différents termes pour lever cette indétermination.

1. Au voisinage de $+\infty$ le numérateur de la fonction f est équivalent à x^3 et son dénominateur est équivalent à $-3x^3$. Ainsi, la fonction f est équivalente à $\dfrac{x^3}{-3x^3} = \dfrac{-1}{3}$ au voisinage de $+\infty$ qui est aussi sa limite.
2. L'erreur à éviter est de dire que $\sqrt{x^2 + 2x}$ est équivalent à x lorsque x tend vers $+\infty$, cela signifierai que la fonction f tend vers 0, ce qui n'est pas le cas comme le montre graphique ci-dessous



Pour cela remarquons que $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, donc $\sqrt{x^2+2x} \underset{+\infty}{\sim} x+1$, donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x + 1 - x \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3. Le terme prépondérant au numérateur est e^{3x} est le terme prépondérant au dénominateur est e^x lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^x} = \lim_{+\infty} e^{2x} = +\infty.$$

4. On rappelle que lorsque x tend vers 0, $\sin(x) \underset{x\sim 0}{\sim} x$ et que $\tan(3x) \underset{x\sim 0}{\sim} 3x$. On en déduit que la limite de la fonction f en 0 est égale à $1/3$.

5. Ici, on commence à composer plusieurs fonctions ensembles ce qui peut complexifier la tâche. Il faut bien avoir à l'esprit le comportement des différentes composantes pour déterminer la limite.

   Pour cela on se rappelle que lorsque x tend vers 0, $x\ln(x)$ tend vers 0. Or $\sin(x) \underset{x\sim 0}{\sim} x$. Ainsi $\sin(x\ln(x)) \underset{x\sim 0}{\sim} x\ln(x)$ donc $f(x) \underset{x\sim 0}{\sim} \ln(x)$ dont la limite est égale à $-\infty$ lorsque x tend vers 0.

6. La difficulté ici réside dans la présence de l'exposant x dans l'expression de la fonction f. Il faut donc écrire cette fonction f avec des fonctions plus connues dont on connaît des équivalents.

$$f(x) = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}.$$

   Rappelons l'équivalent suivant de la fonction ln

$$\ln(1-x) \underset{x\sim 0}{\sim} -x.$$

   Ainsi $\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) \underset{x\sim+\infty}{\sim} -\frac{3}{x}$. Donc $x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) \underset{x\sim+\infty}{\sim} -x\frac{3}{x} = -3$. Finalement, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction f est équivalente à e^{-3} qui est donc sa limite.

7. On commence par rappeler les équivalents en 0 qui seront utiles pour résoudre cette question

$$\cos(x) \underset{x\sim 0}{\sim} 1 + \frac{x^2}{2},\ e^x \underset{x\sim 0}{\sim} 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi la fonction f, au voisinage de 0 est équivalente à, en utilisant un développement limite à l'ordre 2[5],

$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} \underset{x\sim 0}{\sim} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = 1.$$

Ainsi la limite de f en 0 est égale à 1.

8. Ici, il faut penser à faire un petit changement de variable afin de se ramener à des développements limités que l'on connaît. On va donc effectuer le changement de variable $x = 1 + y$ et cela reviendra donc à déterminer la limite de f lorsque y tend vers 0. On a

$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y^2 + 3y}.$$

Or, lorsque y tend vers 0, $\ln(1+y)$ est équivalent à y. Ainsi après simplification du quotient, on trouve que f est équivalente à 1/3 lorsque y tend vers 0, *i.e.* sa limite est égale à 1/3 lorsque x tend vers 1.

9. Il faut ici utiliser la même astuce que précédemment et composer les équivalents par la suite.

$$f(x) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

Or, lorsque $x \to +\infty$, $\operatorname{ch}(1/x) \sim 1 + \frac{1}{2x^2}$. Donc $\ln\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$. En continuant notre composition de fonction, nous avons

$$x^2 \ln\left(1 + \right)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{e}.$$

10. Pour cette dernière fonction, il faudra à nouveau factoriser l'expression sous le radical. On a $\sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}}$. Ainsi, cette fonction est équivalente à $x + \frac{3}{2}$ lorsque x tends vers $+\infty$ et la fonction f admet donc pour limite $\frac{3}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

5. Un développement limite à l'ordre 1 aurait conduit à un équivalent, au numérateur, égal 0, ce qui n'a bien évidemment pas de sens !

3 Continuité et convexité

Exercice 3.1 (Vérifier ses connaissances)**.**

1. *Soit une fonction réelle f sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'un implique l'autre ?*
   A : la restriction de f à $[0,1]$ est continue,
   B : f est continue en tout point de $[0,1]$
2. *L'image d'un intervalle ouvert par une fonction réelle continue est-elle nécessairement un intervalle ouvert ?*
3. (a) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.*
   (b) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0,1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.*
   (c) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0,1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.*
   (d) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.*
4. *Soit une fonction réelle f définie sur $[a,b]$ et croissante, alors $f([a,b])$ est :*
   (a) $[f(a), f(b)]$.
   (b) $[f(b), f(a)]$.
   (c) *On ne peut pas savoir*
5. *Soit une fonction réelle f définie, continue sur $[a,b]$ et décroissante, alors $f([a,b])$ est :*
   (a) $[f(a), f(b)]$.
   (b) $[f(b), f(a)]$.
   (c) *On ne peut pas savoir*
6. (a) *Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   A : $f > 0$,
   B : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq \alpha$.
   (b) *Même question lorsque I est un segment $[a,b]$.*
7. (a) *Soit f une fonction réelle définie sur $[0,2]$. On sait que les restrictions de f à $[0,1]$ et à $[1,2]$ sont continues. Peut-on affirmer que f est continue ?*
   (b) *Même question si les restrictions de f à $[0,1]$ et $]1,2]$ sont supposées continues.*
8. *Une application contractante est-elle nécessairement continue ?*

Correction

1. La proposition B implique la proposition A par définition. En revanche, la réciproque est fausse. En effet, si on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La restriction de f à $[0,1]$ est continue, mais elle n'est pas continue en tout point de $[0,1]$ car elle n'est pas en continue en 0. La limite à gauche à gauche de 0 n'est pas la même que la limite à droite de 0.

2. L'image d'un intervalle ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert. En effet, la fonction f définie sur $]0, 2\pi[$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est continue sur un ouvert mais $f\left(]0, 2\pi[\right) = [-1, 1]$ qui est un intervalle fermé.
3. (a) De telles fonctions n'existent pas. En effet, le théorème de Weierstrass assure que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.
   (b) Oui de telles fonctions existent. On peut considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est continue sur $]0, 1]$ et non bornée car la limite en 0 vaut $+\infty$.
   (c) Oui de telles fonctions existent. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(x) = \frac{1}{x+1},$$
   qui est continue sur $]0, 1]$. Elle est bornée par 1 mais la valeur 1 n'est jamais atteinte.
   (d) De telles fonctions n'existent pas. En effet, le théorème de Weierstrass assure que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.
4. Si f est une fonction croissante sur un intervalle, on ne peut rien dire que l'image de $[a, b]$ par f car on ne sait pas si f est continue ou non.
5. Cette fois-ci, f est continue et décroissante, on a donc
   $$f\left([a, b]\right) = \left[f(b), f(a)\right].$$
6. (a) La proposition B implique la proposition A, car s'il existe $\alpha > 0$ telle que $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in I$, a fortiori on a $f(x) > 0$. En revanche, la réciproque est fausse car la fonction $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur cet intervalle, est bien strictement positive pour tout x mais sa limite en $+\infty$ vaut 0 et cette valeur n'est jamais atteinte.
   (b) Les deux propositions sont équivalentes. En effet, la réciproque est assurée par le théorème de Weierstrass. f est strictement positive et continue sur un fermé borné, elle est atteint donc sa borne inférieure d'où l'existence de la constante $\alpha > 0$.
7. (a) Oui la fonction f est continue dans ce cas. En effet, il suffit de voir que, dans ce cas les limites de la fonction f en 1_+ et en 1_- sont égales, ce qui assure que la fonction est bien continue en 1.
   (b) Cette fois-ci, la réponse est non car la fonction f peut ne pas être continue en 1 à droite. En effet, si on considère la fonction f définie sur $[0, 2]$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in]1, 2]. \end{cases}$$
8. Oui, une application contractante est par définition lipschitzienne, elle est donc uniformément continue et donc continue.

Exercice 3.2 (Convexité)**.**
Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Monter que si g est convexe et que f est convexe et croissante, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Correction

Cet exercice consiste simplement à appliquer la définition de convexité deux fois et à utiliser l'hypothèse f est croissante. La fonction g étant convexe, pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

$$\downarrow \text{ on utilise le fait que } f \text{ est une fonction croissante}$$
$$f \circ g(tx + (1-t)y) \leq f\left(tg(x) + (1-t)g(y)\right),$$
$$\downarrow \text{ on utilise le fait que } f \text{ est une fonction convexe}$$
$$f \circ g(tx + (1-t)y) \leq tf \circ g(x) + (1-t)f \circ g(y).$$

Cette dernière inégalité montre bien que la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 3.3 (Une utilisation de la convexité).
Soit f une application deux fois dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f''(x) = -x|f(x)|$$

et

$$f(0) = 1 \textit{ et } f'(0) = 0.$$

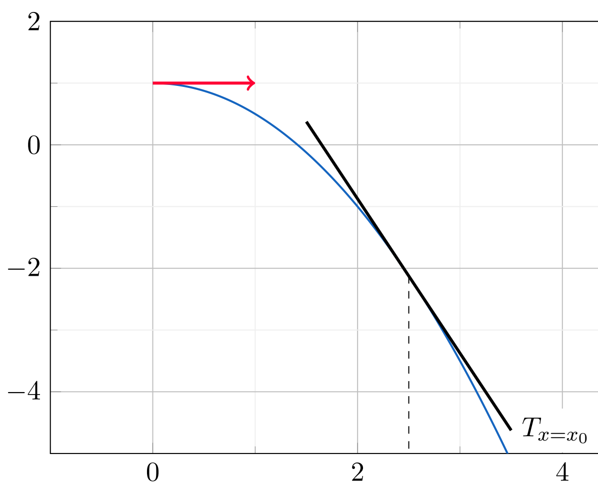
Montrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$

Correction

Il s'agit ici d'étudier la limite d'une fonction en utilisant des informations sur sa dérivée.

Etant donnée que f est deux fois dérivables et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f''(x) = -x|f(x)| \leq < 0$, on en déduit que f est une fonction concave.

On rappelle qu'une fonction est concave si et seulement si la courbe se trouve en dessous de ces tangentes. Ainsi, comme le montre le graphique ci-dessous, il nous suffit de montrer de qu'au moins une des tangentes de la courbe a une pente négative pour conclure sur la limite de f en $+\infty$.



La concavité de f assure que la fonction f' est décroissante et comme $f'(0) = 0$, on peut affirmer que $f' \leq 0$. Il nous reste à montrer que f' n'est pas toujours égale à 0.

Pour cela, remarquons que si f' était nulle, alors la fonction f serait constante et comme $f(0) = 1$, nous aurions $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Or $|f(x)| = -\dfrac{f''(x)}{x} = 0$ car f est constante. Mais cela contredit l'hypothèse selon laquelle $f(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$.

On peut donc en conclure qu'il existe un x_0 pour lequel $f'(x_0) < 0$ et la tangente en ce point a pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Or la tangente se trouve au dessus de la courbe de la fonction f. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Or $f'(x_0) < 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.